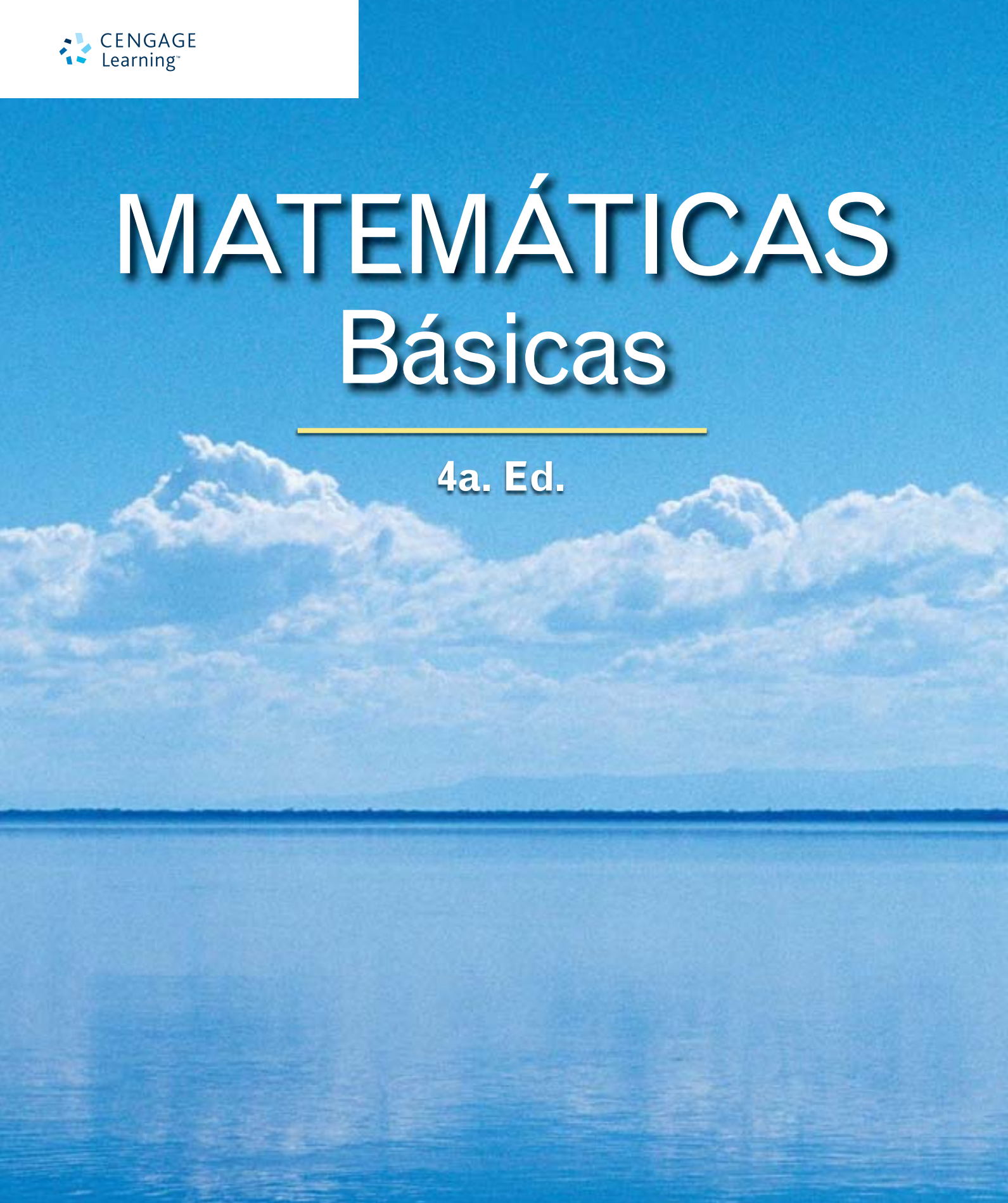
CENGAGE Learning

MATEMÁTICAS Básicas

4a. Ed.



TUSSY • GUSTAFSON • KOENIG

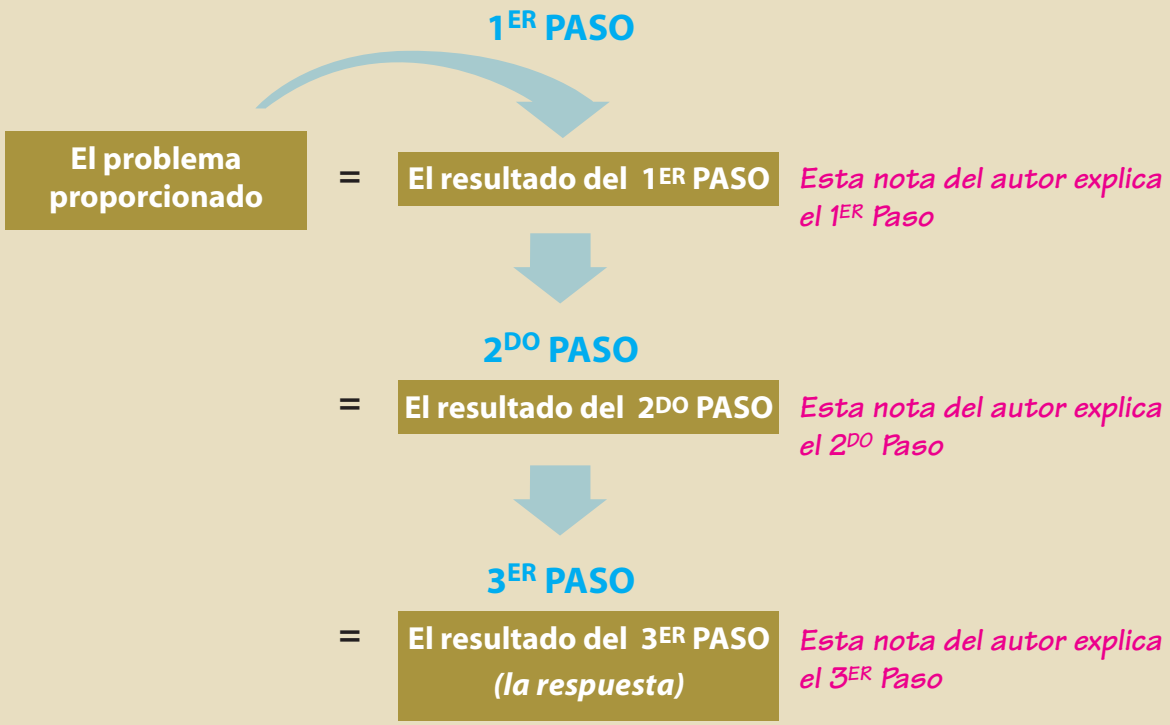
Obtenga lo más posible de cada ejemplo resuelto utilizando todas sus características

EJEMPLO 1 Aquí, se enuncia el problema proporcionado.

Estrategia Entonces, se explica lo que se realizará para resolver el problema.

POR QUÉ Después, se explica por qué se realizará de esta manera.

Solución Los pasos que siguen muestran cómo se resuelve el problema utilizando la estrategia proporcionada.



Auto-revisión 1 Un problema similar

Ahora intente Problema 45

Después de leer el ejemplo, intente el problema de Auto-revisión para probar su comprensión.
La respuesta se proporciona al final de la sección, justo antes del Espacio para el estudio.

Después de resolver la Auto-revisión, está listo para intentar un problema similar en la sección de Práctica guiada del Espacio para el estudio.

EDICIÓN
4a.

MATEMÁTICAS Básicas

ALAN S. TUSSY
CITRUS COLLEGE

R. DAVID GUSTAFSON
ROCK VALLEY COLLEGE

DIANE R. KOENIG
ROCK VALLEY COLLEGE

TRADUCCIÓN
ING. JORGE HERNÁNDEZ LANTO
TRADUCTOR PROFESIONAL

REVISIÓN TÉCNICA
DR. ERNESTO FILIO LÓPEZ
UNIDAD PROFESIONAL EN INGENIERÍA Y TECNOLOGÍAS AVANZADAS
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

CENGAGE Learning™

Australia • Brasil • Corea • España • Estados Unidos • Japón • México • Reino Unido • Singapur

MATEMÁTICAS Básicas. 4a. Ed.
Alan S. Tussy
R. David Gustafson
Diane R. Koening

Presidente de Cengage Learning Latinoamérica
Fernando Valenzuela Migoya

Director editorial de producción y de plataformas digitales para Latinoamérica
Ricardo H. Rodríguez

Gerente de procesos para Latinoamérica
Claudia Islas Licona

Gerente de manufactura para Latinoamérica
Raúl D. Zendejas Espejel

Gerente editorial de contenidos en español
Pilar Hernández Santamaria

Gerente de Proyectos especiales
Luciana Rabuffetti

Editores
Sergio Cervantes González
Gloria Luz Olguín Sarmiento

Diseño de portada
Terri Wrigth

Imagen de la portada
Background
© Jason Edwards/
Getty Images RF, Botón
© Art Parts/Fotosearch RF

Composición tipográfica
Heriberto Gachuz Chavez

© D.R. 2013 por Cengage Learning Editores, S.A. de C.V., una Compañía de Cengage Learning, Inc.
Corporativo Santa Fe
Av. Santa Fe, núm. 505, piso 12
Col. Cruz Manca, Santa Fe
C.P. 05349, México, D.F.
Cengage Learning® es una marca registrada usada bajo permiso.

DERECHOS RESERVADOS. Ninguna parte de este trabajo amparado por la Ley Federal del Derecho de Autor, podrá ser reproducida, transmitida, almacenada o utilizada en cualquier forma o por cualquier medio, ya sea gráfico, electrónico o mecánico, incluyendo, pero sin limitarse a lo siguiente: fotocopiado, reproducción, escaneo, digitalización, grabaciónen audio, distribución en Internet, distribución en redes de información o almacenamiento y recopilación en sistemas de información a excepción de lo permitido en el Capítulo III, Artículo 27 de la Ley Federal del Derecho de Autor, sin el consentimiento por escrito de la Editorial.

Traducido del libro
Basic Mathematics for College Students
Fourth Edition
Alan S. Tussy,
R. David Gustafson
Diane R. Koenig
Publicado en inglés por Brooks/Cole, una compañía Cengage Learning © 2011
ISBN 13: 978-1439044421

Datos para catalogación bibliográfica:
Matemáticas básicas. 4. Ed.
Tussy, Alan S., R. David Gustafson, Diane R. Koenig
ISBN 13: 978-607-481-920-5

Visite nuestro sitio en:
http://latinoamerica.cengage.com

Impreso en México
1 2 3 4 5 6 7 15 14 13 12

A mi amada esposa, Liz,
gracias por tu comprensión y aliento
ALAN S. TUSSY

A mis nietos:
Daniel, Tyler, Spencer, Skyler, Garrett y Jake Gustafson
R. DAVID GUSTAFSON

A mi esposo y mi mejor amigo, Brian Koenig
DIANE R. KOENIG

CONTENIDO

Taller de habilidades de estudio S-1

CAPÍTULO 1

Números naturales 1

Comstock Images/Getty Images

1.1 Introducción a los números naturales 2

PIENSE DETENIDAMENTE *Estudiante de reingreso* *9*

1.2 Suma de números naturales 15

1.3 Resta de números naturales 29

1.4 Multiplicación de números naturales 40

1.5 División de números naturales 54

1.6 Resolución de problemas 68

1.7 Factores primos y exponentes 80

1.8 Mínimo común múltiplo y máximo factor común 89

1.9 Orden de las operaciones 101

PIENSE DETENIDAMENTE *La educación reditúa* *108*

Resumen y repaso 113

Examen 128

CAPÍTULO 2

Enteros 131

© OJO Images Ltd/Alamy

2.1 Introducción a los enteros 132

PIENSE DETENIDAMENTE *Deuda de tarjeta de crédito* *135*

2.2 Suma de enteros 144

PIENSE DETENIDAMENTE *Flujo de caja* *148*

2.3 Resta de enteros 156

2.4 Multiplicación de enteros 165

2.5 División de enteros 175

2.6 Orden de las operaciones y estimación 183

Resumen y repaso 192

Examen 201

Repaso acumulativo 203

CAPÍTULO 3

Fracciones y números mixtos 207

iStockphoto.com/Monkeybusinessimages

3.1 Introducción a las fracciones 208
3.2 Multiplicación de fracciones 221
3.3 División de fracciones 233
3.4 Suma y resta de fracciones 242
PIENSE DETENIDAMENTE *Presupuestos 251*
3.5 Multiplicación y división de números mixtos 257
3.6 Suma y resta de números mixtos 271
PIENSE DETENIDAMENTE *278*
3.7 Orden de las operaciones y fracciones complejas 284
Resumen y repaso 296
Examen 311
Repaso acumulativo 313

CAPÍTULO 4

Decimales 315

Tetra Images/Getty Images

4.1 Introducción a los decimales 316
4.2 Suma y resta de decimales 330
4.3 Multiplicación de decimales 344
PIENSE DETENIDAMENTE *Horas extra 346*
4.4 División de decimales 358
PIENSE DETENIDAMENTE *PC 368*
4.5 Fracciones y decimales 372
4.6 Raíces cuadradas 386
Resumen y repaso 395
Examen 408
Repaso acumulativo 410

CAPÍTULO 5

Razón, proporción y medición 413

Nick White/Getty Images

5.1 Razones 414

PIENSE DETENIDAMENTE *Razón estudiante a instructor 417*

5.2 Proporciones 428

5.3 Unidades de medición estadounidenses 443

5.4 Unidades métricas de medición 456

5.5 Conversión entre unidades estadounidenses y métricas 470

PIENSE DETENIDAMENTE *Estudiar en otros países 473*

Resumen y repaso 479

Examen 494

Repaso acumulativo 496

CAPÍTULO 6

Porcentaje 499

Ariel Skelley/Getty Images

6.1 Porcentajes, decimales y fracciones 500

6.2 Resolución de problemas de porcentaje utilizando ecuaciones y proporciones de porcentajes 513

PIENSE DETENIDAMENTE *Estudiantes en colegios comunitarios 529*

6.3 Aplicaciones del porcentaje 535

PIENSE DETENIDAMENTE *Estudiar matemáticas 543*

6.4 Estimación con porcentajes 552

6.5 Interés 559

Resumen y repaso 570

Examen 588

Repaso acumulativo 591

CAPÍTULO 7

Gráficas y estadística 593

Kim Steele/Photodisc/Getty Images

7.1 Lectura de gráficas y tablas 594

7.2 Media, mediana y moda 609

PIENSE DETENIDAMENTE *El valor de una educación* *616*

Resumen y repaso 621

Examen 630

Repaso acumulativo 633

CAPÍTULO 8

Introducción al álgebra 637

© iStockphoto.com/Dejan Ljamić

8.1 El lenguaje del álgebra 638

8.2 Simplificación de expresiones algebraicas 648

8.3 Resolución de ecuaciones utilizando las propiedades de igualdad 658

8.4 Más acerca de la resolución de ecuaciones 668

8.5 Uso de ecuaciones para resolver problemas de aplicación 675

8.6 Reglas de la multiplicación para exponentes 688

Resumen y repaso 696

Examen 706

Repaso acumulativo 708

CAPÍTULO 9

Introducción a la geometría 711

9.1 Figuras geométricas básicas; ángulos 712
9.2 Líneas paralelas y perpendiculares 725
9.3 Triángulos 736
9.4 Teorema de Pitágoras 747
9.5 Triángulos congruentes y triángulos semejantes 754
9.6 Cuadriláteros y otros polígonos 767
9.7 Perímetros y áreas de polígonos 777
PIENSE DETENIDAMENTE *Residencia estudiantil* *782*
9.8 Círculos 792
9.9 Volumen 801
Resumen y repaso 811
Examen 834
Repaso acumulativo 838

© iStockphoto/Lukaz Laska

APÉNDICES

Apéndice I Ejercicios de suma y multiplicación A-1
Apéndice II Polinomios A-5
Apéndice III Razonamiento inductivo y deductivo A-23
Apéndice IV Raíces y potencias A-31
Apéndice V Respuestas a los ejercicios seleccionados A-33
Índice I-1

PREFACIO

Matemáticas básicas, Cuarta Edición, es más que una simple actualización de la tercera edición. Se han realizado cambios sustanciales a la estructura de los ejemplos resueltos, a los *Espacios para el estudio* y a la pedagogía. A lo largo del proceso de revisión, nuestro objetivo ha sido facilitar los retos de la enseñanza y cumplir con las necesidades educativas de los estudiantes.

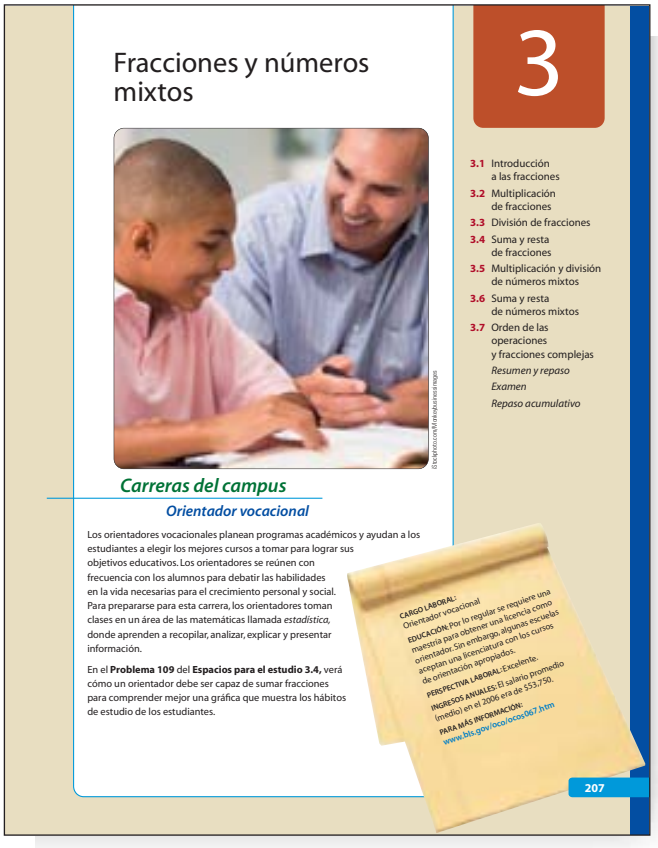
Las matemáticas, para muchos estudiantes de las matemáticas del desarrollo actual, son como una lengua extranjera. Tienen dificultad en traducir las palabras, en sus significados y en cómo aplicarlos a la resolución de problemas. Con estas necesidades en mente (y como sugerencia de la investigación educativa), nuestro objetivo fundamental es tener estudiantes que escriban, piensen y hablen utilizando el *lenguaje de las matemáticas.* Los métodos instructivos que incluyen vocabulario, práctica y pedagogía bien definida, junto con un énfasis en el razonamiento, modelado, comunicación y habilidades tecnológicas se han combinado para lograr esta necesidad.

La pregunta más común que realizan los estudiantes a medida que observan a sus profesores resolver problemas y a medida que leen el libro de texto es … *¿Por qué?* La nueva cuarta edición responde esta pregunta de manera única. La experiencia nos enseña que no es suficiente conocer *cómo* se resuelve un problema. Los estudiantes obtienen una mejor comprensión de los conceptos algebraicos si conocen *por qué* se toma un método particular. Esta verdad educativa fue la motivación para la adición de una **Estrategia** y la explicación del **Por qué** a la solución de cada ejemplo resuelto. La cuarta edición provee, en una base consistente, una respuesta concisa a esa pregunta crucial: *¿Por qué?*

Estas son sólo dos de las varias razones por las que confiamos que esta revisión hará de este curso una mejor experiencia para profesores y estudiantes.

NUEVO EN ESTA EDICIÓN

- **Nuevas aperturas de capítulos**
- **Nueva estructura para los ejemplos resueltos**
- **Nuevas notas del cálculo en los ejemplos**
- **Nueva estrategia para la resolución de problemas de cinco pasos**
- **Nuevo módulo de Taller de desarrollo de habilidades**
- **Nuevos recuadros de Lenguaje del álgebra, Consejo útil y Cuidado**
- **Nuevos Objetivos de los capítulos**
- **Nuevas secciones de Práctica guiada e Inténtelo en los Espacios para el estudio**
- **Nuevo Resumen y repaso del capítulo**
- **Nuevas Listas de comprobación de las habilidades de estudio**



Aperturas de capítulo que responden a la pregunta: ¿Cuándo utilizaré esto?

Los estudiantes les hacen a los profesores esta pregunta una y otra vez. En respuesta, se han escrito las aperturas de capítulos llamadas *Carreras del campus.* Esta característica presenta las vocaciones que requieren varias habilidades algebraicas. Diseñadas para inspirar la exploración de las carreras, cada una incluye una perspectiva laboral, requerimientos educacionales e información sobre los ingresos anuales. Las carreras presentadas en las aperturas están unidas a un ejercicio encontrado posteriormente en los *Espacios para el estudio.*

Ejemplos que les indican a los estudiantes no sólo el cómo, también el por qué

¿Por qué? Esta pregunta es realizada con frecuencia por los estudiantes a medida que ven a sus profesores resolver problemas en clase y a medida que resuelven problemas en casa. No es suficiente conocer *cómo* se resuelve un problema. Los estudiantes obtienen una mejor comprensión de los conceptos algebraicos si conocen *por qué* se toma un método particular. Esta verdad educativa fue la motivación para la adición de una *Estrategia* y la explicación del *Por qué* a la solución de cada ejemplo resuelto.

EJEMPLO 12 Evalúe: $\left(\frac{4}{5}\right)(1.35) + (0.5)^2$

Estrategia Se encontrará el equivalente decimal de $\frac{4}{5}$ y después se evaluará la expresión en términos de decimales.

POR QUÉ Es más sencillo desarrollar la multiplicación y la suma con los decimales proporcionados que lo que sería si se convirtieran a fracciones.

Solución Se utiliza una división para encontrar el equivalente decimal de $\frac{4}{5}$.

$$\begin{array}{r} 0.8 \\ 5\overline{)4.0} \\ -4\,0 \\ \hline 0 \end{array}$$

Escriba un punto decimal y un cero adicional a la derecha del 4.

Ahora utilice la regla del orden de las operaciones para evaluar la expresión.

$\left(\frac{4}{5}\right)(1.35) + (0.5)^2$

$= (\mathbf{0.8})(1.35) + (0.5)^2$ — *Reemplace $\frac{4}{5}$ con su equivalente decimal, 0.8.*

$= (0.8)(1.35) + 0.25$ — *Evalúe: $(0.5)^2 = 0.25$.*

$= 1.08 + 0.25$ — *Realice la multiplicación: $(0.8)(1.35) = 1.08$.*

$= 1.33$ — *Realice la suma.*

$$\begin{array}{r} \overset{2}{0}.5 \\ \times\ 0.5 \\ \hline 0.25 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \overset{2}{1}.\overset{4}{3}5 \\ \times\ 0.8 \\ \hline 1.080 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \overset{1}{1}.08 \\ +0.25 \\ \hline 1.33 \end{array}$$

Auto-revisión 12
Evalúe: $(-0.6)^2 + (2.3)\left(\frac{1}{8}\right)$

Ahora intente **Problema 99**

Ejemplos que muestran los cálculos tras bambalinas

Algunos pasos de las soluciones en los ejemplos resueltos en *Matemáticas básicas* involucran cálculos aritméticos que son demasiado complicados como para desarrollarse de manera mental. En estos ejemplos, se han mostrado los cálculos reales que deben realizarse para completar la solución formal. Estos cálculos aparecen directamente a la derecha de las notas del autor y se separan de ellas por medio de una línea delgada y gris. La suma, resta, multiplicación o división necesarias (por lo regular realizadas en papel borrador), se coloca en la etapa apropiada de la solución donde se requiere ese cálculo. En vez de simplemente listar los pasos de una solución de manera horizontal, sin hacer mención de cómo se obtienen los valores numéricos dentro de la solución, esta característica única ayudará a responder la pregunta escuchada con frecuencia de un estudiante con dificultades, "¿Cómo obtuvo esa respuesta?" También sirve como un modelo para los cálculos que los estudiantes deben desarrollar de manera independiente para resolver los problemas en los Espacios para el estudio.

Ejemplos que ofrecen retroalimentación inmediata

Cada ejemplo resuelto incluye una *Autorevisión.* Estos pueden ser completados por los estudiantes por su propia cuenta o como ejemplos que el salón de clases, que es como Alan Tussy los utiliza. Alan les pide a algunos estudiantes seleccionados que lean en voz alta los problemas de *Auto-revisión* a medida que escribe lo que el estudiante dice en el pizarrón. Los demás estudiantes, con sus libros abiertos en esa página, pueden copiar rápidamente el problema de *Auto-revisión* en sus apuntes. Esto agiliza el proceso de toma de apuntes y motiva que los estudiantes participen en clase. También le enseña a los estudiantes cómo leer símbolos matemáticos. Cada respuesta a las *Auto-revisiones* está impresa al lado del problema correspondiente en la *Edición Anotada del Profesor* (en inglés) para una fácil referencia. Las soluciones para las *Auto-revisiones* pueden encontrarse al final de cada sección en la edición del estudiante antes de cada *Espacio para el estudio.*

Ejemplos que les piden a los estudiantes que trabajen de manera independiente

Cada ejemplo resuelto termina con un problema de *Ahora intente*. Este es el paso final en el proceso de aprendizaje. Cada uno está vinculado a un problema similar encontrado dentro de la sección de *Práctica guiada* de los *Espacio para el estudio.*

EJEMPLO 11 ***Repostería*** ¿Cuánta mantequilla queda en un tubo de 10 libras si se utilizaron $2\frac{2}{3}$ libras para un pastel de boda?

Copyright de la imagen Eric Limon, 2009. Utilizada bajo licencia de Shutterstock.com

Analizar

- El tubo contenía 10 libras de mantequilla.
- Se utilizaron $2\frac{2}{3}$ libras de mantequilla para un pastel.
- ¿Cuánta mantequilla queda en el tubo?

Formar La frase clave *cuánta mantequilla queda* indica una resta.
Se traducen las palabras del problema a números y símbolos.

La cantidad de mantequilla que queda en el tubo	es igual a	la cantidad de mantequilla en un tubo	menos	la cantidad de mantequilla utilizada en el pastel
La cantidad de mantequilla que queda en el tubo	=	10	−	$2\frac{2}{3}$

Resolver Para encontrar la diferencia, se escribirán los números en forma vertical y se realizará un acarreo negativo de 1 (en la forma de $\frac{3}{3}$) del 10.

En la columna de las fracciones, se necesita tener una fracción a partir de la cual restar $\frac{2}{3}$.
Reste las fracciones por separado.
Reste los números naturales por separado.

$$\begin{array}{r} 10 \\ -\ 2\frac{2}{3} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{r} \overset{9}{\cancel{10}}\frac{3}{3} \\ -\ 2\frac{2}{3} \\ \hline \frac{1}{3} \end{array} = \begin{array}{r} \overset{9}{\cancel{10}}\frac{3}{3} \\ -\ 2\frac{2}{3} \\ \hline 7\frac{1}{3} \end{array}$$

Enunciar Quedan $7\frac{1}{3}$ libras de mantequilla en el tubo.

Comprobar Se puede comprobar utilizando una suma. Si se utilizaron $2\frac{2}{3}$ libras de mantequilla y quedan $7\frac{1}{3}$ libras de mantequilla en el tubo, entonces el tubo contenía originalmente $2\frac{2}{3} + 7\frac{1}{3} = 9\frac{3}{3} = 10$ libras de mantequilla. El resultado es correcto.

Auto-revisión 11
TRANSPORTE El barril de mezcla de un camión de cemento contiene 9 yardas cúbicas de concreto. ¿Cuánto concreto queda si ya se han descargado $6\frac{3}{4}$ yardas cúbicas?

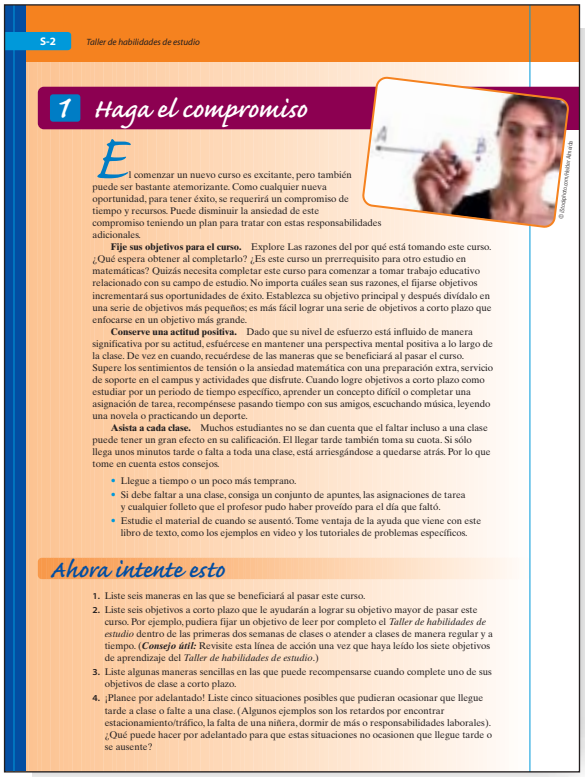
Ahora intente **Problema 95**

Énfasis en la resolución de problemas

Nueva para *Matemáticas básicas,* la estrategia para la resolución de problemas de cinco pasos guía a los estudiantes a lo largo de los ejemplos resueltos aplicados utilizando el proceso de Analizar, Formar, Resolver, Enunciar y Comprobar. Este método clarifica el proceso de pensamiento y las habilidades matemáticas para resolver una amplia variedad de problemas. Como resultado, aumenta la confianza de los estudiantes y se fortalecen sus habilidades para la resolución de problemas.

Estrategia para la resolución de problemas

1. **Analizar el problema** leyendo con cuidado. ¿Qué información se proporciona? ¿Qué se le pide que encuentre? ¿Qué vocabulario se proporciona? Con frecuencia, un diagrama o una tabla le ayudará a visualizar los hechos del problema.
2. **Formar un plan** traduciendo las palabras del problema a números y símbolos.
3. **Resolver el problema** desarrollando los cálculos.
4. **Enunciar la conclusión** de manera clara. Asegúrese de incluir las unidades (como pies, segundos o libras) en su respuesta.
5. **Comprobar el resultado.** Con frecuencia es de utilidad un estimado para ver si una respuesta es razonable.


S-2 Taller de habilidades de estudio

1 Haga el compromiso

Al comenzar un nuevo curso es excitante, pero también puede ser bastante atemorizante. Como cualquier nueva oportunidad, para tener éxito, se requerirá un compromiso de tiempo y recursos. Puede disminuir la ansiedad de este compromiso teniendo un plan para tratar con estas responsabilidades adicionales.

Fije sus objetivos para el curso. Explore Las razones del por qué está tomando este curso. ¿Qué espera obtener al completarlo? ¿Es este curso un prerrequisito para otro estudio en matemáticas? Quizás necesita completar este curso para comenzar a tomar trabajo educativo relacionado con su campo de estudio. No importa cuáles sean sus razones, el fijarse objetivos incrementará sus oportunidades de éxito. Establezca su objetivo principal y después divídalo en una serie de objetivos más pequeños; es más fácil lograr una serie de objetivos a corto plazo que enfocarse en un objetivo más grande.

Conserve una actitud positiva. Dado que su nivel de esfuerzo está influido de manera significativa por su actitud, esfuércese en mantener una perspectiva mental positiva a lo largo de la clase. De vez en cuando, recuérdese de las maneras que se beneficiará al pasar el curso. Supere los sentimientos de tensión o la ansiedad matemática con una preparación extra, servicio de soporte en el campus y actividades que disfrute. Cuando logre objetivos a corto plazo como estudiar por un periodo de tiempo específico, aprender un concepto difícil o completar una asignación de tarea, recompénsese pasando tiempo con sus amigos, escuchando música, leyendo una novela o practicando un deporte.

Asista a cada clase. Muchos estudiantes no se dan cuenta que el faltar incluso a una clase puede tener un gran efecto en su calificación. El llegar tarde también toma su cuota. Si sólo llega unos minutos tarde o falta a toda una clase, está arriesgándose a quedarse atrás. Por lo que tome en cuenta estos consejos.

- Llegue a tiempo o un poco más temprano.
- Si debe faltar a una clase, consiga un conjunto de apuntes, las asignaciones de tarea y cualquier folleto que el profesor pudo haber proveído para el día que faltó.
- Estudie el material de cuando se ausentó. Tome ventaja de la ayuda que viene con este libro de texto, como los ejemplos en video y los tutoriales de problemas específicos.

Ahora intente esto

1. Liste seis maneras en las que se beneficiará al pasar este curso.
2. Liste seis objetivos a corto plazo que le ayudarán a lograr su objetivo mayor de pasar este curso. Por ejemplo, pudiera fijar un objetivo de leer por completo el *Taller de habilidades de estudio* dentro de las primeras dos semanas de clases o atender a clases de manera regular y a tiempo. (***Consejo útil:*** Revisite esta línea de acción una vez que haya leído los siete objetivos de aprendizaje del *Taller de habilidades de estudio*.)
3. Liste algunas maneras sencillas en las que puede recompensarse cuando complete uno de sus objetivos de clase a corto plazo.
4. ¡Planee por adelantado! Liste cinco situaciones posibles que pudieran ocasionar que llegue tarde a clase o falte a una clase. (Algunos ejemplos son los retardos por encontrar estacionamiento/tráfico, la falta de una niñera, dormir de más o responsabilidades laborales). ¿Qué puede hacer por adelantado para que estas situaciones no ocasionen que llegue tarde o se ausente?

Énfasis en las habilidades de estudio

Matemáticas básicas comienza con un módulo de *Taller de habilidades de estudio*. En vez de sugerencias sencillas y sin relación impresas en los márgenes, este módulo contiene explicaciones de una página de los temas de las habilidades de estudio seguidas por una sección *Ahora intente esto* que ofrece a los estudiantes habilidades procesables, asignaciones y proyectos que impactarán sus hábitos de estudio a lo largo del curso.

El lenguaje de las matemáticas La palabra *fracción* proviene del latín *fractio*, que significa romper en pieza s".

Enfoque integrado en el lenguaje de las matemáticas

Los recuadros *Lenguaje de las matemáticas* establecen conexiones entre términos matemáticos y referencias cotidianas para reforzar el enfoque del lenguaje de las matemáticas que aparece a lo largo del texto.

Guía cuando los estudiantes lo necesitan más

Apareciendo en los momentos de enseñanza clave, los recuadros de *Consejos útiles* y ¡*Cuidado*! mejoran las habilidades para la resolución de problemas de los estudiantes, advirtiéndoles de errores potenciales y aumentando la claridad.

Consejo útil En el ejemplo del diario, se encontró una *parte de una parte* de una página. La multiplicación de fracciones propias puede pensarse de esta manera. Cuando se toma una *parte de una parte* de algo, el resultado siempre es menor que la parte original con la que se comienza.

¡Cuidado! En el Ejemplo 5 fue de mucha utilidad realizar la factorización de primos y la simplificación cuando se hizo (el tercer paso de la solución). Si, en vez de esto, encuentra el producto de los numeradores y el producto de los denominadores, la fracción resultante es difícil de simplificar debido a que el numerador, 126, y el denominador, 420, son grandes.

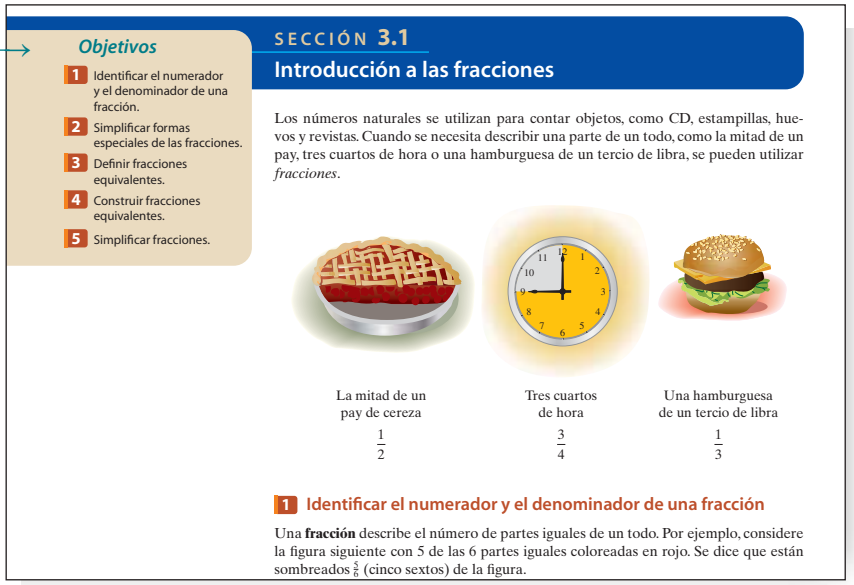
$$\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{14}\cdot\frac{7}{10} = \frac{2\cdot 9\cdot 7}{3\cdot 14\cdot 10} = \frac{126}{420}$$

Factorice y simplifique en esta etapa, antes de la multiplicación en el numerador y el denominador.

No multiplique en el numerador y el denominador y después trate de simplificar el resultado. Obtendrá la misma respuesta, pero requerirá mucho más trabajo

Objetivos útiles que ayudan a los estudiantes a enfocarse

Cada sección comienza con un conjunto de *Objetivos* numerados que enfocan la atención de los estudiantes en las habilidades que aprenderán. A medida que se explica en la sección cada objetivo, la reaparición del número y el título le recuerda al lector el objetivo en cuestión.



Objetivos

1. Identificar el numerador y el denominador de una fracción.
2. Simplificar formas especiales de las fracciones.
3. Definir fracciones equivalentes.
4. Construir fracciones equivalentes.
5. Simplificar fracciones.

SECCIÓN 3.1

Introducción a las fracciones

Los números naturales se utilizan para contar objetos, como CD, estampillas, huevos y revistas. Cuando se necesita describir una parte de un todo, como la mitad de un pay, tres cuartos de hora o una hamburguesa de un tercio de libra, se pueden utilizar *fracciones*.

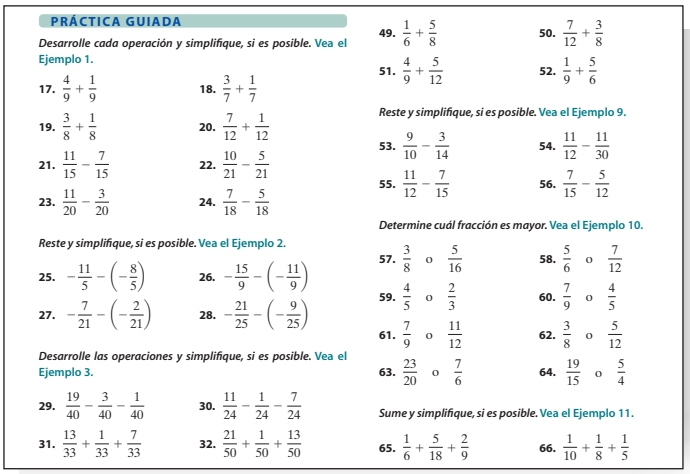
La mitad de un pay de cereza — $\frac{1}{2}$

Tres cuartos de hora — $\frac{3}{4}$

Una hamburguesa de un tercio de libra — $\frac{1}{3}$

1 Identificar el numerador y el denominador de una fracción

Una **fracción** describe el número de partes iguales de un todo. Por ejemplo, considere la figura siguiente con 5 de las 6 partes iguales coloreadas en rojo. Se dice que están sombreados $\frac{5}{6}$ (cinco sextos) de la figura.



PRÁCTICA GUIADA

Desarrolle cada operación y simplifique, si es posible. Vea el Ejemplo 1.

17. $\frac{4}{9}+\frac{1}{9}$
18. $\frac{3}{7}+\frac{1}{7}$
19. $\frac{3}{8}+\frac{1}{8}$
20. $\frac{7}{12}+\frac{1}{12}$
21. $\frac{11}{15}-\frac{7}{15}$
22. $\frac{10}{21}-\frac{5}{21}$
23. $\frac{11}{20}-\frac{3}{20}$
24. $\frac{7}{18}-\frac{5}{18}$

Reste y simplifique, si es posible. Vea el Ejemplo 2.

25. $-\frac{11}{5}-\left(-\frac{8}{5}\right)$
26. $-\frac{15}{9}-\left(-\frac{11}{9}\right)$
27. $-\frac{7}{21}-\left(-\frac{2}{21}\right)$
28. $-\frac{21}{25}-\left(-\frac{9}{25}\right)$

Desarrolle las operaciones y simplifique, si es posible. Vea el Ejemplo 3.

29. $\frac{19}{40}-\frac{3}{40}-\frac{1}{40}$
30. $\frac{11}{24}-\frac{1}{24}-\frac{7}{24}$
31. $\frac{13}{33}+\frac{1}{33}+\frac{7}{33}$
32. $\frac{21}{50}+\frac{1}{50}+\frac{13}{50}$
49. $\frac{1}{6}+\frac{5}{8}$
50. $\frac{7}{12}+\frac{3}{8}$
51. $\frac{4}{9}+\frac{5}{12}$
52. $\frac{1}{9}+\frac{5}{6}$

Reste y simplifique, si es posible. Vea el Ejemplo 9.

53. $\frac{9}{10}-\frac{3}{14}$
54. $\frac{11}{12}-\frac{11}{30}$
55. $\frac{11}{12}-\frac{7}{15}$
56. $\frac{7}{15}-\frac{5}{12}$

Determine cuál fracción es mayor. Vea el Ejemplo 10.

57. $\frac{3}{8}$ o $\frac{5}{16}$
58. $\frac{5}{6}$ o $\frac{7}{12}$
59. $\frac{4}{5}$ o $\frac{2}{3}$
60. $\frac{7}{9}$ o $\frac{4}{5}$
61. $\frac{7}{9}$ o $\frac{11}{12}$
62. $\frac{3}{8}$ o $\frac{5}{12}$
63. $\frac{23}{20}$ o $\frac{7}{6}$
64. $\frac{19}{15}$ o $\frac{5}{4}$

Sume y simplifique, si es posible. Vea el Ejemplo 11.

65. $\frac{1}{6}+\frac{5}{18}+\frac{2}{9}$
66. $\frac{1}{10}+\frac{1}{8}+\frac{1}{5}$

Espacio para el estudio totalmente revisados

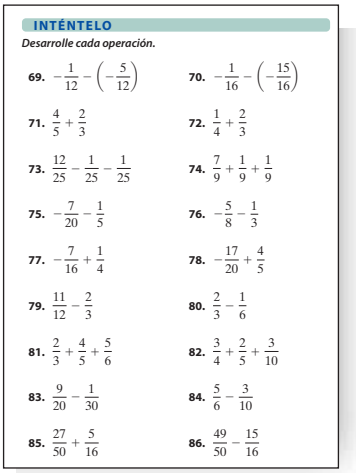
Los *Espacio para el estudio* han sido completamente revisados para asegurar que cada tipo de ejemplo cubierto en la sección esté representado en los problemas de *Práctica guiada*. Se ha prestado atención particular en el desarrollo de un nivel de progresión gradual dentro de los tipos de problema.

Problemas de Práctica guiada

Todos los problemas en la parte de *Práctica guiada* de los *Espacios para el estudio* están vinculados con un ejemplo resuelto o un objetivo asociado de esa sección. Esta característica promueve el éxito de los estudiantes refiriéndolos a los ejemplos resueltos y objetivos apropiados si encuentran dificultades al resolver los problemas de tarea.

Inténtelo

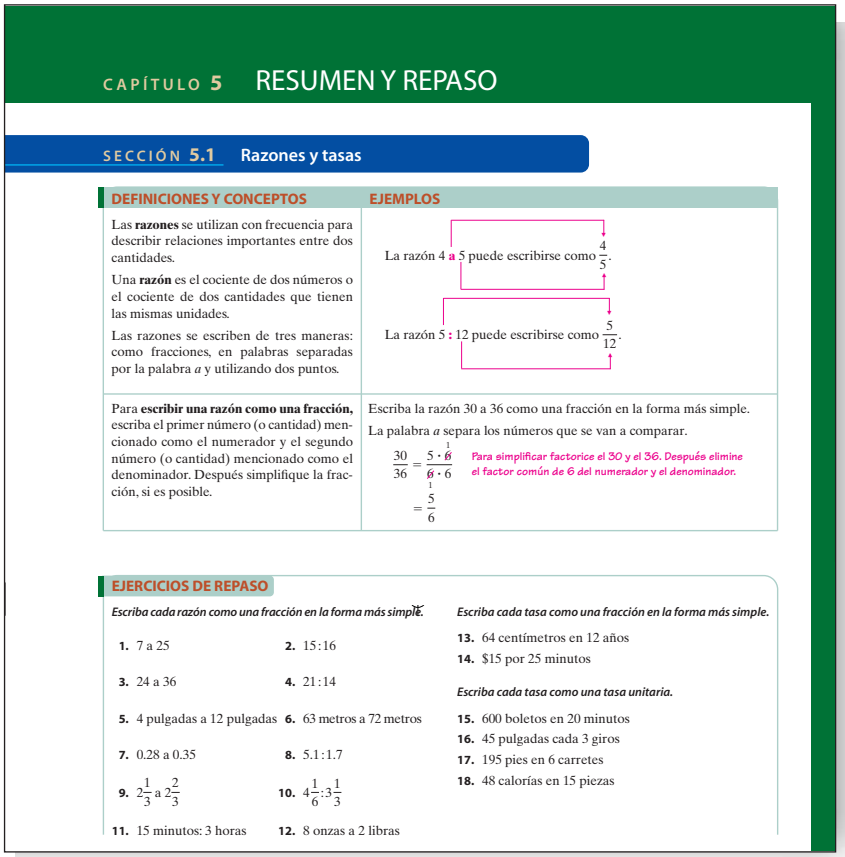
Para promover el reconocimiento de problemas, los *Espacios para el estudio* ahora incluyen una colección de problemas de *Inténtelo* que *no están* vinculados a los ejemplos resueltos. Estos tipos de problemas están mezclados por completo, lo que brinda a los estudiantes una oportunidad para practicar la toma de decisiones y la selección de estrategias como lo harían cuando realizan un examen o cuestionario.



INTÉNTELO

Desarrolle cada operación.

69. $-\frac{1}{12}-\left(-\frac{5}{12}\right)$
70. $-\frac{1}{16}-\left(-\frac{15}{16}\right)$
71. $\frac{4}{5}+\frac{2}{3}$
72. $\frac{1}{4}+\frac{2}{3}$
73. $\frac{12}{25}-\frac{1}{25}-\frac{1}{25}$
74. $\frac{7}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}$
75. $-\frac{7}{20}-\frac{1}{5}$
76. $-\frac{5}{8}-\frac{1}{3}$
77. $-\frac{7}{16}+\frac{1}{4}$
78. $-\frac{17}{20}+\frac{4}{5}$
79. $\frac{11}{12}-\frac{2}{3}$
80. $\frac{2}{3}-\frac{1}{6}$
81. $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}$
82. $\frac{3}{4}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}$
83. $\frac{9}{20}-\frac{1}{30}$
84. $\frac{5}{6}-\frac{3}{10}$
85. $\frac{27}{50}+\frac{5}{16}$
86. $\frac{49}{50}-\frac{15}{16}$



CAPÍTULO 5 RESUMEN Y REPASO

SECCIÓN 5.1 Razones y tasas

DEFINICIONES Y CONCEPTOS

Las **razones** se utilizan con frecuencia para describir relaciones importantes entre dos cantidades.

Una **razón** es el cociente de dos números o el cociente de dos cantidades que tienen las mismas unidades.

Las razones se escriben de tres maneras: como fracciones, en palabras separadas por la palabra *a* y utilizando dos puntos.

EJEMPLOS

La razón 4 a 5 puede escribirse como $\frac{4}{5}$.

La razón 5 : 12 puede escribirse como $\frac{5}{12}$.

Para **escribir una razón como una fracción,** escriba el primer número (o cantidad) mencionado como el numerador y el segundo número (o cantidad) mencionado como el denominador. Después simplifique la fracción, si es posible.

Escriba la razón 30 a 36 como una fracción en la forma más simple.

La palabra *a* separa los números que se van a comparar.

$$\frac{30}{36} = \frac{5 \cdot \overset{1}{\cancel{6}}}{\underset{1}{\cancel{6}} \cdot 6} = \frac{5}{6}$$

Para simplificar factorice el 30 y el 36. Después elimine el factor común de 6 del numerador y el denominador.

EJERCICIOS DE REPASO

Escriba cada razón como una fracción en la forma más simple.

1. 7 a 25
2. 15:16
3. 24 a 36
4. 21:14
5. 4 pulgadas a 12 pulgadas
6. 63 metros a 72 metros
7. 0.28 a 0.35
8. 5.1:1.7
9. $2\frac{1}{3}$ a $2\frac{2}{3}$
10. $4\frac{1}{6}:3\frac{1}{3}$
11. 15 minutos: 3 horas
12. 8 onzas a 2 libras

Escriba cada tasa como una fracción en la forma más simple.

13. 64 centímetros en 12 años
14. $15 por 25 minutos

Escriba cada tasa como una tasa unitaria.

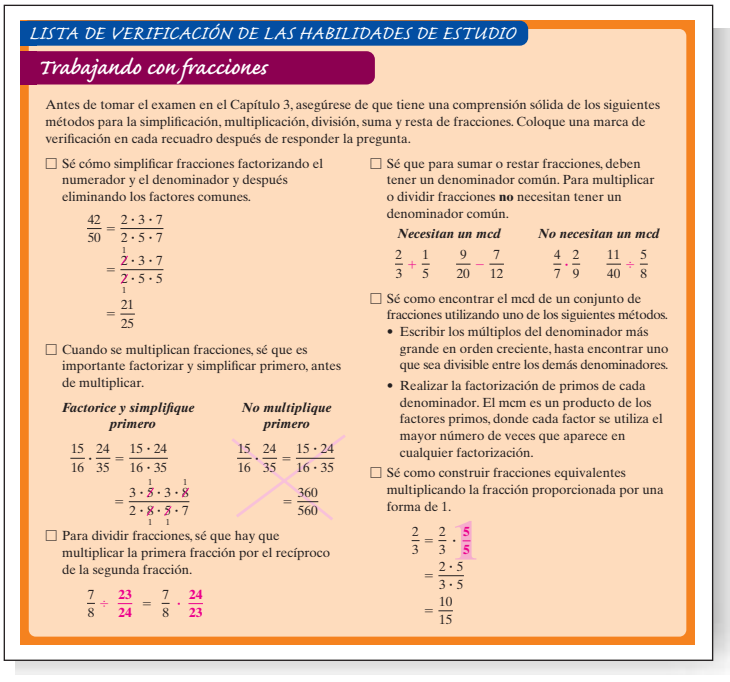
15. 600 boletos en 20 minutos
16. 45 pulgadas cada 3 giros
17. 195 pies en 6 carretes
18. 48 calorías en 15 piezas

Resumen muy completo junto con un repaso al final del capítulo

El material al final del capítulo ha sido rediseñado para funcionar como una guía de estudio completa para los estudiantes. Los nuevos resúmenes de los capítulos que incluyen definiciones, conceptos y ejemplos, por sección, han sido rescritos. Los problemas de repaso para cada sección aparecen inmediatamente después del resumen para esa sección. Los estudiantes encontrarán en los resúmenes detallados una ayuda de estudio muy valiosa cuando se preparen para los exámenes.

Habilidades de estudio que indican los errores comunes de los estudiantes

En el Capítulo 1 se han incluido cuatro *Listas de comprobación de las habilidades de estudio* diseñadas para mostrarles de manera activa a los estudiantes cómo utilizar de manera efectiva las características clave en este texto. Los capítulos subsecuentes incluyen una lista de comprobación justo antes del *Resumen y repaso del capítulo* que provee otra capa de preparación para promover el éxito de los estudiantes. Estas *Listas de comprobación de las habilidades de estudio* advierten a los estudiantes los errores comunes, lo que les da tiempo para considerar estos fallos antes de cometerlos en sus exámenes.



LISTA DE VERIFICACIÓN DE LAS HABILIDADES DE ESTUDIO

Trabajando con fracciones

Antes de tomar el examen en el Capítulo 3, asegúrese de que tiene una comprensión sólida de los siguientes métodos para la simplificación, multiplicación, división, suma y resta de fracciones. Coloque una marca de verificación en cada recuadro después de responder la pregunta.

☐ Sé cómo simplificar fracciones factorizando el numerador y el denominador y después eliminando los factores comunes.

$$\frac{42}{50} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 7}{2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot 3 \cdot 7}{\underset{1}{\cancel{2}} \cdot 5 \cdot 5} = \frac{21}{25}$$

☐ Cuando se multiplican fracciones, sé que es importante factorizar y simplificar primero, antes de multiplicar.

Factorice y simplifique primero	*No multiplique primero*
$\frac{15}{16} \cdot \frac{24}{35} = \frac{15 \cdot 24}{16 \cdot 35} = \frac{3 \cdot \overset{1}{\cancel{5}} \cdot 3 \cdot \overset{1}{\cancel{8}}}{2 \cdot \underset{1}{\cancel{8}} \cdot \underset{1}{\cancel{5}} \cdot 7}$	$\frac{15}{16} \cdot \frac{24}{35} = \frac{15 \cdot 24}{16 \cdot 35} = \frac{360}{560}$

☐ Para dividir fracciones, sé que hay que multiplicar la primera fracción por el recíproco de la segunda fracción.

$$\frac{7}{8} \div \frac{23}{24} = \frac{7}{8} \cdot \frac{24}{23}$$

☐ Sé que para sumar o restar fracciones, deben tener un denominador común. Para multiplicar o dividir fracciones **no** necesitan tener un denominador común.

Necesitan un mcd	*No necesitan un mcd*
$\frac{2}{3} + \frac{1}{5}$ $\quad \frac{9}{20} - \frac{7}{12}$	$\frac{4}{7} \cdot \frac{2}{9}$ $\quad \frac{11}{40} \div \frac{5}{8}$

☐ Sé como encontrar el mcd de un conjunto de fracciones utilizando uno de los siguientes métodos.

- Escribir los múltiplos del denominador más grande en orden creciente, hasta encontrar uno que sea divisible entre los demás denominadores.
- Realizar la factorización de primos de cada denominador. El mcm es un producto de los factores primos, donde cada factor se utiliza el mayor número de veces que aparece en cualquier factorización.

☐ Sé como construir fracciones equivalentes multiplicando la fracción proporcionada por una forma de 1.

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{5} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15}$$

CARACTERÍSTICAS CONFIABLES

- Los **Espacios para el estudio** encontrados en cada sección ofrecen un método multifacético para practicar y reforzar los conceptos enseñados en cada sección. Están diseñados para que los estudiantes construyan de manera metódica su conocimiento de los conceptos de la sección, desde el recuerdo básico a la resolución de problemas de complejidad incremental, a través de la lectura, la escritura y el pensamiento matemático.

  Vocabulario—Cada *Espacios para el estudio* comienza con el Vocabulario importante explicado en esa sección. Los problemas de vocabulario en los cuales se tienen que completar espacios enfatizan los conceptos principales enseñados en el capítulo y proveen el fundamento para el aprendizaje y comunicación del lenguaje del álgebra.

  Conceptos—En los *Conceptos,* se les pregunta a los estudiantes acerca de subhabilidades y procedimientos específicos necesarios para completar de manera exitosa los problemas de *Práctica guiada* e *Inténtelo* que les siguen.

  Notación—En la *Notación,* los estudiantes repasan los símbolos nuevos introducidos en una sección. Con frecuencia se les pide que completen los pasos de una solución de muestra. Esto fortalece su habilidad de leer y escribir las matemáticas y los prepara para los problemas de *Práctica guiada* modelando los formatos de la solución.

  Práctica guiada—Los problemas en la *Práctica guiada* están vinculados a un ejemplo resuelto o un objetivo asociado de esa sección. Esta característica promueve el éxito de los estudiantes refiriéndolos a los ejemplos apropiados si encuentran dificultades al resolver problemas de tarea.

  Inténtelo—Para promover el reconocimiento de problemas, los problemas de *Inténtelo* están completamente mezclados y *no* están vinculados con los ejemplos resueltos, lo que le da a los estudiantes una oportunidad para practicar la toma de decisiones y la selección de estrategias como lo harían cuando realizan un examen o cuestionario.

  Aplicaciones—Las *Aplicaciones* proveen a los estudiantes la oportunidad de aplicar sus habilidades algebraicas recién adquiridas a situaciones relevantes e interesantes de la vida real.

  Escritura—Los problemas de *Escritura* ayudan a los estudiantes a construir las habilidades de comunicación de las matemáticas.

  Repaso—Los problemas de *Repaso* consisten en problemas seleccionados de manera aleatoria de capítulo anteriores. Estos problemas están diseñados para conservar el dominio exitoso de las habilidades obtenidas hasta el momento antes de que avance a la siguiente sección.

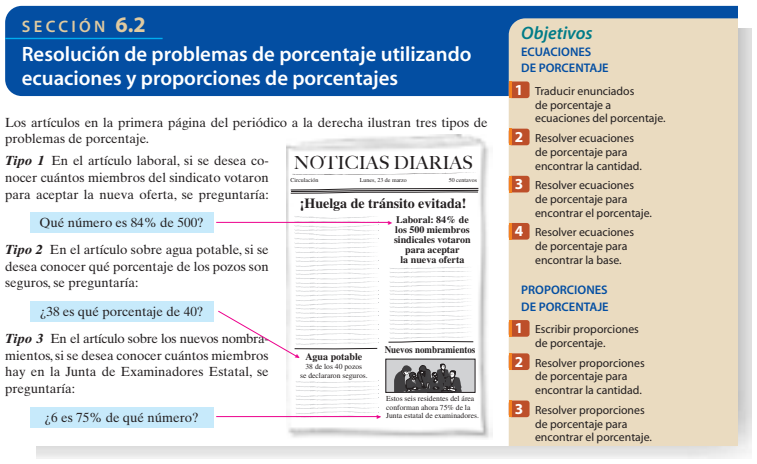
- Las **Notas detalladas del autor** que guían a los estudiantes junto con un proceso paso por paso aparecen en las soluciones de todos los ejemplos resueltos.
- La característica de **Piense detenidamente** hace la conexión entre las matemáticas y la vida del estudiante. Estos temas relevantes con frecuencia requieren habilidades del álgebra del capítulo para que se apliquen a una situación en el mundo real. Los temas incluyen los costos de colegiaturas, la matriculación de los estudiantes, las oportunidades de empleo, tarjetas de crédito y varios más.
- Los **Exámenes del capítulo,** al final de cada capítulo, pueden utilizarse como una preparación para el examen de la clase.
- Los **Repasos acumulativos** aparecen después del material de fin de capítulo y conservan actualizadas las habilidades de los estudiantes antes de avanzar al siguiente capítulo. Cada problema está vinculado con la sección asociada de la cual proviene el problema para facilitar la referencia. El *Repaso acumulativo* final es utilizado con frecuencia por los profesores como un Repaso del examen final.

- **Utilizando su calculadora** es una característica opcional (antiguamente llamada *Panorámica de las calculadoras*) que está diseñada para los profesores que deseen el uso de calculadoras como parte de la enseñanza en este curso. Esta característica introduce la secuencia de pulsaciones de teclas y muestra cómo pueden utilizarse las calculadoras científicas y graficadoras para resolver problemas. En los *Espacios para el estudio* se utilizan íconos para indicar problemas que pueden resolverse utilizando una calculadora.

CAMBIOS A LA TABLA DE CONTENIDOS

En base a una retroalimentación de colegas y usuarios de la tercera edición, se han realizado los siguientes cambios a la tabla de contenidos en un esfuerzo para estilizar más el texto y hacerlo aún más sencillo de utilizar.

- Los temas del Capítulo 1 se han expandido y reorganizado:
  - **1.1** Introducción a los números naturales (cobertura expandida del redondeo y estimación integrada)
  - **1.2** *Suma de números naturales* (estimación integrada)
  - **1.3** *Resta de números naturales* (estimación integrada)
  - **1.4** *Multiplicación de números naturales* (estimación integrada)
  - **1.5** *División de números naturales* (estimación integrada)
  - **1.6** *Resolución de problemas* (se introduce una nueva estrategia para la resolución de problemas de cinco pasos)
  - **1.7** *Factores primos y exponentes*
  - **1.8** *Mínimo común múltiplo y máximo factor común* (nueva sección)
  - **1.9** *Orden de las operaciones*
- En el Capítulo 2 *Enteros,* se pone énfasis en la resolución de problemas.
- En el Capítulo 3 *Fracciones y números mixtos,* se vuelven a ver los temas de mínimo común múltiplo a medida que se aplican a fracciones y se pone un énfasis en la resolución de problemas.
- El concepto de estimación se integra en la Sección 4.4 *División de decimales*. También, se pone énfasis en la resolución de problemas.
- El capítulo *Razón, proporción y medición* se ha movido para que preceda al capítulo *Porcentaje* para que puedan utilizarse proporciones para resolver problemas de porcentaje.
- La Sección 6.2 *Resolución de problemas de porcentaje utilizando ecuaciones y proporciones de porcentajes* tiene dos objetivos separados, lo que da a los profesores una elección en el método.



- La Sección 6.4 *Estimación con porcentajes* es nueva y continúa con la estimación integrada que se incluye a lo largo del texto.
- Los temas del Capítulo 8 se han revisado de manera extensa y se han reorganizado para una introducción mejorada al lenguaje del álgebra que es consistente con nuestro método tomado en los demás libros de nuestra serie.

  8.1 *El lenguaje del álgebra*

  8.2 *Simplificación de expresiones algebraicas*

  8.3 *Resolución de ecuaciones utilizando las propiedades de igualdad*

  8.4 *Más acerca de la resolución de ecuaciones*

  8.5 *Uso de ecuaciones para resolver problemas de aplicación*

  8.6 *Reglas de la multiplicación para exponentes*
- Los temas del Capítulo 9 se han reorganizado y expandido:

  9.1 *Figuras geométricas básicas; ángulos*

  9.2 *Líneas paralelas y perpendiculares*

  9.3 *Triángulos*

  9.4 *Teorema de Pitágoras*

  9.5 *Triángulos congruentes y triángulos semejantes*

  9.6 *Cuadriláteros y otros polígonos*

  9.7 *Perímetros y áreas de polígonos*

  9.8 *Círculos*

  9.9 *Volumen*

REVISIONES GENERALES Y DISEÑO GLOBAL

- Se ha editado la prosa para que sea aún más clara y concisa.
- Se ha implementado el uso estratégico del color dentro del nuevo diseño para ayudar al aprendedor visual.
- Se ha añadido color en las soluciones para remarcar los pasos clave y mejorar la legibilidad.
- Se han actualizado gran parte de la información y gráficas y se ha añadido una escala a todos los ejes en las gráficas.
- Se han añadido más aplicaciones en el mundo real.
- Se han incluido más fotografías de problemas específicos y mejorado la claridad de las ilustraciones.

RECURSOS PARA EL PROFESOR (en inglés)

Ayudas impresas

Carpeta de recursos del profesor (0-538-73675-5)
Maria H. Andersen, *Muskegon Community College*
¡NUEVA! Cada sección del texto principal se explica en *Guías de enseñanza* de diseño único que contienen sugerencias para la instrucción, ejemplos, actividades, hojas de trabajo, superpuestos, evaluaciones y soluciones a todas las hojas de trabajo y actividades.

Manual de soluciones completo (0-538-73414-0)
Nathan G. Wilson, *St. Louis Community College at Meramec*
El *Manual de soluciones completo* provee las soluciones para todos los problemas en el texto.

Edición anotada del profesor (1-4390-4868-1)
La *Edición anotada del profesor* provee el texto del estudiante completo con respuestas al lado de cada ejercicio respectivo. Nuevo para esta edición: Se han añadido Ejemplos de enseñanza para cada ejemplo resuelto.

Ayudas electrónicas (en inglés)

Enhanced WebAssign
Retroalimentación instantánea y facilidad de uso son sólo dos razones del porqué WebAssign es el sistema de tareas más ampliamente utilizado en la educación superior. El sistema de reparto de tareas de WebAssign le permite asignar, recolectar, calificar y registrar asignaciones de tarea por medio de la web. Los Planes de estudio personales proveen exámenes de diagnóstico para cada capítulo que identifican los conceptos que los estudiantes aun deben dominar, y los direcciona al material de repaso apropiado. Y ahora, este sistema comprobado ha sido mejorado para incluir enlaces a secciones del libro de texto, ejemplos en video y tutoriales de problemas específicos. Para mayor utilidad, los estudiantes también tendrán la opción de adquirir un libro electrónico multimedia en línea del texto. Enhanced WebAssign es más que un sistema de tareas, es un sistema de aprendizaje completo para los estudiantes de matemáticas. Contacte a su representante local para pedir detalles.

Constructor de soluciones
Construya conjuntos de soluciones de manera sencilla para tareas o exámenes utilizando el manual de soluciones en línea del *Constructor de soluciones*. Visite www.cengage.com/solutionbuilder

PowerLecture con ExamView® (0-538-73417-5)
Este CD-ROM provee al profesor con herramientas multimedia dinámicas para la enseñanza. Cree, envíe y personalice exámenes (impresos y en línea) en minutos con el *ExamView® Computerized Testing Featuring Algorithmic Equations.* Construya conjuntos de soluciones de manera sencilla para tareas o exámenes utilizando el manual de soluciones en línea del *Constructor de soluciones*. En este CD-ROM también se incluyen diapositivas en Microsoft® PowerPoint®, las figuras del libro y el Banco de exámenes (en formato electrónico).

Videos específicos del texto (0-538-73413-2)
Rena Petrello, *Moorpark College*
Estas lecciones de resolución de problemas de 10 a 20 minutos cubren casi todos los objetivos de aprendizaje de cada capítulo en el texto de Tussy/Gustafson/Koenig. La ganadora del "Mark Dever Award for Excellence in Teaching", Rena Petrello presenta cada lección utilizando su experiencia en la enseñanza de cursos de matemáticas en línea. Fue a través de esta experiencia de enseñanza en línea que Rena descubrió la falta de contenido adecuado para los profesores en línea, lo que ocasionó que desarrollara sus propias lecciones en video —y por último creara este proyecto de videos. Estos videos han ganado cuatro premios: dos Telly Awards, un Communicator Award y un Aurora Award (un honor internacional). Los estudiantes adorarán la guía y el soporte adicional cuando hayan faltado a clases o cuando estén preparándose para un cuestionario o examen próximo. Los videos están disponibles para su compra como un conjunto de DVD o en línea vía CengageBrain.com.

RECURSOS PARA EL ESTUDIANTE (en inglés y con un costo adicional)

Ayudas impresas

Manual de soluciones del estudiante (0-538-73408-6)
Nathan G. Wilson, *St. Louis Community College at Meramec*
El *Manual de soluciones del estudiante* provee las soluciones para los problemas con número impar en el texto.

Ayudas electrónicas (en inglés)

Enhanced WebAssign
Obtenga retroalimentación instantánea sobre sus asignaciones de tarea con WebAssign (asignadas por su profesor). Los Planes de estudio personales proveen un examen de diagnóstico para cada capítulo que identifica los conceptos que aún necesita dominar y le direcciona al material de repaso apropiado. Este sistema de tareas en líneas es fácil de usar e incluye enlaces útiles a secciones del libro de texto, ejemplos en video y tutoriales de problemas específicos. Para mayor facilidad de uso, adquiera un libro electrónico multimedia en línea por medio de WebAssign.

Sitio *www.cengage.com/math/tussy*
Visítenos en el sitio web para acceder a un acervo de recursos de aprendizaje, que incluye tutoriales, exámenes finales, descripciones de los capítulos, repaso de los capítulos, enlaces web, videos, tarjetas didácticas, folletos de habilidades de estudio ¡y más!

AGRADECIMIENTOS

Deseamos expresar nuestra gratitud a todos los que ayudaron con este proyecto: Steve Odrich, Mary Lou Wogan, Paul McCombs, Maria H. Andersen, Sheila Pisa, Laurie McManus, Alexander Lee, Ed Kavanaugh, Karl Hunsicker, Cathy Gong, Dave Ryba, Terry Damron, Marion Hammond, Lin Humphrey, Doug Keebaugh, Robin Carter, Tanja Rinkel, Bob Billups, Jeff Cleveland, Jo Morrison, Sheila White, Jim McClain, Paul Swatzel, Matt Stevenson, Carole Carney, Joyce Low, Rob Everest, David Casey, Heddy Paek, Ralph Tippins, Mo Trad, Eagle Zhuang, y al personal de la biblioteca del Citrus College (incluyendo a Barbara Rugeley) por su ayuda en este proyecto. Su apoyo, sugerencias y perspectiva han sido invaluables para nosotros.

También nos gustaría expresar nuestros agradecimientos al personal de editorial, mercadotecnia, producción y diseño de Cengage Learning por ayudarnos a crear esta nueva edición: Charlie Van Wagner, Danielle Derbenti, Gordon Lee, Rita Lombard, Greta Kleinert, Stefanie Beeck, Jennifer Cordoba, Angela Kim, Maureen Ross, Heleny Wong, Jennifer Risden, Vernon Boes, Diane Beasley, Carol O'Connell y Graphic World.

Adicionalmente, nos gustaría decir que el escribir un libro de texto es una empresa tremenda. Una revisión de esta escala no hubiese sido posible sin la retroalimentación detallista y el soporte de los siguientes colegas listados abajo. Sus contribuciones a esta edición le han dado forma a esta revisión de maneras incontables.

Alan S. Tussy
R. David Gustafson
Diane R. Koenig

Comité asesor

J. Donato Fortin, *Johnson and Wales University*
Geoff Hagopian, *College of the Desert*
Jane Wampler, *Housatonic Community College*
Mary Lou Wogan, *Klamath Community College*
Kevin Yokoyama, *College of the Redwoods*

Revisores

Darla Aguilar, *Pima Community College*
Sheila Anderson, *Housatonic Community College*
David Behrman, *Somerset Community College*
Michael Branstetter, *Hartnell College*
Joseph A. Bruno, Jr., *Community College of Allegheny County*

Joy Conner, *Tidewater Community College*
Ruth Dalrymple, *Saint Philip's College*
John D. Driscoll, *Middlesex Community College*
LaTonya Ellis, *Bishop State Community College*
Steven Felzer, *Lenoir Community College*
Rhoderick Fleming, *Wake Technical Community College*
Heather Gallacher, *Cleveland State University*
Kathirave Giritharan, *John A. Logan College*
Marilyn Green, *Merritt College and Diablo Valley College*
Joseph Guiciardi, *Community College of Allegheny County*
Deborah Hanus, *Brookhaven College*
A.T. Hayashi, *Oxnard College*
Susan Kautz, *Cy-Fair College*
Sandy Lofstock, *Saint Petersburg College–Tarpon Springs*
Mikal McDowell, *Cedar Valley College*
Gregory Perkins, *Hartnell College*
Euguenia Peterson, *City Colleges of Chicago–Richard Daley*
Carol Ann Poore, *Hinds Community College*
Christopher Quarles, *Shoreline Community College*
George Reed, *Angelina College*
John Squires, *Cleveland State Community College*
Sharon Testone, *Onondaga Community College*
Bill Thompson, *Red Rocks Community College*
Donna Tupper, *Community College of Baltimore County–Essex*
Andreana Walker, *Calhoun Community College*
Jane Wampler, *Housatonic Community College*
Mary Young, *Brookdale Community College*

Grupos focales

David M. Behrman, *Somerset Community College*
Eric Compton, *Brookdale Community College*
Nathalie Darden, *Brookdale Community College*
Joseph W. Giuciardi, *Community College of Allegheny County*
Cheryl Hobneck, *Illinois Valley Community College*
Todd J. Hoff, *Wisconsin Indianhead Technical College*
Jack Keating, *Massasoit Community College*
Russ Alan Killingsworth, *Seattle Pacific University*
Lynn Marecek, *Santa Ana College*
Lois Martin, *Massasoit Community College*
Chris Mirbaha, *The Community College of Baltimore County*
K. Maggie Pasqua, *Brookdale Community College*
Patricia C. Rome, *Delgado Community College*
Patricia B. Roux, *Delgado Community College*
Rebecca Rozario, *Brookdale Community College*
Barbara Tozzi, *Brookdale Community College*
Arminda Wey, *Brookdale Community College*
Valerie Wright, *Central Piedmont Community College*

Revisores de las ediciones anteriores

Cedric E. Atkins, *Mott Community College*
William D. Barcus, *SUNY, Stony Brook*
Kathy Bernunzio, *Portland Community College*
Linda Bettie, *Western New Mexico University*
Girish Budhwar, *United Tribes Technical College*
Sharon Camner, *Pierce College–Fort Steilacoom*
Robin Carter, *Citrus College*
John Coburn, *Saint Louis Community College–Florissant Valley*
Sally Copeland, *Johnson County Community College*
Ann Corbeil, *Massasoit Community College*
Ben Cornelius, *Oregon Institute of Technology*
Carolyn Detmer, *Seminole Community College*
James Edmondson, *Santa Barbara Community College*
David L. Fama, *Germanna Community College*
Maggie Flint, *Northeast State Technical Community College*
Charles Ford, *Shasta College*
Barbara Gentry, *Parkland College*
Kathirave Giritharan, *John A. Logan College*
Michael Heeren, *Hamilton College*
Laurie Hoecherl, *Kishwaukee College*
Judith Jones, *Valencia Community College*
Therese Jones, *Amarillo College*
Joanne Juedes, *University of Wisconsin–Marathon County*
Dennis Kimzey, *Rogue Community College*
Monica C. Kurth, *Scott Community College*
Sally Leski, *Holyoke Community College*
Sandra Lofstock, *St. Petersberg College–Tarpon Springs Center*
Elizabeth Morrison, *Valencia Community College*
Jan Alicia Nettler, *Holyoke Community College*
Marge Palaniuk, *United Tribes Technical College*
Scott Perkins, *Lake-Sumter Community College*
Angela Peterson, *Portland Community College*
Jane Pinnow, *University of Wisconsin–Parkside*
J. Doug Richey, *Northeast Texas Community College*
Angelo Segalla, *Orange Coast College*
Eric Sims, *Art Institute of Dallas*
Lee Ann Spahr, *Durham Technical Community College*
Annette Squires, *Palomar College*
John Strasser, *Scottsdale Community College*
June Strohm, *Pennsylvania State Community College–Dubois*
Rita Sturgeon, *San Bernardino Valley College*
Stuart Swain, *University of Maine at Machias*
Celeste M. Teluk, *D'Youville College*
Jo Anne Temple, *Texas Technical University*
Sharon Testone, *Onondaga Community College*
Marilyn Treder, *Rochester Community College*
Sven Trenholm, *Herkeimer County Community College*
Thomas Vanden Eynden, *Thomas More College*
Stephen Whittle, *Augusta State University*
Mary Lou Wogan, *Klamath Community College*

ACERCA DE LOS AUTORES

Alan S. Tussy

Alan Tussy enseña a todos los niveles de matemáticas del desarrollo en el Citrus College en Glendora, California. Ha escrito nueve libros de matemáticas: una serie de libros de pasta blanda y una serie de pasta dura. Es un profesor meticuloso, creativo y visionario que mantiene un enfoque vivaz en los mayores desafíos de sus estudiantes. Alan Tussy es un autor extraordinario, dedicado al éxito de sus estudiantes. Alan recibió su Licenciatura en Ciencias en Matemáticas de la University of Redlands y su Maestría en Ciencias en Matemáticas Aplicadas de la California State University, Los Ángeles. Ha enseñado todo el plan de estudios, desde Preálgebra a Ecuaciones diferenciales. En la actualidad está enfocado en los cursos de matemáticas del desarrollo. El profesor Tussy es miembro de la Asociación matemática estadounidense de las universidades de dos años.

R. David Gustafson

R. David Gustafson es profesor emérito de matemáticas en el Rock Valley College en Illinois y coautor de varios de los textos de matemáticas mejor vendidos, incluyendo Gustafson/Frisk's *Beginning Algebra, Intermediate Algebra, Beginning and Intermediate Algebra: A Combined Approach, College Algebra,* y la serie de matemáticas de desarrollo de Tussy/Gustafson. Sus numerosos honores profesionales incluyen Profesor del año de Rock Valley y Educador sobresaliente del año de Rockford. Obtuvo una Maestría en arte del Rockford College en Illinois al igual que una Maestría en Ciencias de la Northern Illinois University.

Diane R. Koenig

Diane Koenig recibió una Licenciatura en Ciencias en Educación de matemáticas en secundaria de la Illinois State University en 1980. Comenzó su carrera en el Rock Valley College en 1981, cuando se volvió Supervisora de matemáticas para el recién formado Centro de aprendizaje personalizado. Obtuvo su Maestría en Matemáticas aplicadas de la Northern Illinois University. En 1984 la Srta. Koenig tuvo la distinción de convertirse en el primer miembro femenino a tiempo completo de la facultad de matemáticas en el Rock Valley College. Además de ser nominada para el Premio de excelencia educativa de AMATYC, Diane Koenig fue elegida por sus colegas como la Académica del año del Rock Valley College en el 2005, y en el 2006, fue premiada con el Premio de excelencia educativa de NISOD al igual que el Premio de la Asociación de matemáticas de universidades comunitarias de Illinois por Excelencia educativa. Además de su enseñanza, la Srta. Koenig ha sido un miembro activo de Asociación de matemáticas de universidades comunitarias de Illinois (IMACC por sus siglas en inglés). Como miembro, ha servido en la junta de directores, en un destacamento a nivel estatal que reescribe los diseños para los cursos de matemáticas del desarrollo y como la editora del boletín informativo de la asociación.

ÍNDICE DE APLICACIONES

Los ejemplos que son aplicaciones se muestran con números de página en negritas.
Los ejercicios que son aplicaciones se muestran con números de página en letras delgadas.

Administración del hogar

abridores de puertas de garaje, 254
aceitunas, 469
afinación, 328
agua embotellada, 493
ahorros de energía, 53
ajuste de escaleras, 752
alfombrado, 790
alfombrado de una habitación, **786**
aperitivo de alto contenido energético, 281
automóviles usados, 838
baldosas, 791
banca, 205, 684
banda de rodamiento, 256
bodas, 27
bricolaje, **584**
cadena de telecompra, 343
calcetines, 424
cambios de aceite, 100
cargos por sobregiro, 197
carnes, 497
casas nuevas, 355
cena de acción de gracias, 403
cenar fuera, **545**, 558
cenas, 255
cercas, 790, 829
cereal para desayuno, 270
césped, 829
chequera, 634
chocolate, 385
cocinar, 231, **238**, 240, 312, **450**
cocinar carne, 478, 495
colchones, 79
comida rápida, 27
comparación al comprar, **367**, **423**, 427, 478, 482, 494, 619, 791, 840
comparación de tarifas postales, 603
compra de lápices, 810
compra de ropa, 440, 634
comprar, 110, 270, **381**, 401, **435**, 494, **578**
contenedores, 469
coser, 269, 301, 312
costos de energía, 38
costos de la educación, **561**
costos de servicios públicos, 494
cuentas de cheques, 164, 327
cuidado de automóviles, 590
cupones, 608
cupones dobles, 551
daño por tormenta, 357
decoración, 28, 835
descuentos, **545**, 558
deuda de tarjeta de crédito, **135**
devoluciones de impuestos, 685
diseño de baldosas, 232
diseño de cocinas, 231
diseño de ropa, 269
embaldosado, 790
empacado, **472**, 695
encogimiento, 589
ensaladas, 409
etiquetas de ropa, **470**
facturas de plomería, 357
facturas de servicio eléctrico, 356
facturas de servicios públicos, **324**, 328
ferretería, 497
fiambrería, **381**, 385
financiamiento, 704
flujo de efectivo, **148**
gastos de mudanza, 704
guardería, 427
Halloween, 123
impuesto sobre la renta, 328
impuesto sobre las ventas, 634, 841
mariscos, 406
mensualidades, 587
motores, 497
multas, **585**
nutrición, 478
oferta de anillos, 551
oferta de guitarras, 592
oferta de monopatines, 551
oferta de persianas, 551
oferta de relojes, 551
oferta de videocámaras, 551
ofertas especiales, 558, 584
onzas y onzas líquidas, 478
panificación, 425, 494
pantalones, 646
parejas que trabajan, 100
picnics, 100
ponche de frutas, 495
postres, 425
precios de la gasolina, 329
precios en oferta, 399
preparación de galletas, 442
préstamo a corto plazo, **561**
préstamos para automóviles, 568
préstamos para emergencias, 587
presupuestos, 426, 618
propina, **555**, 558, **583**, 590, 592, 634
protección por sobregiro, 164, 591
rebajas, 551
recibos de las ventas, 581
recibos de nómina, 839
recibos de Visa, 558
recorridos en taxi, 38
reemplazo de ventanas, 385
regalos de aniversario, 709
remodelación, 568, 634, 791
rentas, 687
reparación de automóviles, 687
salario diario, **46**
seguro para automóvil, 550
soportes de una plataforma, 175
suministros de limpieza, **473**
suministros para pintar, 425
tamaño de la porción, 403
tarifas postales, **595**
tarjetas de crédito, 78
tasas de electricidad, 427
tomar una ducha, 478
uso de energía, 111
uso de la electricidad, **555**
ventas de calzado, **545**
ventas de escaleras, 548
ventas de garaje, **680**
ventas de lentes para sol, **545**
ventas de libros, 548
ventas de muebles, **581**
ventas de ropa, 840
ventas de ropa de cama, 548
ventas de ropa para caballero, 548
ventas de suministros para oficina, 548
ventas de toallas, 590
ventas de vajillas, 548
ventiladores de techo, 546
vivir del interés, 569

Agricultura

agricultura, 123, 833, 837
daño a cultivos, 549
número de granjas en E.U., 608
pintar, 791
préstamos para granjas, 568
producción de huevos, 626
silos, **805**
tamaño de las granjas en E.U., 608

Animales

animales del zoológico, 626
ballenas, 477
bulldogs, 38
elefantes, 34, 455
gasto en animales, 841
guepardos, 477
hipopótamos, 455
leones, 477
mascotas en E.U., 603
mascotas, 76
medicamento para animales, 839
osos polares, 493
perros, 442
puertas para mascotas, 306
refugios de animales, 687
velocidad de animales, **596**

Arquitectura

acondicionamientos, 356
arquitectura, **795**
cianotipos, 441
construcción de pirámides, 734
construcción de un muelle, 173
dibujos a escala, 484, 840
dimensiones de una casa, 27
diseño, 384, 441, 746
diseño de cocinas, 231
lectura de cianotipos, 39
longitudes de cables de sujeción, 752
modelos a escala, **436**
reemplazo de ventanas, 385
superficie habitable, 532
ventilación, 809

Carreras

asesor financiero personal, **131**, 154
asistente de salud en el hogar, **315**, 342
cartero, **593**, 603
chef, **413**, 442
oficial de crédito, **499**, 658
orientador vocacional, **207**, 255
paisajista, **1**, 79
topógrafo, **711**, 766
transmisión, **637**, 687

Ciencia e ingeniería

agua potable, 403
águilas en peligro de extinción, **22**
Air Jordan, 493
almacenamiento del agua, 182
anatomía, 72
año bisiesto, 283
árboles, 78
astronomía, 143, **451**
átomos, 154

aves, 52
biología, 355
botánica, 231, 254
caída libre, 141
clavados, 110
cohetes, 27
crecimiento bacteriano, **86**
cronometrar, 265
daño por terremoto, 408
distribución del agua, 573
división celular, 89
elementos en el cuerpo humano, 626
energía nuclear, 203
erosión, 174
escala de pH, 341
exploración del océano, 182, 199
fugas de gasolina, **171**
genética, 230
geología, 329, 385
gravedad, 300, 686, 838
hermanos Wright, 454
hojas de cálculo, 190
icebergs, 231
ingeniería estructural, **778**
insectos, **48**
koalas, 53
langostas estadounidenses, **132**
láseres, 240, 327
luz, 89, 174
mezcla de disoluciones, 645
mezclas, 533
microscopios, 329
misiones a Marte, 13
motores, 810
NHL, 128
oceanografía, **171**
planetas, 174, 633, 724
pureza del agua, 408
química, 154, 181, 198, 202, 205, **323**, 409, 745
ranas, 53
rebote de pelotas, 230
reflejos, 371
secuoya gigante, 800
silvicultura, 241
sismología, 734
sistema métrico, 328
sol, **451**
sumideros, 219
tecnología, 142
telescopio, 404
tiburones, **21**
tierra, **501**
tubos de ensayo, 490
velocidad de la luz, 15
viaje en el espacio, 455

Clima

aire acondicionado, 484
Arizona, 78
avalanchas, 635
caída de temperatura, 181, 313
cambio de temperatura, **151**, 619
cambio de temperatura récord, **151**
ciudad de salida, **160**, 708
Ciudad del viento, **160**
clima, 164, 410, 591
clima nevado, 478
daño por huracán, 578
daño por tormenta, 306
daño por viento, 753
días soleados, 118
extremos de temperatura, 164, 195
hojas de datos, 155
huracanes, 618
inundación, 142, 154
mapas del clima, 142
nevada, **420**
nubes, 15
pérdida de cultivos, 174
reportes meteorológicos, 342
sensación térmica, 625
sequía, 195
temperaturas de Dakota del Sur, **144**
temperaturas de Florida, **132**
temperaturas promedio, 619
temperaturas récord, 153, 197
velocidades del viento, 625

Coleccionables

antigüedades, 686
coleccionables, 841
JFK, **541**

Deportes

agentes deportivos, 580
apostar, 548
arquería, 800
arrancones, 300
asociación de golf profesional femenil, 194
atletismo, **471**, 477, 478, 495, 709
automovilismo, 578
basquetbol, 282
basquetbol femenil, 79
beisbol, 393, 752, 776
boxeo, 28, 312, 512
buceo, 163
buena condición física, 294
caballos, 34
carreras de caballos, 140, 220, 272, **277**, 385
carreras de bicicletas, 631
clavados, 144, 268
compra de palos de golf, 686
contratos deportivos, 312
corredores, 605
correr, 67, 78
cursos de aventuras de cuerdas altas, 821
deportes, 13
deportes de escuela secundaria, 35
deportes para mujeres, **782**
diseños de tablas de surf, **237**
entrenamiento con pesas, 123
entrenamientos de natación, 589
equipo deportivo, 698
excursión, 256, 370, 455
futbol americano, 163, **446**
futbol soccer, 356
golf, 142, 496
Indy 500, 371
lanzamiento de jabalina, 842
levantamiento de pesas, **48**, 357, 477, 558
linieros ofensivos de la NFL, **107**, 833
lucha, **338**
Major League Baseball, 512
maratones, 240, **446**
medallas de oro, 76
NASCAR, 141, 328
natación, 493
Olimpiadas del 2008, 328
páginas deportivas, 342
patinaje de velocidad, 495
patinetas, 408, **624**
PC de un equipo, 635
pesca deportiva, 620
Ping pong, **782**
piscinas, 357, **642**
poseedores de récords, 342
programas de carreras, 532
programas de condicionamiento, **338**
rebote de pelotas, 230
récord victorias-derrotas, 512
récords de la NFL, 455
récords en el basquetbol, 496, 509
reportes de reconocimiento, 191
snowboard, **623**
surf vela, 232
tenis, 634, 667
tenis de mesa, 841
traspasos en el beisbol, 182, 550
trotar, 800
volibol, 67

Educación

álgebra, 295
ayudas económicas, 587
bandas de marcha, 89
becas, **642**, 683, 685
calificaciones, 111, 129, 629
calificaciones de exámenes, 619
calificaciones semestrales, 618
capacidad del salón, 53
capacitación, 584
civilización maya, **134**
clases de arte, 101
clases de E.F., 129
clubes de servicio, **679**
colegiatura, 547, 568
colonos del oeste, 493
comparación de calificaciones, 619
construcción, 687
costos universitarios en E.U., 89
cuadro de honor, 558
cursos universitarios, 558
diario escolar, **221**
disminución en la matrícula, 190
distribuciones de calificaciones, **614**
documentos históricos, 282
dotación de personal, 442
educación en el hogar, **541**
educación física, 685
educación musical, **556**
empleados en universidades, 589
empleos de nivel inicial, 67
encontrar los PC, **612**
equipo para enseñanza, 709
escalas salariales, **621**
escuelas de medicina, 77, **622**
estacionamiento, 707
estudiantes de reingreso, 9
estudiantes en universidades comunitarias, **529**
estudiantes que conducen, **556**
estudiar en otros países, **473**
estudiar matemáticas, **543**
exámenes, 190, 558
graduación, 120
historia, 143, 163, 684, 836
historia del arte, 426, 695
horas de observación, 710, 842
horas de servicio voluntario, **679**
instrumentos musicales, 724
invitaciones de graduación, 683
jornadas de puertas abiertas, 687
la educación reditúa, **108**
lectura veloz, **677**, 685
libros de autoayuda, 683
literatura, 495
matriculación, 548
matriculación escolar, 201
matriculaciones, **643**
obsequios, 122
oradores de graduación, 397
PC de un equipo, 635
presupuestos, 559
procesador de palabras, 53
programas de lectura, 164, 294, 427
promedio de calificaciones (PC), 619, 629, 632, **368**
promedios de exámenes, 619
razón estudiante a profesor, **417**
razones facultad-estudiante, 426
realizar un diagrama de enunciados, 734
regalos en efectivo, 569
residencia estudiantil, **782**
resultados de exámenes, **611**
resúmenes de calificaciones, 629
salarios de profesores, 39
salones de clase, **119**
sin asistencia, 558
tiempo de almuerzo, 67
tiempo de clase, 634, 687
trabajar en grupos, 683
valor de una educación, **616**
zonas de recreamiento, **682**

Electrónica y computadoras

compañías de cómputo, 647
compañías de Internet, 142
compras en línea, 269
comprobación de correo electrónico, **623**
computadoras, 370
descargar, 531

diagrama de flujo, 776
DVDs, 78
electrónica, 370
encuestas por Internet, 558
Facebook, **576**
fotocopiadoras, 532
impresoras, 241
Internet, 311, 509
iPhones, 77
iPods, 77
laptops, 76
pixeles, **47**
procesadores de palabras, 401
reproductores de discos, 551
sintetizador, 724
suministros de cómputo, 618
tecnología, 142
teléfonos celulares, **3**
televisiones de pantalla plana, 394
velocidad de cómputo, 442
ventas por Internet, 427
videojuegos, 686

Entretenimiento

acampar, 205, 766
asientos para conciertos, 356
avión de papel, 753
Batman, 77
bebidas, 67
boletos para conciertos, **435**
boletos para películas, **63**
calificación de películas, 632
canales de TV, **539**
carruseles, 441
compra de equipo de pesca, 549
control de multitudes, 482
costos de entretenimiento, **678**
discos de éxito, 687
diseño de guitarras, 310
entrevistas en la TV, **264**
estacionamiento, 123
estacionamiento para conciertos, 550
exhibiciones de automóviles, 590
ferromodelismo, 441
giras, **64**
hábitos de la audiencia televisiva, **250**, 627
hip hop, 686
historia de la TV, 76
hojas de calcomanías, 313
horarios semanales, 411
juegos mecánicos, 647
lectura de verano, 629
leer, 708
Mago de Oz, 753
motor fuera de borda, **414**
música rap, 511
Olimpiadas del 2008, 328
orquestas, 72, 707
pantallas de TV, 821
parques de diversiones, 295
programas de juegos, 12
ratings, 632
ratings de TV, 112
recreación, 707
revistas, **22**, 38
rodeos, 704
sintetizador, 724
sitios web de TV, **504**
teatro, 76, 686
telenovelas, 77
televisión, 343, **506**
televisiones, 837
toboganes, 283
ver televisión, **580**
Youtube, 112

Finanzas

adquisiciones de bancos, 202
adquisiciones de negocios, 190
aerolíneas, 155
agencias de empleo, 547
ahorro de dinero, 511
aumento en los costos de vida, 549
aumentos, 547
banca, 39, 110, 118, 342
bancarrota, 426
bancos, 313
bien raíz, **179**, 313, 550, 632
cajas de herramientas, 582
cajeros automáticos, 100
cargos por intereses, 590
certificado de depósitos, 569
comisiones, 550, **579**, 581
compra de un negocio, 205
compuesto a diario, **565**
compuesto anualmente, 569
compuesto semestralmente, 569
contabilidad, 155, 164, 409
costo total, **537**
costos de vida, 589
cuentas de ahorro, 547, 567, 568, 587, 645
cuentas de cheques, 14, 327
cuentas de cheques sobregiradas, **132**
cuentas de inversión, 587
desempeño de negocios, 440
deuda de tarjeta de crédito, **135**
dinero, 327
economía de los E.U., **596**, **597**
empleos de nivel inicial, 67
enganches, 584
escalas salariales, **621**
flujo de efectivo, **148**
fondos universitarios, 569
ganadores de la lotería, 67
gastos universitarios, 578
herencia, 129
herencias, 569
hogar, 532
honorarios legales, 52
horas extra, **346**
infomerciales, 15
ingreso anual, **324**
ingreso neto de la Compañía Eastman Kodak, **134**
ingresos para la jubilación, 568
ingresos semanales, **353**, 592
interés compuesto, **563**, **585**
inversiones, 566, 568, 587, 590, 592
lotería, 370
loterías, 569
mercado de valores, 38, 182, **187**, 190, 329, 685
pago de préstamos, 841
pagos a CEO, **122**
penalización matrimonial, 606
poder ejecutivo, 532
premios en efectivo, 618
préstamos, 566, 567, 634, 685, 709
préstamos a corto plazo, 568, 590
préstamos para automóviles, 370
presupuestos, 27, **251**
producción de oro, **598**
pronósticos económicos, 512
propina, 578
propinas, 533
protección por sobregiro, 838
rama ejecutiva, 410
recibos de nómina, 120, 142, 355, 442, 549, 839
récords del mercado de valores, 190
rentas, 582
retiro de sólo el interés, 569
salarios, 355
salario por hora, 371
salarios de CEO, 27
salarios de profesores, 39
seguridad social, 573
seguro, 532, 589
solicitudes de préstamo, 568, 569
subastas, 547
tarjetas de crédito, 78
tasas de interés, 511
tasas de pago, 424, 482
telemercadeo, **579**, 589
trabajos a tiempo completo, **422**
trabajos a tiempo parcial, **422**
venta de automóviles, 547
venta de botes, **179**
venta de calzado, 547
venta de electrónicos, **539**, 547
venta de neumáticos, 547
venta de relojes, 547
venta de seguros, **539**
venta de suministros médicos, 581
venta de una casa, 558
ventas de electrodomésticos, **539**
ventas de joyería, **539**
ventas farmacéuticas, 547

Geografía

aguas termales, 478
área de un estado, **227**, 232
barcos hundidos, 154
Canal de Suez, 469
China, 401
elevaciones de montañas, **471**
elevaciones, 154
geografía, 163, 196, 202
Gran Cañón, 181
Gran Esfinge, 455
Gran Pirámide, 454
Holanda, 144
Lewis y Clark, 455
Mar muerto, 477
Medio Este, 477
Monte Washington, 477
regiones del país, 511
ríos, 115
superficie de la Tierra, 231, 496, **506**, 578
terremotos, 620
volumen de la Tierra, 810
Wyoming, 53

Geometría

acampar, 295
altitudes, 787
ángulos, 746
área de un estado, **227**, 232
área de un rectángulo, 51
área de un señalamiento, 300
área de un trapezoide, **287**
área de un triángulo **226**, 229, **287**, 300
áreas, 788, 789, 790
barras paralelas, **725**
cilindros, **804**
círculos, 799, 800
Ciudad de Nueva York, 409
cometas, 411
conos, **804**
consejos de belleza, 734
cuadrados, 129
cuadriláteros en la vida diaria, 776
dimensiones de rectángulos, 24
dinero, **23**
estampillas, 232
formas, 835
formas tridimensionales, 837
frases, 725
geometría, 685, 699, 710
juegos de mesa, **23**
monumentos, **725**
pantallas de TV, **750**
papel cuadriculado, 269
paralelogramos, **784**
pegatinas, **263**
perímetro de un triángulo, 314
perímetros, 787, 790, 798
perímetros de rectángulos, 26
pirámides, **804**
piscinas, 313, 357
placas para automóviles, 269
polígonos en la naturaleza, 745
prismas, **803**
puertas para mascotas, 306
salidas de emergencia, 269
señales de alto, 667
transportadores, 722
trapezoides, **783**
triángulo isósceles, **778**
triángulos, 312, 744, 763, **782**, 819
triángulos rectángulos, 751, 821
vías del tren, **725**
volumen de conos, 808
volumen de esferas, 809
volumen de pirámides, 808
volumen de sólidos rectangulares, 807

Impuestos
aumentos tributarios, 549
deducción de impuestos, 174
devoluciones de impuestos, 569
electrodomésticos, **578**
estrategia para ahorrar impuestos, 606
impuesto a la gasolina, 549
impuesto de autoempleo, 547
impuesto de consumo, 548
impuesto sobre la herencia, **537**
impuesto sobre la renta, 328
impuesto sobre las ventas, **536**, 547, 548, 559, 581, 589
impuestos, 426, 512
impuestos de servicios públicos, 356
impuestos sobre las ganancias de capital, 547
presentación de una declaración conjunta, 606
presentación de una declaración individual, 606
retención de impuestos, **537**

Jardinería y cuidado de césped
cercar, 439
cercas, 28
diseño de paisajes, 800
herramientas, 734
jardinería, 67, 144, 204, 385, 724, 791
mezcla de combustibles, 442
paisajismo, 427, 791
parabrisas, 67
reparaciones de mangueras, 283
sistemas de rociado, 686
tasas de crecimiento, **420**

Juegos y juguetes
ajedrez, 78
apostar, 202
billar, 746
billares, 657
cartas, 425
crucigramas, 78
juegos de cartas, 202
juegos de feria, 141
juegos de mesa, 53, **501**
juguetes, **263**
Lotería, 667
premios en efectivo, 618
rumí, 163
Scrabble, 111, **777**
Sudoku, 410
trampolín, 800
videojuegos, 686

Medicina y salud
aerobics, 77
atención médica, **119**, 469
bebedores de café, **421**
bebidas energéticas, 631
biorritmos, 100
buena condición física, 294
cafeína, 78, 497
calorías reducidas, 549
centros médicos, 220
cerebro, 490
chocolate, 76
cinturones de seguridad, **622**
cirugía, 490
comerciales, **542**
comidas rápidas, 111
conteo de calorías, 70
CPR, 426
crecimiento del cabello, 477
cremas para la piel, 425
datos nutricionales, 533
dermatología, 310
dientes, 129
dieta, 175
dietas, 38
dietas saludables, 35
dormir, 120, **278**, 295, 298, **624**
dosis, 441
enfermería, 100
entrenamientos, 630
espina dorsal humana, 512
estadísticas médicas, 256
estado físico, 704
exámenes físicos, 39
excursionismo, 294
fiebres, **475**
frenillos, **121**
gotas para los ojos, 469
guía de sobrevivencia, 497
ingesta de fibra, **332**
ingesta de sal, 356
inyecciones, 327, 469
láseres, 327
latidos, 53
leche baja en grasa, 70
lesiones de la médula espinal, 635
listas de pacientes, 704
medicamentos, **463**
medicina, 469
muertes por cáncer, **622**
muestras de sangre, 629
nacimientos múltiples, 77
nutrición, 52, 312, **421**, 620
odontología, 219, 608
peso corporal, **472**, 495
peso de un bebé, 455, 469
piel humana, 511
primeros auxilios, 746
pronóstico de alergias, 397
protección de la audición, 707
recetas, 53, 495
recuperación de pacientes, **94**
reducción de la ingesta de grasas, **542**
salud, 155
suministros médicos, 469
tamaño de porción, 403
tasas se sobrevivencia al cáncer, 630
terapia física, 294
trabajo de laboratorio, 441
trasplantes, 38
trotar, 154
uñas de los dedos, 427
vegetarianos, 841
vista, 164

Medición
acuarios, 497
administración del agua, **160**
agua embotellada, 73, 591
altura de un árbol, 766, 767, 823
altura de un asta bandera, **760**
altura de un edificio, 766
amperaje, 163
antenas para radio, 393
automóviles, 494
avión, 482
banderas, 424, 426
bañeras de aves, 810
barras para medir de un metro y una yarda, 495
bosques, 77
cambiar unidades, 52
camiones, 38
carpintería, 393
cartulinas, 53
chapa de metal, 407
cintas para medir, 411
cinturones, 497, 592
círculos, **444**
círculos (métricamente), **457**
clavos, **444**
clavos (métricamente), **457**
clips para papel, **443**
clips para papel (métricamente), **457**
colchones, 79
colección de estampillas, 282
cometas, 591
comparación de habitaciones, 53
contenedores, 494
coser, 657
cuchillería, 644
dibujar, **414**
drenar tanques 427
edificios de gran altura, 493
elevaciones, 154
emergencias en carreteras, 406
empacado de pretzels, 629
envoltura de presentes, 53
envoltura de regalos, **49**, 111
escaleras, 394
especificaciones vehiculares, 343
estacionamiento, 838
ferretería, 698
geografía, 767, 791
gráficas de líneas, 143
Gran Esfinge, 455
Gran Pirámide, 454
hamburguesas, 592
helicópteros, 800
hermanos Wright, 454
hielo, 843
hornos de microondas, 399
huevos, 426
lagos, 800
longitud, 78
lotes de estacionamiento, 704
madera, 314
magnificación, 174
materiales para construcción, 645
medición, 327
monedas, 399
Monte Everest, **161**
óctuples, 282, 619
paisajismo, **823**
pañales, 78
patinaje de velocidad, 468
perros, 484
pescado, 706
peso del agua, 409, 455
pesos de automóviles, 118
pesos y medidas, 255, 492
petróleo crudo, **161**
ping pong, 657
pintar, **642**
Presa Hoover, 455
publicidad, **49**
rampas, 441
rascacielos, 469
récords mundiales, 38
reglas métricas, 467, 490, 495
reglas para medir de un metro y una yarda, 495
reglas, 219, 453, 487, 494
ribera de lagos, 549
séptuples, 282
sintetizadores, 667
sistema métrico, 328
sistemas de sonido, 703
sombras, 837, 843
suministros para pintar, 77
tamaño de lata, 800
tarjetas de notas, 241
teléfonos celulares, **615**
temperatura, 265
tenis, 634
territorio, 118
tiempo, 78
tiendas, **784**
topografía, 393
Torre Sears, 455, 488
totales de lluvia, 265
Triángulo de las Bermudas, 688
vidrio, 411
vista, 164
volúmenes, 843

Mercadotecnia
cajas de cereales, 810
calentadores de agua, 809
calorías, 269
cereal para desayuno, 52
refrigeradores, 810

Misceláneos
afeitar, 314
agua potable, **473**, 478
alfabeto, 533
Amelia Earhart, 455
ampliaciones, 532
anuncios, 14
automóviles más rápidos, 329
banderas, 28, 410
baño, **475**
bebedores de café, 311
botellas de espray, 370
caballetes, 746
café, **475**
calendario vietnamita, 633

cámaras, 303
caminata a beneficencia, 629
capacidad de un gimnasio, **519**, **527**
clubes, 547
códigos de área de telefonía, 39
contaminación del agua, 532
conteo de hilos, 203
conteo de palabras, 52
correo prioritario, 603
cortes de cabello, 283
cortes de energía, 686
coser, 766
costo total, 589
costos unitarios, 801
criptografía, 89
Cruz Roja, 510, 657
desperdicios, 533
días de vacaciones, 77
dibujado de figuras, 255
dibujos a escala, **436**
dinero, 408
directorios telefónicos, 409
discurso de Gettysburg, 111
diseño de estacionamientos, 735
divisibilidad, 509
edredones, 509
edulcorantes, 809
eficiencia de combustible, 620
elevadores, 53, 191
encuestas, 112, 618
encuestas en un lugar de trabajo, 626
ensaladas, **277**
enviar, 281
escaleras de emergencia, 270
estacionamiento, 427
estadidad, 76
estimación 191
extinción de incendios, **748**, 753
ferretería, 282
fiestas, 550
fotografía, 204, 306
fregadores para cocina, **337**
fugitivos, 589
gato para automóviles, 745
genealogía, 592
golosinas, 52
hambruna mundial, 11
herramientas, 256, 494, 776
ibuprofeno, 469
incendios, 631
inspecciones de frenos, 590
Internet, 573
invitaciones para fiesta, 685
jabón Ivory, 512
joyería, 38, 283, 695
lanzamiento de una moneda, 129, **501**
lectura de medidores, 268, 327
lenguajes del mundo, 604
licencia para conducir, 532
lotería, 687
máquinas de fax, 551
marcos para fotografías, 270
mayoría, 232
modelos a escala, **436**
monedas, **351**, 709
música, 220
nacimientos, 512
notas musicales, 256
número perfecto, 89
números cardinales, 111
números primos, 111
palabras de sabiduría, 478
pan francés, **366**
pesos de vehículos, 647
plantado de árboles, 401
Premio Nobel, 702
presión del agua, 193
problema numérico, 707
propina, 841
prueba para la divisibilidad para el 7, 11, 68
pruebas detectoras de mentiras, 205
razones del engranaje, 425
reciclaje, 11
refrescos, **465**
regalos de aniversario, 440
resmas de papel, 355
reuniones, 126
revoluciones de un neumático, **794**
riesgos de incendio, 314
sandías, **501**
segundos en un año, **48**
Segways, 551
servicio social, 704
servicio voluntario, 632
silvicultura, 385
sistema decimal Dewey, 328
sistemas de vida, 67
submarinos, 163, 173, 181, 196, 410
suma-producto de números, 111
suministros para pintar, **419**
tacómetros, 355
tiempo, 67
tornos de banco, 232
tranvías, 202
tubería (PVC), 341
Tylenol, 490

Negocios e industria

abastecimiento, 270, 455
acondicionamientos, 356
acuarios, **95**
afinación, 328
agua embotellada, **64**
alas de pollo, 708
almacenaje de gasolina, **677**
almuerzos escolares, 440, 455
análisis de sistemas, **676**
arreglos de mesas, 69
asfalto, 77
atrasos en la construcción, 704
autocinemas, 122
automóviles, 633
banda de rodamiento, 256
barras de caramelo, 618
barriles, 268
barriles de gasolina, 255
biombos, 633
bloques de concreto, 810
búsqueda de ayuda, 686
cables subterráneos, 240
café, 14, 469
cajeros automáticos, **599**
camiones de carga, 67
camiones de entrega, 254
carnicerías, 370
carniceros, 698
carpintería, 232, 735, 752, 791, 792
chimeneas, 78
cocinar, 440, 840
colocar papel tapiz, 734
comercio electrónico, 356
comidas rápidas, 683, 685
compañías de cómputo, 647
compra de pintura, 455
compra de un negocio, 205
comprar, 120
compras por TV, 551
compuesto a diario, **586**
congeladores, 704
cono de galleta, 833
construcción, **769**, **824**
construcción de departamentos, **676**
construcción de túneles, 71
contabilidad, **562**
control de calidad, 342, 442, 484, **583**
cortes de presupuesto, 182
coser, 283, 295, 301, 312
costo de una bolsa de aire, **517**
costos por sobregiro, 687
costos unitarios, 427
cotizaciones, 203
cremas para la piel, 294
cubiertas solares, 791
cuidado infantil, 532
cuidado médico, 175
cumplimiento de nóminas, 568
daño por humo, 568
daño por incendio, 558
declaraciones de millaje, 355
decoración de interiores, 686
descuentos, 53
desempeño de negocios, 685
despidos, 548
desplazamiento de tierra, 550
diseñadores de ropa, 698
diseños de tablas de surf, **237**
disminución de precios, 181
disminución de ventas, 548
dividir la propina, 558
drenado de albercas, 67
dulce, 28
eBay, 27
embotellado, 469, 488
empacado, 204
envío de muebles, 101, 203
envíos de pizza, **597**
envoltorio plástico con burbujas, 67
estacionamiento, 550
estaciones de esquí en los E.U., 604
estaciones de gasolina, 314
estaciones de radio, 35
estaciones de servicio, 283, 683, 687
etiquetado de productos, 268
fabricación de joyería, 301
felpudos, 76
ferretería, 241
flores, 126
formación de un marco, 776
galerías de arte, 550
garantías de precios, 532
gerencia de comedor de beneficencia, **63**
gimnasios, 592
golosinas, 645
gorras bordadas, 123
granjas de césped, 647
guardería, 427
helado, 27
helipuertos, **797**
herramientas de maquinista, **615**
honorarios de abogados, **680**
honorarios legales, 52
horas extra, **346**, 549
importaciones, 27
impresión, 306
impuesto de autoempleo, 547
infomerciales, 551, 686
joyería, 283, **414**, 469
jugo, 52
lavavajillas, **475**
lectura de medidores, 14
líneas de producción, 646
liofilización, 164
llamadas de larga distancia, **104**
llamados, 205
logotipos, 512
madera, 531
madera laminada, 293
mampostería, **282**
mantequilla de cacahuate, 483
marcos, 790
marcos para fotografías, 707, 752
materiales de construcción, 497
mecánica automotriz, 385
mecanografía, 427
mezcla de perfumes, 441
mezcladoras de cemento, 270
millaje de flotillas, 618
minería, 197, 198
minería de oro, 313
modelado, 646
mudanza, 630
muebles para jardín, 240
muros de contención, 706
música clásica, **678**
negocios pequeños, **677**
noticias, **348**
paisajismo, **771**
pedido de golosinas, 67
perforación mar adentro, 341
periódicos, 547
petróleo crudo, 52, 493
PIB (producto interno bruto), 230
pintado de automóviles, 401
pintado de señalamientos, 734
pintar, 838
pistas de baile, 100

planeación de la producción, 241
portadas de revistas, 254
postres, 810
pozos petroleros, 71, 371
precios en rebaja, 399
precios unitarios, 427
preparación de brownies, 442
preparación de colonias, 441
preparación tipográfica, 14
préstamos para negocios a corto plazo, **562**
producción, 123
producción de plomo y zinc, 603
producción de vehículos, **23**
profundidad de tuberías, 265
promoción de productos, 533
publicidad, 175
radiadores, 455
ramilletes, **97**
rebajas, 182, 532
recibo de las ventas, 548
recibos de nómina, 220
reclamos de seguros, 840
redecoración, 79
relojes, 219
remodelación de un baño, 293
rentas, 52, **519**, **527**
reparto de agua embotellada, 684
repostería, 76, 204, **279**, **437**, 839
reservaciones de hotel, **611**
ropa de cama, 69
salarios de mineros y constructores, 607
salchichas, 122
seguro de vida vitalicio, 550
seguro temporal, 550
señalamientos, 330, 558
six packs, 469
subdivisiones, 270
suministros de repostería, 355
suministros para pintar, 307
superficie habitable, 129
surtido de estantes, 67, 129
tanques, 810
tanques de almacenamiento, **803**
tarifas postales, 294
tasa de pago, 427
tasado, **337**, 341
tazones de sopa, 100
techado, 78
teléfonos inteligentes, 530
telemercadeo, 303
tiempo de producción, 199
tienda de dulces, **234**
tiendas de platos preparados, 294
tornería, 303
trabajo en el turno nocturno, 605
transporte, 76, 488, **610**
turismo, 549
útiles escolares, **97**
veleros, 791
venta de condominios, 219
venta de electrónicos, 634
venta de herramientas, **580**
ventas al por menor, 341
ventas de autos usados, 199
ventas de boletos, 66
ventas de camisetas, 581
ventas de dulces, 530
ventas de helado, 604
ventas de libros, 67
ventas de tiendas, **609**
ventas desde casa, 578
violaciones al código, 587

Política, gobierno y ejército

acondicionamientos, 356
administración del agua, 67
administración pública, **681**
adquisición, 122a
alfombrado, 800
anuncios, 494
barras y estrellas, 231
carreteras, 841
Carta de derechos, 573
ciencia militar, 155
ciudades de E.U., **8**
combustibles alternos, 568
cómo un proyecto de ley se convierte en una ley, **225**
compras, **578**
Consejo de Seguridad de la ONU, 511
conservación, 356
construcción, 114
déficits, 198
déficits presupuestarios, 182
deuda federal, 356
DPNY, 631
elecciones, 231, 533, **643**
elecciones presidenciales, **528**
encuestas, 303
encuestas políticas, 155
energía, 533
escenas del crimen, **682**
estudios del tráfico, 558
fuentes de energía, 608
fuerza policial, 549
gases invernadero, 534
gastos de campaña, 117
gastos gubernamentales, 532
impuestos, 573
incrementos de la población, 589
infracciones de circulación, 607
ingreso gubernamental, 534
inspecciones de seguridad, 558
misiones a Marte, 13
multas de tránsito, **677**
Naciones Unidas, 582
parques nacionales de E.U., **367**
partidos políticos, 219
Pentágono, 746
pérdidas de empleos, 174
PIB, 220
plantas de energía nuclear, 625
población, 68, 313, 356, **505**, 512
poder ejecutivo, 410
política, 197
presidentes, 13
presidentes de E.U., 686
préstamos a interés bajo, 569
presupuesto federal, 191, 194
pruebas detectoras de mentiras, 164
recolección de basura, 79
reglas del senado, 230
regulaciones postales, 478
reservas de energía, 13
reurbanización, 569
Rusia, 174
salario de congresistas, 52
seguridad de puentes, 27
seguridad social, 573
servicio de autobús, 75
subvenciones gubernamentales, **264**
tarifas de estacionamiento, 607
torres de agua, **805**
transporte público, 74
uniones, **502**
uso del agua, 357, 534
viaje en el espacio, 704, 709
votación, 559

Viajes

acampar, 455
accidentes de aerolíneas, **21**
aeropuertos, **3**, 117
ahorro de combustible, 52
altitudes de vuelo, 607
Amazonas, 840
asientos de aerolíneas, 684
aviación, 724
boletos con descuento, 548
camiones, 484
carreteras, 841
cinturones de seguridad, 584
comparación de velocidades, 427
declaraciones de millaje, 356
descuento en hospedaje, 77, 313, 496, 708
direcciones al conducir, 341, 356
equipaje de mano, **416**, **601**
estaciones de servicio, 283
globos aerostáticos, 810
historia, 836
hoteles con descuento, 548
impuesto a la habitación, 548
manejo, **610**
manejo alcoholizado, 511
millaje, 38, 67, 129, 442, 801
millas de trayecto, 605
pasajeros de autobuses, 687
pasaportes, 307
pases de autobús, 550
quejas contra aerolíneas, 426
rendimiento de gasolina, 427, 582
seguridad de aerolíneas, 28
señalamientos de carreteras, 282
señalamientos en carreteras, 511
señalizaciones de millajes, 384
tanques de gasolina, 427
tasas de velocidad, 427
tiempo de viaje, 548
tiempo del trayecto, 632
tiempos compartidos, **64**
trasatlánticos, 840
trayecto al trabajo, **642**
trayectorias de vuelo, 342, 767
trenes, **600**
turismo, 549
urbanismo, 356
verificación de la velocidad, 205
viajar, 53, 76
viajar al extranjero, 549
viaje en avión, 281
vuelos cancelados, 606
viajes, 77, 371
viajes por automóvil, 427
viajes por carretera, 646
viajes en el océano, 683, 687
Washington, D.C., 766

Taller de habilidades de estudio

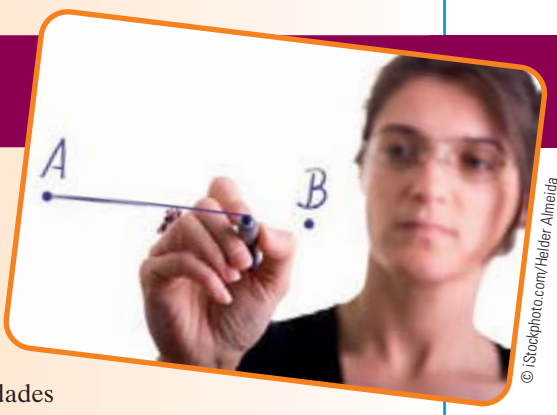
OBJETIVOS

1. Haga el compromiso
2. Prepárese para aprender
3. Administre su tiempo
4. Escuche y tome apuntes
5. Construya un sistema de soporte
6. Haga su tarea
7. Prepárese para el examen

© iStockphoto.com/Aldo Murillo

EL ÉXITO EN SUS CURSOS UNIVERSITARIOS requiere algo más que dominar el contenido. El desarrollo de habilidades de estudio fuertes y los hábitos de trabajo disciplinados también desempeñan una función crucial. El tomar buenos apuntes, el escuchar, el tomar exámenes, el construir equipos y las habilidades de administración del tiempo son hábitos que pueden servirle bien, no sólo en este curso, también a lo largo de su vida y en su carrera futura. Los estudiantes con frecuencia encuentran que el método de aprendizaje que utilizaron para sus clases de preparatoria ya no funciona cuando alcanzan el nivel superior. En este Taller de habilidades de estudio, *se explicarán las maneras en la que se mejoran y afinan sus habilidades de estudio, proveyéndole con la mejor oportunidad para una experiencia universitaria exitosa.*

1 Haga el compromiso



© iStockphoto.com/Helder Almeida

El comenzar un nuevo curso es excitante, pero también puede ser bastante atemorizante. Como cualquier nueva oportunidad, para tener éxito, se requerirá un compromiso de tiempo y recursos. Puede disminuir la ansiedad de este compromiso teniendo un plan para tratar con estas responsabilidades adicionales.

Fije sus objetivos para el curso. Explore las razones del por qué está tomando este curso. ¿Qué espera obtener al completarlo? ¿Es este curso un prerrequisito para otro estudio en matemáticas? Quizás necesita completar este curso para comenzar a tomar trabajo educativo relacionado con su campo de estudio. No importa cuáles sean sus razones, el fijarse objetivos incrementará sus oportunidades de éxito. Establezca su objetivo principal y después divídalo en una serie de objetivos más pequeños; es más fácil lograr una serie de objetivos a corto plazo que enfocarse en un objetivo más grande.

Conserve una actitud positiva. Dado que su nivel de esfuerzo está influido de manera significativa por su actitud, esfuércese en mantener una perspectiva mental positiva a lo largo de la clase. De vez en cuando, recuérdese de las maneras que se beneficiará al pasar el curso. Supere los sentimientos de tensión o la ansiedad matemática con una preparación extra, servicio de soporte en el campus y actividades que disfrute. Cuando logre objetivos a corto plazo como estudiar por un periodo de tiempo específico, aprender un concepto difícil o completar una asignación de tarea, recompénsese pasando tiempo con sus amigos, escuchando música, leyendo una novela o practicando un deporte.

Asista a cada clase. Muchos estudiantes no se dan cuenta que el faltar incluso a una clase puede tener un gran efecto en su calificación. El llegar tarde también toma su cuota. Si sólo llega unos minutos tarde o falta a toda una clase, está arriesgándose a quedarse atrás. Por lo que tome en cuenta estos consejos.

- Llegue a tiempo o un poco más temprano.
- Si debe faltar a una clase, consiga un conjunto de apuntes, las asignaciones de tarea y cualquier folleto que el profesor pudo haber proveído para el día que faltó.
- Estudie el material de cuando se ausentó. Tome ventaja de la ayuda que viene con este libro de texto, como los ejemplos en video y los tutoriales de problemas específicos.

Ahora intente esto

1. Liste seis maneras en las que se beneficiará al pasar este curso.
2. Liste seis objetivos a corto plazo que le ayudarán a lograr su objetivo mayor de pasar este curso. Por ejemplo, pudiera fijar un objetivo de leer por completo el *Taller de habilidades de estudio* dentro de las primeras dos semanas de clases o atender a clases de manera regular y a tiempo. (***Consejo útil:*** Revisite esta línea de acción una vez que haya leído los siete objetivos de aprendizaje del *Taller de habilidades de estudio*.)
3. Liste algunas maneras sencillas en las que puede recompensarse cuando complete uno de sus objetivos de clase a corto plazo.
4. ¡Planee por adelantado! Liste cinco situaciones posibles que pudieran ocasionar que llegue tarde a clase o falte a una clase. (Algunos ejemplos son los retardos por encontrar estacionamiento/tráfico, la falta de una niñera, dormir de más o responsabilidades laborales). ¿Qué puede hacer por adelantado para que estas situaciones no ocasionen que llegue tarde o se ausente?

2 Prepárese para aprender

© iStockphoto.com/Yobro10

Muchos estudiantes creen que existen dos tipos de personas —aquellas que son buenas en matemáticas y aquellas que no lo son— y que esto no puede cambiarse. ¡Esto no es cierto! Puede aumentar sus oportunidades de éxito en las matemáticas tomando tiempo para prepararse y llevando un inventario de sus habilidades de recursos.

Descubra su estilo de aprendizaje. ¿Es un estudiante visual, verbal o auditivo? La respuesta a esta pregunta le ayudará a determinar cómo estudiar, cómo completar su tarea e incluso dónde sentarse en clase. Por ejemplo, los estudiantes visuales-verbales aprenden mejor leyendo y escribiendo; una buena estrategia de estudio para ellos es reescribir los apuntes y ejemplos. Sin embargo, los estudiantes auditivos aprender mejor escuchando, por lo que escuchar los ejemplos en video de los conceptos importante puede ser su mejor estrategia de estudio.

Conozca su libro de texto y sus recursos. Ha realizado una inversión importante en su educación al adquirir este libro y los recursos que le acompañan. Ha sido diseñado con usted en mente. Use tantas de las características y recursos como le sea posible en las maneras que mejor se ajusten a su estilo de aprendizaje.

Conozca lo que se espera. El programa de estudio de su curso define las expectativas de su profesor para el curso. Lea el programa de estudio por completo y asegúrese de comprender todos lo que se requiere. Si algo no está claro, contacte a su profesor para su clarificación.

Organice su cuaderno. Definitivamente apreciará un cuaderno bien organizado cuando llegue el tiempo de estudiar para el examen final. ¡Por lo que comience ahora! Refiérase a su programa de estudio y cree una sección separada en el cuaderno para cada capítulo (o unidad de estudio) que cubrirá su clase este término. Ahora, fije un orden estándar dentro de cada sección. Un orden recomendado es comenzar con sus apuntes de clase, seguido por sus asignaciones de tarea completadas, después cualquier hoja de estudio o folleto y, por último, todos los cuestionarios y exámenes calificados.

Ahora intente esto

1. Para determinar qué tipo de estudiante es, tome la *Encuesta de estilo de aprendizaje* en http://www.metamath.com/multiple/multiple_choice_questions.html. También puede tomar el *Índice del cuestionario de los estilos de aprendizaje* en http://www.engr.ncsu.edu/learningstyles/ilsweb.html, el cual le ayudará a determinar su tipo de aprendizaje y le ofrecerá sugerencias de estudio por tipo. Liste qué aprendió al tomar estas encuestas. ¿Cómo utilizará esta información para ayudarse a tener éxito en clase?
2. Complete las *Listas de comprobación de las habilidades de estudio* encontradas al final de las secciones 1–4 del Capítulo 1 para familiarizarse con varias de las características que pueden mejorar su experiencia de aprendizaje al utilizar este libro.
3. Lea por completo la lista de los Recursos del estudiante que se encuentra en el Prefacio de este libro. ¿Cuáles utilizará en esta clase?
4. Lea por completo su programa de estudio y escriba cualquier pregunta que le gustaría que le respondiera su profesor.
5. Organice su cuaderno utilizando la guía proporcionada arriba. Coloque su programa de estudio al inicio de su cuaderno para que pueda ver las fechas en las que se cubrirá el material y para una referencia fácil a lo largo del curso.

3 Administre su tiempo

© iStockphoto.com/Yiannos Ioannou

Ahora que ha comprendido la importancia de asistir a clases, ¿cómo tomará el tiempo para estudiar lo que ha aprendido mientras asistía? De manera muy similar a aprender a tocar el piano, las habilidades matemáticas se aprenden mejor practicando un poco todos los días.

Haga tiempo. En general, se recomienda 2 horas de tiempo de estudio independiente por cada hora en el salón de clases. Si está en clases 3 horas por semana, planee 6 horas por semana para repasar sus apuntes y completar su tarea. Es mejor programar este tiempo a lo largo de la semana que tratar de atestarse en uno o dos días de estudios maratónicos.

Priorice y haga un calendario. Debido a que la práctica diaria es muy importante al aprender matemáticas, es una buena idea fijar un calendario que liste el tiempo de todos sus compromisos, al igual que el tiempo que necesitará reservar para estudiar y realizar su tarea. Considere cómo pasar su tiempo cada semana y priorice sus tareas por importancia. Durante el término escolar, puede necesitar reducir o incluso eliminar ciertas tareas no esenciales para lograr los objetivos para el término.

Maximice sus esfuerzos de estudio. Utilizando la información que aprendió al determinar su estilo de aprendizaje, fije sus bloques de tiempo de estudio para que obtenga lo más posible de estas sesiones. ¿Estudia mejor en grupo o necesita estudiar solo para hacer cualquier cosa? ¿Aprende mejor cuando programa su tiempo de estudio en bloques de 30 minutos o necesita al menos una hora antes de que la información le llegue? Considere su estilo de aprendizaje para fijar un calendario que en realidad se adecue a sus necesidades.

Evite distracciones. Entre enviar mensajes de texto y las redes sociales, se tienen muchas oportunidades de distracción y desidia. Además de estas, existen las distracciones de la TV, videojuegos y amigos que lo detienen para salir. Una vez que ha fijado su calendario, respete sus tiempos de estudio apagando cualquier dispositivo electrónico y dejando que su correo de voz tome los mensajes. Después de este tiempo, puede recompensarse regresando las llamadas telefónicas y los mensajes o pasando tiempo con sus amigos después que se haya ido la presión del estudio.

Ahora intente esto

1. Mantenga un registro de cómo gasta su tiempo por una semana. Clasifique cada actividad en una escala de 1 (no importante) a 5 (muy importante). ¿Hay alguna actividad que necesite reducir o eliminar para tener el tiempo suficiente para estudiar este término?
2. Liste tres maneras en las que puede aprender mejor de acuerdo con su estilo de aprendizaje. ¿Cómo puede utilizar esta información cuando fija su calendario de estudio?
3. Descargue *Weekly Planner Form* de www.cengage.com/math/tussy y complete su calendario. Si lo prefiere, puede fijar un calendario del Google Calendar (calendar.google.com), www.rememberthemilk.com o su sistema de correo. Varios de éstos tienen la habilidad de configurar recordatorios útiles o listas por hacer, además de un calendario semanal.
4. Liste tres maneras en las que se distrae con mayor frecuencia. ¿Qué puede hacer para evitar estas distracciones durante sus tiempos de estudio programados?

4 Escuche y tome apuntes

© iStockphoto.com/Jacob Wackerhausen

Haga buen uso de su tiempo de clase escuchando y tomando apuntes. Debido a que su profesor le proporcionará explicaciones y ejemplos que pueden no encontrarse en su texto, al igual que otra información acerca de su curso (fechas de examen, asignaciones de tarea, etc.), es importante que lleve un registro escrito de lo que se dijo en clase.

Escuche de manera activa. El escuchar en clase es diferente de escuchar en situaciones sociales debido a que requiere que sea un oyente *activo*. Dado que es imposible escribir todo lo que se dice en clase, necesita ejercitar sus habilidades de escucha activa para aprender a escribir lo que es *importante.* Puede localizar material importante escuchando pistas de su profesor. Por ejemplo, pausas en las lecturas o enunciados de su profesor como "Esto es realmente importante" o "Esta es una pregunta que aparece con frecuencia en los exámenes" como indicaciones de lo que debe prestar especial atención. Escuche con un lápiz (o marcador) a mano, listo para registrar o resaltar (en su libro de texto) cualquier ejemplo, definición o concepto que explique su profesor.

Tome apuntes que puede utilizar. No se preocupe acerca de hacer que sus apuntes sean realmente impecables. Después de clase puede volver a escribirlos en un formato que le sea más útil. Sin embargo, debe organizar sus apuntes tanto como sea posible a medida que los escribe. Copie los ejemplos que utiliza su profesor en clase. Encierre en un círculo o en una estrella cualquier concepto clave o definición que su profesor menciones mientras explica el ejemplo. Después, sus problemas de tarea parecerán como los ejemplos proporcionados en clase, por lo que asegúrese de copiar cada uno de los pasos a detalle.

Escuche con mente abierta. Aun si se presentan conceptos que siente que ya conoce, manténgase atento a la presentación del material y busque una comprensión más profunda de éste. Si el material que se está presentando es algo que ha sido difícil para usted, escuche con mente abierta; su nuevo profesor puede tener una presentación fresca que funcione para usted.

Evite distracciones en el salón de clases. Algunas cosas pueden distraerle de su tiempo de estudio, y a otras, en clase. Debido a esto, asegúrese de apagar su teléfono celular durante la clase. Si toma apuntes en una laptop, desconéctese de su correo electrónico y de los sitios sociales durante la clase. Además de estas distracciones, evite entrar en conversaciones con otros estudiantes. Aun si siente que sólo se distrajo por unos cuantos minutos, pudo haberse perdido pistas verbales o de lenguaje corporal importantes acerca de un examen próximo o sugerencias que le ayudarán en la comprensión de un concepto.

Ahora intente esto

1. Antes de su siguiente clase, consulte el programa de estudio y lea la(s) sección(es) que se cubrirá(n). Haga una lista de los términos que pronostique que su profesor pensará que son los más importantes.
2. Durante su siguiente clase, lleve su libro de texto y manténgalo abierto en las secciones que se estén cubriendo. Si su profesor menciona una definición, un concepto o un ejemplo que se encuentre en su texto, márquelo.
3. Encuentre al menos un compañero de clase con quién pueda repasar apuntes. Haga una cita para comparar sus apuntes de clase tan pronto como sea posible después de ésta. ¿Encontró diferencias en sus apuntes?
4. Entre en www.cengage.com/math/tussy y lea el folleto *Reworking Your Notes*. Complete las líneas de acción proporcionadas en este documento.

5 Construya un sistema de soporte

© iStockphoto.com/Chris Schmidt

¿Alguna vez ha tenido la experiencia de que comprende todo lo que su profesor está diciendo en clase, sólo para irse a casa y tratar un problema de tarea y quedarse estupefacto? Esta es una queja común entre los estudiantes de matemáticas. La clave para ser un estudiante de matemáticas exitoso es tener cuidado de estos problemas antes de que aborde nuevo material. Este es el porqué debe conocer qué recursos están disponibles fuera de clase.

Haga buen uso de las horas de oficina de su profesor. El propósito de las horas de oficina de su profesor es que esté disponible para ayudar a los estudiantes con dudas. Por lo regular estas horas se listan en su programa de estudio y no se necesita de una cita. Cuando visite a su profesor, tenga una lista de preguntas y trate de puntualizar exactamente en qué parte del proceso se está atorando. Esto ayudará a su profesor a responder sus preguntas de manera eficiente.

Use los servicios de tutoría del campus. Muchas universidades ofrecen servicios de tutoría por una cuota. En ocasiones la asistencia al tutorial está disponible en un ambiente de laboratorio donde será capaz de llegar a su conveniencia. En algunos casos, necesita hacer una cita para ver a un tutor. Asegúrese de buscar ayuda tan pronto como reconozca la necesidad y visite a su tutor con una lista de los problemas identificados.

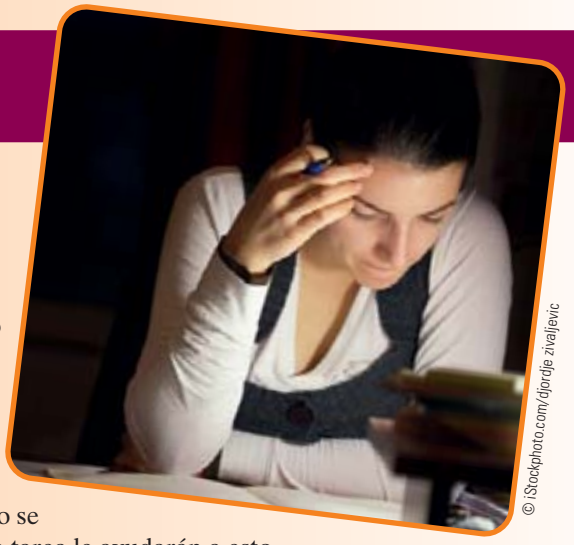
Forme un grupo de estudio. Los grupos de estudio son grupos de compañeros de clase que se juntan fuera de la clase para discutir problemas de tarea o estudiar para los exámenes. Obtenga lo más que pueda de su grupo de estudio siguiendo estas guías:

- Mantenga un grupo pequeño —un máximo de cuatro estudiantes comprometidos. Fije un calendario regular para el día, tiempo y lugar.
- Encuentre un lugar para juntarse donde pueda hablar y presentar detalladamente su trabajo.
- Los miembros deben intentar todos los problemas de tarea antes de juntarse.
- Todos los miembros deben contribuir a la discusión.
- Cuando se junten, practiquen verbalizar y explicar problemas y conceptos entre sí. La mejor manera de aprender realmente un tema es enseñándoselo a alguien más.

Ahora intente esto

1. Refiérase a su programa de estudio. Remarque las horas de oficina de su profesor y la localización. Después, visite a su profesor durante horas de oficina esta semana y preséntese. (***Consejo útil:*** Programe el número telefónico de la oficina de su profesor y la dirección de correo electrónico en su teléfono celular o en la lista de contactos de su correo electrónico.)
2. Localice el centro de tutoría o el laboratorio de matemáticas de su campus. Escriba las horas de oficina, el número de teléfono y la localización en su programa de estudio. Vaya o llámelos y encuentre cómo programar una cita con un tutor.
3. Encuentre dos o tres compañeros de clase que estén disponibles para juntarse a una hora que se ajuste a su agenda. Planee juntarse 2 días antes de que venza su siguiente asignación de tarea y siga las guías proporcionadas antes. Después que el grupo se haya juntado, evalúe qué tan bien funcionó. ¿Hay algo que el grupo pueda realizar para hacerlo mejor la próxima vez que se junten?
4. Descargue *Support System Worksheet* en www.cengage.com/math/tussy. Complete la información y consérvela en la parte frontal de su cuaderno después de su programa de estudio.

6 Haga su tarea



© iStockphoto.com/djordje zivaljevic

El asistir a clases y tomar apuntes es importante, pero la única manera en la que realmente aprenderá matemáticas es haciendo su tarea. El sentarse en clase y escuchar las cátedras le ayudará a colocar los conceptos en la memoria a corto plazo, pero para hacerlo bien en los exámenes y en las clases de matemáticas futuras, debe colocar estos conceptos en la memoria a largo plazo. Cuando se completan con regularidad, las asignaciones de tarea le ayudarán a esto.

Dése el tiempo suficiente. En el Objetivo 3, hizo un calendario de estudio, reservando 2 horas para el estudio y la tarea por cada hora que pasa en clase. Si no está siguiendo este calendario, realice cambios para asegurarse que pueda pasar el tiempo suficiente fuera de la clase para aprender el material nuevo.

Repase sus apuntes y los ejemplos resuelto de su texto. En el Objetivo 4, aprendió cómo tomar apuntes útiles. Antes de comenzar su tarea, repase o vuelva a escribir sus apuntes. Después, lea las secciones en su libro de texto que se relacionan con sus problemas de tarea, prestando especial atención a los ejemplos resueltos. Con un lápiz a mano, trabaje los problemas de *Auto-revisión* e *Inténtelo* que estén listados al lado de los ejemplos en su texto. Utilizando el ejemplo resuelto como guía, resuelva estos problemas y trate de comprender cada paso. A medida que lea por completo sus apuntes y su texto, haga una lista de todo lo que no comprenda.

Ahora intente sus problemas de tarea. Una vez que ha repasado sus apuntes y los ejemplos resueltos del libro de texto, debe ser capaz de manejar de manera exitosa la mayor parte de su asignación de tarea. Cuando trabaje en su tarea, tenga su libro de texto y sus apuntes cerca. Si tiene problemas con una pregunta de tarea, busque en su libro de texto y en sus apuntes para ver si puede identificar un ejemplo que sea similar a la pregunta de tarea. Vea si puede aplicar los mismos pasos a su problema de tarea. Si hay partes en las que se atore, añada estas a su lista de preguntas.

Obtenga las respuestas a sus preguntas. Al menos un día antes de que se venza su asignación, busque ayuda con las preguntas que ha estado listando. Puede contactar un compañero de clase para ayuda, hacer una cita con un tutor o visitar a su profesor durante horas de oficina.

Ahora intente esto

1. Repase su calendario de estudio. ¿Lo está siguiendo? Si no, ¿qué cambios puede hacer para adherirse a la regla de 2 horas de tarea y estudio por cada hora de clase?
2. Encuentre cinco problemas de tarea que sean similares a los ejemplos resueltos en su libro de texto. ¿Hubo algún problema de tarea en su asignación que no tenía un ejemplo resuelto que fuera similar? (***Consejo útil:*** Busque las características de *Inténtelo* y *Práctica guiada* para ayudarle a relacionar los problemas con ejemplos resueltos).
3. Como se sugiere en este Objetivo, haga una lista de preguntas mientras completa su tarea. Visite a su tutor o a su profesor con su lista de preguntas y realice una de ellas para que trabaje a través de estos problemas con usted.
4. Entre a www.cengage.com/math/tussy y lea el folleto *Study and Memory Techniques*. Liste las técnicas que le serán de mayor utilidad en su curso de matemáticas.

7 Prepárese para el examen

Imagen copyright Cristian M, 2009. Utilizada bajo licencia de Shutterstock.com

El tomar un examen no necesita ser una experiencia desagradable. Use su administración del tiempo, organización y estas estrategias para la toma de exámenes para hacer de esto una experiencia de aprendizaje y mejorar su calificación.

Haga tiempo para prepararse. Programe al menos cuatro sesiones de 1 hora para prepararse específicamente para su examen.

Cuatro días antes del examen: Cree su propia hoja de estudio utilizando sus apuntes. Imagine que pudiera llevar una hoja de papel de $8\frac{1}{2} \times 11$ a su examen. ¿Qué escribiría en esa hoja? Incluya todas las definiciones clave, reglas, pasos y fórmulas que se explicaron en clase o cubrió en su lectura. Siempre que tenga la oportunidad, saque su hoja de estudio y repase su material para el examen.

Tres días antes del examen: Cree un examen de muestra utilizando los ejemplos de sus apuntes de clase y leyendo el material. A medida que repase y resuelva estos ejemplos, asegúrese de comprender cómo se relaciona cada ejemplo con las reglas o definiciones en su hoja de estudio. Mientras soluciona estos ejemplos, puede encontrar que olvidó un concepto que debe estar en su hoja de estudio. Actualice su hoja de estudio y continúe repasándola.

Dos días antes del examen: Use el *Examen del capítulo* de su libro de texto o cree uno relacionando los problemas de su texto con los tipos de ejemplos de su examen muestra. Ahora, con su libro cerrado, tome un examen de prueba cronometrado. Cuando lo haya hecho, compruebe sus respuestas. Haga una lista de los temas que sean difíciles para usted y repase o añádalos a su hoja de estudio.

Un día antes del examen: Repase su hoja de estudio una vez más, prestando especial atención al material que fue difícil cuando tomó su examen de práctica un día antes. Asegúrese de tener disponibles todos los materiales que necesitará para su examen (dos lápices con punta, un buen borrador, posiblemente una calculadora o un transportador, etc.). Lo más importante que puede hacer hoy es tener una buena noche de sueño.

El día del examen: Repase su hoja de estudio, si tiene tiempo. Enfóquese en qué tan bien se ha preparado y tome un momento para relajarse. Cuando tome su examen, complete primero los problemas de los que está seguro. Sáltese los problemas que no comprenda de inmediato y regrese a ellos más adelante. Lleve un reloj o asegúrese que haya algún dispositivo para llevar el tiempo en su salón de clases para que pueda saber cuánto le queda. Trate de no pasar mucho tiempo en un problema.

Ahora intente esto

1. Cree un calendario de estudio utilizando la guía proporcionada antes.
2. Lea el folleto *Preparing for a Test* en www.cengage.com/math/tussy.
3. Lea el folleto *Taking the Test* en www.cengage.com/math/tussy.
4. Después que le hayan regresado y calificado su examen, lea el folleto *Analyzing Your Test Results* en www.cengage.com/math/tussy.
5. Tome su tiempo para reflexionar sobre su hábitos de tarea y estudio después de haber recibido su calificación del examen. ¿Cuáles acciones están funcionando bien para usted? ¿En cuáles necesita mejorar?
6. Para prepararse para su examen final, lea el folleto *Preparing for Your Final Exam* en www.cengage.com/math/tussy. Complete las líneas de acción proporcionadas en este documento.

1

Números naturales

1.1 Introducción a los números naturales

1.2 Suma de números naturales

1.3 Resta de números naturales

1.4 Multiplicación de números naturales

1.5 División de números naturales

1.6 Resolución de problemas

1.7 Factores primos y exponentes

1.8 Mínimo común múltiplo y máximo factor común

1.9 Orden de las operaciones

Resumen y repaso

Examen

Comstock Images/Getty Images

Carreras del campus

Paisajista

Los paisajistas hacen que los lugares exteriores sean más hermosos y útiles. Trabajan en todo tipo de proyectos. Algunos se enfocan en jardines y parques, otros en la tierra alrededor de edificios y carreteras. La preparación de un paisajista debe incluir clases de botánica para aprender acerca de las plantas; clases de arte para aprender acerca del color, línea y forma; y clases de matemáticas para aprender a tomar mediciones y mantener registros de trabajo.

En el **Problema 57** de **Espacio para el estudio 1.6,** verá cómo un paisajista emplea la suma y la multiplicación de números naturales para calcular el costo del paisaje de un jardín.

CARGO LABORAL:
Paisajista

EDUCACIÓN: Licenciado en paisajismo. La mayoría de los estados exige una licencia.

PERSPECTIVA LABORAL: Excelente

INGRESOS ANUALES: Los salarios van de $45,000-$70,000.

PARA MÁS INFORMACIÓN:
www.ashs.org/careers/profiles/landscape.lasso

Objetivos

1. Identificar el valor posicional de un dígito en un número natural.
2. Escribir números naturales en palabras y en forma estándar.
3. Escribir un número natural en forma expandida.
4. Comparar números naturales utilizando símbolos de desigualdad.
5. Redondear números naturales.
6. Leer tablas y gráficas que involucran números naturales.

SECCIÓN 1.1
Introducción a los números naturales

Los **números naturales** son 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, y así sucesivamente. Se utilizan para responder preguntas como ¿cuánto?, ¿qué tan rápido? y ¿qué tan lejos?

- La película *Titanic* ganó 11 premios de la academia.
- El estadounidense adulto promedio lee a una velocidad de 250 a 300 palabras por minuto.
- La distancia de conducción de la ciudad de Nueva York a Los Ángeles es de 2,786 millas.

El *conjunto de números naturales* se escribe utilizando **llaves { }**, como se muestra abajo. Los tres puntos indican que la lista continúa por siempre —no existe el número natural más grande. El número natural más pequeño es el 0.

El conjunto de números naturales

{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, . . .}

1 Identificar el valor posicional de un dígito en un número natural

Cuando se escribe un número natural utilizando los **dígitos** 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, se dice que está en la **forma estándar** (también llamada **notación estándar**). La posición de un dígito en un número natural determina su **valor posicional.** En el número 325, el 5 está en la *columna de las unidades*, el 2 está en la *columna de las decenas* y el 3 está en la *columna de las centenas*.

Columna de las decenas
Columna de las centenas — Columna de las unidades
3 2 5

Para hacer que los números naturales grandes sean más fáciles de leer, se emplean comas para separar sus dígitos en grupos de tres, llamados **periodos.** Cada periodo tiene un nombre, como *unidades, millares, millones, millares de millones* y *billones*. La siguiente **gráfica de valor posicional** muestra el valor posicional de cada dígito en el número 2,691,537,557,000, el cual se lee como:

Dos billones, seiscientos noventa y un mil, quinientos treinta y siete millones, quinientos cincuenta y siete mil

© Elena Yakusheva, 2009. Used under license from Shutterstock.com

En el 2007, el gobierno federal recolectó un total de 2,691,537,557,000 en impuestos. (Fuente: Internal Revenue Service.)

Cada uno de los 5 en 2,691,537,557,000 tiene un valor posicional diferente debido al lugar que ocupan respecto a los otros números. El valor posicional del 5 rojo es de 5 *centenas de millones*. El valor posicional del 5 azul es de 5 *centenas de millares* y el valor posicional del 5 verde es de 5 *decenas de millares*.

El lenguaje de las matemáticas A medida que se recorre a la izquierda de la gráfica, el valor posicional de cada columna es 10 veces mayor que la columna directamente a su derecha. Por esta razón se le llama a nuestro sistema de numeración *sistema numérico de base 10.*

EJEMPLO 1 ***Aeropuertos*** El aeropuerto internacional de Atlanta Hartsfield-Jackson es el más ocupado en los Estados Unidos, manejando 89,379,287 pasajeros en el 2007. (Fuente: Airports Council International–North America.)

a. ¿Cuál es el valor posicional del dígito 3?
b. ¿Cuál dígito indica el número de millones?

Estrategia Se comenzará en la columna de las unidades de 89,379,287. Después, moviéndose a la izquierda, se nombrará cada columna (unidades, decenas, centenas, y así sucesivamente) hasta alcanzar el dígito 3.

POR QUÉ Es más sencillo recordar los nombres de las columnas si comienza con el valor posicional más pequeño y moviéndose a las columnas que tienen valores posicionales mayores.

Solución

a. 89,379,287

Diga "Unidades, decenas, centenas, millares, decenas de millares, centenas de millares" a medida que se mueve de columna a columna.

3 centenas de millares es el valor posicional del dígito 3.

b. 89,379,287

El dígito 9 está en la columna de los millones.

El lenguaje de las matemáticas Cada uno de los ejemplos resueltos en este libro incluye una *Estrategia* y una explicación del *Porqué*. Una *estrategia* es un plan de acción a seguir para resolver el problema dado.

Auto-revisión 1

TELÉFONOS CELULARES En el 2007 había 255,395,600 suscriptores de telefonía celular en Estados Unidos (Fuente: Unión internacional de telecomunicaciones)

a. ¿Cuál es el valor posicional del dígito 2?
b. ¿Cuál dígito indica el número de centenas de millares?

Ahora intente **Problema 23**

2 Escribir números naturales en palabras y en forma estándar

Dado que los números naturales se utilizan con frecuencia en nuestras vidas diarias, es importante ser capaz de leerlos y escribirlos.

Lectura y escritura de números naturales

Para escribir un número natural en palabras, comience desde la izquierda. Escriba el número en cada periodo seguido por el nombre del periodo (excepto para el *periodo de las unidades,* lo cual no se emplea). Utilice comas para separar los periodos.

Para leer en voz alta un número natural, siga el mismo procedimiento. Las comas se leen como pequeñas pausas.

El lenguaje de las matemáticas La palabra *y* no se pronuncia cuando se lee un número natural. Sólo debe utilizarse cuando se lee un número mixto como $5\frac{1}{2}$ (cinco *y* un medio) o un decimal como 3.9 (tres *y* nueve décimas).

EJEMPLO 2 Escriba cada número en palabras:

a. 63 **b.** 499 **c.** 89,015 **d.** 6,070,534

Estrategia Para los números más grandes en los incisos c y d, se nombrarán los periodos de derecha a izquierda para hallar el periodo *más grande*.

POR QUÉ Para escribir un número natural en palabras, se debe dar el nombre de cada periodo (excepto para el periodo de las unidades). Encontrar el periodo más grande ayuda a comenzar el proceso.

Solución

a. 63 se escribe: *sesenta y tres.*

Use la palabra *y* para escribir los números de 31 a 99 en palabras (excepto para 30, 40, 50, 60, 70, 80 y 90).

b. 499 se escribe: *cuatrocientos noventa y nueve.*

Auto-revisión 2

Escriba cada número en palabras:

a. 42
b. 798
c. 97,053
d. 23,000,017

Ahora intente **Problemas 31, 33 y 35**

c. Millares Unidades — Diga los nombres de los periodos, empezando de derecha a izquierda.

89 , 015

Ochenta y nueve **mil, quince** — No use la palabra *y* para escribir los números entre 1 y 20, como el 15. El periodo de las unidades no se escribe.

d. Millones Millares Unidades — Diga los nombres de los periodos, empezando de derecha a izquierda.

6 , 0 7 0 , 5 3 4

Seis **millones**, setenta **mil, quinientos** treinta y cuatro. — El periodo de las unidades no se escribe.

¡Cuidado! Dos números, 40 y 90, con frecuencia se pronuncian mal: se escriben *cuarenta* (*no cuatronta*) y *noventa* (*no nueventa*).

Auto-revisión 3

Escriba cada número en forma estándar:

a. *Doscientos tres mil, cincuenta y dos*

b. *Novecientos cuarenta y seis millones, cuatrocientos dieciséis mil, veintidós*

c. *Tres millones, quinientos setenta y nueve*

Ahora intente **Problemas 39 y 45**

EJEMPLO 3

Escriba cada número en forma estándar:

a. *Doce mil, cuatrocientos setenta y dos*

b. *Setecientos un millones, treinta y seis mil, seis*

c. *Cuarenta y tres millones, sesenta y ocho*

Estrategia Se localizarán las comas en la forma escrita en palabras de cada número.

POR QUÉ Cuando se escribe en palabras un número natural, se emplean comas para separar los periodos.

Solución

a. Doce mil , cuatrocientos setenta y dos

12, 472

b. Setecientos un millones , treinta y seis mil , seis

701,036,006

c. Cuarenta y tres millones , sesenta y ocho — La forma escrita en palabras no menciona el periodo de los millares.

43,000,068 — Si no se nombra un periodo, se colocan tres ceros en su lugar.

Consejo útil Los números naturales de cuatro dígitos se escriben en ocasiones sin una coma. Por ejemplo, se puede escribir 3,911 o 3911 para representar el tres mil, novecientos once.

3 Escribir un número natural en forma expandida

En el número 6,352, el dígito 6 está en la columna de los millares, el 3 está en la columna de las centenas, el 5 está en la columna de las decenas y el 2 está en la columna de las unidades. El significado del 6,352 se vuelve claro cuando se escribe en **forma expandida** (también llamada **notación expandida**).

6,352 = 6 millares + 3 centenas + 5 decenas + 2 unidades

o

6,352 = 6,000 + 300 + 50 + 2

EJEMPLO 4 Escriba cada número en forma expandida:

a. 85,427 **b.** 1,251,609

Estrategia Comenzar de izquierda a derecha, le proporcionará el valor posicional de cada dígito y combínelos con símbolos +.

POR QUÉ El término *forma expandida* significa escribir el número como una suma de los valores posicionales de cada uno de sus dígitos.

Solución

a. La forma expandida de 85,427 es:

8 decenas de millares + **5** millares + **4** centenas + **2** decenas + **7** unidades

lo cual puede escribirse como:

80,000 + **5**,000 + **4**00 + **2**0 + **7**

b. La forma expandida de 1,251,609 es:

1 millón + **2** centenas de millares + **5** decenas de millares + **1** millar + **6** centenas + **0** decenas + **9** unidades

Dado que 0 decenas es cero, la forma expandida también puede escribirse como:

1 millón + **2** centenas de millares + **5** decenas de millares + **1** millar + **6** centenas + **9** unidades

lo cual puede escribirse como:

1,000,000 + **2**00,000 + **5**0,000 + **1**,000 + **6**00 + **9**

Auto-revisión 4

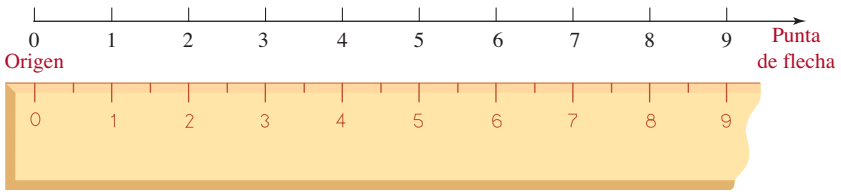
Escriba el 708,413 en forma expandida.

Ahora intente **Problemas 49, 53 y 57**

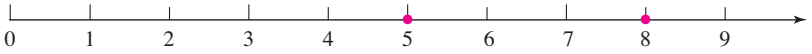
4 Comparar números naturales utilizando símbolos de desigualdad

Los números naturales pueden mostrarse dibujando puntos sobre una **recta numérica.** Como en una regla, una recta numérica tiene marcas uniformemente separadas. Para construir una recta numérica, se comienza a la izquierda con un punto en la recta que representa el número 0. A este punto se le llama **origen.** Después se mueve a la derecha, dibujando marcas espaciadas de manera equitativa y etiquetándolas con números naturales con valores crecientes. La punta de flecha a la derecha indica que la recta numérica continúa por siempre.

Una recta numérica



Utilizando el proceso conocido como **graficación,** se puede representar un solo número o un conjunto de números en una recta numérica. La **gráfica de un número** es el punto en la recta numérica que corresponde a ese número. *Graficar un número* significa localizar su posición en la recta numérica y remarcarlo con un punto grueso. En la recta numérica de abajo se muestran las gráficas del 5 y del 8.



A medida que se mueve a la derecha en la recta numérica, los números aumentan en valor. Debido a que el 8 se encuentra a la derecha del 5, se dice que el 8 es mayor que el 5. El **símbolo de desigualdad** $>$ (“es mayor que”) puede emplearse para escribir este hecho:

$8 > 5$ *Se lee como “el 8 es mayor que el 5”.*

Dado que $8 > 5$, también es verdadero que $5 < 8$. Esto se lee como “el 5 es menor que el 8”.

Símbolos de desigualdad

$>$ significa *es mayor que*
$<$ significa *es menor que*

Consejo útil Para observar la diferencia entre estos dos símbolos de desigualdad, recuerde que siempre apuntan al menor de los dos números involucrados.

$8 > 5$ $\qquad$ $5 < 8$

Apunta al número más pequeño

Auto-revisión 5

Coloque un símbolo $<$ o $>$ en el recuadro para formar un enunciado verdadero:

a. 12 ☐ 4

b. 7 ☐ 10

Ahora intente **Problemas 59 y 61**

EJEMPLO 5 Coloque un símbolo $<$ o $>$ en el recuadro para formar un enunciado verdadero: **a.** 3 ☐ 7 **b.** 18 ☐ 16

Estrategia Para elegir el símbolo de desigualdad correcto a colocar entre un par de números, se necesita determinar la posición de cada número en la recta numérica.

POR QUÉ Para dos números cualesquier en una recta numérica, el número a la *izquierda* es el número menor y el número a la *derecha* es el número mayor.

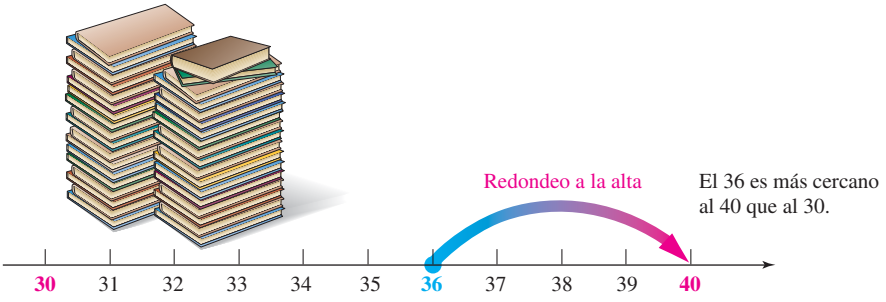
Solución

a. Dado que el 3 está a la izquierda del 7 en la recta numérica, se tiene $3 < 7$.

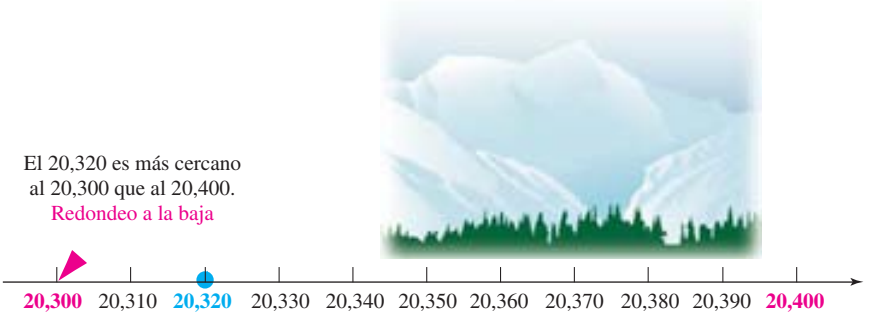
b. Dado que el 18 está a la derecha del 16 en la recta numérica, se tiene $18 > 16$.

5 Redondear números naturales

Cuando no se necesitan resultados exactos, con frecuencia se redondean los números. Por ejemplo, cuando un profesor con 36 estudiantes ordena 40 libros de texto, ha redondeado el número real a la *decena más cercana,* debido a que el 36 es más cercano al 40 que al 30. Se dice que el 36, redondeado a la decena más cercana, es 40. A este proceso se le llama **redondeo a la alta.**



Cuando una geóloga dice que la altura del Monte McKinley en Alaska es de "alrededor de 20,300 pies", ha redondeado a la *centena más cercana,* debido a que su altura real de 20,320 pies es más cercana al 20,300 que al 20,400. Se dice que el 20,320, redondeado a la centena más cercana, es 20,300. A este proceso se le llama **redondeo a la baja.**



El lenguaje de las matemáticas Cuando se redondea un número natural, se encuentra una *aproximación* del número. Una *aproximación* es cercana al, pero no igual que, valor exacto.

Para redondear un número natural, se sigue un conjunto establecido de reglas. Por ejemplo, para redondear un número a la decena más cercana se localiza el **dígito a redondear** en la columna de las decenas. Si el **dígito a examinar** a la derecha de la columna (el dígito en la columna de las unidades) es 5 o mayor, se *redondea a la alta* incrementando el dígito de las decenas en 1 y reemplazando el dígito a examinar con 0. Si el dígito a examinar es menor a 5, se *redondea a la baja* dejando el dígito de las decenas sin cambiar y reemplazando el dígito a examinar con 0.

EJEMPLO 6

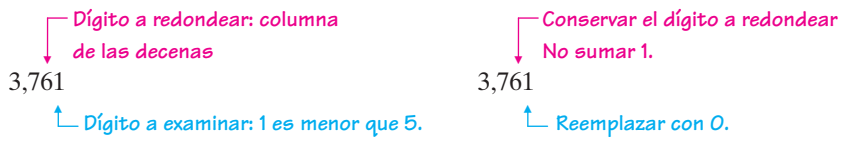
Redondee cada número a la decena más cercana: **a.** 3,761 **b.** 12,087

Estrategia Se encontrará el dígito en la columna de las decenas y el dígito en la columna de las unidades.

POR QUÉ Para redondear a la decena más cercana, el dígito en la columna de las decenas es el dígito a redondear y el dígito en la columna de las unidades es el dígito a examinar.

Solución

a. Se encuentra el dígito a redondear en la columna de las decenas, el cual es el 6. Después se busca el dígito a examinar a la derecha del 6, el cual es el 1 en la columna de las unidades. Dado que $1 < 5$, se redondea a la baja dejando el 6 sin cambiar y reemplazando el dígito a examinar con 0.



Por tanto, el 3,761 redondeado a la decena más cercana es 3,760.

b. Se encuentra el dígito a redondear en la columna de las decenas, el cual es el 8. Después se busca el dígito a examinar a la derecha del 8, el cual es el 7 en la columna de las unidades. Debido a que el 7 es 5 o mayor, se redondea a la alta sumando 1 al 8 y reemplazando el dígito a examinar con 0.

Por tanto, el 12,087 redondeado a la decena más cercana es 12,090.

Se utiliza un método similar para redondear números a la centena más cercana, al millar más cercano, a la decena de millar más cercana, y así sucesivamente.

Redondeo de un número natural

1. Para redondear un número a un cierto valor posicional, localice el **dígito a redondear** en esa posición.
2. Busque el **dígito a examinar,** el cual está directamente a la derecha del dígito a redondear.
3. Si el dígito a examinar es 5 o mayor, redondee a la alta sumando 1 al dígito a redondear y reemplazando todos los dígitos a su derecha con 0.

   Si el dígito a examinar es menor que 5, reemplace éste y todos los dígitos a su derecha con 0.

EJEMPLO 7

Redondee cada número a la centena más cercana: **a.** 18,349 **b.** 7,960

Estrategia Se encontrará el dígito a redondear en la columna de las centenas y el dígito a examinar en la columna de las decenas.

Auto-revisión 6

Redondee cada número a la decena más cercana:
a. 35,642
b. 9,756

Ahora intente **Problema 63**

Auto-revisión 7

Redondee el 365,283 a la centena más cercana.

Ahora intente **Problemas 69 y 71**

POR QUÉ Para redondear a la centena más cercana, el dígito en la columna de las centenas es el dígito a redondear y el dígito en la columna de las decenas es el dígito a examinar.

Solución

a. Primero, se encuentra el dígito a redondear en la columna de las centenas, el cual es el 3. Después se busca el dígito a examinar 4 a la derecha del 3 en la columna de las decenas. Debido a que $4 < 5$, se redondea a la baja y se deja el 3 en la columna de las centenas. Después se reemplazan los dos dígitos más a la derecha con 0.

Dígito a redondear: columna de las centenas

18,349

Dígito a examinar: 4 es menor que 5.

Conservar el dígito a redondear. No sumar 1.

18,349

Reemplazar con 0.

Por tanto, el 18,349 redondeado a la centena más cercana es 18,300.

b. Primero, se encuentra el dígito a redondear en la columna de las centenas, el cual es el 9. Después se busca el dígito a examinar 6 a la derecha del 9. Debido que el 6 es 5 o mayor, se redondea a la alta y se incrementa en 1 el 9 en la columna de las centenas. Dado que el 9 en la columna de las centenas representa 900, el incremento en 1 del 9 representa un incremento de 900 a 1,000. Por tanto, se reemplaza el 9 con un 0 y se suma 1 al 7 en la columna de los millares. Por último, se reemplazan los dos dígitos más a la derecha con 0.

Dígito a redondear: columna de las centenas

7,960

Dígito a examinar: 6 es 5 o mayor.

Sumar 1. Dado que 9 + 1 = 10, escriba 0 en esta columna y acarree el 1 a la siguiente columna

7+1 0

7,960

Reemplazar con 0.

Por tanto, el 7,960 redondeado a la centena más cercana es 8,000.

¡Cuidado! Para redondear un número, *sólo* utilice el dígito a examinar directamente a la derecha del dígito a redondear para determinar si se redondea a la alta o a la baja.

Auto-revisión 8

CIUDADES DE E.U. Redondee la elevación de Denver:

a. a la centena de pies más cercana

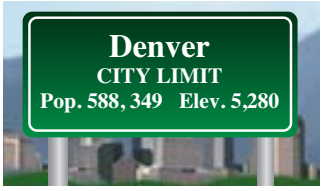
b. al millar de pies más cercano

Ahora intente **Problemas 75 y 79**

EJEMPLO 8 ***Ciudades de E.U.*** En 2007, Denver era la 26a ciudad más grande de Estados Unidos. Redondee la población del 2007 de Denver mostrada en el señalamiento a:

a. el millar más cercano

b. la centena de millar más cercana



Estrategia En cada caso, se encontrará el dígito a redondear y el dígito a examinar.

POR QUÉ Se necesita conocer el valor del dígito a examinar para determinar si se redondea a la alta o a la baja la población.

Solución

a. El dígito a redondear en la columna de los millares es el 8. Dado que el dígito a examinar 3 es menor que 5, se redondea a la baja. Al millar más cercano, la población de Denver en el 2007 era de 588,000.

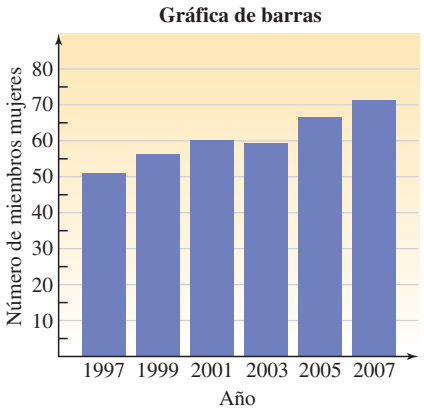
b. El dígito a redondear en la columna de las centenas de millares es el 5. Dado que el dígito a examinar 8 es 5 o mayor, se redondea a la alta. A la centena de millar más cercana, la población de Denver en el 2007 era de 600,000.

6 Leer tablas y gráficas que involucran números naturales

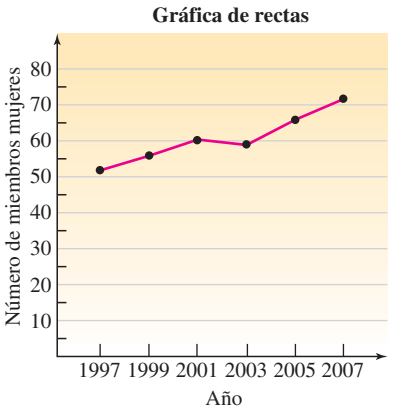
La siguiente tabla es un ejemplo del uso de los números naturales. Muestra el número de miembros mujeres de la Casa de Representantes de los E.U. para los años 1997-2007.

Año	Número de miembros mujeres
1997	51
1999	56
2001	60
2003	59
2005	67
2007	71

Fuente: www.ergd.org/HouseOfRepresentatives



a)



b)

En la figura a), la información en la tabla se representa en una **gráfica de barras.** La escala *horizontal* se etiqueta "Año" y se utilizan unidades de 2 años. La escala *vertical* se etiqueta "Número de miembros mujeres" y se utilizan unidades de 10. La barra directamente sobre cada año se extiende a una altura que muestra el número de miembros mujeres de la Casa de Representantes en ese año.

El lenguaje de las matemáticas *Horizontal* es una forma de la palabra *horizonte*. Piense en el Sol poniéndose sobre el *horizonte. Vertical* significa en una posición hacia arriba. El salto *vertical* del jugador de basquetbol profesional LeBron James mide más de 49 pulgadas.

Otra manera de presentar la información en la tabla es con una **gráfica de rectas.** En vez de emplear una barra para representar el número de miembros mujeres, se utiliza un punto dibujado a la altura correcta. Después de dibujar los puntos de información para 1997, 1999, 2001, 2003, 2005 y 2007, se conectan los puntos para crear la gráfica de rectas en la figura b).

PIENSE DETENIDAMENTE *Estudiante de reingreso*

"Se considera un estudiante de reingreso a aquel que tiene 25 años o más o aquellos estudiantes que han tenido que suspender su trabajo académico por 5 o más años. De manera nacional, este grupo de estudiantes está creciendo a una velocidad sorprendente".

Vida estudiantil y Departamento de liderazgo, University Union, Cal Poly University, San Luis Obispo

En la columna I se enlistan algunas preocupaciones comunes expresadas por los estudiantes adultos en consideración a su regreso a la escuela. Relacione cada preocupación con una respuesta alentadora en la columna II.

Columna I	Columna II
1. Soy demasiado viejo para aprender.	**a.** Varios estudiantes califican para algún tipo de ayuda financiera.
2. No tengo el tiempo.	**b.** Piense que incluso una sola clase lo pone un paso más cercano a su objetivo educativo.
3. No me fue bien en la escuela la primera vez. No creo que una universidad me acepte.	**c.** No hay evidencia de que los estudiantes mayores no puedan aprender igual de bien que los más jóvenes.
4. Temo que no me adaptaré.	**d.** Más del 41% de los estudiantes en la universidad son mayores a 25.
5. No tengo el dinero para pagar una universidad.	**e.** Por lo regular, las universidades comunitarias y las escuelas vocacionales tienen una política de admisión abierta.

Fuente: Adaptado a partir de *Common Concerns for Adult Students,* Minnesota Higher Education Services Office.

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. a. 2 centenas de millones **b.** 3 **2. a.** cuarenta y dos **b.** setecientos noventa y ocho **c.** noventa y siete mil, cincuenta y tres **d.** veintitrés millones, diecisiete **3. a.** 203,052 **b.** 946,416,022 **c.** 3,000,579 **4.** 700,000 + 8, 000 + 400 + 10 + 3 **5. a.** > **b.** < **6. a.** 35,640 **b.** 9,760 **7.** 365,300 **8. a.** 5,300 pies **b.** 5,000 pies

LISTA DE VERIFICACIÓN DE LAS HABILIDADES DE ESTUDIO

Conozca su libro de texto

Felicitaciones. Ahora posee un libro de vanguardia que ha sido escrito específicamente para usted. La siguiente lista de verificación le ayudará a familiarizarse con la organización de este libro. Coloque una marca de verificación en cada recuadro después de responder la pregunta.

- ☐ Regrese a la **Tabla de contenidos** en la página v. ¿Cuántos capítulos tiene el libro?
- ☐ Cada capítulo del libro se divide en **secciones.** ¿Cuántas secciones hay en el Capítulo 1, cuál comienza en la página 1?
- ☐ Los **Objetivos** de aprendizaje se listan al comienzo de cada sección. ¿Cuántos objetivos hay para la Sección 1.2, la cual comienza en la página 15?
- ☐ Cada sección finaliza con un **Espacio para el estudio**. ¿Cuántos problemas hay en el Espacio para el estudio 1.2, el cual comienza en la página 24?
- ☐ Cada capítulo tiene un **Resumen y repaso**. ¿Cuál columna del Resumen del Capítulo 1 encontrado en la página 113 contiene ejemplos?
- ☐ ¿Cuántos ejercicios de repaso hay para la Sección 1.1 en el Resumen y repaso del Capítulo 1, los cuales comienzan en la página 114?
- ☐ Cada capítulo tiene un **Examen**. ¿Cuántos problemas hay en el Examen del Capítulo 1, el cual comienza en la página 128?
- ☐ Cada capítulo (a excepción del Capítulo 1) finaliza con un **Repaso acumulativo.** ¿Cuáles capítulos cubre el Repaso acumulativo que comienza en la página 313?

Respuestas: 9, 9, 6, 110, la derecha, 16, 40, 1–3

SECCIÓN 1.1 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

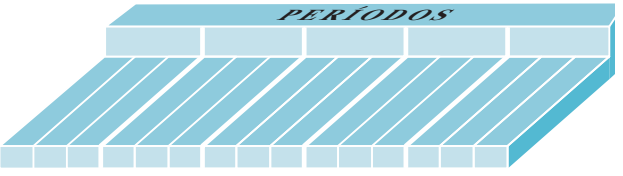
VOCABULARIO

Complete los espacios.

1. Los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 son los _____.
2. El conjunto de números _____ es el {0, 1, 2, 3, 4, 5, …}.
3. Cuando se escribe el cinco mil ochenta y nueve como 5,089, se está escribiendo el número en la forma _____.
4. Para hacer que los números naturales grandes sean más fáciles de leer, se emplean comas para separar sus dígitos en grupos de tres, llamados _____.
5. Cuando el 297 se escribe como 200 + 90 + 7, se está escribiendo el 297 en la forma _____.
6. Utilizando un proceso llamado *graficación*, se puede representar los números naturales como puntos en una recta _____.
7. Los símbolos > y < son símbolos de _____.
8. Si se _____ el 627 a la decena más cercana, se obtiene 630.

CONCEPTOS

9. Copie la siguiente tabla de valores posicionales. Después introduzca el número natural 1,342,587,200,946 y coloque los nombres de los valores posicionales y de los períodos.



10. a. Inserte comas en las posiciones apropiadas para el siguiente número natural escrito en forma estándar: 5467010

b. Inserte comas en las posiciones apropiadas para el siguiente número natural escrito en palabras: *setenta y dos millones cuatrocientos doce mil seiscientos treinta y cinco*

11. Escriba cada número en palabras.

a. 40 **b.** 90

c. 68 **d.** 15

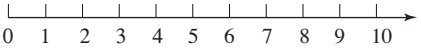
12. Escriba cada número en forma estándar.

a. 8 decenas de millares + 1 mil + 6 centenas + 9 decenas + 2 unidades

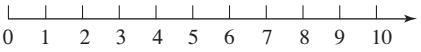
b. 900,000 + 60,000 + 5,000 + 300 + 40 + 7

Grafique los siguientes números en una recta numérica.

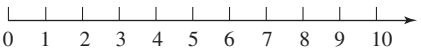
13. 1, 3, 5, 7



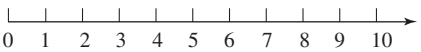
14. 0, 2, 4, 6, 8



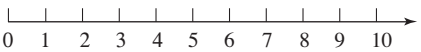
15. 2, 4, 5, 8



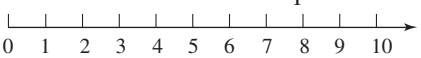
16. 2, 3, 5, 7, 9



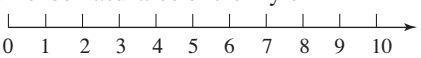
17. los números naturales menores que 6



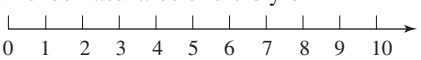
18. los números naturales menores que 9



19. los números naturales entre 2 y 8



20. los números naturales entre 0 y 6



NOTACIÓN

Complete los espacios.

21. Los símbolos { }, llamados _____, se utilizan cuando se escribe un conjunto.

22. El símbolo > significa _____ _____ _____, y el símbolo < significa _____ _____ _____.

PRÁCTICA GUIADA

Encuentre los valores posicionales. Vea el Ejemplo 1.

23. Considere el número 57,634.

a. ¿Cuál es el valor posicional del dígito 3?

b. ¿Qué dígito está en la columna de los millares?

c. ¿Cuál es el valor posicional del dígito 6?

d. ¿Qué digito está en la columna de las decenas de millares?

24. Considere el número 128,940.

a. ¿Cuál es el valor posicional del dígito 8?

b. ¿Qué dígito está en la posición de las centenas?

c. ¿Cuál es el valor posicional del dígito 2?

d. ¿Qué dígito está en la columna de las centenas de millares?

25. HAMBRUNA MUNDIAL En el sitio web Freerice.com, los patrocinadores donan granos de arroz para alimentar al hambriento. Hasta octubre del 2008, se habían donado 47,167,467,790 granos de arroz.

a. ¿Cuál es el valor posicional del dígito 1?

b. ¿Qué dígito está en la posición de unidades de millar de millones?

c. ¿Cuál es el valor posicional del dígito 9?

d. ¿Qué dígito está en la posición de decenas de millar de millones?

26. RECICLAJE Se calcula que el número de latas y botellas de bebidas que *no* fueron recicladas en los Estados Unidos de enero a octubre del 2008 fue de 102,780,365,000.

a. ¿Cuál es el valor posicional del dígito 7?

b. ¿Qué dígito está en la posición de decenas de millares?

c. ¿Cuál es el valor posicional del dígito 2?

d. ¿Qué dígito está en la posición de decenas de millar de millones?

Escriba cada número en palabras. Vea el Ejemplo 2.

27. 93

28. 48

29. 732

30. 259

31. 154,302

32. 615,019

33. 14,432,500

34. 104,052,005

35. 970,031,500,104

36. 5,800,010,700

37. 82,000,415

38. 51,000,201,078

Escriba cada número en forma estándar. Vea el Ejemplo 3.

39. Tres mil, setecientos treinta y siete

40. Quince mil, cuatrocientos noventa y dos

41. Novecientos treinta

42. Seiscientos cuarenta

43. Siete mil, veintiuno

44. Cuatro mil, quinientos

45. Veintiséis millones, cuatrocientos treinta y dos

46. Noventa y dos mil millones, dieciocho mil, trescientos noventa y nueve

Escriba cada número en forma expandida. Vea el Ejemplo 4.

47. 245

48. 518

49. 3,609

50. 3,961

51. 72,533

52. 73,009

53. 104,401

54. 570,003

55. 8,403,613

56. 3,519,807

57. 26,000,156

58. 48,000,061

Coloque un símbolo $<$ o $>$ en el recuadro para formar un enunciado verdadero. Vea el Ejemplo 5.

59. **a.** 11 ☐ 8 **b.** 29 ☐ 54

60. **a.** 410 ☐ 609 **b.** 3,206 ☐ 3,231

61. **a.** 12,321 ☐ 12,209 **b.** 23,223 ☐ 23,231

62. **a.** 178,989 ☐ 178,898 **b.** 850,234 ☐ 850,342

Redondee a la decena más cercana. Vea el Ejemplo 6.

63. 98,154

64. 26,742

65. 512,967

66. 621,116

Redondee a la centena más cercana. Vea el Ejemplo 7.

67. 8,352

68. 1,845

69. 32,439

70. 73,931

71. 65,981

72. 5,346,975

73. 2,580,952

74. 3,428,961

Redondee cada número al millar más cercano y después a la decena de millar más cercana. Vea el Ejemplo 8.

75. 52,867

76. 85,432

77. 76,804

78. 34,209

79. 816,492

80. 535,600

81. 296,500

82. 498,903

INTÉNTELO

83. Redondee 79,593 a la(al) . . . más cercana(o).

a. decena **b.** centena

c. millar **d.** decena de millar

84. Redondee 5,925,830 a la(al) . . . más cercana(o).

a. millar **b.** decena de millar

c. centena de millar **d.** millón

85. Redondee \$419,161 a la(al) . . . más cercana(o).

a. \$10 **b.** \$100

c. \$1,000 **d.** \$10,000

86. Redondee 5,436,483 ft a la(al) . . . más cercana(o).

a. 10 pies **b.** 100 pies

c. 1,000 pies **d.** 10,000 pies

Escriba cada número en notación estándar.

87. 4 decenas de millares + 2 decenas + 5 unidades

88. 7 millones + 7 decenas + 7 unidades

89. 200,000 + 2,000 + 30 + 6

90. 7,000,000,000 + 300 + 50

91. Veintisiete mil, quinientos noventa y ocho

92. Siete millones, cuatrocientos cincuenta y dos mil, ochocientos sesenta

93. Diez millones, setecientos mil, quinientos seis

94. Ochenta y seis mil, cuatrocientos doce

APLICACIONES

95. PROGRAMAS DE JUEGOS En el programa de televisión *El precio es correcto*, el concursante ganador es la persona que se acerca más (sin pasarse) al precio del artículo cotizado. ¿Cuál

concursante mostrado abajo ganará si están cotizando un juego de dormitorio que tiene un precio al menudeo de $4,745?

96. PRESIDENTES La siguiente lista muestra los 10 presidentes de E.U. más jóvenes y sus edades (en años/días) cuando tomaron el puesto. Construya una tabla de dos columnas que represente la información en orden, comenzando con el presidente más joven.

J. Polk 49 años/122 días	U. Grant 46 años/236 días
G. Cleveland 47 años/351 días	J. Kennedy 43 años/236 días
W. Clinton 46 años/154 días	F. Pierce 48 años/101 días
M. Filmore 50 años/184 días	Barack Obama 47 años/169 días
J. Garfield 49 años/105 días	T. Roosevelt 42 años/322 días

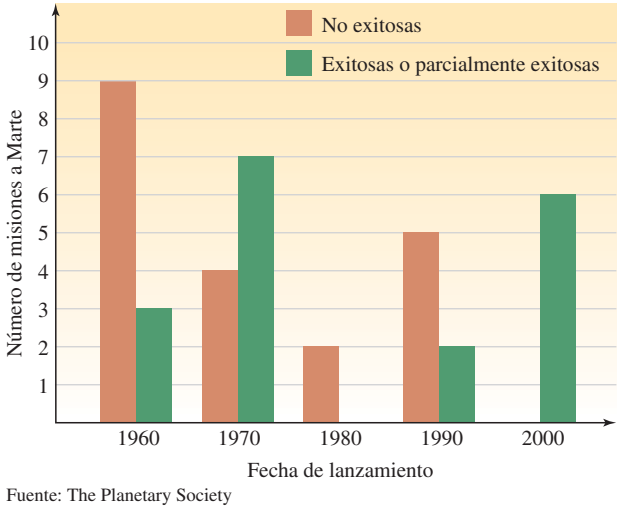
97. MISIONES A MARTE Estados Unidos, Rusia, Europa y Japón han lanzado sondas espaciales a Marte. La gráfica muestra la tasa de éxito de las misiones, por década.

a. ¿Cuál década tuvo el mayor número de misiones exitosas o parcialmente exitosas? ¿Cuántas?

b. ¿Cuál década tuvo el mayor número de misiones no exitosas? ¿Cuántas?

c. ¿Cuál década tuvo el mayor número de misiones? ¿Cuántas?

d. ¿Cuál década no tuvo misiones exitosas?



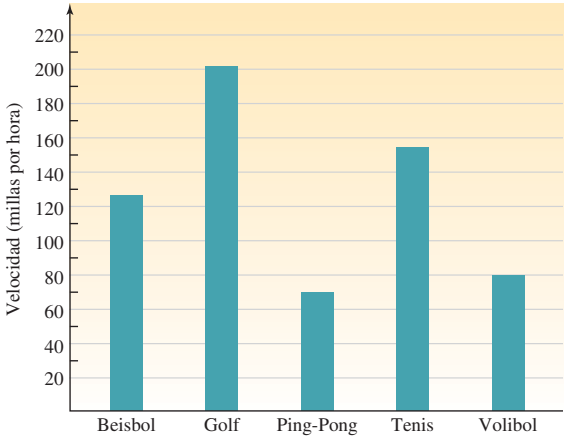
Fuente: The Planetary Society

98. DEPORTES La gráfica muestra las velocidades máximas registradas de la pelota de cinco deportes.

a. ¿Cuál deporte tuvo la velocidad máxima registrada de la pelota? Calcule la velocidad.

b. ¿Cuál deporte tuvo la velocidad mínima registrada de la pelota? Calcule la velocidad.

c. ¿Cuál deporte tuvo la segunda velocidad máxima registrada de la pelota? Calcule la velocidad.

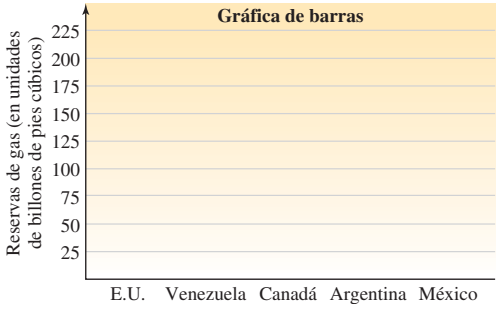


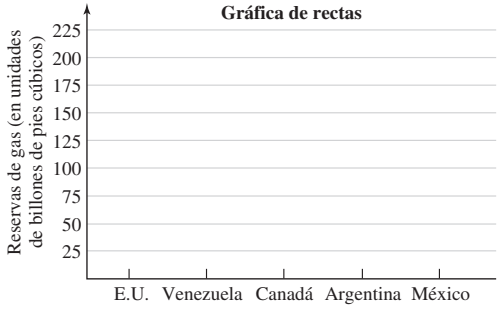
99. RESERVAS DE ENERGÍA Complete la gráfica de barras y la gráfica de rectas utilizando la información en la tabla.

Reservas de gas natural, 2008 (estimados en unidades de billones de pies cúbicos)

Estados Unidos	211
Venezuela	166
Canadá	58
Argentina	16
México	14

Fuente: *Oil and Gas Journal,* agosto 2008



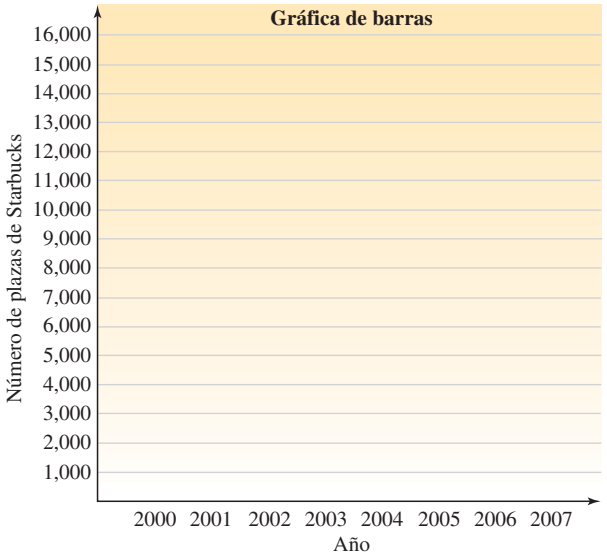


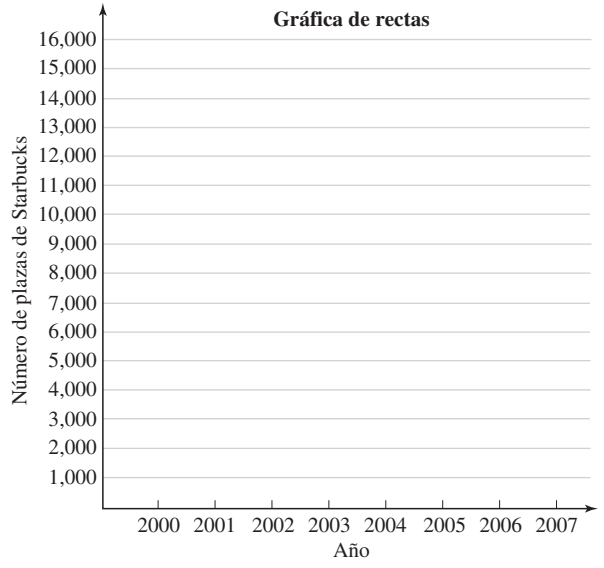
100. CAFÉ Complete la gráfica de barras y la gráfica de rectas utilizando la información en la tabla.

Plazas de Starbucks

Año	Número
2000	3,501
2001	4,709
2002	5,886
2003	7,225
2004	8,569
2005	10, 241
2006	12,440
2007	15,756

Fuente: Starbucks Company





101. CUENTAS DE CHEQUES Complete cada cheque escribiendo la cantidad en palabras en la línea apropiada.

a.

DON SMITH
1234 MILL STREET
HILLDALE, CA

7155

FECHA Marzo 9, 2010

Pagar a Davis Chevrolet $ 15,601.00

_____ DÓLARES

FIRST FEDERAL BANK
195 JEFFS STREET
HILLDALE, CA

Memo _____ Don Smith

b.

JUAN DECITO
24 ARBOR LANE
ARGENTO, CA

4251

FECHA Agosto 12, 2010

Pagar a DR. ANDERSON $ 3,433.00

_____ DÓLARES

FIRST FEDERAL BANK
195 JEFFS STREET
HILLDALE, CA

Memo _____ Juan Decito

102. ANUNCIOS Un estilo empleado cuando se imprimen invitaciones y anuncios formales es escribir todos los números en palabras. Utilice este estilo para escribir cada una de las siguientes frases.

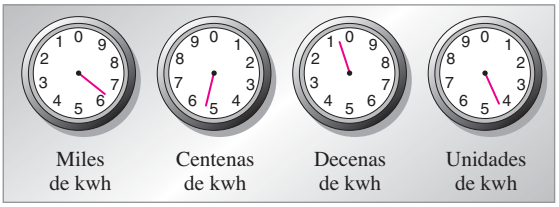
a. Este diploma otorgado el 27o día de junio, 2005.

b. La contribución sugerida para la recaudación de fondos es de $850 por plato, o puede adquirirse una mesa entera por $5,250.

103. PREPARACIÓN TIPOGRÁFICA Edite este extracto de un libro de historia poniendo en un círculo todos los números escritos en palabras y rescribiéndolos en forma estándar utilizando dígitos.

Abraham Lincoln fue electo con un total de un millón, ochocientos sesenta y cinco mil, quinientos noventa y tres votos —cuatrocientos ochenta y dos mil, ochocientos ochenta más que el segundo, Stephen Douglas. Fue asesinado después de haber servido un total de mil, quinientos tres días en oficina. El discurso en Gettysburg de Lincoln, de sólo unas doscientas sesenta y nueve palabras de largo, fue pronunciado en el sitio de batalla donde ocurrieron cuarenta y tres mil, cuatrocientas cuarenta y nueve bajas.

104. LECTURA DE MEDIDORES La cantidad de electricidad utilizada en un hogar se mide en kilowatt-hora (kwh). Determine la lectura en el medidor mostrado en la siguiente página. (Cuando el apuntador está entre dos números, lea el número *más bajo*.)



105. VELOCIDAD DE LA LUZ La velocidad de la luz es de 983,571,072 pies por segundo.

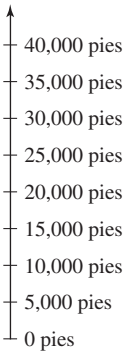
a. ¿En qué columna de valor posicional está el 5?

b. Redondee la velocidad de la luz a la decena de millón más cercana. Dé su respuesta en notación estándar y en notación expandida.

c. Redondee la velocidad de la luz a la centena de millón más cercana. Dé su respuesta en notación estándar y en forma escrita en palabras.

106. NUBES Grafique cada tipo de nube dado en la tabla a la altitud apropiada en la línea de números vertical en la siguiente columna.

Tipo de nube	Altitud (pies)
Altocúmulo	21,000
Cirrocúmulo	37,000
Cirro	38,000
Cumulonimbo	15,000
Cúmulo	8,000
Estratocúmulo	9,000
Estrato	4,000



REDACCIÓN

107. Explique cómo redondearía el 687 a la decena más cercana.

108. Las casas en una subdivisión nueva se cotizan "en los bajos 130". ¿Qué significa esto?

109. Un millón es mil millares. Explique por qué es esto.

110. Varios infomerciales en televisión ofrecen al espectador maneras creativas de lograr ingresos de seis cifras. ¿Qué es un ingreso de seis cifras? ¿Cuál es el menor y cuál es el mayor ingreso de seis cifras?

111. ¿Qué número natural está asociado con cada una de las siguientes palabras?

dúo década nada un grande cuatro veintenas
docena trío siglo un par nulo

112. Explique qué es lo incorrecto al leer 20,003 como *veinte mil y tres.*

SECCIÓN 1.2
Suma de números naturales

Objetivos

1. Sumar números naturales.
2. Usar las propiedades de la suma para sumar números naturales.
3. Estimar sumas de números naturales.
4. Resolver problemas de aplicación sumando números naturales.
5. Encontrar el perímetro de un rectángulo y de un cuadrado.
6. Usar una calculadora para sumar números naturales (opcional).

La suma de números naturales es utilizada por todos. Por ejemplo, para preparar un presupuesto anual, un contador suma costos de partida separados. Para determinar el número de anuarios a ordenar, un director suma el número de estudiantes en cada grado. Una azafata suma el número de personas en las secciones de primera clase y económica para hallar el número total de pasajeros en un avión.

1 Sumar números naturales

Para sumar números naturales, piense en la combinación de conjuntos de objetos similares. Por ejemplo, si se combina un conjunto de 4 estrellas con un conjunto de 5 estrellas, el resultado es un conjunto de 9 estrellas.

Este problema de suma puede escribirse en **forma horizontal** o **vertical** utilizando un **símbolo de suma**, **+**, el cual se lee como "más". A los números que se están sumando se les llama **sumandos** y a la respuesta se le llama **suma** o **total.**

Forma horizontal

$$\underset{\text{Sumando}}{4} + \underset{\text{Sumando}}{5} = \underset{\text{Suma}}{9}$$

Cada forma se lee como "4 más 5 es igual a (o es) 9".

Forma vertical

$$\begin{array}{r} 4 \leftarrow \text{Sumando} \\ +\,5 \leftarrow \text{Sumando} \\ \hline 9 \leftarrow \text{Suma} \end{array}$$

Para sumar números naturales que son menores que 10, se basa en la comprensión de la operación básica de la suma. Por ejemplo,

$$2 + 3 = 5, \qquad 6 + 4 = 10 \qquad \text{y} \qquad 9 + 7 = 16$$

Si necesita repasar la operación básica de la suma, puede encontrarla en el Apéndice 1, al final del libro.

Para sumar números naturales que son mayores que 10, se puede utilizar la forma vertical apilándolos con sus valores posicionales correspondientes alineados. Después simplemente se suman los dígitos en cada columna correspondiente.

Auto-revisión 1

Sume: 131 + 232 + 221 + 312

Ahora intente **Problemas 21 y 27**

EJEMPLO 1

Sume: 421 + 123 + 245

Estrategia Se escribirá la suma en forma vertical con los dígitos de las unidades en una columna, los dígitos de las decenas en una columna y los dígitos de las centenas en una columna. Después se sumarán los dígitos, columna por columna, comenzando de derecha a izquierda.

POR QUÉ Como el dinero, donde los centavos sólo se suman a centavos, los 10 céntimos sólo se suman a los 10 céntimos y los dólares sólo se suman a los dólares, nada más se pueden sumar dígitos con el mismo valor posicional: unidades a unidades, decenas a decenas, centenas a centenas.

Solución

Se comienza a la derecha y se suman los dígitos de las unidades, después los dígitos de las decenas y, por último, los dígitos de las centenas y se escribe cada suma debajo de la barra horizontal.

Forma vertical

Columna de las centenas
Columna de las decenas
Columna de las unidades

$$\begin{array}{r} 4\ 2\ 1 \\ 1\ 2\ 3 \\ +\,2\ 4\ 5 \\ \hline 7\ 8\ 9 \end{array} \leftarrow \text{La respuesta (suma)}$$

La suma de los dígitos de las unidades: Piense: 1 + 3 + 5 = 9.
La suma de los dígitos de las decenas: Piense: 2 + 2 + 4 = 8.
Suma de los dígitos de las centenas: Piense: 4 + 1 + 2 = 7.

La suma es 789.

Si una suma de los dígitos en cualquier columna de valor posicional produce una suma que es mayor que 9, se debe **acarrear.**

Auto-revisión 2

Sume: 35 + 47

Ahora intente **Problemas 29 y 33**

EJEMPLO 2

Sume: 27 + 18

Estrategia Se escribirá la suma en forma vertical y se sumarán los dígitos, columna por columna, empezando de derecha a izquierda. Se debe estar pendiente de las sumas en cualquier columna de valor posicional que sean mayores que 9.

POR QUÉ Si la suma de los dígitos en cualquier columna es mayor que 9, se debe acarrear.

Solución

Para ayudarle a comprender el proceso, se explica por separado cada paso de esta suma. Su solución sólo debe parecerse al *último* paso.

Se comienza sumando los dígitos en la columna de las unidades: 7 + 8 = 15. Debido a que 15 = 1 decena + 5 unidades, se escribe 5 en la columna de las unidades de la respuesta y se acarrea 1 a la columna de las decenas.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 27 \\ +\ 18 \\ \hline 5 \end{array}$$

Sume los dígitos en la columna de las unidades: 7 + 8 = 15.
Acarree el 1 a la columna de las decenas.

Después se suman los dígitos en la columna de las decenas.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 27 \\ +\ 18 \\ \hline 45 \end{array}$$

Sume los dígitos en la columna de las decenas: 1 + 2 + 1 = 4.
Coloque el resultado de 4 en la columna de las decenas de la respuesta.

Su solución debe parecerse a esta:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 27 \\ +\ 18 \\ \hline 45 \end{array}$$

La suma es 45.

EJEMPLO 3

Sume: 9,835 + 692 + 7,275

Estrategia Se escribirán los números en forma vertical de tal manera que las columnas de los valores posicionales correspondientes estén alineadas. Después se sumarán los dígitos en cada columna, estando pendiente de cualquier suma que sea mayor que 9.

POR QUÉ Si la suma de los dígitos en una columna es mayor que 9, se debe acarrear.

Solución

Se escribe la suma en forma vertical, de tal manera que los dígitos correspondientes estén alineados. Se explica por separado cada paso de esta suma. Su solución sólo debe parecerse al *último* paso.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 9,835 \\ 692 \\ +\ 7,275 \\ \hline 2 \end{array}$$

Sume los dígitos en la columna de las unidades: 5 + 2 + 5 = 12.
Escriba 2 en la columna de las unidades de la respuesta y acarree el 1 a la columna de las decenas.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 21} \\ 9,835 \\ 692 \\ +\ 7,275 \\ \hline 02 \end{array}$$

Sume los dígitos en la columna de las decenas: 1 + 3 + 9 + 7 = 20.
Escriba 0 en la columna de las decenas de la respuesta y acarree el 2 a la columna de las centenas.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 121} \\ 9,835 \\ 692 \\ +\ 7,275 \\ \hline 802 \end{array}$$

Sume los dígitos en la columna de las centenas: 2 + 8 + 6 + 2 = 18.
Escriba 8 en la columna de las centenas de la respuesta y acarree el 1 a la columna de los millares.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 121} \\ 9,835 \\ 692 \\ +\ 7,275 \\ \hline 17,802 \end{array}$$

Sume los dígitos en la columna de los millares: 1 + 9 + 7 = 17.
Escriba 7 en la columna de los millares de la respuesta. Escriba 1 en la columna de las decenas de millares.

Su solución debe parecerse a esta:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 121} \\ 9,835 \\ 692 \\ +\ 7,275 \\ \hline 17,802 \end{array}$$

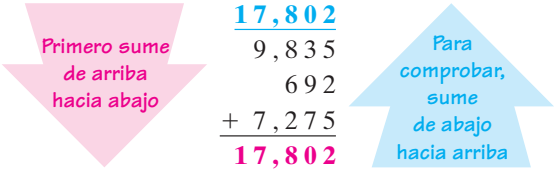
La suma es 17,802.

Auto-revisión 3

Sume: 675 + 1,497 + 1,527

Ahora intente **Problemas 37 y 41**

Consejo útil En el Ejemplo 3 se sumaron los dígitos en cada columna de valor posicional de *arriba abajo*. Para comprobar la respuesta se puede sumar en su lugar de *abajo hacia arriba*. El sumar hacia abajo o hacia arriba debe dar el mismo resultado. Si no lo hace, se ha cometido un error y debe volver a sumar. En el objetivo 2, el cual sigue a continuación, aprenderá por qué los dos resultados deben ser iguales.



2 Usar las propiedades de la suma para sumar números naturales

¿Alguna vez se ha dado cuenta de que dos números naturales pueden sumarse en cualquier orden debido a que el resultado es el mismo? Por ejemplo,

$$2 + 8 = 10 \quad \text{y} \quad 8 + 2 = 10$$

Este ejemplo ilustra la **propiedad conmutativa de la suma.**

Propiedad conmutativa de la suma

El orden en el que se suman los números naturales no cambia su suma.
Por ejemplo,

$$6 + 5 = 5 + 6$$

El lenguaje de las matemáticas *Conmutativa* es una forma de la palabra *conmutar,* que significa ir y venir. Los trenes que *conmutan* llevan a la gente hacia y del trabajo.

Para encontrar la suma de tres números naturales, se suman dos de ellos y después se adhiere la suma al tercer número. En los siguientes ejemplos, se suma $3 + 4 + 7$ de dos maneras. Se emplean los símbolos de agrupación ( ), llamados **paréntesis**, para mostrar esto. Es práctica estándar desarrollar primero las operaciones dentro del paréntesis. Los pasos de las soluciones se escriben en forma horizontal.

El lenguaje de las matemáticas En el siguiente ejemplo, lea $(3 + 4) + 7$ como "La *cantidad* de $3 + 4$", haga una pausa corta y después diga "más siete". Lea $3 + (4 + 7)$ como "3 más la *cantidad* de 4 más 7". La palabra *cantidad* alerta al lector de que se han utilizado paréntesis como símbolos de agrupación.

Método 1: agrupe 3 y 4

$(3 + 4) + 7 = 7 + 7$
$= 14$

Debido a los paréntesis, sume 3 y 4 primero para obtener 7. Después sume 7 y 7 para obtener 14.

Método 2: agrupe 4 y 7

$3 + (4 + 7) = 3 + 11$
$= 14$

Debido a los paréntesis, sume 4 y 7 primero para obtener 11. Después sume 3 y 11 para obtener 14.

Mismo resultado

De cualquier manera, la respuesta es 14. Este ejemplo ilustra que el cambiar la agrupación cuando se suman números no afecta el resultado. A esta propiedad se le llama **propiedad asociativa de la suma.**

Propiedad asociativa de la suma

La manera en que se agrupan los números naturales no cambia su suma.
Por ejemplo,

$$(2 + 5) + 4 = 2 + (5 + 4)$$

El lenguaje de las matemáticas *Asociativa* es una forma de la palabra *asociar*, que significa unir un grupo. La WNBA (Asociación Nacional de Basquetbol Femenino) es un grupo de 14 equipos profesionales de basquetbol.

En ocasiones, una aplicación de la propiedad asociativa puede simplificar un cálculo.

EJEMPLO 4 Encuentre la suma: $98 + (2 + 17)$

Estrategia Se utilizará la propiedad asociativa para agrupar el 2 con el 98.

POR QUÉ Es de utilidad reagrupar debido a que el 98 y el 2 son un par de números que se suman con facilidad.

Solución
Se escribirán los pasos de la solución en forma horizontal.

$$98 + (2 + 17) = (98 + 2) + 17$$ Use la propiedad asociativa de la suma para reagrupar los sumandos.

$$= 100 + 17$$ Realice primero la suma dentro de los paréntesis.

$$= 117$$

Auto-revisión 4
Encuentre la suma:
$(139 + 25) + 75$

Ahora intente **Problemas 45 y 49**

Siempre que se sume 0 a un número natural, el número no cambia. A esta propiedad se le llama **propiedad de la suma del 0.**

Propiedad de la suma del 0

La suma de cualquier número natural y el 0 es ese número natural. Por ejemplo,

$$3 + 0 = 3, \quad 5 + 0 = 5 \quad \text{y} \quad 0 + 9 = 9$$

Con frecuencia se pueden utilizar las propiedades conmutativa y asociativa para hacer más sencilla la suma de varios números naturales.

EJEMPLO 5 Sume: **a.** $3 + 5 + 17 + 2 + 3$ **b.**

$$\begin{array}{r} 201 \\ 867 \\ +\ 49 \\ \hline \end{array}$$

Estrategia Se buscarán grupos de dos (o tres números) cuya suma sea 10 o 20 o 30, y así sucesivamente.

POR QUÉ Este método es más sencillo que sumar números no relacionados y reduce las posibilidades de un error.

Solución
En conjunción, las propiedades conmutativa y asociativa de la suma permiten utilizar cualquier orden o agrupación para sumar números naturales.

a. Se escribirán los pasos de la solución en forma horizontal.

$$3 + 5 + 17 + 2 + 3 = 20 + 10$$ Piense: $3 + 17 = 20$ y $5 + 2 + 3 = 10$.

$$= 30$$

Auto-revisión 5
Sume:
a. $14 + 7 + 16 + 1 + 2$
b.

$$\begin{array}{r} 675 \\ 204 \\ +435 \\ \hline \end{array}$$

Ahora intente **Problemas 53 y 57**

b. Se explica por separado cada paso de la suma. Su solución debe parecerse al último paso.

$$\begin{array}{rrrr} & & {\scriptstyle 1} & \\ & 2 & 0 & \mathbf{1} \\ & 8 & 6 & 7 \\ + & & 4 & \mathbf{9} \\ \hline & & & 7 \end{array}$$

Sume primero los números en negritas en la columna de las unidades. Piense: (9 + 1) + 7 = 10 + 7 = 17. Escriba el 7 y acarree el 1.

$$\begin{array}{rrrr} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & \\ & 2 & 0 & 1 \\ & 8 & \mathbf{6} & 7 \\ + & & \mathbf{4} & 9 \\ \hline & & 1 & 7 \end{array}$$

Sume los números en negritas en la columna de las decenas. Piense: (6 + 4) + 1 = 10 + 1 = 11. Escriba el 1 y acarree el 1.

$$\begin{array}{rrrr} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & \\ & \mathbf{2} & 0 & 1 \\ & \mathbf{8} & 6 & 7 \\ + & & 4 & 9 \\ \hline & 1,1 & 1 & 7 \end{array}$$

Sume los números en negritas en la columna de las centenas. Piense: (2 + 8) + 1 = 10 + 1 = 11.

La suma es 1,117.

3 Estimar sumas de números naturales

Se utiliza la estimación para encontrar una respuesta aproximada para un problema. Los estimados son útiles de dos maneras. Primero, sirven como una comprobación precisa que puede hallar errores. Si una respuesta no parece razonable cuando se compara con el estimado, el problema original debe resolverse de nuevo. Segundo, algunas situaciones sólo necesitan una respuesta aproximada en vez de una respuesta exacta.

Existen varias maneras de estimar, pero el objetivo es el mismo: Simplificar los números en el problema para que los cálculos puedan realizarse con facilidad y rapidez. A un método popular de estimación se le llama **redondeo por la izquierda.**

Auto-revisión 6

Use el redondeo por la izquierda para estimar la suma:

$$\begin{array}{r} 6{,}780 \\ 3{,}278 \\ 566 \\ 4{,}230 \\ +\,1{,}923 \\ \hline \end{array}$$

Ahora intente **Problema 61**

EJEMPLO 6 Use el redondeo por la izquierda para estimar la suma:
3,714 + 2,489 + 781 + 5,500 + 303

Estrategia Se utilizará el redondeo por la izquierda para aproximar cada sumando. Después se encontrará la suma de los aproximados.

POR QUÉ El redondeo por la izquierda produce sumandos que contienen varios 0. Tales números son más fáciles de sumar.

Solución

Cada uno de los sumandos se redondea a su *valor posicional más grande* de tal manera que todos menos el primer dígito son cero. Después se suman los aproximados utilizando la forma vertical.

$$\begin{array}{rcrl} 3{,}714 & \longrightarrow & 4{,}000 & \text{Redondee al millar más cercano.} \\ 2{,}489 & \longrightarrow & 2{,}000 & \text{Redondee al millar más cercano.} \\ 781 & \longrightarrow & 800 & \text{Redondee a la centena más cercana.} \\ 5{,}500 & \longrightarrow & 6{,}000 & \text{Redondee al millar más cercano.} \\ +\ 303 & \longrightarrow & +\ 300 & \text{Redondee a la centena más cercana.} \\ \hline & & 13{,}100 & \end{array}$$

El estimado es 13,100.

Si se calcula 3,714 + 2,489 + 781 + 5,500 + 303, la suma es exactamente 12,787. Observe que el estimado es cercano: Sólo 313 más que 12,787. Esto ilustra la compensación cuando se utiliza una estimación: Los cálculos son más fáciles de desarrollar y toman menos tiempo, pero las respuestas no son exactas.

Consejo útil Los estimados pueden ser mayores o menores que la respuesta exacta. Depende de con qué frecuencia ocurra el redondeo hacia arriba o hacia abajo en la estimación.

4 Resolver problemas de aplicación sumando números naturales

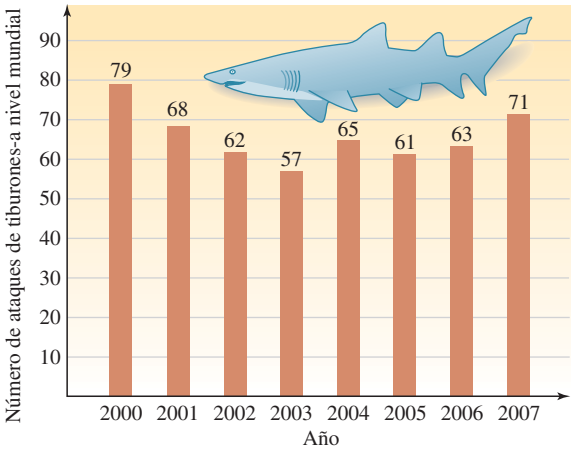
Dado que los problemas de aplicación casi siempre se escriben en palabras, es muy importante la habilidad de comprender lo que lee.

El lenguaje de las matemáticas Aquí hay algunas palabras y frases clave que se emplean con frecuencia para indicar una suma:

ganancia total	*incremento combinado*	*hasta en total*	*hacia adelante en el futuro*	*elevar junto*	*más que extra*

EJEMPLO 7

Tiburones La gráfica a la derecha muestra el número de ataques de tiburones a nivel mundial para los años 2000 al 2007. Encuentre el número total de ataques de tiburones para estos años.



Fuente: University of Florida

Estrategia Se leerá con cuidado el problema buscando una palabra o frase clave.

POR QUÉ Las palabras y frases clave indican cuál(es) operación(es) aritmética(s) deben utilizarse para resolver el problema.

Solución

En el segundo enunciado del problema, la palabra clave *total* indica que se debe sumar el número de ataques de tiburones para los años 2000 al 2007. Se puede utilizar la forma vertical para encontrar la suma.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 5\,3} \\ 79 \\ 68 \\ 62 \\ 57 \\ 65 \\ 61 \\ 63 \\ +\ 71 \\ \hline 526 \end{array}$$

Sume los dígitos, una columna a la vez, empezando de derecha a izquierda. Para simplificar los cálculos, se pueden buscar grupos de dos o tres números en cada columna cuya suma sea 10.

El número total de ataques de tiburones a nivel mundial para los años 2000 al 2007 fue de 526.

El lenguaje de las matemáticas Para resolver los problemas de aplicación, con frecuencia se debe *traducir* las palabras del problema a números y símbolos. *Traducir* significa cambiar de una forma a otra, como en *traducir* del español al inglés.

Auto-revisión 7

ACCIDENTES DE AEROLÍNEAS En la tabla de abajo se lista el número de accidentes que involucran aerolíneas de los E.U. para los años 2000 al 2007. Encuentre el número total de accidentes para estos años.

Año	Accidentes
2000	56
2001	46
2002	41
2003	54
2004	30
2005	40
2006	33
2007	26

Ahora intente **Problema 97**

Auto-revisión 8

REVISTAS En el 2005, la circulación mensual de la revista *Mecánica Popular* fue de 1,210,126 copias. Para el 2007, la circulación se había incrementado en 24,199 copias por mes. ¿Cuál fue la circulación mensual de la revista *Mecánica Popular* en el 2007? (Fuente: *The World Almanac Book of Facts,* 2009)

Ahora intente **Problema 93**

EJEMPLO 8 ***Águilas en peligro de extinción*** En 1963, sólo habían 487 parejas reproductoras de águilas calvas en los 48 estados contiguos de los E.U. En el 2007, el número de parejas reproductoras se había incrementado en 9,302. Encuentre el número de parejas reproductoras de águilas calvas en el 2007. (Fuente: U.S. Fish and Wildlife Service.)

Estrategia Se leerá con cuidado el problema buscando palabras o frases clave.

POR QUÉ Las palabras y frases clave indican cuál(es) operación(es) aritmética(s) deben utilizarse para resolver el problema.

Solución

La frase *incrementado en* indica suma. Con eso en mente, se traducen las palabras del problema a números y símbolos.

El número de parejas reproductoras en 2007	es igual al	número de parejas reproductoras en 1963	incrementado en	9,302
El número de parejas reproductoras en 2007	=	487	+	9,302

Use la forma vertical para llevar a cabo la suma:

$$\begin{array}{r} 9{,}302 \\ +\ \ 487 \\ \hline 9{,}789 \end{array}$$

Varios estudiantes encuentran la forma vertical de la suma más sencilla si el número con la cantidad mayor de dígitos se escribe en la parte superior.

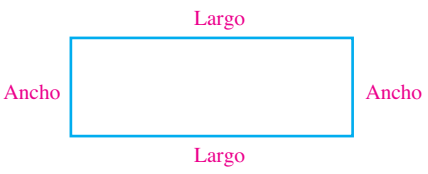
En el 2007, el número de parejas reproductoras de águilas calvas en los 48 estados contiguos de E.U. era de 9,789.

5 Encontrar el perímetro de un rectángulo y de un cuadrado

La figura a) de abajo es un ejemplo de una figura con cuatro lados llamada **rectángulo**. A cualquiera de los lados más grandes de un rectángulo se le llama **largo** y a cualquiera de los lados más cortos se le llama **ancho**. En conjunto, al largo y al ancho se les llama **dimensiones** del rectángulo. Para cualquier rectángulo, los lados opuestos tienen la misma medida.

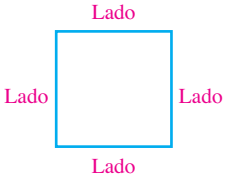
Cuando los cuatro lados de un rectángulo tienen la misma longitud, al rectángulo se le llama **cuadrado**. En la figura b) se muestra un ejemplo de un cuadrado.

Un rectángulo



a)

Un cuadrado



b)

A la distancia alrededor de un rectángulo o de un cuadrado se le llama **perímetro**. Para encontrar el perímetro de un rectángulo se suman las longitudes de sus cuatro lados.

El perímetro de un rectángulo = largo + largo + ancho + ancho

Para encontrar el perímetro de un cuadrado se suman las longitudes de sus cuatro lados.

El perímetro de un cuadrado = lado + lado + lado + lado

El lenguaje de las matemáticas Cuando escuche la palabra *perímetro,* piense en la longitud del borde alrededor de una figura plana.

EJEMPLO 9 ***Dinero*** Encuentre el perímetro del billete de un dólar mostrado abajo.

Estrategia Se sumarán dos largos y dos anchos del billete de un dólar.

POR QUÉ Un billete de un dólar es de forma rectangular y así es como se encuentra el perímetro de un rectángulo.

Solución

Se traducen las palabras del problema a números y símbolos.

El perímetro del billete de un dólar	es igual a	el largo del billete de un dólar	más	el largo del billete de un dólar	más	el ancho del billete de un dólar	más	el ancho del billete de un dólar
El perímetro del billete de un dólar	=	156	+	156	+	65	+	65

Use la forma vertical para llevar a cabo la suma:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2\,2}\\ 156\\ 156\\ 65\\ +\ 65\\ \hline 442 \end{array}$$

El perímetro del billete de un dólar es de 442 mm.

Para ver si este resultado es razonable se estima la respuesta. Debido a que el rectángulo es alrededor de 160 mm por 70 mm, su perímetro es de aproximadamente 160 + 160 + 70 + 70, o 460 mm. Una respuesta de 442 mm es razonable.

Auto-revisión 9

JUEGOS DE MESA El tablero de un juego de Monopolio es un cuadrado con lados de 19 pulgadas de largo. Encuentre el perímetro del tablero.

Ahora intente **Problemas 65 y 67**

6 Usar una calculadora para sumar números naturales (opcional)

Las calculadoras son útiles para realizar cálculos largos y comprobar resultados. Sin embargo, no deben utilizarse hasta que tenga una comprensión sólida de los hechos aritméticos básicos. Este libro ***no*** requiere que tenga una calculadora. Pregunte a su instructor si se le permite emplear una calculadora en el curso.

La característica *Utilizando su calculadora* explica las pulsaciones de teclas para una calculadora científica económica. Si tiene alguna pregunta acerca de su modelo específico, vea su manual de usuario.

Utilizando su CALCULADORA **La tecla de suma: Producción de vehículos**

En el 2007, los cinco principales productores de automóviles en el mundo eran General Motors: 9,349,818; Toyota: 8,534,690; Volkswagen: 6,267,891; Ford: 6,247,506 y Honda: 3,911,814 (Fuente: OICA, 2008). Se puede encontrar el número total de automóviles producidos por estas compañías utilizando la tecla de suma [+] en una calculadora.

9349818 [+] 8534690 [+] 6267891 [+] 6247506 [+] 3911814 [=]

34311719

En algunos modelos de calculadora, se presiona la tecla [ENTER] en vez de la tecla [=] para que se muestre el resultado.

El número total de automóviles producidos en el 2007 por los cinco principales productores de automóviles fue de 34,311,719.

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. 896 **2.** 82 **3.** 3,699 **4.** 239 **5. a.** 40 **b.** 1,314 **6.** 16,600
7. 326 **8.** 1,234,325 **9.** 76 pulg.

LISTA DE VERIFICACIÓN DE LAS HABILIDADES DE ESTUDIO

Aprendizaje a partir de los ejemplos resueltos

La siguiente lista de verificación le ayudará a familiarizarse con la estructura de los ejemplos en este libro. Coloque una marca de verificación en cada recuadro después de responder la pregunta.

- ☐ Cada sección del libro contiene **Ejemplos** resueltos que están numerados. ¿Cuántos ejemplos resueltos hay en la Sección 1.3, la cual comienza en la página 29?
- ☐ Cada ejemplo resuelto contiene una **Estrategia**. Llene los espacios para completar la siguiente estrategia para el Ejemplo 3 en la página 4: Se localizarán las comas en la _____ escrita en palabras _____ _____ _____.
- ☐ Cada enunciado de Estrategia es seguido por una explicación del **Porqué** se emplea ese método. Llene los espacios para completar el siguiente Porqué para el Ejemplo 3 en la página 4: Cuando se escribe en palabras un número natural, se _____ comas _____ _____ _____ _____.
- ☐ Cada ejemplo resuelto tiene una **Solución**. ¿Cuántos incisos hay para la Solución en el Ejemplo 3 en la página 4?
- ☐ Cada ejemplo utiliza **Notas del autor** en rojo para explicar los pasos de la solución. Llene los espacios para completar la primera nota del autor en la solución del Ejemplo 6 en la página 20: Redondee al _____ _____ _____.
- ☐ Después de leer un ejemplo resuelto, debe resolver el problema de Auto-revisiones. ¿Cuántos problemas de **Auto-revisiones** hay para el Ejemplo 5 en la página 19?
- ☐ Al final de cada sección encontrará las **Respuestas para las auto-revisiones**. ¿Cuál es la respuesta para el problema de Auto-revisiones 4 en la página 24?
- ☐ Después de completar un problema de Auto-revisiones, puede **Ahora intente** problemas similares en el Espacio para el estudio. Para el Ejemplo 5 en la página 19, ¿cuáles dos problemas del Espacio para el estudio se sugieren?

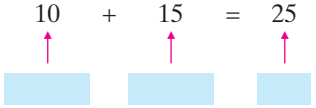
Respuestas: 10, forma de cada número, emplean para separar los periodos, 3, millar más cercano, 2, 239, 53 y 57

SECCIÓN 1.2 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Complete los espacios.

1. En el problema de suma mostrado abajo, etiquete cada *sumando* y la *suma*.



2. Cuando se utiliza la forma vertical para sumar números naturales, si la adición de los dígitos en cualquier columna produce una suma mayor que 9, se debe _____.

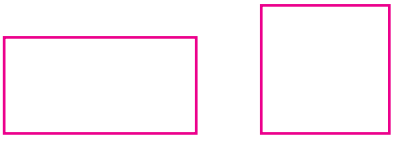
3. La propiedad _____ de la suma enuncia que el orden en el que se suman los números naturales no cambia su suma.

4. La propiedad _____ de la suma enuncia que la manera en la que se agrupan los números naturales no cambia su suma.

5. Para ver si el resultado de una suma es razonable, se pueden redondear los sumandos y _____ la suma.

6. Las palabras *elevar, ganancia, total* e *incremento* se utilizan con frecuencia para indicar la operación de _____.

7. La figura de abajo a la izquierda es un ejemplo de un _____. La figura a la derecha es un ejemplo de un _____.



8. Etiquete el *largo* y el *ancho* del rectángulo abajo. En conjunto, al largo y al ancho de un rectángulo se le llama su _____.

9. Cuando todos los lados de un rectángulo son de la misma longitud, al rectángulo se le llama _____.

10. A la distancia alrededor de un rectángulo se le llama su _____.

CONCEPTOS

11. ¿Cuál propiedad de la suma se muestra?

a. $3 + 4 = 4 + 3$

b. $(3 + 4) + 5 = 3 + (4 + 5)$

c. $(36 + 58) + 32 = 36 + (58 + 32)$

d. $319 + 507 = 507 + 319$

12. a. Use la propiedad conmutativa de la suma para completar lo siguiente:

$19 + 33 =$ ☐

b. Use la propiedad asociativa de la suma para completar lo siguiente:

$3 + (97 + 16) =$ ☐

13. Complete los espacios: Cualquier número sumado al ☐ sigue siendo el mismo.

14. Complete los espacios. Use la estimación por redondeo por la izquierda para determinar si la suma mostrada abajo (14,825) parece razonable.

$5{,}877 \rightarrow$ ☐
$402 \rightarrow$ ☐
$+8{,}546 \rightarrow +$ ☐
$14{,}825 \rightarrow$ ☐

La suma no parece razonable.

NOTACIÓN

Complete los espacios.

15. El símbolo de suma + se lee como "_____".

16. A los símbolos ( ) se les llama _____. Es una práctica estándar desarrollar _____ las operaciones dentro de ellos.

Escriba cada uno de los siguientes hechos de la suma en palabras.

17. $33 + 12 = 45$

18. $28 + 22 = 50$

Complete cada solución para encontrar la suma.

19. $(36 + 11) + 5 =$ ☐ $+ 5$
$=$ ☐

20. $12 + (15 + 2) = 12 +$ ☐
$=$ ☐

PRÁCTICA GUIADA

Sume. Vea el Ejemplo 1.

21. $25 + 13$

22. $47 + 12$

23.
$$\begin{array}{r} 406 \\ +\,283 \\ \hline \end{array}$$

24.
$$\begin{array}{r} 213 \\ +\,751 \\ \hline \end{array}$$

25. $21 + 31 + 24$

26. $33 + 43 + 12$

27. $603 + 152 + 121$

28. $462 + 115 + 220$

Sume. Vea el Ejemplo 2.

29. $19 + 16$

30. $27 + 18$

31. $45 + 47$

32. $37 + 26$

33. $52 + 18$

34. $59 + 31$

35.
$$\begin{array}{r} 28 \\ +\,47 \\ \hline \end{array}$$

36.
$$\begin{array}{r} 35 \\ +\,49 \\ \hline \end{array}$$

Sume. Vea el Ejemplo 3.

37. $156 + 305$

38. $647 + 138$

39. $4{,}301 + 789 + 3{,}847$

40. $5{,}576 + 649 + 1{,}922$

41. $9{,}758 + 586 + 7{,}799$

42. $9{,}339 + 471 + 6{,}883$

43.
$$\begin{array}{r} 346 \\ 217 \\ 568 \\ +\,679 \\ \hline \end{array}$$

44.
$$\begin{array}{r} 290 \\ 859 \\ 345 \\ +\,226 \\ \hline \end{array}$$

Aplique la propiedad asociativa de la suma para encontrar la suma. **Vea el Ejemplo 4.**

45. (9 + 3) + 7

46. (7 + 9) + 1

47. (13 + 8) + 12

48. (19 + 7) + 13

49. 94 + (6 + 37)

50. 92 + (8 + 88)

51. 125 + (75 + 41)

52. 240 + (60 + 93)

Use las propiedades conmutativa y asociativa de la suma para encontrar la suma. **Vea el Ejemplo 5.**

53. 4 + 8 + 16 + 1 + 1

54. 2 + 1 + 28 + 3 + 6

55. 23 + 5 + 7 + 15 + 10

56. 31 + 6 + 9 + 14 + 20

57.
$$\begin{array}{r} 624 \\ 905 \\ +\ 86 \\ \hline \end{array}$$

58.
$$\begin{array}{r} 495 \\ 76 \\ +835 \\ \hline \end{array}$$

59. 457 + 97 + 653

60. 562 + 99 + 848

Use el redondeo por la izquierda para estimar la suma. **Vea el Ejemplo 6.**

61. 686 + 789 + 12,233 + 24,500 + 5,768

62. 404 + 389 + 11,802 + 36,902 + 7,777

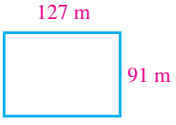
63. 567,897 + 23,943 + 309,900 + 99,113

64. 822,365 + 15,444 + 302,417 + 99,010

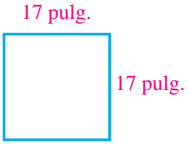
Encuentre el perímetro de cada rectángulo o cuadrado. **Vea el Ejemplo 9.**

65.

66.

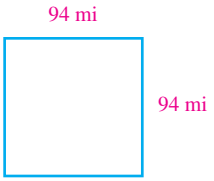


67.



68.

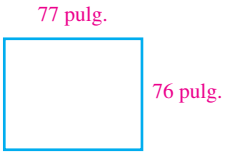
69.



70.

71.

72.



INTÉNTELO

Sume.

73.
$$\begin{array}{r} 8{,}539 \\ +\ 7{,}368 \\ \hline \end{array}$$

74.
$$\begin{array}{r} 5{,}799 \\ +\ 6{,}879 \\ \hline \end{array}$$

75. 51,246 + 578 + 37 + 4,599

76. 4,689 + 73,422 + 26 + 433

77. (45 + 16) + 4

78. 7 + (63 + 23)

79.
$$\begin{array}{r} 632 \\ +347 \\ \hline \end{array}$$

80.
$$\begin{array}{r} 423 \\ +570 \\ \hline \end{array}$$

81. 16,427 incrementado en 13,573

82. 13,567 más que 18,788

83.
$$\begin{array}{r} 76 \\ +\ 45 \\ \hline \end{array}$$

84.
$$\begin{array}{r} 87 \\ +\ 56 \\ \hline \end{array}$$

85. 3,156 + 1,578 + 6,578

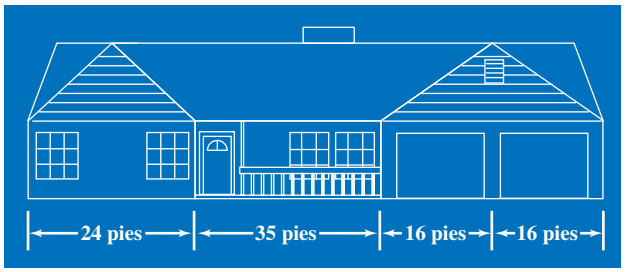
86. 2,379 + 4,779 + 2,339

87. 12 + 1 + 8 + 4 + 9 + 16

88. 7 + 15 + 13 + 9 + 5 + 11

APLICACIONES

89. DIMENSIONES DE UNA CASA Encuentre la longitud de la casa mostrada en el cianotipo.



90. COHETES Se empleó un cohete Saturno V para lanzar a la tripulación del *Apollo 11* a la Luna. La primera plataforma del cohete era de 138 pies de alto, la segunda plataforma era de 98 pies de alto y la tercera plataforma era de 46 pies de alto. Sobre la tercera plataforma estaba posado el módulo lunar de 54 pies de alto y una torre de escape de 28 pies de alto. ¿Cuál era la altura total del vehículo espacial?

91. COMIDA RÁPIDA Encuentre el número total de calorías en el siguiente almuerzo de McDonald's: Big Mac (540 calorías), papas a la francesa pequeñas (230 calorías), Postre de yogur con fruta (160 calorías), Coca-Cola clásica mediana (210 calorías).

92. SALARIOS DE CEO En el 2007, Christopher Twomey, gerente general de Arctic Cat (fabricantes de motonieves y vehículos todo terreno), recibió un salario de $533,250 y obtuvo un bono de $304,587. ¿Cuánto percibió ese año el CEO de la compañía? (Fuente: invetopedia.com)

93. EBAY En julio del 2005, el sitio web eBay fue visitado al menos en una ocasión por 61,715,000 personas. En julio del 2007, el número había incrementado en 18,072,000. ¿Cuántos visitantes tuvo el sitio web eBay en julio del 2007? (Fuente: *The World Almanac and Book of Facts,* 2006, 2008.)

94. HELADO En 2004-2005, las ventas de los helados Häagen-Dazs fueron de $230,708,912. En 2006-2007, las ventas habían incrementado en $59,658,488. ¿Cuáles fueron las ventas de los helados Häagen-Dazs en 2006-2007? (Fuente: *The World Almanac and Book of Facts,* 2006, 2008)

95. SEGURIDAD DE PUENTES Abajo se muestran los resultados de un reporte del 2007 de la condición de los puentes de carreteras en E.U. Cada puente se clasificó como *seguro, en necesidad de reparación* o *debe reemplazarse.* Complete la tabla.

Número de puentes seguros	Número de puentes que necesitan repararse	Número de puentes antiguos que deben reemplazarse	Número total de puentes
445,396	72,033	80,447	

Fuente: Bureau of Transportation Statistics

96. IMPORTACIONES La tabla de abajo muestra el número de automóviles de pasajeros nuevos y seminuevos importados en Estados Unidos desde varios países en el 2007. Encuentre el número total de vehículos en Estados Unidos importados desde estos países.

País	Número de automóviles de pasajeros
Canadá	1,912,744
Alemania	466,458
Japón	2,300,913
México	889,474
Corea del Sur	676,594
Suecia	92,600
Reino Unido	108,576

Fuente: Bureau of the Census, Foreign Trade Division

97. BODAS En la tabla de abajo se listan los costos promedio de las bodas para el 2007. Encuentre el costo total de una boda.

Ropa/cabello/maquillaje	$2,293
Ceremonia/música/flores	$4,794
Fotografía/video	$3,246
Cortesías/regalos	$1,733
Joyería	$2,818
Transporte	$361
Cena de ensayo	$1,085
Recepción	$12,470

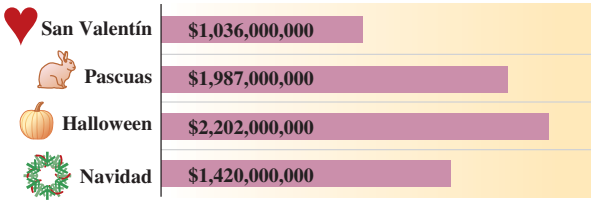
Fuente: tickledpinkbrides.com

98. PRESUPUESTOS El director de un departamento en una compañía preparó un presupuesto anual con los rubros mostrados. Encuentre el número proyectado de dólares a

Rubro	Cantidad
Equipo	$17,242
Utilidades	$5,443
Viajes	$2,775
Suministros	$10,553
Desarrollo	$3,225
Mantenimiento	$1,075

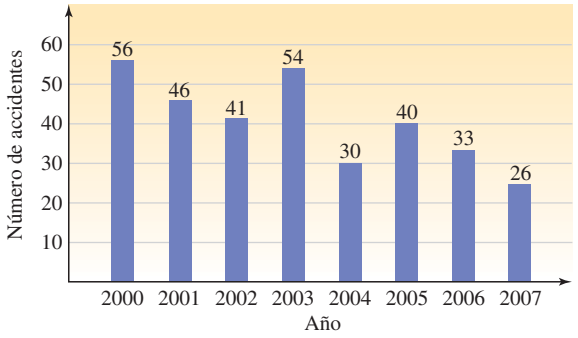
gastar.

99. DULCE La gráfica de abajo muestra las ventas de dulces en E.U. en el 2007 durante cuatro periodos de fiestas. Encuentre la suma de estas ventas de dulces de temporada.



Fuente: National Confectioners Association

100. SEGURIDAD DE AEROLÍNEAS La siguiente gráfica muestra el reporte de accidentes de las aerolíneas de pasajeros de E.U. para los años 2000-2007. ¿Cuántos accidentes hubo en este periodo de 8 años?



Fuente: National Transportation Safety Board

101. BANDERAS Para decorar la bandera de una ciudad, se va a coser una franja amarilla alrededor de sus bordes exteriores, como se muestra. La franja se compra por pulgada. ¿Cuántas pulgadas de franja deben adquirirse para completar el proyecto?

102. DECORACIÓN La habitación de un niño es de forma rectangular con dimensiones de 15 pies por 11 pies. ¿Cuántos pies de cenefa se necesitan para aplicarse alrededor de toda la habitación?

103. BOXEO ¿Cuánta cuerda acolchonada se necesita para formar un ring de boxeo cuadrado de 24 pies de lado?

104. CERCAS Una pieza cuadrada de terreno que mide 209 pies de lado es aproximadamente un *acre*. ¿Cuántos pies de malla se necesitan para acordonar una pieza de terreno de este tamaño?

REDACCIÓN

105. Explique por qué la operación de suma es conmutativa.

106. Explique por qué la operación de suma es asociativa.

107. En esta sección, se dice que la estimación es una *compensación*. Dé un beneficio y una desventaja de la estimación.

108. Un estudiante sumó tres números naturales de arriba abajo y después de abajo hacia arriba, como se muestra abajo. ¿Qué indican los resultados en rojo? ¿Qué debe hacer a continuación el estudiante?

$$\begin{array}{r} \mathbf{1{,}689} \\ 496 \\ 315 \\ +\ 788 \\ \hline 1{,}599 \end{array}$$

REPASO

109. Escriba cada número en notación expandida.

a. 3,125

b. 60,037

110. Redondee 6,354,784 a la _____ más cercana

a. decena

b. centena

c. decena de millar

d. centena de millar

SECCIÓN 1.3

Resta de números naturales

Objetivos

1. Restar números naturales.
2. Restar números naturales con acarreo negativo.
3. Comprobar restas empleando la suma.
4. Estimar diferencias de números naturales.
5. Resolver problemas de aplicación restando números naturales.
6. Evaluar expresiones que involucran suma y resta.

La resta de números naturales es utilizada por todos. Por ejemplo, para encontrar el precio en rebaja de un artículo, un empleado de una tienda resta el descuento del precio regular. Para medir el cambio climático, un científico resta las temperaturas altas y bajas. Un camionero resta las lecturas del odómetro para calcular el número de millas conducidas en un viaje.

1 Restar números naturales

Para restar dos números naturales, piense en tomar objetos de un conjunto. Por ejemplo, si se comienza con un conjunto de 9 estrellas y se toma un conjunto de 4 estrellas, se queda con un conjunto de 5 estrellas.

Se puede escribir este problema de resta en **forma horizontal** o **vertical** utilizando un **símbolo de resta**, $-$, el cual se lee como "menos". Se le llama **minuendo** al número a partir del cual se está restando otro número. Al número que se está restando se le llama **sustraendo**, y a la respuesta se le llama **diferencia**.

Forma horizontal

$$\underset{\text{Minuendo}}{9} - \underset{\text{Sustraendo}}{4} = \underset{\text{Diferencia}}{5}$$

Cada forma se lee como "9 menos 4 igual a (o es) 5"

Forma vertical

$$\begin{array}{r} 9 \leftarrow \text{Minuendo} \\ -\,4 \leftarrow \text{Sustraendo} \\ \hline 5 \leftarrow \text{Diferencia} \end{array}$$

El lenguaje de las matemáticas El prefijo *sub* significa *debajo*, como en *sub*marino o *sub*terráneo. Observe que en la forma vertical, el *sus*traendo se escribe debajo del minuendo.

Para restar dos números naturales que son menores que 10, se basa en la comprensión de los hechos básicos de la resta. Por ejemplo,

$$6 - 3 = 3, \quad 7 - 2 = 5 \quad \text{y} \quad 9 - 8 = 1$$

Para restar dos números naturales que son mayores que 10, se puede utilizar la forma vertical apilándolos con sus valores posicionales correspondientes alineados. Después simplemente se restan los dígitos en cada columna correspondiente.

EJEMPLO 1 Reste: $59 - 27$

Estrategia Se escribirá la resta en forma vertical con los dígitos de las unidades en una columna y los dígitos de las decenas en una columna. Después se restarán los dígitos en cada columna, empezando de derecha a izquierda.

POR QUÉ Como el dinero, donde los centavos sólo se restan de los centavos y los 10 céntimos sólo se restan de los 10 céntimos, sólo se pueden restar dígitos con el mismo valor posicional —unidades de unidades y decenas de decenas.

Auto-revisión 1

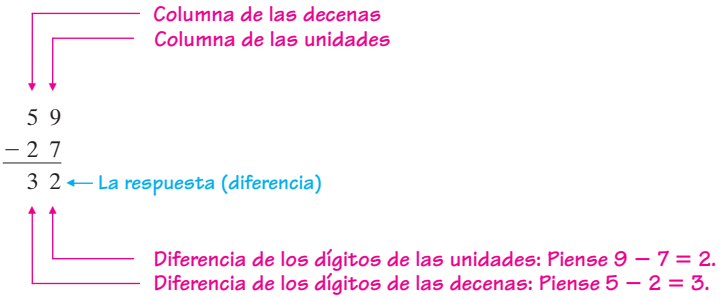
Reste: $68 - 31$

Ahora intente **Problemas 15 y 21**

Solución

Se comienza a la derecha y se restan los dígitos de las unidades y después los dígitos de las decenas y se escribe la diferencia de cada uno debajo de la barra horizontal.

Forma vertical



La diferencia es de 32.

Auto-revisión 2

Reste 817 de 1,958.

Ahora intente **Problema 23**

EJEMPLO 2

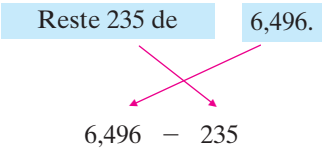
Reste 235 de 6,496.

Estrategia Se traducirá el enunciado a símbolos matemáticos y después se llevará a cabo la resta. Se debe tener cuidado cuando se traduce la instrucción para restar un número *de* otro número.

POR QUÉ El orden de los números en el enunciado debe invertirse cuando se traduce a símbolos.

Solución

Dado que 235 es el número a restarse, es el sustraendo.



Para encontrar la diferencia, se escribe la resta en forma vertical y se restan los dígitos en cada columna, comenzando de derecha a izquierda.

Cuando se resta 235 de 6,496, la diferencia es de 6,261.

¡Cuidado! Cuando se resten dos números, es importante que se escriban en el orden correcto, debido a que la resta *no* es conmutativa. Por ejemplo, en el Ejemplo 2, si se hubiese traducido de manera incorrecta "Reste 235 de 6,496" como 235 − 6,496, se ve que la diferencia no es de 6,261. De hecho, la diferencia incluso no es un número natural.

2 Restar números naturales con acarreo negativo

Si la resta de los dígitos en cualquier columna de los valores posicionales requiere que se reste un dígito más grande de un dígito más pequeño, se debe hacer un **acarreo negativo** o **reagrupar**.

Auto-revisión 3

Reste: 83 − 36

Ahora intente **Problema 27**

EJEMPLO 3

Reste: 32 − 15

Estrategia A medida que se prepare para restar en cada columna, se comparará el dígito en el sustraendo (número inferior) con el dígito directamente sobre él en el minuendo (número superior).

POR QUÉ Si un dígito en el sustraendo es mayor que el dígito directamente sobre él en el minuendo, se debe realizar un acarreo negativo (reagrupación) para restar en esa columna.

Solución

Para ayudarle a comprender el proceso, cada paso de esta resta se explica por separado. Su solución sólo necesita parecerse al *último* paso.

Se escribe la resta en forma vertical para alinear los dígitos de las decenas y para alinear los dígitos de las unidades.

$$\begin{array}{r} 32 \\ -\,15 \\ \hline \end{array}$$

Dado que el 5 en la columna de las unidades del 1**5** es mayor que el 2 en la columna de las unidades del 3**2**, no se puede restar de manera inmediata en esa columna debido a que $2 - 5$ *no* es un número natural. Para restar en la columna de las unidades, se debe reagrupar por medio del acarreo negativo de 1 decena del 3 en la columna de las decenas. En este proceso de reagrupación, se debe emplear el hecho de que 1 decena $= 10$ unidades.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2}\ {\scriptstyle 12} \\ 3\ 2 \\ -\,1\ 5 \\ \hline 7 \end{array}$$

Realice el acarreo negativo de 1 decena del 3 en la columna de las decenas y cambie el 3 a 2. Sume el 10 acarreado al dígito 2 en la columna de las unidades del minuendo para obtener 12. A este paso se le llama reagrupación. Después reste en la columna de las unidades: $12 - 5 = 7$.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2}\ {\scriptstyle 12} \\ 3\ 2 \\ -\,1\ 5 \\ \hline 1\ 7 \end{array}$$

Reste en la columna de las decenas: $2 - 1 = 1$.

Su solución debe parecerse a esta:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2}\ {\scriptstyle 12} \\ 3\ 2 \\ -\,1\ 5 \\ \hline 1\ 7 \end{array}$$

La diferencia es de 17.

Algunas restas requieren el acarreo negativo de dos (o más) columnas de valor posicional.

EJEMPLO 4 Reste: $9{,}927 - 568$

Auto-revisión 4

Reste: $6{,}734 - 356$

Ahora intente **Problema 33**

Estrategia Se escribirá la resta en forma vertical y se restará como es usual. En cada columna, se debe buscar un dígito en el sustraendo que sea mayor que el dígito directamente sobre él en el minuendo.

POR QUÉ Si un dígito en el sustraendo es mayor que el dígito directamente sobre él en el minuendo, se debe realizar un acarreo negativo (reagrupación) para restar en esa columna.

Solución

Se escribe la resta en forma vertical, de tal manera que los dígitos correspondientes estén alineados. Se explica por separado cada paso de esta resta. Su solución debe parecerse al último paso.

$$\begin{array}{r} 9{,}927 \\ -\quad 568 \\ \hline \end{array}$$

Dado que el 8 en la columna de las unidades del 56**8** es mayor que el 7 en la columna de las unidades del 9,92**7**, no se puede restar de inmediato. Para restar en esa columna, se debe reagrupar realizando un acarreo negativo de 1 decena del 2 en la columna de las decenas. En este proceso, se emplea el hecho de que 1 decena $= 10$ unidades.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1}\ {\scriptstyle 17} \\ 9{,}92\,7 \\ -\quad 568 \\ \hline 9 \end{array}$$

Realice un acarreo negativo de 1 decena del 2 en la columna de las decenas y cambie el 2 a 1. Sume el 10 acarreado al dígito 7 en la columna de las unidades del minuendo para obtener 17. Después reste en la columna de las unidades: $17 - 8 = 9$.

Dado que el 6 en la columna de las decenas del 5**6**8 es mayor que el 1 en la columna de las decenas directamente sobre él, no se puede restar de inmediato. Para restar en esa columna se debe reagrupar realizando un acarreo negativo de 1 centena del 9 en la columna de las centenas. En este proceso, se emplea el hecho de que 1 centena $= 10$ decenas.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 11}\\ {\scriptstyle 8\ 1\ 17}\\ 9{,}9\not{2}\not{7}\\ -\ \ 568\\ \hline 59 \end{array}$$

Realice el acarreo negativo de 1 centena del 9 en la columna de las centenas y cambie el 9 a 8. Sume el 10 acarreado al dígito 1 en la columna de las decenas del minuendo para obtener 11. Después reste en la columna de las decenas: $11 - 6 = 5$.

Complete la solución restando en la columna de las centenas ($8 - 5 = 3$) y descendiendo el 9 en la columna de los millares.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 11}\\ {\scriptstyle 8\ 1\ 17}\\ 9{,}9\not{2}\not{7}\\ -\ \ 568\\ \hline 9{,}359 \end{array}$$

Su solución debe parecerse a esta:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 11}\\ {\scriptstyle 8\ 1\ 17}\\ 9{,}9\not{2}\not{7}\\ -\ \ 568\\ \hline 9{,}359 \end{array}$$

La diferencia es 9,359.

El proceso de acarreo negativo es más complicado cuando el minuendo contiene uno o más ceros.

Auto-revisión 5

Reste: $65{,}304 - 1{,}445$

Ahora intente **Problema 35**

EJEMPLO 5

Reste: $42{,}403 - 1{,}675$.

Estrategia Se escribirá la resta en forma vertical. Para restar en la columna de las unidades, se realizará el acarreo negativo de la columna de las centenas del minuendo 42,403.

POR QUÉ Dado que el dígito en la columna de las decenas del 42,403 es 0, no es posible realizar un acarreo negativo de esta columna.

Solución

Se escribe la resta en forma vertical de tal manera que los dígitos correspondientes estén alineados. Se explica por separado cada paso de esta resta. Su solución debe parecerse al *último* paso.

$$\begin{array}{r} 42{,}403\\ -\ \ 1{,}675\\ \hline \end{array}$$

Dado que el 5 en la columna de las unidades del 1,675 es mayor que el 3 en la columna de las unidades del 42,403, no se puede restar de inmediato. No es posible realizar un acarreo negativo del dígito 0 en la columna de las decenas del 42,403. Sin embargo, se puede realizar un acarreo negativo de la columna de las centenas para reagrupar en la columna de las decenas, como se muestra abajo. En este proceso, se emplea el hecho de que 1 centena = 10 decenas.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 3\ 10}\\ 42{,}4\not{0}3\\ -\ \ 1{,}675\\ \hline \end{array}$$

Reste 1 centena del 4 en la columna de las centenas y cambie el 4 a 3. Sume el 10 acarreado al dígito 0 en la columna de las decenas del minuendo para obtener 10.

Ahora se puede realizar el acarreo negativo del 10 en la columna de las decenas para restar en la columna de las unidades.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 9}\\ {\scriptstyle 3\ 10\ 13}\\ 42{,}4\not{0}\not{3}\\ -\ \ 1{,}675\\ \hline 8 \end{array}$$

Reste 1 decena del 10 en la columna de las decenas y cambie el 10 a 9. Sume el 10 acarreado al dígito 3 en la columna de las unidades del minuendo para obtener 13. Después reste en la columna de las unidades: $13 - 5 = 8$.

Después, se desarrolla la resta en la columna de las decenas: $9 - 7 = 2$.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 9}\\ {\scriptstyle 3\ 10\ 13}\\ 42{,}4\not{0}\not{3}\\ -\ \ 1{,}675\\ \hline 28 \end{array}$$

Para restar en la columna de las centenas se realiza el acarreo negativo del 2 en la columna de los millares. En este proceso se emplea el hecho de que 1 millar = 10 centenas.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 13\ 9} \\ {\scriptstyle 1\ \cancel{3}\ \cancel{10}\ 13} \\ 4\cancel{2},\cancel{4}\cancel{0}\cancel{3} \\ -\ 1,675 \\ \hline 728 \end{array}$$

Realice el acarreo negativo de 1 millar del 2 en la columna de los millares y cambie el 2 a 1. Sume el 10 acarreado al dígito 3 en la columna de las centenas del minuendo para obtener 13. Después reste en la columna de las centenas: 13 − 6 = 7.

Complete la solución restando en la columna de los millares (1 − 1 = 0) y descienda el 4 en la columna de las decenas de millares.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 13\ 9} \\ {\scriptstyle 1\ \cancel{3}\ \cancel{10}\ 13} \\ 4\cancel{2},\cancel{4}\cancel{0}\cancel{3} \\ -\ 1,675 \\ \hline 40,728 \end{array}$$

La diferencia es de 40,728.

Su solución debe parecerse a esta:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 13\ 9} \\ {\scriptstyle 1\ \cancel{3}\ \cancel{10}\ 13} \\ 4\cancel{2},\cancel{4}\cancel{0}\cancel{3} \\ -\ 1,675 \\ \hline 40,728 \end{array}$$

3 Comprobar restas empleando la suma

Toda resta tiene un **enunciado de adición relacionado**. Por ejemplo,

9 − **4** = **5**	debido a que	**5** + **4** = 9
25 − **15** = **10**	debido a que	**10** + **15** = 25
100 − **1** = **99**	debido a que	**99** + **1** = 100

Estos ejemplos ilustran cómo se pueden comprobar las restas. Si una resta se resuelve de manera correcta, *la suma de la diferencia y del sustraendo siempre será igual al minuendo:*

Diferencia + sustraendo = minuendo

El lenguaje de las matemáticas Para describir la relación especial entre la suma y la resta, se dice que son **operaciones inversas**.

EJEMPLO 6 Compruebe la siguiente resta utilizando la suma:

$$\begin{array}{r} 3,682 \\ -1,954 \\ \hline 1,728 \end{array}$$

Estrategia Se sumará la diferencia (1,728) y el sustraendo (1,954) y se comparará el resultado con el minuendo (3,682).

POR QUÉ Si la suma de la diferencia y el sustraendo da el minuendo, se comprueba la resta.

Solución

La resta a comprobar ***Su enunciado de suma relacionado***

$$\begin{array}{r} 3,682 \\ -\ 1,954 \\ \hline 1,728 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{diferencia} \\ +\text{sustraendo} \\ \hline \text{minuendo} \end{array} \qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ \ 1} \\ 1,728 \\ +1,954 \\ \hline 3,682 \end{array}$$

Dado que la suma de la diferencia y del sustraendo es el minuendo, la resta es correcta.

Auto-revisión 6

Compruebe la siguiente resta utilizando la suma:

$$\begin{array}{r} 9,784 \\ -\ 4,792 \\ \hline 4,892 \end{array}$$

Ahora intente **Problema 39**

4 Estimar diferencias de números naturales

Se utiliza la estimación para encontrar una respuesta aproximada para un problema.

EJEMPLO 7 Estime la diferencia: 89,070 − 5,431

Estrategia Se utilizará el redondeo por la izquierda para aproximar el 89,070 y el 5,431. Después se encontrará la diferencia de las aproximaciones.

Auto-revisión 7

Estime la diferencia:
64,259 − 7,604

Ahora intente **Problema 43**

POR QUÉ El redondeo por la izquierda produce números naturales que contienen varios 0. Tales números son más fáciles de restar.

Solución

El minuendo y el sustraendo se redondean a su *valor posicional más grande* para que todos sus dígitos menos el primero sean cero. Después se restan las aproximaciones utilizando la forma vertical.

$$\begin{array}{rr} 89{,}070 & 90{,}000 \\ -\ 5{,}431 & -\ 5{,}000 \\ \hline & 85{,}000 \end{array}$$

Redondee a la decena de millar más cercana

Redondee al millar más cercano

El estimado es de 85,000.

Si se calcula 89,070 − 5,431, la diferencia es exactamente de 83,639. Observe que el estimado es cercano: Sólo es 1,361 más que 83,639.

5 Resolver problemas de aplicación restando números naturales

Se utiliza la resta para responder preguntas acerca de *cuánto más* o *cuántos más*.

Auto-revisión 8

ELEFANTES Un elefante africano macho promedio pesa 13,000 libras. Un elefante asiático macho promedio pesa 11,900 libras. ¿Cuánto más pesa un elefante africano que un elefante asiático?

Ahora intente **Problema 83**

EJEMPLO 8 ***Caballos*** Radar, el caballo más grande del mundo, pesa 2,540 libras. Thumbelina, el caballo más pequeño del mundo, pesa 57 libras. ¿Cuánto más pesa Radar que Thumbelina? (Fuente: *Guinness Book of World Records*, 2008).

Estrategia Se leerá con cuidado el problema, buscando una palabra o frase clave.

POR QUÉ Las palabras y frases clave indican cuál(es) operación(es) aritmética(s) debe(n) utilizarse para resolver el problema.

Solución

En el segundo enunciado del problema, la frase *Cuánto más* indica que se deben restar los pesos de los caballos. Se traducen las palabras del problema a números y símbolos.

El número de libras que pesa más Radar	es igual al	peso de Radar	menos	el peso de Thumbelina
El número de libras que pesa más Radar	=	2,540	−	57

Use la forma vertical para desarrollar la resta:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 13} \\ {\scriptstyle 4\,\not{5}\,{\scriptstyle 10}} \\ 2{,}\not{5}\not{4}\not{0} \\ -\ \ 57 \\ \hline 2{,}483 \end{array}$$

Radar pesa 2,483 libras más que Thumbelina.

Brad Barket/Getty Images

Priefert Mfr./Drew Gardner, www.drew.it

El lenguaje de las matemáticas Aquí hay algunas de las palabras y frases clave que con frecuencia indican una resta:

pérdida	*decremento*	*abajo*	*hacia atrás*	*cae*	*menor que*	*menos*
reducir	*remover*	*débito*	*en el pasado*	*permanece*	*declinó*	*tomar*

EJEMPLO 9 ***Estaciones de radio*** En el 2005 había 773 estaciones de radio de clásicos en Estados Unidos. En el 2007 había 62 menos. ¿Cuántas estaciones de radio de clásicos había en el 2007? (Fuente: *The M. Street Radio Directory*.)

Estrategia Se leerá con cuidado el problema, buscando una palabra o frase clave para resolver el problema.

POR QUÉ Las palabras y frases clave indican cuáles operaciones aritméticas deben utilizarse para resolver el problema.

Solución

La frase clave 62 *menos* indica una resta. Se traducen las palabras del problema a números y símbolos.

El número de estaciones de radio de clásicos en el 2007	es	el número de estaciones de radio de clásicos en el 2005	menos	62
El número de estaciones de radio de clásicos en el 2007	=	773	−	62

Use la forma vertical de la resta

$$\begin{array}{r} 773 \\ -\ 62 \\ \hline 711 \end{array}$$

En el 2007 había 711 estaciones de radio de clásicos en Estados Unidos.

Auto-revisión 9

DIETAS SANAS Cuando Jared Fogle comenzó su dieta reducida en calorías de emparedados Subway, pesaba 425 libras. Sin dieta y ejercicio, con el tiempo bajó 245 libras. ¿Cuál era su peso entonces?

Ahora intente **Problema 95**

Utilizando su CALCULADORA **La tecla de resta: Deportes de escuela secundaria**

En el año escolar 2007-08, el número de hombres que participaron en los deportes de escuela secundaria fue de 4,367,442 y el número de mujeres fue de 3,057,266. (Fuente: National Federation of State High School Associations.) Se puede utilizar la tecla [−] en una calculadora para determinar cuántos más hombres que mujeres participaron en los deportes de escuela secundaria ese año.

4367442 [−] 3057266 [=] 1310176

En algunos modelos de calculadora, se presiona la tecla [ENTER] en vez de la tecla [=] para que se muestre el resultado.

En el año escolar 2007–08 participaron 1,310,176 más hombres que mujeres en los deportes de escuela secundaria.

6 Evaluar expresiones que involucran suma y resta

En la aritmética, se combinan números con las operaciones de suma, resta, multiplicación y división para crear **expresiones**. Por ejemplo,

$$15 + 6, \quad 873 - 99, \quad 6{,}512 \times 24 \quad \text{y} \quad 42 \div 7$$

son expresiones.

Las expresiones pueden contener más de una operación. Este es el caso para la expresión $27 - 16 + 5$, la cual contiene una suma *y* una resta. Para **evaluar** (hallar el valor de) expresiones escritas en forma horizontal que involucran suma y resta, se desarrollan las operaciones a medida que aparecen *de izquierda a derecha.*

EJEMPLO 10 Evalúe: $27 - 16 + 5$

Estrategia Se desarrollará la resta primero y se sumará el 5 a ese resultado.

POR QUÉ Las operaciones de suma y resta deben desarrollarse a medida que aparecen de izquierda a derecha.

Auto-revisión 10

Evalúe: $75 - 29 + 8$

Ahora intente **Problemas 47 y 51**

Solución

Se escribirán los pasos de la solución en forma horizontal.

$27 - 16 + 5 = 11 + 5$ Comience de izquierda a derecha, haga la resta primero: $27 - 16 = 11$.

$= 16$ Ahora haga la suma.

¡Cuidado! Al resolver el cálculo en el Ejemplo 10, se debe desarrollar la resta primero. Si se realiza la suma primero, se obtiene la respuesta incorrecta de 6.

$$27 - 16 + 5 = 27 - 21$$
$$= 6$$

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. 37 **2.** 1,141 **3.** 47 **4.** 6,378 **5.** 63,859 **6.** La resta es incorrecta. **7.** 52,000 **8.** 1,100 lb **9.** 180 lb **10.** 54

LISTA DE VERIFICACIÓN DE LAS HABILIDADES DE ESTUDIO

Obtenga el máximo rendimiento de los espacios para el estudio

La siguiente lista de verificación le ayudará a familiarizarse con los Espacios para el estudio en este libro. Coloque una marca de verificación en cada recuadro después de responder la pregunta.

- ☐ Las respuestas a los problemas impares de **Espacio para el estudio** se localizan en el apéndice en la página A-33. ¿En qué página aparecen las respuestas al Espacio para el estudio 1.3?
- ☐ Cada Espacio para el estudio comienza con problemas de **Vocabulario**. ¿Cuántos problemas de Vocabulario aparecen en el Espacio para el estudio 1.3?
- ☐ A continuación de los problemas de Vocabulario, verá problemas de **Conceptos**. ¿Cuántos problemas de Conceptos aparecen en el Espacio para el estudio 1.3?
- ☐ A continuación de los problemas de Conceptos verá problemas de **Notación**. ¿Cuántos problemas de Notación aparecen en el Espacio para el estudio 1.3?
- ☐ Después de los problemas de Notación se proporcionan problemas de **Práctica guiada** los cuales están vinculados con ejemplos dentro de la sección. ¿Cuántos problemas de Práctica guiada aparecen en el Espacio para el estudio 1.3?
- ☐ Después de los problemas de Práctica guiada, se proporcionan problemas de **Inténtelo** los cuales pueden utilizarse para ayudarle a prepararse para exámenes. ¿Cuántos problemas de Inténtelo aparecen en el Espacio para el estudio 1.3?
- ☐ A continuación de los problemas de Inténtelo, verá problemas de **Aplicaciones**. ¿Cuántos problemas de Aplicaciones aparecen en el Espacio para el estudio 1.3?
- ☐ Después de los problemas de Aplicaciones en el Espacio para el estudio 1.3, ¿cuántos problemas de **Redacción** se proporcionan?
- ☐ Por último, cada Espacio para el estudio finaliza con unos cuantos problemas de **Repaso**. ¿Cuántos problemas de Repaso aparecen en el Espacio para el estudio 1.3?

Respuestas: A-34, 6, 4, 4, 40, 28, 18, 4, 6

SECCIÓN 1.3 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Complete los espacios.

1. En el problema de resta mostrado abajo, etiquete el *minuendo*, el *sustraendo* y la *diferencia*.

$$25 - 10 = 15$$

2. Si la resta de los dígitos en cualquier columna de valor posicional requiere que se reste un dígito más grande de un dígito más pequeño, se debe realizar un _____ _____ o *reagrupar*.

3. Las palabras *caer, perder, reducir* y *decremento* indican con frecuencia una operación de _____.

4. Toda resta tiene un enunciado de suma _____. Por ejemplo,

$7 - 2 = 5$ debido a que $5 + 2 = 7$

5. Para ver si el resultado de una resta es razonable se pueden redondear el minuendo y el sustraendo y _____ la diferencia.
6. Para *evaluar* una expresión como 58 − 33 + 9 significa encontrar su _____.

CONCEPTOS

Complete los espacios.

7. La resta 7 − 3 = 4 está relacionada con el enunciado de adición ☐ + ☐ = ☐.
8. Puede utilizarse la operación de _____ para comprobar el resultado de una resta. Si una resta se resuelve de manera correcta, *la* _____ *de la diferencia y del sustraendo siempre será igual al minuendo.*
9. Para *evaluar* (hallar el valor de) una expresión que contiene suma y resta, se desarrollan las operaciones a medida que aparecen de _____ a _____.
10. Para responder preguntas acerca de *cuánto más* o *cuántos más,* se puede utilizar la _____.

NOTACIÓN

11. Complete el espacio: El símbolo − se lee como "_____".
12. Escriba el siguiente hecho de la resta en palabras: 28 − 22 = 6
13. ¿Cuál expresión es la traducción correcta del enunciado: *Restar 30 de 83*, 83 − 30 o 30 − 83?
14. Llene los espacios para completar la solución:

$$36 - 11 + 5 = \square + 5$$
$$= \square$$

PRÁCTICA GUIADA

Reste. **Vea el Ejemplo 1.**

15. 37 − 14

16. 42 − 31

17. $\begin{array}{r} 89 \\ -28 \\ \hline \end{array}$

18. $\begin{array}{r} 95 \\ -32 \\ \hline \end{array}$

19. 596 − 372

20. 869 − 425

21. $\begin{array}{r} 674 \\ -371 \\ \hline \end{array}$

22. $\begin{array}{r} 257 \\ -155 \\ \hline \end{array}$

Reste. **Vea el Ejemplo 2.**

23. 347 de 7,989

24. 283 de 9,799

25. 405 de 2,967

26. 304 de 1,736

Reste. **Vea el Ejemplo 3.**

27. $\begin{array}{r} 53 \\ -17 \\ \hline \end{array}$

28. $\begin{array}{r} 42 \\ -19 \\ \hline \end{array}$

29. $\begin{array}{r} 96 \\ -48 \\ \hline \end{array}$

30. $\begin{array}{r} 94 \\ -37 \\ \hline \end{array}$

Reste. **Vea el Ejemplo 4.**

31. 8,746 − 289

32. 7,531 − 276

33. $\begin{array}{r} 6{,}961 \\ -\ 478 \\ \hline \end{array}$

34. $\begin{array}{r} 4{,}823 \\ -\ 667 \\ \hline \end{array}$

Reste. **Vea el Ejemplo 5.**

35. 54,506 − 2,829

36. 69,403 − 4,635

37. $\begin{array}{r} 48{,}402 \\ -\ 3{,}958 \\ \hline \end{array}$

38. $\begin{array}{r} 39{,}506 \\ -\ 1{,}729 \\ \hline \end{array}$

Compruebe cada resta utilizando la suma. **Vea el Ejemplo 6.**

39. $\begin{array}{r} 298 \\ -175 \\ \hline 123 \end{array}$

40. $\begin{array}{r} 469 \\ -237 \\ \hline 132 \end{array}$

41. $\begin{array}{r} 4{,}539 \\ -3{,}275 \\ \hline 1{,}364 \end{array}$

42. $\begin{array}{r} 2{,}698 \\ -1{,}569 \\ \hline 1{,}129 \end{array}$

Estime cada diferencia. **Vea el Ejemplo 7.**

43. 67,219 − 4,076

44. 45,333 − 3,410

45. 83,872 − 27,281

46. 74,009 − 37,405

Evalúe cada expresión. **Vea el Ejemplo 10.**

47. 35 − 12 + 6

48. 47 − 23 + 4

49. 56 − 31 + 12

50. 89 − 47 + 6

51. 574 + 47 − 13

52. 863 + 39 − 11

53. 966 + 143 − 61

54. 659 + 235 − 62

INTÉNTELO

Desarrolle las operaciones.

55. 416 − 357

56. 787 − 696

57. $\begin{array}{r} 3{,}430 \\ -\ 529 \\ \hline \end{array}$

58. $\begin{array}{r} 2{,}470 \\ -\ 863 \\ \hline \end{array}$

59. Reste 199 de 301.

60. Reste 78 de 2,047.

61. $\begin{array}{r} 367 \\ -347 \\ \hline \end{array}$

62. $\begin{array}{r} 224 \\ -122 \\ \hline \end{array}$

63. 633 − 598 + 30

64. 600 − 497 + 60

65. 420 − 390

66. 330 − 270

67. $20{,}007 - 78$

68. $70{,}006 - 48$

69. $852 - 695 + 40$

70. $397 - 348 + 65$

71.
$$\begin{array}{r} 17{,}246 \\ -\ 6{,}789 \\ \hline \end{array}$$

72.
$$\begin{array}{r} 34{,}510 \\ -27{,}593 \\ \hline \end{array}$$

73.
$$\begin{array}{r} 15{,}700 \\ -15{,}397 \\ \hline \end{array}$$

74.
$$\begin{array}{r} 35{,}600 \\ -34{,}799 \\ \hline \end{array}$$

75. Reste 1,249 de 50,009.

76. Reste 2,198 de 20,020.

77. $120 + 30 - 40$

78. $600 - 99 + 54$

79.
$$\begin{array}{r} 167{,}305 \\ -\ 23{,}746 \\ \hline \end{array}$$

80.
$$\begin{array}{r} 393{,}001 \\ -\ 35{,}002 \\ \hline \end{array}$$

81. $29{,}307 - 10{,}008$

82. $40{,}012 - 19{,}045$

APLICACIONES

83. RÉCORDS MUNDIALES La calabaza más grande del mundo pesaba 1,689 libras y la sandía más grande del mundo pesaba 269 libras. ¿Cuánto pesaba más la calabaza? (Fuente: *Guinness Book of World Records*, 2008)

84. CAMIONETAS La Nissan Titan King Cab XE pesa 5,230 libras y la Honda Ridgeline RTL pesa 4,553 libras. ¿Cuánto pesa más la Nissan Titan?

85. BULLDOGS Vea la gráfica de abajo. ¿Cuántos más bulldogs se registraron en el 2004 en comparación con el 2003?

86. BULLDOGS ¿Cuántos más bulldogs se registraron en el 2007 en comparación con el 2000?

Fuente: American Kennel Club

87. MILLAJE Encuentre la distancia (en millas) que un camionero condujo en un viaje de San Diego a Houston utilizando las lecturas del odómetro mostradas abajo.

	7	0	1	5	4

Lectura del odómetro del camión al salir de San Diego

	7	1	6	4	9

Lectura del odómetro del camión al llegar a Houston

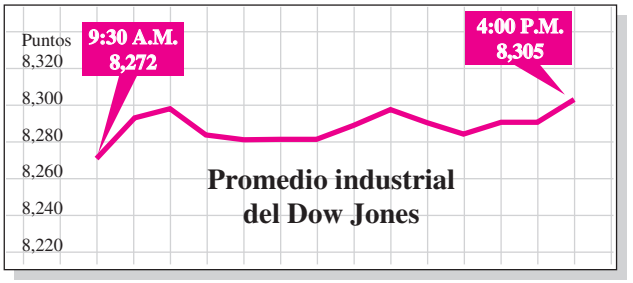
88. DIETAS Use las lecturas de la báscula de baño mostradas abajo para encontrar el número de libras que perdió una persona a dieta.

Enero Octubre

89. RECORRIDOS EN TAXI Por un viaje de 20 millas, Wanda pagó al taxista $63. Si incluyó una propina de $8, ¿de cuánto fue la tarifa?

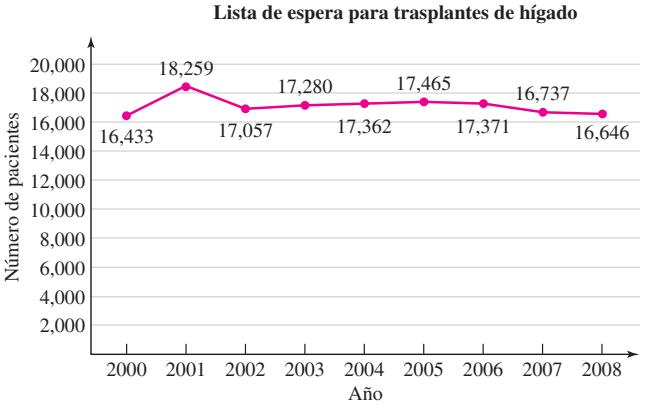
90. REVISTAS En el 2007, *Reader's Digest* tuvo una circulación de 9,322,833. ¿Por qué cantidad excedió a la circulación del *Tele Guía* de 3,288,740?

91. MERCADO DE VALORES ¿Cuántos puntos ganó el Promedio industrial del Dow Jones en el día descrito por la gráfica?



92. TRASPLANTES Vea la gráfica de abajo. Encuentre el decremento en el número de pacientes esperando por un trasplante de hígado del:

a. 2001 al 2002 **b.** 2007 al 2008



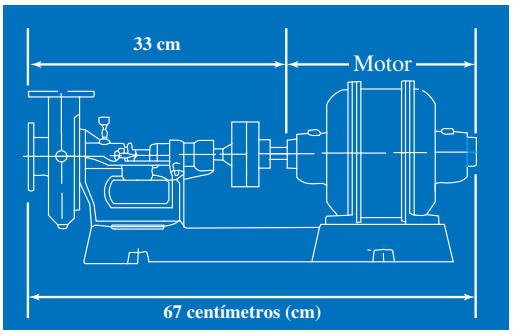
Fuente. U.S. Department of Health and Human Services

93. JOYERÍA El oro se funde a alrededor de 1,947 °F. El punto de fusión de la plata es 183 °F menor. ¿Cuál es el punto de fusión de la plata?

94. COSTOS DE ENERGÍA El costo de la electricidad para hacer funcionar un refrigerador de 10 años de antigüedad por 1 año es de $133. Un refrigerador ahorrador de energía cuesta $85 menos el hacerlo funcionar por 1 año. ¿Cuál es el costo de la electricidad para hacer funcionar el nuevo refrigerador por un año?

95. CÓDIGOS DE ÁREA DE TELEFONÍA El estado de Florida tiene 9 códigos de área menos que California. Si California tiene 26 códigos de área, ¿cuántos tiene Florida?

96. LECTURA DE CIANOTIPOS Encuentre la longitud del motor en la máquina mostrada en el cianotipo.



97. BANCA Una cuenta de ahorros contenía $1,370. Después de un retiro de $197 y un depósito de $340, ¿cuánto quedaba en la cuenta?

98. EXÁMENES FÍSICOS Una prueba sanguínea halló que el nivel de colesterol "malo" de un hombre era de 205. Con un cambio en sus hábitos alimenticios, lo disminuyó en 27 puntos en 6 meses. Sin embargo, un año después el nivel se había elevado en 9 puntos. ¿Cuál era su nivel de colesterol entonces?

Refiérase a la escala salarial de profesores mostrada abajo. Para usar esta tabla, observe que un profesor de cuarto año (Nivel 4) en la Columna 2 gana $42,209 por año.

99. a. ¿Cuál es el salario de una profesora en el Nivel 2/Columna 2?

b. ¿Cuánto más ganará esa profesora al siguiente año cuando gane 1 año de experiencia didáctica y se mueva al Nivel 3 en esa columna?

100. a. ¿Cuál es el salario de un profesor en el Nivel 4/Columna 1?

b. ¿Cuánto más ganará ese profesor al siguiente año cuando gane 1 año de experiencia didáctica y adquiera el suficiente trabajo educativo para moverse a la Columna 2?

Escala salarial de profesores
Distrito Escolar Unificado ABC

Años de enseñanza	Columna 1	Columna 2	Columna 3
Nivel 1	$36,785	$38,243	$39,701
Nivel 2	$38,107	$39,565	$41,023
Nivel 3	$39,429	$40,887	$42,345
Nivel 4	$40,751	$42,209	$43,667
Nivel 5	$42,073	$43,531	$44,989

REDACCIÓN

101. Explique por qué la operación de resta no es conmutativa.

102. Liste cinco palabras o frases que indiquen una resta.

103. Explique cómo puede utilizarse la suma para comprobar una resta.

104. El proceso de acarreo negativo es más complicado cuando el minuendo contiene uno o más ceros. Dé un ejemplo y explique el porqué.

REPASO

105. Redondee 5,370,645 al valor posicional indicado.

a. Decena más cercana

b. Decena de millar más cercana

c. Centena de millar más cercana

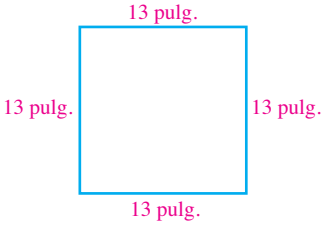
106. Escriba el 72,001,015

a. en palabras

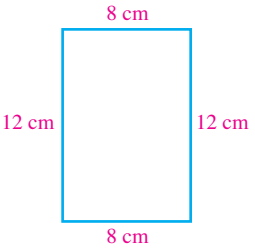
b. en notación expandida

Encuentre el perímetro del cuadrado y del rectángulo.

107.



108.



Sume.

109.
$$\begin{array}{r} 345 \\ 4{,}672 \\ +\ 513 \\ \hline \end{array}$$

110.
$$\begin{array}{r} 813 \\ 7{,}487 \\ +\ 654 \\ \hline \end{array}$$

Objetivos

1. Multiplicar números naturales por números de un dígito.
2. Multiplicar números naturales que terminan con ceros.
3. Multiplicar números naturales por números con dos (o más) dígitos.
4. Usar las propiedades de la multiplicación para multiplicar números naturales.
5. Estimar productos de números naturales.
6. Resolver problemas de aplicación multiplicando números naturales.
7. Encontrar el área de un rectángulo.

SECCIÓN 1.4
Multiplicación de números naturales

La multiplicación de números naturales es utilizada por todos. Por ejemplo, para duplicar una receta, un cocinero multiplica la cantidad de cada ingrediente por dos. Para determinar la superficie útil de un comedor, un vendedor de alfombrado multiplica su longitud por su ancho. Un contador multiplica el número de horas trabajadas por la tasa de pago por hora para calcular el ingreso semanal de los empleados.

1 Multiplicar números naturales por números de un dígito

En la siguiente representación hay 4 renglones y cada renglón tiene 5 estrellas.

Se puede encontrar el número total de estrellas en la representación sumando: $5 + 5 + 5 + 5 = 20$.

Este problema también puede resolverse utilizando un proceso más sencillo llamado **multiplicación.** La multiplicación es una suma repetitiva y se escribe utilizando un **símbolo de multiplicación**, $\times$, el cual se lee como "por". En vez de *sumar* cuatro 5 para obtener 20, se puede multiplicar el 4 y el 5 para obtener 20.

Adición repetitiva		**Multiplicación**	
$5 + 5 + 5 + 5$	$=$	$4 \times 5 = 20$	Lea como "4 por 5 igual a (o es) 20".

Los problemas de multiplicación se pueden escribir en **forma horizontal** o **vertical.** A los números que se están multiplicando se les llama **factores** y a la respuesta se le llama **producto.**

Forma horizontal

$$\underset{\text{Factor}}{4} \times \underset{\text{Factor}}{5} = \underset{\text{Producto}}{20}$$

Forma vertical

$$\begin{array}{r} 5 \leftarrow \text{Factor} \\ \times\ 4 \leftarrow \text{Factor} \\ \hline 20 \leftarrow \text{Producto} \end{array}$$

También puede utilizarse un **punto** $\cdot$ y **paréntesis ( )** para escribir una multiplicación en forma horizontal.

Símbolos utilizados para la multiplicación

Símbolo		**Ejemplo**
$\times$	símbolo por	4×5
$\cdot$	punto	$4 \cdot 5$
$(\ )$	paréntesis	$(4)(5)$ o $4(5)$ o $(4)5$

Para multiplicar números naturales que son menores que 10, se basa en la comprensión de la operación básica de la multiplicación. Por ejemplo,

$$2 \cdot 3 = 6, \qquad 8(4) = 32 \qquad \text{y} \qquad 9 \times 7 = 63$$

Si necesita repasar la operación básica de la multiplicación, puede encontrarla en el Apéndice 1 al final del libro.

Para multiplicar números naturales más grandes, se puede utilizar la forma vertical apilándolos con sus valores posicionales correspondientes alineados. Después se hace el uso repetido de los hechos básicos de la multiplicación.

EJEMPLO 1 Multiplique: 8×47.

Estrategia Se escribirá la multiplicación en forma vertical. Después, empezando de derecha a izquierda, se multiplicará cada dígito del 47 por 8 y se acarreará de ser necesario.

POR QUÉ Este proceso es más sencillo que tratar el problema como una suma repetitiva y sumar ocho veces 47.

Solución

Para ayudarle a comprender el proceso, se explica por separado cada paso de esta multiplicación. Su solución sólo necesita parecerse al *último* paso.

Forma vertical

Columna de las decenas
Columna de las unidades

$$\begin{array}{r} 47 \\ \times\ \ 8 \\ \hline \end{array}$$

Se comienza multiplicando 7 por 8.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 5\ \ } \\ 47 \\ \times\ \ 8 \\ \hline 6 \end{array}$$

Multiplique 7 por 8. El producto es 56. Escriba 6 en la columna de las unidades de la respuesta y acarree el 5 a la columna de las decenas.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 5\ \ } \\ 47 \\ \times\ \ 8 \\ \hline 376 \end{array}$$

Multiplique 4 por 8. El producto es 32. Al 32, súmele el 5 acarreado para obtener 37. Escriba el 7 en la columna de las decenas y el 5 en la columna de las centenas de la respuesta.

Su solución debe parecerse a esta:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 5\ \ } \\ 47 \\ \times\ \ 8 \\ \hline 376 \end{array}$$

El producto es 376.

Auto-revisión 1

Multiplique: 6×54

Ahora intente **Problema 19**

2 Multiplicar números naturales que terminan con ceros

Se lleva a cabo un patrón interesante cuando un número natural se multiplica por 10, 100, 1,000, y así sucesivamente. Considere la siguiente multiplicación que involucra al 8:

$8 \cdot 10 = 80$ Hay un cero en el 10. El producto es 8 con un 0 añadido.

$8 \cdot 100 = 800$ Hay dos ceros en el 100. El producto es 8 con dos 0 añadidos.

$8 \cdot 1{,}000 = 8{,}000$ Hay tres ceros en el 1,000. El producto es 8 con tres 0 añadidos.

$8 \cdot 10{,}000 = 80{,}000$ Hay cuatro ceros en el 10,000. El producto es 8 con cuatro 0 añadidos.

Estos ejemplos ilustran la siguiente regla.

Multiplicación por 10, 100, 1,000, etcétera

Para hallar el producto de un número natural y el 10, 100, 1,000, etc., añada el número de ceros en ese número a la derecha del número natural.

Auto-revisión 2

Multiplique:
a. $9 \times 1{,}000$
b. $25 \cdot 100$
c. $875(1{,}000)$

Ahora intente **Problemas 23 y 25**

EJEMPLO 2

Multiplique: **a.** $6 \times 1{,}000$ **b.** $45 \cdot 100$ **c.** $912(10{,}000)$

Estrategia Para cada multiplicación, se identificará el factor que termina en ceros y se contará el número de ceros que contiene.

POR QUÉ Puede encontrarse cada producto añadiendo ese número de ceros al otro factor.

Solución

a. $6 \times 1{,}000 = 6{,}000$ Dado que 1,000 tiene tres ceros, añada tres 0 después del 6.
b. $45 \cdot 100 = 4{,}500$ Dado que 100 tiene dos ceros, añada dos 0 después del 45.
c. $912(10{,}000) = 9{,}120{,}000$ Dado que 10,000 tiene cuatro ceros, añada cuatro 0 después del 912.

Se puede emplear un método similar al del Ejemplo 2 para una multiplicación que involucre números naturales cualesquier que terminen en ceros. Por ejemplo, para encontrar $67 \cdot 2{,}000$, se tiene

$$67 \cdot \mathbf{2{,}000} = 67 \cdot \mathbf{2 \cdot 1{,}000}$$ Escriba el 2,000 como $2 \cdot 1{,}000$.
$$= 134 \cdot 1{,}000$$ Empezando de izquierda a derecha, multiplique el 67 y el 2 para obtener 134.
$$= 134{,}000$$ Dado que 1,000 tiene tres ceros, añada tres 0 después del 134.

Este ejemplo sugiere que para encontrar $67 \cdot 2{,}000$ simplemente se multiplican el 67 y el 2 y se añaden tres ceros a ese producto. Este método puede extenderse para encontrar productos de *dos* factores que terminan en ceros.

Auto-revisión 3

Multiplique:
a. $15 \cdot 900$
b. $3{,}100 \cdot 7{,}000$

Ahora intente **Problemas 29 y 33**

EJEMPLO 3

Multiplique: **a.** $14 \cdot 300$ **b.** $3{,}500 \cdot 50{,}000$

Estrategia Se multiplicarán los primeros dígitos de cada factor diferentes de cero. A ese producto, se le añadirá la suma del número de ceros finales en los factores.

POR QUÉ Este método es más rápido que la multiplicación en forma vertical estándar de factores que contienen varios ceros.

Solución

a. El factor $3\mathbf{00}$ tiene dos ceros finales.

$14 \cdot 300 = 4{,}200$ Añada dos 0 después del 42.

Multiplique el 14 y el 3 para obtener 42.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1}\,14 \\ \times\ 3 \\ \hline 42 \end{array}$$

b. Los factores $3{,}5\mathbf{00}$ y $5\mathbf{0{,}000}$ tienen un total de seis ceros finales.

$3{,}500 \cdot 50{,}000 = 175{,}000{,}000$ Añada seis 0 después del 175.

Multiplique el 35 y el 5 para obtener 175.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2}\,35 \\ \times\ 5 \\ \hline 175 \end{array}$$

Consejo útil Los cálculos que no pueda desarrollar de manera mental deben mostrarse fuera de los pasos de su solución.

3 Multiplicar números naturales por números con dos (o más) dígitos

Auto-revisión 4

Multiplique: $36 \cdot 334$

Ahora intente **Problema 37**

EJEMPLO 4

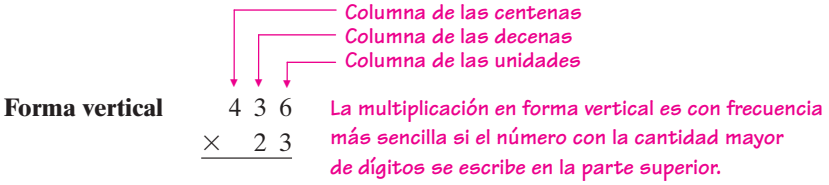
Multiplique: $23 \cdot 436$

Estrategia Se escribirá la multiplicación en forma vertical. Después se multiplicarán el 436 por 3 y por 20 y se sumarán estos productos.

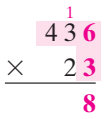
POR QUÉ Dado que $23 = 3 + 20$, se puede multiplicar el 436 por 3 y por 20 y sumar estos productos.

Solución

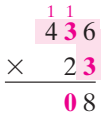
Se explica por separado cada paso de la multiplicación. Su solución sólo necesita parecerse al *último* paso.



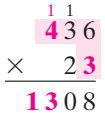
Se comienza multiplicando el 436 por 3.



Multiplique el 6 por 3. El producto es 18. Escriba el 8 en la columna de las unidades y acarree el 1 a la columna de las decenas.

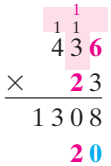


Multiplique el 3 por 3. El producto es 9. Al 9 súmele el 1 acarreado para obtener 10. Escriba el 0 en la columna de las decenas y acarree el 1 a la columna de las centenas.

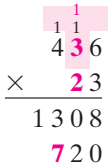


Multiplique el 4 por 3. El producto es 12. Sume el 12 al 1 acarreado para obtener 13. Escriba el 13.

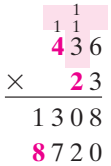
Se continúa multiplicando el 436 por 2 decenas, o 20. Si se piensa en 20 como $2 \cdot 10$, entonces simplemente se multiplica el 436 por 2 y se añade un cero al resultado.



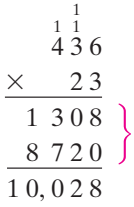
Escriba el 0 que está añadido al resultado de $20 \cdot 436$ en la columna de las unidades (mostrado en azul). Después multiplique el 6 por 2. El producto es 12. Escriba el 2 en la columna de las decenas y acarree el 1.



Multiplique el 3 por 2. El producto es 6. Sume el 6 al 1 acarreado para obtener 7. Escriba el 7 en la columna de las centenas. No hay acarreo.



Multiplique el 4 por 2. El producto es 8. No hay dígito acarreado a sumar. Escriba el 8 en la columna de los millares.



Dibuje otra línea debajo de los dos renglones completados. Sume columna por columna, comenzando de derecha a izquierda. Esta suma da el producto del 435 y del 23.

El producto es 10,028.

El lenguaje de las matemáticas En el Ejemplo 4, a los números **1,308** y **8,720** se les llama **productos parciales.** Los productos parciales se suman para obtener la respuesta, 10,028. La palabra *parcial* significa *sólo una parte*, como en un eclipse *parcial* de luna.

$$\begin{array}{r} 436 \\ \times\ \ 23 \\ \hline 1\,308 \\ 8\,720 \\ \hline 10,028 \end{array}$$

Cuando un factor en la multiplicación contiene uno o más ceros, se debe introducir con cuidado el número correcto de ceros cuando se escriban los productos parciales.

Auto-revisión 5

Multiplique:
a. 706(351)
b. 4,004(2,008)

Ahora intente **Problema 41**

EJEMPLO 5 Multiplique: **a.** 406 · 253 **b.** 3,009(2,007)

Estrategia Se pensará en el 406 como 6 + 400 y en el 3,009 como 9 + 3,000.

POR QUÉ Pensar en los multiplicadores (406 y 3,009) de esta manera es de utilidad cuando se determina el número correcto de ceros en los productos parciales.

Solución

Se utilizará la forma vertical para desarrollar cada multiplicación.

a. Dado que el 406 = 6 + 400, se multiplicará el 253 por 6 y por 400 y se sumarán estos productos parciales.

$$\begin{array}{r} 253 \\ \times\ 406 \\ \hline 1\,518 \\ 101\,200 \\ \hline 102,718 \end{array}$$

← 6 · 253

← 400 · 253. Piense en el 400 como 4 · 100 y simplemente multiplique el 253 por 4 y añada dos ceros (mostrados en azul) al resultado.

El producto es 102,718.

b. Dado que el 3,009 = 9 + 3,000, se multiplicará el 2,007 por 9 y por 3,000 y se sumarán estos productos parciales.

$$\begin{array}{r} 2,007 \\ \times\ 3,009 \\ \hline 18\,063 \\ 6\,021\,000 \\ \hline 6,039,063 \end{array}$$

← 9 · 2,007

← 3,000 · 2,007. Piense en el 3,000 como 3 · 1,000 y simplemente multiplique el 2,007 por 3 y añada tres ceros (mostrados en azul) al resultado.

El producto es 6,039,063.

4 Usar las propiedades de la multiplicación para multiplicar números naturales

¿Alguna vez ha notado que dos números naturales pueden multiplicarse en cualquier orden debido a que el resultado es el mismo? Por ejemplo,

$$4 \cdot 6 = 24 \quad \text{y} \quad 6 \cdot 4 = 24$$

Este ejemplo ilustra la **propiedad conmutativa de la multiplicación.**

Propiedad conmutativa de la multiplicación

El orden en el que se multiplican los números naturales no cambia su producto.

Por ejemplo,

$$7 \cdot 5 = 5 \cdot 7$$

Siempre que se multiplica un número natural por 0, el producto es 0. Por ejemplo,

$$0 \cdot 5 = 0, \qquad 0 \cdot 8 = 0 \qquad \text{y} \qquad 9 \cdot 0 = 0$$

Siempre que se multiplica un número natural por 1, el número sigue siendo el mismo. Por ejemplo,

$$3 \cdot 1 = 3, \qquad 7 \cdot 1 = 7 \qquad \text{y} \qquad 1 \cdot 9 = 9$$

Estos ejemplos ilustran las propiedades de la multiplicación del 0 y del 1.

Propiedades de la multiplicación del 0 y del 1

El producto de cualquier número natural y el 0 es 0.
El producto de cualquier número natural y el 1 es ese número natural.

Consejo útil Si uno (o más) de los factores en una multiplicación es 0, el producto será 0. Por ejemplo,

$$16(27)(0) = 0 \qquad \text{y} \qquad 109 \cdot 53 \cdot 0 \cdot 2 = 0$$

Para multiplicar tres números, primero se multiplican dos de ellos y después se multiplica ese resultado por el tercer número. En los siguientes ejemplos, se multiplica $3 \cdot 2 \cdot 4$ de dos maneras. Los paréntesis muestran cuál multiplicación se desarrolla primero. Los pasos de las soluciones se escriben en forma horizontal.

El lenguaje de las matemáticas En el siguiente ejemplo, lea $(3 \cdot 2) \cdot 4$ como "La *cantidad* de 3 por 2", haga una breve pausa y después diga "por 4". Se lee $3 \cdot (2 \cdot 4)$ como "3 por la *cantidad* de 2 por 4". La palabra *cantidad* alerta al lector de que los paréntesis se están utilizando como símbolos de agrupación.

Método 1: agrupe $3 \cdot 2$

$(\mathbf{3 \cdot 2}) \cdot 4 = \mathbf{6} \cdot 4$ Multiplique el 3 y el 2 para obtener 6.

$= 24$ Multiplique el 6 y el 4 para obtener 24.

Método 2: agrupe $2 \cdot 4$

$3 \cdot (\mathbf{2 \cdot 4}) = 3 \cdot \mathbf{8}$ Después multiplique el 2 y el 4 para obtener 8.

$= 24$ Después multiplique el 3 y el 8 para obtener 24.

Mismo resultado

De cualquier manera, la respuesta es 24. Este ejemplo ilustra que cambiar el agrupamiento cuando se multiplican números no afecta el resultado. A esta propiedad se le llama **propiedad asociativa de la multiplicación.**

Propiedad asociativa de la multiplicación

La manera en la que se agrupan los números naturales no cambia su producto.
Por ejemplo,

$$(2 \cdot 3) \cdot 5 = 2 \cdot (3 \cdot 5)$$

En ocasiones, una aplicación de la propiedad asociativa puede simplificar un cálculo.

Auto-revisión 6

Encuentre el producto: $(23 \cdot 25) \cdot 4$

Ahora intente **Problema 45**

EJEMPLO 6 Encuentre el producto: $(17 \cdot 50) \cdot 2$

Estrategia Se utilizará la propiedad asociativa para agrupar el 50 con el 2.

POR QUÉ Es de utilidad el reagrupar debido a que el 50 y el 2 son un par de números que se multiplican con facilidad.

Solución

Se escribirá la solución en forma horizontal.

$$(17 \cdot 50) \cdot 2 = 17 \cdot (50 \cdot 2)$$ Use la propiedad asociativa de la multiplicación para reagrupar los factores.

$$= 17 \cdot 100$$ Realice primero la multiplicación dentro de los paréntesis.

$$= 1{,}700$$ Dado que 100 tiene dos ceros, añada dos 0 después del 17.

5 Estimar productos de números naturales

Se emplea la estimación para hallar una respuesta aproximada para un problema.

Auto-revisión 7

Estime el producto: $74 \cdot 488$

Ahora intente **Problema 51**

EJEMPLO 7 Estime el producto: $59 \cdot 334$.

Estrategia Se utilizará el redondeo por la izquierda para aproximar los factores 59 y 334. Después se encontrará el producto de las aproximaciones.

POR QUÉ El redondeo por la izquierda produce números naturales que contienen varios 0. Tales números son más sencillos de multiplicar.

Solución

Los factores se redondean a su *mayor valor posicional* para que todos sus dígitos menos el primero sean cero.

Redondee a la decena más cercana.

$59 \cdot 334$ $\qquad$ $60 \cdot 300$

Redondee a la centena más cercana.

Para hallar el producto de las aproximaciones, $60 \cdot 300$, simplemente se multiplica el 6 por 3, para obtener 18 y se añaden 3 ceros. Por tanto, el estimado es de 18,000.

Si se calculan $59 \cdot 334$, el producto es exactamente 19,706. Observe que el estimado es cercano: Sólo es 1,706 menos que 19,706.

6 Resolver problemas de aplicación multiplicando números naturales

Los problemas de aplicación que involucran una suma repetitiva con frecuencia son más fáciles de resolver utilizando la multiplicación.

Auto-revisión 8

SALARIO DIARIO En el 2008, el trabajador de la construcción promedio en E.U. ganaba $22 la hora. A esa tasa, ¿cuánto dinero ganaba en un día laboral de 8 horas? (Fuente: Oficina de Estadística Laboral)

Ahora intente **Problema 86**

EJEMPLO 8 ***Salario diario*** En el 2008, el trabajador de la industria promedio en E.U. ganaba $18 la hora. A esa tasa, ¿cuánto dinero ganaba en un día laboral de 8 horas? (Fuente: Oficina de Estadística Laboral)

Estrategia Para encontrar la cantidad ganada en un día laboral de 8 horas, se multiplicará la tasa por hora de $18 por 8.

POR QUÉ Para cada una de las 8 horas, el trabajador de la industria promedio ganaba $18. La cantidad ganada por día es la suma de ocho dieciochos: $18 + 18 + 18 + 18 + 18 + 18 + 18 + 18$. Esta suma repetitiva puede calcularse de manera más sencilla por medio de la multiplicación.

Solución

Se traducen las palabras del problema a números y símbolos.

La cantidad ganada en un día laboral de 8 horas	es igual a	la tasa por hora	por	8 horas
La cantidad ganada en un día laboral de 8 horas	=	18	·	8

Use la forma vertical para desarrollar la multiplicación:

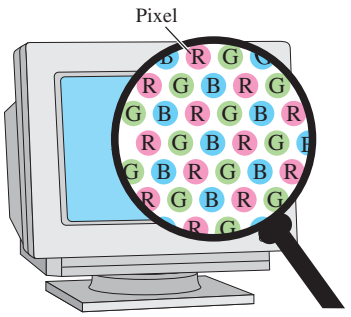
$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 6}\\ 18\\ \times\ \ 8\\ \hline 144 \end{array}$$

En el 2008, el trabajador de la industria promedio en E.U. ganaba \$144 en un día laboral de 8 horas.

Se puede utilizar la multiplicación para contar objetos acomodados en patrones de renglones y columnas ordenados con esmero llamados **arreglos rectangulares**.

El lenguaje de las matemáticas Un *arreglo* es una distribución de manera ordenada. Por ejemplo, una joyería podría mostrar un bello *arreglo* de piedras preciosas.

EJEMPLO 9 ***Pixeles*** Refiérase a la ilustración a la derecha. Los puntos pequeños de color, llamados *pixeles*, crean las imágenes digitales observadas en las pantallas de computadoras. Si una pantalla de 14 pulgadas tiene 640 pixeles de lado a lado y 480 pixeles de arriba abajo, ¿cuántos semuestran en la pantalla?



Estrategia Se multiplicará el 640 por 480 para determinar el número de pixeles que se muestran en la pantalla.

PORQUÉ Los pixeles forman un arreglo rectangular de 640 renglones y 480 columnas en la pantalla. Puede utilizarse la multiplicación para contar los objetos en un arreglo rectangular.

Solución

Se traducen las palabras del problema a números y símbolos.

El número de pixeles en la pantalla	es igual al	número de pixeles en un renglón	por	el número de pixeles en una columna
El número de pixeles en la pantalla	=	640	·	480

Para hallar el producto de 640 y 480, se utiliza la forma vertical para multiplicar el 64 y el 48 y se añaden dos ceros a ese resultado.

$$\begin{array}{r} 48\\ \times\ 64\\ \hline 192\\ 2\,880\\ \hline 3{,}072 \end{array}$$

Dado que el producto del 64 y del 48 es 3,072, el producto de 64**0** y 48**0** es 307,2**00**. La pantalla muestra 307,200 pixeles.

Auto-revisión 9

PIXELES Si una pantalla de 17 pulgadas tiene 1,024 píxeles de lado a lado y 768 de arriba abajo, ¿cuántos pixeles se muestran en la pantalla?

Ahora intente **Problema 93**

El lenguaje de las matemáticas Aquí hay algunas palabras y frases clave que con frecuencia se utilizan para indicar una multiplicación:

duplicar *triple* *doble* *de* *veces*

Auto-revisión 10

INSECTOS Las hormigas cortadoras de hojas pueden transportar partes de hojas que pesan 30 veces su peso corporal. ¿Cuánto puede levantar una hormiga si pesa 25 miligramos?

Ahora intente **Problema 99**

EJEMPLO 10 ***Levantamiento de pesas*** En 1983, Stefan Topurov de Bulgaria fue el primer hombre en levantar tres veces su peso corporal sobre su cabeza. Si pesaba 132 libras en ese entonces, ¿cuánto peso levantó sobre su cabeza?

Estrategia Para encontrar cuánto peso levantó sobre su cabeza, se multiplicará su peso corporal por 3.

POR QUÉ Se puede utilizar la multiplicación para determinar el resultado cuando una cantidad incremente en tamaño en 2 *veces,* 3 *veces,* 4 *veces*, etcétera.

Solución

Se traducen las palabras del problema a números y símbolos.

La cantidad que levantó sobre su cabeza	fue	3	veces	su peso corporal.
La cantidad que levantó sobre su cabeza	=	3	·	132

Use la forma vertical para desarrollar la multiplicación:

$$\begin{array}{r} 132 \\ \times\ \ 3 \\ \hline 396 \end{array}$$

Stefan Topurov levantó 396 libras sobre su cabeza.

Utilizando su CALCULADORA **La tecla de multiplicación: Segundos en un año**

Hay 60 segundos en 1 minuto, 60 minutos en 1 hora, 24 horas en 1 día y 365 días en un año. Se puede encontrar el número de segundos en 1 año utilizando la tecla de multiplicación [×] en una calculadora.

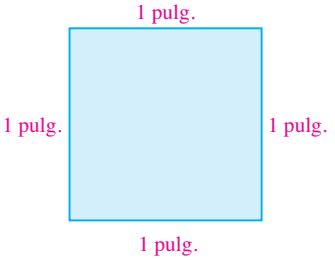
60 [×] 60 [×] 24 [×] 365 [=] 31536000

En algunos modelos de calculadora, se presiona la tecla [ENTER] en vez de la tecla [=] para que se muestre el resultado.

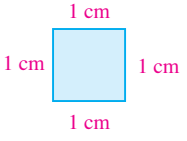
Hay 31,536,000 segundos en 1 año.

7 Encontrar el área de un rectángulo

Una aplicación importante de la multiplicación es encontrar el área de un rectángulo. El **área de un rectángulo** es la medida de la cantidad de región que delimita. El área se mide en unidades cuadradas, como pulgadas cuadradas (escritas como pulg.^{2}) o centímetros cuadrados (escritos como cm^2), como se muestra abajo.

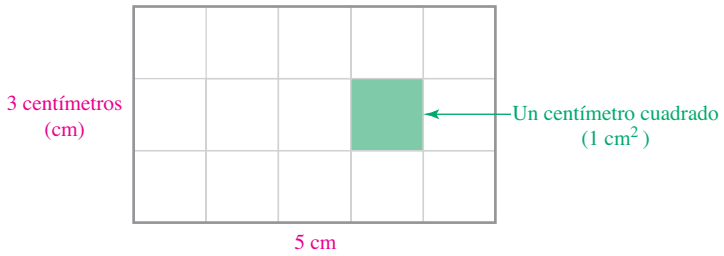


Una pulgada cuadrada (1 pulg.^{2})



Un centímetro cuadrado (1 cm^2)

El rectángulo en la figura de abajo tiene un largo de 5 centímetros y un ancho de 3 centímetros. Dado que cada región cuadrada pequeña cubre un área de un centímetro cuadrado, cada región cuadrada pequeña mide 1 cm^2. Las regiones cuadradas pequeñas forman un patrón rectangular, con 3 renglones de 5 cuadrados.



Debido a que hay $5 \cdot 3$, o 15, regiones cuadradas pequeñas, el área del rectángulo es de 15 cm^2. Esto sugiere que el área de cualquier rectángulo es el producto de su largo y su ancho.

Área de un rectángulo = largo · ancho

Utilizando la letra A para representar el área del rectángulo, la letra l para representar el largo del rectángulo y la letra a para representar su ancho, se puede escribir esta **fórmula** de una manera más sencilla. A las letras (o símbolos), como A, l y a, que se utilizan para representar números se les llama **variables.**

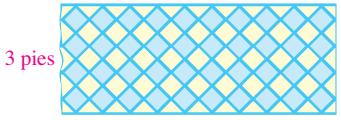
Área de un rectángulo

El área, A, de un rectángulo es el producto del largo del rectángulo, l, y su ancho, a.

Área = largo · ancho o $A = l \cdot a$

La fórmula puede escribirse de manera más sencilla sin el punto como $A = la$.

EJEMPLO 11 ***Envoltura de regalos*** Cuando se desenrolla por completo, determinada hoja larga de papel para envolver tiene las dimensiones mostradas abajo. ¿Cuántos pies cuadrados de papel para envolver hay en el rollo?



Estrategia Se sustituirá 12 para el largo y 3 para el ancho en la fórmula para el área de un rectángulo.

POR QUÉ Para hallar el número de pies cuadrados del papel, se necesita encontrar el área del rectángulo mostrado en la figura.

Solución

Se traducen las palabras del problema a números y símbolos.

El área del papel para envolver	es igual a	el largo del rollo	por	el ancho del rollo
El área del papel para envolver	=	12	·	3
	=	36		

Hay 36 pies cuadrados de papel para envolver en el rollo. Esto puede escribirse de manera más compacta como 36 $pies^2$.

Auto-revisión 11

PUBLICIDAD Los afiches rectangulares empleados en carteles pequeños en el subterráneo de Nueva York son de 59 pulgadas de ancho por 45 pulgadas de alto. Encuentre el área de un afiche en el subterráneo.

Ahora intente **Problemas 53 y 55**

¡Cuidado! Recuerde que el perímetro de un rectángulo es la longitud alrededor de él y se mide en unidades como pulgadas, pies y millas. El área de un rectángulo es la cantidad de región que delimita y se mide en unidades cuadradas como pulg.^{2}, pies^2 y mi^2.

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. 324 **2. a.** 9,000 **b.** 2,500 **c.** 875,000 **3. a.** 13,500 **b.** 21,700,000
4. 12,024 **5. a.** 247,806 **b.** 8,040,032 **6.** 2,300 **7.** 35,000 **8.** $176
9. 786,432 **10.** 750 miligramos **11.** 2,655 in.^{2}

LISTA DE VERIFICACIÓN DE LAS HABILIDADES DE ESTUDIO

Obtenga el máximo rendimiento de su libro de texto

La siguiente lista de verificación le ayudará a familiarizarse con algunas características en este libro. Coloque una marca de verificación en cada recuadro después de responder la pregunta.

☐ Localice la **Definición** para la divisibilidad en la página 61 y las reglas del Orden de las operaciones en la página 102. ¿De qué color son estos recuadros?

☐ Encuentre el recuadro **Cuidado** en la página 36, el recuadro **Consejo útil** en la página 45 y el recuadro **El lenguaje de las matemáticas** en la página 45. ¿Qué color se utiliza para identificar estos recuadros?

☐ Cada capítulo comienza con **Carreras del campus** (vea la página 1). El Capítulo 3 proporciona información sobre cómo volverse un consejero vocacional. ¿En qué página aparece un problema relacionado en el Espacio para el estudio 3.4?

☐ Localice el **Taller de habilidad de estudio** al inicio de su texto comenzando en la página S-1. ¿Cuántos Objetivos aparecen en el Taller de habilidad de estudio?

Respuestas: Verde, rojo, 255, 7

SECCIÓN 1.4 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Complete los espacios.

1. En el problema de multiplicación mostrado abajo, etiquete cada *factor* y el *producto.*

$$5 \cdot 10 = 50$$

2. La multiplicación es una suma _____.

3. La propiedad _____ de la multiplicación enuncia que el orden en el que se multiplican los números naturales no cambia su producto. La propiedad _____ de la multiplicación enuncia que la manera en la que se agrupan los números naturales no cambia su producto.

4. A las letras que se utilizan para representar números se les llama _____.

5. Si un cuadrado mide 1 pulgada de cada lado, su área es de 1 pulgada _____.

6. El _____ de un rectángulo es una medida de la cantidad de superficie que delimita.

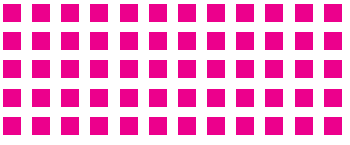
CONCEPTOS

7. a. Escriba la suma repetitiva $8 + 8 + 8 + 8$ como una multiplicación.

b. Escriba la multiplicación $7 \cdot 15$ como una suma repetitiva.

8. a. Complete el espacio: Abajo se muestra un _____ rectangular de cuadrados rojos.

b. Escriba un enunciado de multiplicación que proporcionará el número de cuadrados rojos.



9. a. ¿Cuántos ceros añade a la derecha del 25 para encontrar $25 \cdot 1{,}000$?

b. ¿Cuántos ceros añade a la derecha del 8 para encontrar $400 \cdot 2{,}000$?

10. a. Utilizando los números 5 y 9, escriba un enunciado que ilustre la propiedad conmutativa de la multiplicación.

b. Utilizando los números 2, 3 y 4, escriba un enunciado que ilustre la propiedad asociativa de la multiplicación.

11. Determine si debe aplicarse el concepto de *perímetro* o el de *área* para encontrar cada uno de los siguientes.

a. La cantidad de superficie útil a alfombrar

b. El número de pulgadas de encaje necesarias para adornar los lados de un pañuelo

c. La cantidad de vidrio claro para entintar

d. El número de pies de cerca necesario para delimitar un campo de juego

12. Desarrolle cada multiplicación.

a. $1 \cdot 25$ **b.** $62(1)$

c. $10 \cdot 0$ **d.** $0(4)$

NOTACIÓN

13. Escriba los tres símbolos que se utilizan para la multiplicación.

14. ¿Qué significa pies^2?

15. Escriba la fórmula para el área de un rectángulo utilizando variables.

16. ¿A cuáles números en la solución mostrada abajo se les llama productos parciales?

$$\begin{array}{r} 86 \\ \times\ 23 \\ \hline 258 \\ 1\,720 \\ \hline 1{,}978 \end{array}$$

PRÁCTICA GUIADA

Multiplique. **Vea el Ejemplo 1.**

17. 15×7 **18.** 19×9

19. 34×8 **20.** 37×6

Desarrolle cada multiplicación sin utilizar lápiz y papel o una calculadora. **Vea el Ejemplo 2.**

21. $37 \cdot 100$ **22.** $63 \cdot 1{,}000$

23. 75×10 **24.** $88 \times 10{,}000$

25. $107(10{,}000)$ **26.** $323(100)$

27. $512(1{,}000)$ **28.** $673(10)$

Multiplique. **Vea el Ejemplo 3.**

29. $68 \cdot 40$ **30.** $83 \cdot 30$

31. $56 \cdot 200$ **32.** $222 \cdot 500$

33. $130(3{,}000)$ **34.** $630(7{,}000)$

35. $2{,}700(40{,}000)$ **36.** $5{,}100(80{,}000)$

Multiplique. **Vea el Ejemplo 4.**

37. $73 \cdot 128$ **38.** $54 \cdot 173$

39. $64(287)$ **40.** $72(461)$

Multiplique. **Vea el Ejemplo 5.**

41. $602 \cdot 679$ **42.** $504 \cdot 729$

43. $3{,}002(5{,}619)$ **44.** $2{,}003(1{,}376)$

Aplique la propiedad asociativa de la multiplicación para encontrar el producto. **Vea el Ejemplo 6.**

45. $(18 \cdot 20) \cdot 5$ **46.** $(29 \cdot 2) \cdot 50$

47. $250 \cdot (4 \cdot 135)$ **48.** $250 \cdot (4 \cdot 289)$

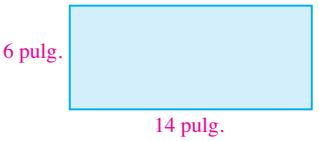
Estime cada producto. **Vea el Ejemplo 7.**

49. $86 \cdot 249$ **50.** $56 \cdot 631$

51. $215 \cdot 1{,}908$ **52.** $434 \cdot 3{,}789$

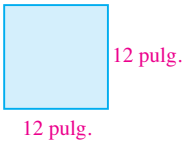
Encuentre el área de cada rectángulo o cuadrado. **Vea el Ejemplo 11.**

53.

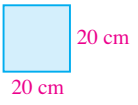


54.

55.



56.



INTÉNTELO

Multiplique.

57. $\begin{array}{r} 213 \\ \times\ 7 \\ \hline \end{array}$ **58.** $\begin{array}{r} 863 \\ \times\ 9 \\ \hline \end{array}$

59. $34{,}474 \cdot 2$ **60.** $54{,}912 \cdot 4$

61. $\begin{array}{r} 99 \\ \times\ 77 \\ \hline \end{array}$ **62.** $\begin{array}{r} 73 \\ \times\ 59 \\ \hline \end{array}$

63. $44(55)(0)$

64. $81 \cdot 679 \cdot 0 \cdot 5$

65. $53 \cdot 30$

66. $20 \cdot 78$

67.
$$\begin{array}{r} 754 \\ \times\ 59 \\ \hline \end{array}$$

68.
$$\begin{array}{r} 846 \\ \times\ 79 \\ \hline \end{array}$$

69. $(2{,}978)(3{,}004)$

70. $(2{,}003)(5{,}003)$

71.
$$\begin{array}{r} 916 \\ \times\ 409 \\ \hline \end{array}$$

72.
$$\begin{array}{r} 889 \\ \times\ 507 \\ \hline \end{array}$$

73. $25 \cdot (4 \cdot 99)$

74. $(41 \cdot 5) \cdot 20$

75. $4{,}800 \times 500$

76. $6{,}400 \times 700$

77.
$$\begin{array}{r} 2{,}779 \\ \times\ 128 \\ \hline \end{array}$$

78.
$$\begin{array}{r} 3{,}596 \\ \times\ 136 \\ \hline \end{array}$$

79. $370 \cdot 450$

80. $280 \cdot 340$

APLICACIONES

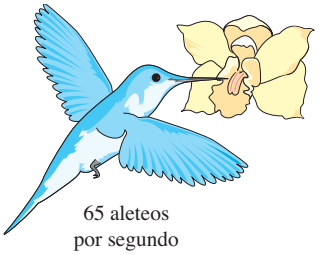
81. CEREALES PARA EL DESAYUNO Un productor de cereales anuncia "Dos tazas de pasas en cada caja". Encuentre el número de tazas de pasas en un contenedor con 36 cajas de cereal.

82. BOCADILLOS Un almacén de dulces vende bolsas grandes de cuatro libras de M&M's. Hay aproximadamente 180 M&M's con cacahuate por libra. ¿Cuántos cacahuates M&M's hay en una bolsa?

83. NUTRICIÓN Hay 17 gramos de grasa en una rosquilla rellena con crema y chocolate helado Krispy Kreme. ¿Cuántos gramos de grasa hay en una docena de estas rosquillas?

84. JUGO Se requieren 13 naranjas pare preparar una lata de jugo de naranja. Encuentre el número de naranjas utilizadas para preparar una caja con 24 latas.

85. PÁJAROS ¿Cuántas veces aletea sus alas un colibrí cada minuto?



65 aleteos por segundo

86. HONORARIOS Las tarifas por hora promedio para los mejores abogados en Nueva York son de $775. Si un abogado le cobra a su cliente 15 horas de trabajo legal, ¿de cuánto son los honorarios?

87. CONVERSIÓN DE UNIDADES Hay 12 pulgadas en 1 pie y 5,280 pies en 1 milla. ¿Cuántas pulgadas hay en una milla?

88. AHORRO DE COMBUSTIBLE En la tabla se muestran las cifras del millaje para un Ford Mustang GT 2009 convertible.

a. Para la conducción en ciudad, ¿qué tanto se puede recorrer con un tanque de gasolina?

b. Para la conducción en carretera, ¿qué tanto se puede recorrer con un tanque de gasolina?

© Car Culture/Corbis

Capacidad del tanque de combustible	16 gal
Ahorro de combustible (millas por galón)	15 ciudad/23 carretera

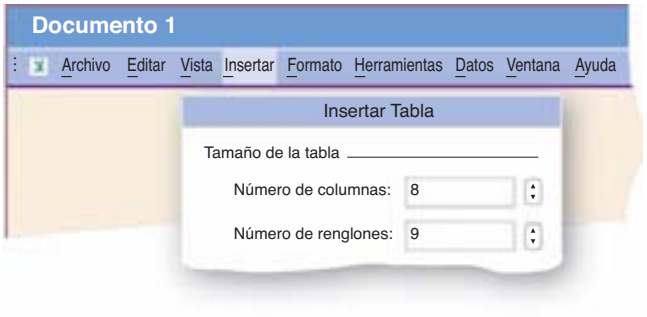
89. CONTEO DE PALABRAS Por lo general, el número de palabras en una página para una novela publicada es de 250. ¿Cuál sería el conteo de palabras esperado para la novela infantil de 308 páginas *Harry Potter y la piedra filosofal*?

90. RENTAS Mia es dueña de un edificio de departamentos con 18 unidades. Cada unidad genera un ingreso mensual de $450. Encuentre su ingreso mensual total.

91. SALARIO DE CONGRESISTAS El salario anual de un miembro de la Cámara de Representantes de E.U. es de $169,300. ¿Cuál es el costo por año para el pago de los salarios de los 435 miembros electos de la Cámara?

92. PETRÓLEO CRUDO Estados Unidos emplea 20,730,000 barriles de petróleo crudo por día. Un barril contiene 42 galones de petróleo crudo. ¿Cuántos galones de petróleo crudo utiliza Estados Unidos en un día?

93. PROCESADOR DE PALABRAS Un estudiante utiliza las opciones de *Insertar Tabla* mostradas cuando teclea un reporte. ¿Cuántas entradas contendrá la tabla?



94. JUEGOS DE MESA Un tablero de ajedrez consiste en 8 renglones con 8 cuadrados en cada renglón. Los cuadrados alternan de color, rojo y negro. ¿Cuántos cuadrados hay en el tablero de ajedrez?

95. CAPACIDAD DEL SALÓN Un salón de clases tiene 17 filas con 33 asientos cada una. Un letrero en las paredes indica "La ocupación por más de 570 personas está prohibida". Si se toman todos los asientos y hay un instructor en la habitación, ¿el colegio rompe la regla?

96. ELEVADORES Hay 14 personas en un elevador con una capacidad de 2,000 libras. Si el peso promedio de una persona en el elevador es de 150 libras, ¿el elevador está sobrecargado?

97. KOALAS En un periodo de 24 horas, un koala duerme 3 veces tantas horas como está despierto. Si está despierto por 6 horas, ¿cuántas horas duerme?

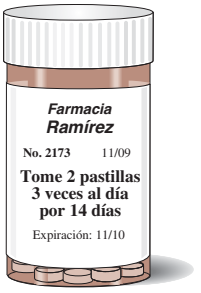
98. RANAS Las ranas toro pueden saltar hasta 10 veces su longitud corporal. ¿Qué tanto pudiera saltar una rana toro de 8 pulgadas de largo?

99. VIAJE Durante las Olimpiadas del 2008 que se celebraron en Beijing, China, el costo de algunas habitaciones de hotel era 33 veces mayor que el cargo normal de $42 por noche. ¿Cuál fue el costo de una habitación durante las Olimpiadas?

100. AHORROS DE ENERGÍA Un foco ENERGY STAR dura ocho veces más que un foco estándar de 60 watts. Si un foco estándar por lo regular dura 11 meses, ¿cuánto durará un foco ENERGY STAR?

Imagen con copyright Jose Gill, 2009 Utilizada bajo licencia de Shutterstock.com

101. RECETAS ¿Cuántas pastillas debe colocar un farmacéutico en el contenedor mostrado en la ilustración?

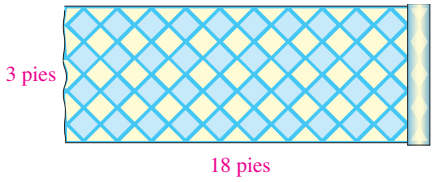


102. LATIDOS Una tasa de pulsos normal para un adulto sano, en reposo, puede variar de 60 a 100 latidos por minuto.

a. ¿Cuántos latidos hay en un día en el extremo más bajo del intervalo?

b. ¿Cuántos latidos hay en un día en el extremo más alto del intervalo?

103. ENVOLTURA DE REGALOS Cuando se desenrolla por completo, determinada hoja larga de papel para envolver tiene las dimensiones mostradas abajo. ¿Cuántos pies cuadrados de papel para envolver hay en el rollo?



104. CARTULINAS Una cartulina de forma rectangular tiene dimensiones de 24 pulgadas por 36 pulgadas. Encuentre su área.

105. WYOMING El estado de Wyoming es de forma aproximadamente rectangular, con dimensiones de 360 millas de largo y 270 millas de ancho. Encuentre su perímetro y su área.

106. COMPARACIÓN DE HABITACIONES ¿Cuál tiene un área mayor, una habitación rectangular que es de 14 pies por 17 pies o una habitación cuadrada de 16 pies de lado? ¿Cuál tiene el mayor perímetro?

REDACCIÓN

107. Explique la diferencia entre 1 pie y un pie cuadrado.

108. Cuando se multiplican dos números, el resultado es 0. ¿Qué conclusión puede derivarse acerca de los números?

REPASO

109. Encuentre la suma de 10,357, 9,809 y 476.

110. DESCUENTOS A un radio, con un precio original de $367, se le ha disminuido su precio a $179. ¿Cuántos dólares se le descontaron al radio?

Objetivos

1. Escribir el enunciado de multiplicación relacionado para una división.
2. Usar las propiedades de la división para dividir números naturales.
3. Desarrollar divisiones largas (sin residuo).
4. Desarrollar divisiones largas (con residuo).
5. Usar las pruebas para la divisibilidad.
6. Dividir números naturales que terminan con ceros.
7. Estimar cocientes de números naturales.
8. Resolver problemas de aplicación dividiendo números naturales.

SECCIÓN 1.5
División de números naturales

La división de números naturales es empleada por todos. Por ejemplo, para encontrar cuántas porciones de 6 onzas puede obtener un chef a partir de 48 onzas de carne asada, divide 48 entre 6. Para repartir una herencia de $36,000 de manera equitativa, un hermano y una hermana dividen la cantidad entre 2. Un profesor divide a los 35 estudiantes en su clase en grupos de 5 para debatir.

1 Escribir el enunciado de multiplicación relacionado para una división

Para dividir números naturales, piense en separar una cantidad en grupos de igual tamaño. Por ejemplo, si comienza con un conjunto de 12 estrellas y las divide en grupos de cuatro estrellas, se obtendrán 3 grupos.

Un conjunto de 12 estrellas.

Hay 3 grupos de 4 estrellas.

Este problema de división se puede escribir utilizando un **símbolo de división**, ÷, un **símbolo de división larga**, $\overline{)\quad}$, o **una barra de fracción**, −. Al número que se está dividiendo se le llama **dividendo** y al número entre el que se está dividiendo se le llama **divisor.** A la respuesta se le llama **cociente.**

Símbolo de división

$$\underset{\text{Dividendo}}{12} \div \underset{\text{Divisor}}{4} = \underset{\text{Cociente}}{3}$$

Símbolo de división larga

$$\begin{array}{r} \overset{\text{Cociente}}{3} \\ 4\overline{)12} \end{array}$$

Divisor Dividendo

Barra de fracción

$$\frac{\overset{\text{Dividendo}}{12}}{\underset{\text{Divisor}}{4}} = \overset{\text{Cociente}}{3}$$

Se lee cada forma como "12 dividido entre 4 es igual (o es) 3".

Recuerde a partir de la Sección 1.4 que la multiplicación es una suma repetitiva. De manera similar, la división es una resta repetitiva. Para dividir 12 entre 4, se pregunta: "¿Cuántos 4 pueden restarse de 12?".

$$\begin{array}{r} 12 \\ -\ 4 \\ \hline 8 \\ -\ 4 \\ \hline 4 \\ -\ 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

Reste 4 una vez.

Reste 4 una segunda vez.

Reste 4 una tercera vez.

Dado que pueden restarse exactamente tres 4 de 12 para obtener 0, se sabe que $12 \div 4 = 3$.

Otra manera de responder un problema de división es pensar en términos de la multiplicación. Por ejemplo, la división $12 \div 4$ realiza la pregunta: "¿Por qué número debe multiplicarse el 4 para obtener 12?". Dado que la respuesta es 3, se sabe que

$$12 \div \mathbf{4} = \mathbf{3} \text{ debido a que } \mathbf{3} \cdot \mathbf{4} = 12$$

A $3 \cdot 4 = 12$ se le llama **enunciado de multiplicación relacionado** para la división $12 \div 4 = 3$. En general, para escribir el enunciado de multiplicación relacionado para una división, se utiliza:

Cociente · divisor = dividendo

EJEMPLO 1 Escriba el enunciado de multiplicación relacionado para cada división.

a. $10 \div 5 = 2$ **b.** $6\overline{)24}$ **c.** $\frac{21}{3} = 7$

Estrategia Se identificará el cociente, el divisor y el dividendo en cada enunciado de división.

POR QUÉ Un enunciado de multiplicación relacionado tiene la siguiente forma: Cociente · divisor = dividendo.

Solución

a. $10 \div 5 = 2$ debido a que $2 \cdot 5 = 10$.

Dividendo

Cociente

Divisor

b. $6\overline{)24}$ debido a que $4 \cdot 6 = 24$. El 4 es el cociente, el 6 es el divisor y el 24 es el dividendo.

c. $\frac{21}{3} = 7$ debido a que $7 \cdot 3 = 21$. El 7 es el cociente, el 3 es el divisor y el 21 es el dividendo.

El lenguaje de las matemáticas Para describir la relación especial entre la multiplicación y la división, se dice que son **operaciones inversas.**

2 Usar las propiedades de la división para dividir números naturales

Recuerde a partir de la Sección 1.4 que *el producto de cualquier número natural y el 1 es ese número natural.* Se puede utilizar ese hecho para establecer dos propiedades importantes de la división. Considere los siguientes ejemplos donde se divide entre 1 un número natural:

$8 \div 1 = 8$ debido a que $8 \cdot 1 = 8$.

$1\overline{)4}$ debido a que $4 \cdot 1 = 4$.

$\frac{20}{1} = 20$ debido a que $20 \cdot 1 = 20$.

Estos ejemplos ilustran que *cualquier número natural dividido entre 1 es igual al mismo número.*

Considere los siguientes ejemplos donde se divide un número natural entre sí mismo:

$6 \div 6 = 1$ debido a que $1 \cdot 6 = 6$.

$9\overline{)9}$ debido a que $1 \cdot 9 = 9$.

$\frac{35}{35} = 1$ debido a que $1 \cdot 35 = 35$.

Estos ejemplos ilustran que *cualquier número natural diferente del cero dividido entre sí mismo es igual a 1.*

Propiedades de la división

Cualquier número natural dividido entre 1 es igual a ese número. Por ejemplo, $\frac{14}{1} = 14$.

Cualquier número natural diferente de cero dividido entre sí mismo es igual a 1. Por ejemplo, $\frac{14}{14} = 1$.

Auto-revisión 1

Escriba el enunciado de multiplicación relacionado para cada división.

a. $8 \div 2 = 4$

b. $7\overline{)56}$

c. $\frac{36}{4} = 9$

Ahora intente **Problemas 19 y 23**

Recuerde a partir de la Sección 1.4 que *el producto de cualquier número natural y el 0 es 0.* Se puede utilizar este hecho para establecer otra propiedad de la división. Considere los siguientes ejemplos donde se divide el 0 entre cualquier número natural:

$0 \div 2 = \mathbf{0}$ debido a que $\mathbf{0} \cdot 2 = 0$.

$7\overline{)0}$ (cociente $\mathbf{0}$) debido a que $\mathbf{0} \cdot 7 = 0$.

$\frac{0}{42} = \mathbf{0}$ debido a que $\mathbf{0} \cdot 42 = 0$.

Estos ejemplos ilustran que *el 0 dividido entre cualquier número natural diferente del cero es igual a 0.*

No se puede dividir un número natural entre 0. Para ilustrar el porqué, se intentará encontrar el cociente cuando se divide el 2 entre el 0 utilizando el enunciado de multiplicación relacionado mostrado abajo.

Enunciado de división	***Enunciado de multiplicación relacionado***
$\frac{2}{0} = \mathbf{?}$	$\mathbf{?} \cdot 0 = 2$

No existe un número que dé 2 cuando se multiplica por 0.

Dado que $\frac{2}{0}$ no tiene un cociente, se dice que la división del 2 entre el 0 está *indefinida.* Abajo se ilustran estas observaciones acerca de la división del 0 y de la división entre el 0.

División con cero

1. El cero dividido entre cualquier número diferente del cero es igual a 0. Por ejemplo, $\frac{0}{17} = 0$.
2. La división entre 0 está indefinida. Por ejemplo, $\frac{17}{0}$ está indefinida.

3 Desarrollar divisiones largas (sin residuo)

Un proceso llamado **división larga** puede emplearse para dividir números naturales grandes.

Auto-revisión 2

Divida utilizando una división larga: $2{,}968 \div 4$. Compruebe el resultado.

Ahora intente **Problema 31**

EJEMPLO 2 Divida utilizando una división larga: $2{,}514 \div 6$. Compruebe el resultado.

Estrategia Se escribirá el problema en forma de división larga y se seguirá un proceso de cuatro pasos: **estimar, multiplicar, restar** y **descender.**

POR QUÉ El proceso de resta repetitiva tomaría demasiado tiempo para desarrollarlo y el enunciado de multiplicación relacionado ($\mathbf{?} \cdot 6 = 2{,}514$) es demasiado complejo de resolver.

Solución

Para ayudarle a comprender el proceso, se explica por separado cada paso de la división. Su solución sólo necesita parecerse al *último* paso.

Se escribe el problema en la forma $6\overline{)2514}$. El cociente aparecerá sobre el símbolo de división larga. Dado que el 6 no dividirá el 2,

$6\overline{)2514}$

se divide el 25 entre 6.

$$\begin{array}{r} 4 \\ 6\overline{)2514} \end{array}$$

Pregunte: "¿Cuántas veces dividirá el 6 el 25?". Se estima que $25 \div 6$ es alrededor de 4 y se escribe el 4 en la columna de las centenas sobre el símbolo de división larga.

Después, se multiplican el 4 y el 6 y se resta su producto, 24, del 25 para obtener 1.

$$\begin{array}{r} 4 \\ 6\overline{)2514} \\ -24 \\ \hline 1 \end{array}$$

Ahora se desciende el siguiente dígito en el dividendo, el 1, y se estima, multiplica y resta de nuevo.

$$\begin{array}{r} 41 \\ 6\overline{)2514} \\ -24 \\ \hline 11 \\ -6 \\ \hline 5 \end{array}$$

Pregunte: "¿Cuántas veces dividirá el 6 el 11?" Se estima que 11 ÷ 6 es alrededor de 1 y se escribe el 1 en la columna de las decenas sobre el símbolo de la división larga. Multiplique el 1 y el 6 y reste su producto, 6, del 11, para obtener 5.

Para completar el proceso, se desciende el último dígito en el dividendo, el 4, y se estima, multiplica y resta por última vez.

$$\begin{array}{r} 419 \\ 6\overline{)2514} \\ -24 \\ \hline 11 \\ -6 \\ \hline 54 \\ -54 \\ \hline 0 \end{array}$$

Pregunte: "¿Cuántas veces dividirá el 6 el 54?" Se estima que 54 ÷ 6 es 9, y se escribe el 9 en la columna de las unidades sobre el símbolo de división larga. Multiplique el 9 y el 6 y reste su producto, 54, del 54, para obtener 0.

Su solución debe parecerse a esta:

$$\begin{array}{r} 419 \\ 6\overline{)2514} \\ -24 \\ \hline 11 \\ -6 \\ \hline 54 \\ -54 \\ \hline 0 \end{array}$$

Para comprobar el resultado, se ve si el producto del cociente y del divisor es igual al dividendo.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ 5} \\ 419 \\ \times \quad 6 \\ \hline 2,514 \end{array}$$

Cociente
Divisor
Dividendo

$6\overline{)2514}$

La comprobación confirma que $2{,}514 \div 6 = 419$.

El lenguaje de las matemáticas En el Ejemplo 2, el proceso de división larga terminó con un 0. En tales casos, se dice que el divisor divide el dividendo de *manera exacta*.

Se puede observar cómo funciona el proceso de división larga si se escriben los nombres de las columnas de los valores posicionales sobre el cociente. La solución para el Ejemplo 2 se muestra en más detalle en la página siguiente.

Centenas Decenas Unidades

$$\begin{array}{r} 419 \\ 6\overline{)2514} \\ -2400 \\ \hline 114 \\ -60 \\ \hline 54 \\ -54 \\ \hline 0 \end{array}$$

Aquí, en realidad se resta 400 · 6, lo cual es 2,400, del 2,514. Este es el porqué se escribe el 4 en la columna de las centenas del cociente

Aquí, en realidad se resta 10 · 6, lo cual es 60, del 114. Este es el porqué se escribe el 1 en la columna de las decenas del cociente.

Aquí, se resta 9 · 6, lo cual es 54, del 54. Este es el porqué se escribe el 9 en la columna de las unidades del cociente.

Los ceros extra (mostrados en los pasos remarcados en rojo y azul) con frecuencia se omiten.

Se puede utilizar el proceso de división larga para desarrollar divisiones cuando el divisor tiene más de un dígito. El paso de estimación con frecuencia se vuelve más sencillo si se aproxima el divisor.

Auto-revisión 3

Divida utilizando una división larga:

$57\overline{)45{,}885}$

Ahora intente **Problema 35**

EJEMPLO 3 Divida utilizando una división larga: $48\overline{)33{,}888}$

Estrategia Se seguirá un proceso de cuatro pasos: **estimar, multiplicar, restar** y **descender.**

POR QUÉ Así es como se desarrolla una división larga.

Solución

Para ayudarle a comprender el proceso se explica por separado cada paso de la división. Su solución sólo necesita parecerse al *último* paso.

Dado que el 48 no dividirá el 3, ni dividirá el 33, se divide el 338 entre 48.

$$\begin{array}{r} 6 \\ 48\overline{)33888} \end{array}$$

Pregunte: "¿Cuántas veces dividirá el 48 el 338?". Dado que el 48 es casi 50, se puede estimar la respuesta a esa pregunta pensando que 33 ÷ 5 es de alrededor de 6 y se escribe el 6 en la columna de las centenas del cociente.

$$\begin{array}{r} 6 \\ 48\overline{)33888} \\ -288 \\ \hline 50 \end{array}$$

Multiplique el 6 y el 48 y reste su producto, 288, del 338 para obtener 50. Dado que 50 es más grande que el divisor, 48, el estimado de 6 para la columna de las centenas del cociente es demasiado pequeño. Se borrará el 6 y se incrementa en 1 el estimado del cociente y se intenta de nuevo.

$$\begin{array}{r} 7 \\ 48\overline{)33888} \\ -336 \\ \hline 2 \end{array}$$

Cambie el estimado de 6 a 7 en la columna de las centenas del cociente. Multiplique el 7 y el 48 y reste su producto, 336, del 338 para obtener 2. Dado que el 2 es menor que el divisor, se puede proceder con la división larga.

$$\begin{array}{r} 70 \\ 48\overline{)33888} \\ -336\downarrow \\ \hline 28 \\ -\ 0 \\ \hline 28 \end{array}$$

Descienda el 8 de la columna de las decenas del dividendo. Pregunte: "¿Cuántas veces dividirá el 48 el 28?". Dado que el 28 no puede dividirse entre el 48, escriba 0 en la columna de las decenas del cociente. Multiplique el 0 y el 48 y reste su producto, 0, del 28 para obtener 28.

$$\begin{array}{r} 705 \\ 48\overline{)33888} \\ -336\downarrow \\ \hline 28 \\ -\ 0\downarrow \\ \hline 288 \\ -240 \\ \hline 48 \end{array}$$

Descienda el 8 de la columna de las unidades del dividendo. Pregunte: "¿Cuántas veces dividirá el 48 el 288?". Se puede estimar la respuesta a esa pregunta pensando que 28 ÷ 5 es de alrededor de 5 y se escribe el 5 en la columna de las unidades del cociente. Multiplique el 5 y el 48 y reste su producto, 240, del 288 para obtener 48. Dado que el 48 es igual al divisor, el estimado de 5 para la columna de las unidades del cociente es demasiado pequeño. Se borrará el 5 y se incrementará en 1 el estimado del cociente y se intentará de nuevo.

¡Cuidado! Si la diferencia en cualquier parte del proceso de división es mayor o igual que el divisor, el estimado realizado en ese punto debe incrementarse en 1 y debe intentar de nuevo.

$$\begin{array}{r} 706 \\ 48\overline{)\,33888} \\ -336 \\ \hline 28 \\ -0 \\ \hline 288 \\ -288 \\ \hline 0 \end{array}$$

Cambie el estimado de 5 a 6 en la columna de las unidades del cociente. Multiplique el 6 y el 48 y reste su producto, 288, del 288 para obtener 0. Su solución debe parecerse a esta.

El cociente es 706. Compruebe el resultado utilizando la multiplicación.

4 Desarrollar divisiones largas (con residuo)

En ocasiones no es posible separar un grupo de objetos en un número natural de grupos de igual tamaño. Por ejemplo, si se comienza con un conjunto de 14 estrellas y se dividen en grupos de 4 estrellas, se tendrán 3 grupos de 4 estrellas y sobrarán 2 estrellas. A la parte restante se le llama **residuo.**

Un conjunto de 14 estrellas.

Hay 3 grupos de 4 estrellas. Hay 2 estrellas restantes.

En el siguiente ejemplo de una división larga, hay un residuo. Para comprobar tal problema, se suma el residuo al producto del cociente y del divisor. El resultado debe ser igual al dividendo.

(Cociente · divisor) + residuo = dividendo

Recuerde que la operación dentro de los paréntesis debe desarrollarse primero.

EJEMPLO 4 Divida: $23\overline{)832}$. Compruebe el resultado.

Estrategia Se seguirá un proceso de cuatro pasos: **estimar, multiplicar, restar** y **descender.**

POR QUÉ Así es como se desarrolla una división larga.

Solución

Dado que el 23 no dividirá el 8, se dividirá el 83 entre 23.

$$\begin{array}{r} 4 \\ 23\overline{)\,832} \end{array}$$

Pregunte: "¿Cuántas veces dividirá el 23 el 83?". Dado que el 23 es casi 20, se puede estimar la respuesta a esa pregunta pensando que 8 ÷ 2 es 4 y se escribe el 4 en la columna de las decenas del cociente.

$$\begin{array}{r} 4 \\ 23\overline{)\,832} \\ -\,92 \end{array}$$

Multiplique el 4 y el 23 y escriba su producto, 92, bajo el 83. Debido a que el 92 es mayor que el 83, el estimado de 4 para la columna de las decenas del cociente es demasiado grande. Se borrará el 4 y se disminuirá en 1 el estimado del cociente y se intentará de nuevo.

Auto-revisión 4

Divida: $34\overline{)792}$. Compruebe el resultado.

Ahora intente **Problema 39**

$$\begin{array}{r} 3 \\ 23\overline{)832} \\ -69 \\ \hline 14 \end{array}$$

Cambie el estimado de 4 a 3 en la columna de las decenas del cociente. Multiplique el 3 y el 23 y reste su producto, 69, del 83, para obtener 14.

$$\begin{array}{r} 3 \\ 23\overline{)832} \\ -69\downarrow \\ \hline 142 \end{array}$$

Descienda el 2 de la columna de las unidades del dividendo.

$$\begin{array}{r} 37 \\ 23\overline{)832} \\ -69 \\ \hline 142 \\ -161 \\ \hline \end{array}$$

Pregunte: "¿Cuántas veces dividirá el 23 el 142?". Se puede estimar la respuesta a esa pregunta pensando que 14 ÷ 2 es 7 y se escribe el 7 en la columna de las unidades del cociente. Multiplique el 7 y el 26 y escriba su producto, 161, bajo el 142. Debido a que el 161 es mayor que el 142, el estimado de 7 para la columna de las unidades del cociente es demasiado grande. Se borrará el 7 y se disminuirá en 1 el estimado del cociente y se intentará de nuevo.

$$\begin{array}{r} 36 \\ 23\overline{)832} \\ -69 \\ \hline 142 \\ -138 \\ \hline 4 \end{array} \leftarrow \text{El residuo}$$

Cambie el estimado de 7 a 6 en la columna de las unidades del cociente. Multiplique el 6 y el 23 y reste su producto, 138, del 142, para obtener 4.

El cociente es 36 y el residuo es 4. Se puede escribir este resultado como 36 R 4.

Para comprobar el resultado, se multiplica el divisor por el cociente y después se suma el residuo. El resultado debe ser el dividendo.

Comprobación:

Cociente Divisor Residuo

$$(36 \cdot 23) + 4 = 828 + 4$$

$$= 832 \leftarrow \text{Dividendo}$$

Dado que el 832 es el dividendo, la respuesta 36 R 4 es correcta.

Auto-revisión 5

Divida: $\dfrac{28{,}992}{629}$

Ahora intente **Problema 43**

EJEMPLO 5

Divida: $\dfrac{13{,}011}{518}$.

Estrategia Se escribirá el problema en forma de división larga y se seguirá un proceso de cuatro pasos: **estimar, multiplicar, restar** y **descender.**

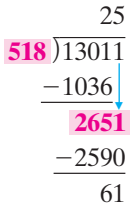
POR QUÉ Así es como se desarrolla una división larga.

Solución

Se escribe la división en la forma: $518\overline{)13011}$. Dado que el 518 no dividirá el 1, ni el 13, ni el 130, se dividirá el 1,301 entre 518.

$$\begin{array}{r} 2 \\ 518\overline{)13011} \\ -1036 \\ \hline 265 \end{array}$$

Pregunte: "¿Cuántas veces dividirá el 518 el 1,301?". Dado que el 518 es casi 500, se puede estimar la respuesta a esa pregunta pensando que 13 ÷ 5 es de alrededor de 2 y se escribe el 2 en la columna de las decenas del cociente. Multiplique el 2 y el 518 y reste su producto, 1,036, del 1,301, para obtener 265.



Descienda el 1 de la columna de las unidades del dividendo. Pregunte: "¿Cuántas veces dividirá el 518 el 2,651?". Se puede estimar la respuesta a esa pregunta pensando que 26 ÷ 5 es de alrededor de 5 y se escribe el 5 en la columna de las unidades del cociente. Multiplique el 5 y el 518 y reste su producto, 2,590, del 2,651, para obtener un residuo de 61.

El resultado es 25 R 61. Para comprobar, verifique que $(25 \cdot 518) + 61$ es 13,011.

5 Usar las pruebas para la divisibilidad

Se ha visto que algunas divisiones terminan con un residuo de 0 y otras no. Se utiliza la palabra *divisible* para describir tales situaciones.

Divisibilidad

Un número es **divisible** entre otro si, cuando se están dividiendo, se obtiene un residuo de 0.

Dado que $27 \div 3 = 9$, con un residuo de 0, se dice que *el 27 es divisible entre 3.* Dado que $27 \div 5 = 5$ R 2, se dice que *el 27 no es divisible entre 5.*

Existen pruebas que ayudan a decidir si un número es divisible entre otro.

Pruebas para la divisibilidad

Un número es divisible entre

- 2 si su último dígito es divisible entre 2.
- 3 si la suma de sus dígitos es divisible entre 3.
- 4 si el número formado por sus últimos dos dígitos es divisible entre 4.
- 5 si su último dígito es 0 o 5.
- 6 si es divisible entre 2 y 3.
- 9 si la suma de sus dígitos es divisible entre 9.
- 10 si su último dígito es 0.

Existen pruebas para la divisibilidad entre un número distinto a 2, 3, 4, 5, 6, 9 o 10, pero son más complicadas. Vea los problemas 109 y 110 del Espacio para el estudio 1.5 para algunos ejemplos.

EJEMPLO 6

¿Es divisible el 534,840 entre:

a. 2 **b.** 3 **c.** 4 **d.** 5 **e.** 6 **f.** 9 **g.** 10

Estrategia Se considerarán el último dígito, los últimos dos dígitos y la suma de los dígitos de cada número.

POR QUÉ Las reglas de divisibilidad requieren estos tipos de análisis.

Solución

a. El 534,840 es divisible entre 2, debido a que su último dígito **0** es divisible entre 2.

b. El 534,840 es divisible entre 3, debido a que la suma de sus dígitos es divisible entre 3.

$$5 + 3 + 4 + 8 + 4 + 0 = 24 \quad \text{y} \quad 24 \div 3 = 8$$

Auto-revisión 6

¿Es divisible el 73,311,435 entre:

a. 2 **b.** 3 **c.** 5
d. 6 **e.** 9 **f.** 10

Ahora intente **Problemas 49 y 53**

c. El 534,8**40** es divisible entre 4, debido a que el número formado por sus últimos dos dígitos es divisible entre 4.

$$40 \div 4 = 10$$

d. El 534,84**0** es divisible entre 5, debido a que su último dígito es 0 o 5.

e. El 534,840 es divisible entre 6, debido a que es divisible entre 2 y 3. (Vea los incisos a y b.)

f. El 534,840 no es divisible entre 9, debido a que la suma de sus dígitos no es divisible entre 9. Hay un residuo.

$$24 \div 9 = 2 \text{ R } 6$$

g. El 534,84**0** es divisible entre 10, debido a que su último dígito es 0.

6 Dividir números naturales que terminan con ceros

Existe un atajo para dividir un dividendo entre un divisor cuando ambos terminan con ceros. Simplemente se *eliminan los ceros finales en el divisor y se elimina el mismo número de ceros finales en el dividendo.*

Auto-revisión 7

Divida: **a.** $50 \div 10$

b. $62{,}000 \div 100$

c. $12{,}000 \div 1{,}500$

Ahora intente **Problemas 55 y 57**

EJEMPLO 7 Divida: **a.** $80 \div 10$ **b.** $47{,}000 \div 100$ **c.** $350\overline{)9{,}800}$

Estrategia Se considerarán los ceros finales en cada divisor.

POR QUÉ Si un divisor tiene ceros finales, se puede simplificar la división eliminando el mismo número de ceros finales en el divisor y el dividendo.

Solución

Hay un cero en el divisor.

a. $80 \div 10 = 8 \div 1 = 8$

Elimine un cero del dividendo y del divisor y divida.

Hay dos ceros en el divisor.

b. $47{,}000 \div 100 = 470 \div 1 = 470$

Elimine dos ceros del dividendo y del divisor y divida.

c. Para hallar

$$35\mathbf{0}\overline{)9{,}80\mathbf{0}}$$

se puede eliminar *un cero* del divisor y del dividendo y desarrollar la división $35\overline{)980}$.

$$\begin{array}{r} 28 \\ 35\overline{)980} \\ \underline{-70} \\ 280 \\ \underline{-280} \\ 0 \end{array}$$

Por tanto, $9{,}800 \div 350$ es 28.

7 Estimar cocientes de números naturales

Para estimar cocientes, se emplea un método que aproxima el dividendo y el divisor para que puedan dividirse con facilidad. Existe una regla general para este método: Si es posible, redondee ambos números a la alta o a la baja.

EJEMPLO 8 Estime el cociente: $170{,}715 \div 57$

Estrategia Se redondearán el dividendo y el divisor a la alta y se encontrará $180{,}000 \div 60$.

POR QUÉ La división puede realizarse de manera más sencilla si el dividendo y el divisor terminan con ceros. También, el 6 divide el 18 de manera exacta.

Solución

El dividendo es aproximadamente

$170{,}715 \div 57 \qquad 180{,}000 \div 60 = 3{,}000$

El divisor es aproximadamente

Para dividir, elimine un cero de 180,000 y del 60 y encuentre 18,000 ÷ 6.

El estimado es de 3,000.

Si se calcula $170{,}715 \div 57$, el cociente es exactamente 2,995. Observe que el estimado es cercano. Sólo es 5 más que 2,995.

Auto-revisión 8

Estime el cociente: $33{,}642 \div 42$

Ahora intente **Problema 59**

8 Resolver problemas de aplicación dividiendo números naturales

Los problemas de aplicación que involucran la formación de grupos de igual tamaño pueden resolverse por medio de la división.

EJEMPLO 9 ***Administración de un comedor comunitario*** Un comedor comunitario planea alimentar a 1,990 personas. Debido a las limitaciones de espacio, sólo se les puede servir a 144 personas a la vez. ¿Cuántos turnos serán necesarios para alimentar a todos? ¿A cuántos se les servirá en el último turno?

Estrategia Se dividirá el 1,990 entre 144.

POR QUÉ El separar 1,990 personas en grupos de igual tamaño de 144 indica una división.

Solución

Se traducen las palabras del problema a números y símbolos.

El número de turnos	es igual al	número de personas a alimentar	dividido entre	el número de personas en cada turno.
El número de turnos	=	1,990	÷	144

Use la división larga para encontrar $1{,}990 \div 144$.

$$\begin{array}{r} 13 \\ 144\overline{)1{,}990} \\ \underline{-144} \\ 550 \\ \underline{-432} \\ 118 \end{array}$$

El cociente es 13 y el residuo es 118. Esto indica que se necesitan catorce turnos: 13 turnos a máxima capacidad y un turno parcial para servir a las 118 personas restantes.

Auto-revisión 9

BOLETOS DE CINE En un sábado se adquirieron 3,924 boletos de cine en un cine IMAX. Cada función de la película se vendió por completo, a excepción de la última. Si el cine tiene asientos para 346 personas, ¿cuántas veces se mostró la película el sábado? ¿Cuántas personas fueron a la última función?

Ahora intente **Problema 91**

El lenguaje de las matemáticas Aquí hay algunas palabras y frases clave que se utilizan con frecuencia para indicar una división:

repartir de manera equitativa	*distribuir de manera equitativa*	*cuánto hace cada uno*
entra en	*por*	*cuánto más (residuo)*
compartir de manera equitativa	*entre*	*cuántos más (residuo)*

Auto-revisión 10

GIRAS Una banda de rock hará una gira mundial de 275 días y pasará el mismo número de días en cada una de las 25 ciudades. ¿Cuánto tiempo estarán en cada ciudad?

Ahora intente **Problema 97**

EJEMPLO 10 ***Tiempos compartidos*** Cada año, los 73 dueños parciales de un condominio de recreo de tiempo compartido lo utilizan por un número igual de días. ¿Cuántos días puede quedarse cada dueño parcial en el condominio? (Use un año de 365 días.)

Estrategia Se dividirá 365 entre 73.

POR QUÉ Dado que los dueños parciales hacen uso del condominio por un número igual de días, la frase *"Cuántos días puede quedarse cada"* indica división.

Solución

Se traducen las palabras del problema a números y símbolos.

El número de días que cada dueño parcial puede quedarse en el condominio	es igual al	número de días en un año	dividido entre	el número de dueños parciales
El número de días que cada dueño parcial puede quedarse en el condominio	=	365	÷	73

Use la división larga para encontrar 365 ÷ 73.

$$\begin{array}{r} 5 \\ 73\overline{)365} \\ -365 \\ \hline 0 \end{array}$$

Cada dueño parcial puede quedarse en el condominio 5 días durante el año.

Utilizando su CALCULADORA

La tecla de división

Agua embotellada

La producción de una compañía de bebidas de 604,800 botellas de agua mineral se enviará a las tiendas en palés que sostienen 1,728 botellas cada uno. Se puede encontrar el número de palés llenos a enviarse utilizando la tecla de división ÷ en una calculadora.

604800 [÷] 1728 [=] 350

En algunos modelos de calculadora, se presiona la tecla [ENTER] en vez de la tecla [=] para que se muestre el resultado.

La compañía de bebidas enviará 350 palés llenos de agua embotellada.

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. a. $4 \cdot 2 = 8$ **b.** $8 \cdot 7 = 56$ **c.** $9 \cdot 4 = 36$ **2.** 742; $4 \cdot 742 = 2{,}968$ **3.** 805 **4.** 23 R 10; $(23 \cdot 34) + 10 = 792$ **5.** 46 R 58 **6. a.** no **b.** sí **c.** sí **d.** no **e.** sí **f.** no **7. a.** 5 **b.** 620 **c.** 8 **8.** 800 **9.** 12 funciones; 118 **10.** 11 días

SECCIÓN 1.5 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Complete los espacios.

1. En los tres problemas de división mostrados abajo, etiquete el *dividendo*, el *divisor* y el *cociente*.

$$12 \div 4 = 3$$

$$4\overline{)12} \qquad \frac{12}{4} = 3$$

2. Se le llama a $5 \cdot 8 = 40$ el enunciado de _____ relacionado para la división $40 \div 8 = 5$.

3. El problema $6\overline{)246}$ está escrito en forma de división _____.

4. Si una división no es exacta, a la parte restante se le llama _____.

5. Un número es _____ entre otro si, cuando se dividen, el residuo es 0.

6. Las frases como *repartir de manera equitativa* y *cuánto hace cada uno* indican la operación de _____.

CONCEPTOS

7. a. Divida los objetos abajo en grupos de 3. ¿Cuántos grupos de 3 hay?

• •

b. Divida los objetos abajo en grupos de 4. ¿Cuántos grupos de 4 hay? ¿Cuántos objetos restan?

* *

8. Indique si cada enunciado es verdadero o falso.

a. Cualquier número natural dividido entre 1 es igual a ese número.

b. Cualquier número natural diferente del cero dividido entre sí mismo es igual a 1.

c. El cero dividido entre cualquier número diferente de cero está indefinido.

d. La división de un número entre 0 es igual a 0.

Complete los espacios.

9. Divida, si es posible.

a. $\frac{25}{25} =$ **b.** $\frac{6}{1} =$

c. $\frac{100}{0}$ es _____ **d.** $\frac{0}{12} =$

10. Para desarrollar una división larga, se sigue un proceso de cuatro pasos: _____, _____, _____ y _____.

11. Encuentre el *primer* dígito de cada cociente.

a. $\square\overline{)1147}$ **b.** $\square\overline{)587}$

c. $\square\overline{)7501}$ **d.** $\square\overline{)892}$

12. a. Cociente · divisor = _____

b. (Cociente · divisor) + _____ = dividendo

13. Para comprobar si la división $9\overline{)333}$ $\quad 37$ es correcta, se utiliza la multiplicación:

$$\begin{array}{r} \square \\ \times \quad 9 \\ \hline \square \end{array}$$

14. a. Un número es divisible entre $\square$ si su último dígito es divisible entre 2.

b. Un número es divisible entre 3 si la _____ de sus dígitos es divisible entre 3.

c. Un número es divisible entre 4 si el número formado por sus _____ dígitos es divisible entre 4.

15. a. Un número es divisible entre 5 si su último dígito es $\square$ o $\square$.

b. Un número es divisible entre 6 si es divisible entre $\square$ y $\square$.

c. Un número es divisible entre 9 si la _____ de sus dígitos es divisible entre 9.

d. Un número es divisible entre $\square$ si su último dígito es 0.

16. Se puede simplificar la división $43{,}800 \div 200$ eliminando dos _____ del dividendo y del divisor.

NOTACIÓN

17. Escriba los tres símbolos que pueden utilizarse para la división.

18. En una división, 35 R 4 significa "un cociente de 35 y un _____ de 4".

PRÁCTICA GUIADA

Complete los espacios. Vea el Ejemplo 1.

19. $9\overline{)45}$ debido a que $\square \cdot \square = \square$.

20. $\frac{54}{6} = 9$ debido a que $\square \cdot \square = \square$.

21. $44 \div 11 = 4$ debido a que $\square \cdot \square = \square$.

22. $120 \div 12 = 10$ debido a que $\square \cdot \square = \square$.

Escriba el enunciado de multiplicación relacionado para cada división. Vea el Ejemplo 1.

23. $21 \div 3 = 7$

24. $32 \div 4 = 8$

25. $\frac{72}{12} = 6$

26. $15\overline{)75}$

Divida utilizando una división larga. Compruebe el resultado. Vea el Ejemplo 2.

27. $96 \div 6$

28. $72 \div 4$

29. $\frac{87}{3}$

30. $\frac{98}{7}$

31. $2{,}275 \div 7$

32. $1{,}728 \div 8$

33. $9\overline{)1{,}962}$

34. $5\overline{)1{,}635}$

Divida utilizando una división larga. Compruebe el resultado. Vea el Ejemplo 3.

35. $62\overline{)31{,}248}$

36. $71\overline{)28{,}613}$

37. $37\overline{)22{,}274}$

38. $28\overline{)19{,}712}$

Divida utilizando una división larga. Compruebe el resultado. Vea el Ejemplo 4.

39. $24\overline{)951}$

40. $33\overline{)943}$

41. $999 \div 46$

42. $979 \div 49$

Divida utilizando una división larga. Compruebe el resultado. Vea el Ejemplo 5.

43. $\frac{24{,}714}{524}$

44. $\frac{29{,}773}{531}$

45. $178\overline{)3{,}514}$

46. $164\overline{)2{,}929}$

Si el número dado es divisible entre 2, 3, 4, 5, 6, 9 o 10, coloque una marca de verificación $\surd$ en el recuadro. Vea el Ejemplo 6.

	Divisible entre ⟶	2	3	4	5	6	9	10
47.	2,940							
48.	5,850							
49.	43,785							
50.	72,954							
51.	181,223							
52.	379,157							
53.	9,499,200							
54.	6,653,100							

Use un atajo de la división para encontrar cada cociente. Vea el Ejemplo 7.

55. $700 \div 10$

56. $900 \div 10$

57. $450\overline{)9{,}900}$

58. $260\overline{)9{,}100}$

Estime cada cociente. Vea el Ejemplo 8.

59. $353{,}922 \div 38$

60. $237{,}621 \div 55$

61. $46{,}080 \div 933$

62. $81{,}097 \div 419$

INTÉNTELO

Divida.

63. $\frac{25{,}950}{6}$

64. $\frac{23{,}541}{7}$

65. $54 \div 9$

66. $72 \div 8$

67. $273 \div 31$

68. $295 \div 35$

69. $\frac{64{,}000}{400}$

70. $\frac{125{,}000}{5{,}000}$

71. 745 dividido entre 7

72. 931 dividido entre 9

73. $29\overline{)14{,}761}$

74. $27\overline{)10{,}989}$

75. $539{,}000 \div 175$

76. $749{,}250 \div 185$

77. $75 \div 15$

78. $96 \div 16$

79. $212\overline{)5{,}087}$

80. $214\overline{)5{,}777}$

81. $42\overline{)1{,}273}$

82. $83\overline{)3{,}363}$

83. $89{,}000 \div 1{,}000$

84. $930{,}000 \div 1{,}000$

85. $\frac{57}{8}$

86. $\frac{82}{9}$

APLICACIONES

87. VENTA DE BOLETOS Un cine tiene una ganancia de $4 por cada boleto vendido. ¿Cuántos boletos deben venderse para tener una ganancia de $2,500?

88. CORRER Brian corre 7 millas cada día. ¿En cuántos días correrá 371 millas?

89. CAMIONES DE CARGA Un camión de carga de 15 yardas cúbicas debe transportar 405 yardas cúbicas de tierra a un sitio de construcción. ¿Cuántos viajes debe realizar el camión?

90. SURTIDO DE ESTANTES Después de recibir una entrega de 288 bolsas de papas fritas, un empleado de una tienda surtió cada estante de un mostrador vacío con 36 bolsas. ¿Cuántos estantes del mostrador surtió con papas fritas?

91. TIEMPO DE ALMUERZO Un profesor de quinto grado recibió 50 envases de leche de media pinta para distribuir de manera equitativa a su clase de 23 estudiantes. ¿Cuántos envases obtuvo cada niño? ¿Cuántos envases sobraron?

92. ENVOLTORIO PLÁSTICO CON BURBUJAS Un fabricante de muebles utiliza una tira de 11 pies de largo de envoltorio plástico con burbujas para proteger una lámpara cuando se pone en una caja y se envía a un cliente. ¿Cuántas lámparas pueden empaquetarse de esta manera a partir de un rollo de envoltorio plástico con burbujas de 200 pies de largo? ¿Cuántos pies sobrarán en el rollo?

93. JARDINERÍA Una lata de metal puede guardar 640 onzas líquidas de gasolina. ¿Cuántas veces puede llenarse el tanque de 68 onzas de un cortacésped a partir de la lata? ¿Cuántas onzas de gasolina quedarán en la lata?

94. BEBIDAS Un contenedor plástico guarda 896 onzas de ponche. ¿Cuántos vasos de ponche de 6 onzas pueden servirse a partir del contenedor? ¿Cuántas onzas sobrarán?

95. SISTEMAS DE LEVANTAMIENTO Si el autobús pesa 58,000 libras, ¿cuánto peso hay en cada gato?

96. GANADORES DE LA LOTERÍA En el 2008, un grupo de 22 trabajadores postales que habían adquirido boletos de la Lotería de Pennsylvania por años, ganaron un premio mayor de $10,282,800. Si dividieron el premio de manera equitativa, ¿cuánto dinero ganó cada persona?

97. VENTAS DE LIBROS DE TEXTO Una tienda tuvo una ganancia de $25,200 al vender 240 libros de texto de álgebra. ¿Cuál fue el costo de cada libro?

98. DRENADO DE PISCINAS Una piscina de 950,000 galones se vacía en 20 horas. ¿Cuántos galones de agua se drenan por hora?

99. MILLAJE Un autobús turístico tiene un alcance de 700 millas en un tanque (140 galones) de gasolina. ¿Qué tan lejos viaja el autobús con un galón de gas?

100. ADMINISTRACIÓN DEL AGUA El río Susquehanna descarga 1,719,000 pies cúbicos de agua en la bahía de Chesapeake en 45 segundos. ¿Cuántos pies cúbicos de agua se descargan en un segundo?

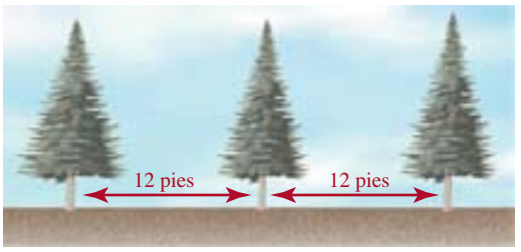
101. PEDIDO DE GOLOSINAS ¿Cuántas *docenas* de rosquillas deben ordenarse para una reunión si se espera que asistan 156 personas y a cada persona se le servirá una rosquilla?

102. TIEMPO Un *milenio* es un periodo de tiempo igual a mil años. ¿Cuántas décadas hay en un milenio?

103. VOLIBOL Un total de 216 mujeres van a jugar en una liga de volibol municipal. ¿Cuántas mujeres deben ponerse en cada equipo si se deben cumplir los siguientes requisitos?

- Todos los equipos deben tener el mismo número de jugadoras.
- Un número razonable de jugadoras en un equipo es de 7 a 10.
- Por propósitos de calendarización, debe haber un número par de equipos (2, 4, 6, 8, etcétera).

104. PARABRISAS Una granjera quiere plantar árboles de pino a 12 pies uno de otro para formar un parabrisas para sus cultivos. ¿Cuántos árboles debe comprar si la longitud del campo es de 744 pies?



105. EMPLEOS DE NIVEL INICIAL Abajo se muestran los salarios iniciales comunes para los graduados universitarios del 2008 especializados en enfermería, mercadotecnia e historia. Complete la última columna de la tabla.

Especialización	Salario anual	Salario mensual
Enfermería	$52,128	
Mercadotecnia	$43,464	
Historia	$35,952	

Fuente: CNN.com/living

106. POBLACIÓN Para encontrar la **densidad de población** de un estado se divide su población entre su territorio (en millas cuadradas). El resultado es el número de personas por milla cuadrada. Use la información en la tabla para aproximar la densidad de población de cada estado.

Estado	Población en el 2008*	Territorio* (millas cuadradas)
Arizona	6,384,000	114,000
Oklahoma	3,657,000	69,000
Rhode Island	1,100,000	1,000
Carolina del Sur	4,500,000	30,000

Fuente: Wikipedia *aproximación

REDACCIÓN

107. Explique cómo puede calcularse $24 \div 6$ por medio de una sustracción repetitiva.

108. Explique por qué la división del 0 es posible, pero la división entre cero es imposible.

109. PRUEBA DE DIVISIBILIDAD PARA EL 7 Use la siguiente regla para mostrar que el 308 es divisible entre el 7. Muestre cada uno de los pasos de su solución de manera escrita.

Reste dos veces el dígito de las unidades del número formado por los dígitos restantes. Si ese resultado es divisible entre 7, entonces el número original es divisible entre 7.

110. PRUEBA DE DIVISIBILIDAD PARA EL 11 Use la siguiente regla para mostrar que el 1,848 es divisible entre el 11. Muestre cada uno de los pasos de su solución de manera escrita.

Comience con el dígito en la posición de las unidades. De éste, reste el dígito en la posición de las decenas. A ese resultado súmele el dígito en la posición de las centenas. De ese resultado reste el dígito en la posición de los millares, y así sucesivamente. Si el resultado final es un número divisible entre 11, el número original es divisible entre 11.

REPASO

111. Sume: $2{,}903 + 378$

112. Reste: $2{,}903 - 378$

113. Multiplique : $2{,}903 \times 378$

114. DESCUENTOS Un automóvil, con un precio original de $17,550, se vende por $13,970. ¿En cuántos dólares ha disminuido el precio?

Objetivos

1. Aplicar los pasos de una estrategia de resolución de problemas.
2. Resolver problemas que requieren más de una operación.
3. Reconocer la información sin importancia en los problemas de aplicación.

SECCIÓN 1.6
Resolución de problemas

Las operaciones de suma, resta, multiplicación y división son herramientas poderosas que pueden utilizarse para resolver una amplia variedad de problemas en el mundo real.

1 Aplicar los pasos de una estrategia de resolución de problemas

Para convertirse en un buen solucionador de problemas, necesita un plan a seguir, como la siguiente estrategia de 5 pasos.

Estrategia para la resolución de problemas

1. **Analizar el problema** leyendo con cuidado. ¿Qué información se proporciona? ¿Qué se le pide que encuentre? ¿Qué vocabulario se proporciona? Con frecuencia, un diagrama o una tabla le ayudará a visualizar los hechos del problema.
2. **Formar un plan** traduciendo las palabras del problema a números y símbolos.
3. **Resolver el problema** desarrollando los cálculos.
4. **Enunciar la conclusión** de manera clara. Asegúrese de incluir las unidades (como pies, segundos o libras) en su respuesta.
5. **Comprobar el resultado.** Con frecuencia es de utilidad un estimado para ver si una respuesta es razonable.

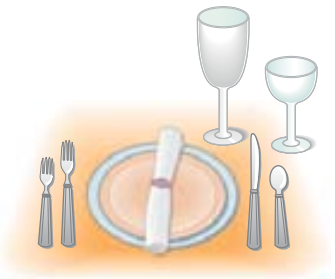
El lenguaje de las matemáticas Una *estrategia* es un plan o método cuidadoso. Por ejemplo, un hombre de negocios podría desarrollar una nueva *estrategia* de publicidad para incrementar las ventas o un corredor de fondo podría tener una *estrategia* para ganar un maratón.

Para resolver problemas de aplicación, los cuales se dan por lo regular en palabras, se *traducen* aquellas palabras a números y símbolos matemáticos. La siguiente tabla es un repaso de las palabras y frases clave que se introdujeron en las Secciones 1.2-1.5.

Suma	Resta	Multiplicación	División	Igual a
más que	cuánto más	duplicar	distribuido de manera equitativa	mismo valor
incremento	menos que	doble	compartido de manera equitativa	resulta en
ganancia	disminuir	triple	repartido de manera equitativa	son
elevar	pérdida	de	por	es
total	caer	veces	entre	fue
en total	menos	a esta tasa	entra en	produce
hacia adelante	reducir	suma repetitiva	grupos de igual tamaño	equivale a
junto	declinar	arreglo rectangular	cuánto hace cada	lo mismo que

EJEMPLO 1 ***Arreglos de mesas***

Un servicio de mesa como el mostrado a la derecha cuesta $94. ¿Cuál es el costo total de adquirir estos servicios de mesa para un restaurante con capacidad de 115 personas?



Analizar En este paso, es de utilidad listar los hechos proporcionados y lo que va a encontrar.

- Un servicio de mesa cuesta $94. — Proporcionado
- Se adquirirán 115 servicios de mesa. — Proporcionado
- ¿Cuál es el costo total de adquirir 115 servicios de mesa? — A encontrar

Formar La palabra clave *total* sugiere una suma. En este caso, el costo total de adquirir los servicios de mesa es la suma de ciento quince veces 94. Esta suma repetida puede calcularse de manera más sencilla por medio de una multiplicación.

Se traducen las palabras del problema a números y símbolos.

El costo total de la adquisición	es igual al	número de servicios de mesa adquiridos	por	el costo de un servicio de mesa
El costo total de la adquisición	=	115	·	$94

Auto-revisión 1

ROPA DE CAMA Un conjunto de ropa de cama cuesta $134. ¿Cuál es el costo total de adquirir ropas de cama para un hotel con 85 habitaciones?

Ahora intente **Problema 17**

Resolver Use la forma vertical para desarrollar la multiplicación:

$$\begin{array}{r} 115 \\ \times\ 94 \\ \hline 460 \\ 10\,350 \\ \hline 10{,}810 \end{array}$$

Enunciar Costará \$10,810 adquirir 115 servicios de mesa.

Comprobar Se puede estimar para comprobar el resultado. Si se utiliza \$100 para aproximar el costo de un servicio de mesa, entonces el costo de 115 servicios de mesa es de alrededor de $115 \cdot \$100$ u \$11,500. Dado que el estimado, \$11,500, y el resultado, \$10,810, son cercanos, el resultado parece razonable.

Auto-revisión 2

LECHE BAJA EN GRASA Un vaso de leche baja en grasa tiene 45 calorías menos que un vaso de leche entera. Si un vaso de leche entera tiene 146 calorías, ¿cuántas calorías hay en un vaso de leche baja en grasa?

Ahora intente **Problema 19**

EJEMPLO 2 ***Conteo de calorías*** Un vaso de leche sin grasa tiene 63 calorías menos que un vaso de leche entera. Si un vaso de leche entera tiene 146 calorías, ¿cuántas calorías hay en un vaso de leche sin grasa?

Analizar

- Un vaso de leche sin grasa tiene 63 calorías *menos* que un vaso de leche entera. — Proporcionado
- Un vaso de leche entera tiene 146 calorías. — Proporcionado
- ¿Cuántas calorías hay en un vaso de leche sin grasa? — A encontrar

Formar La palabra *menos* indica una resta.

¡Cuidado! Se debe tener cuidado cuando se traduce la resta debido a que el orden es importante. Dado que las 146 calorías en un vaso de leche entera se van a reducir en 63 calorías, se invierten estos números a medida que se traducen de palabras en español a símbolos matemáticos.

Un vaso de leche sin grasa	tiene	63 calorías menos que	un vaso de leche entera

Un vaso de leche sin grasa $=$ 146 $-$ 63

Resolver Use la forma vertical para desarrollar la resta:

$$\begin{array}{r} 146 \\ -\ 63 \\ \hline 83 \end{array}$$

Enunciar Un vaso de leche sin grasa tiene 83 calorías.

Comprobar Se puede usar una suma para comprobar.

$$\begin{array}{r} 83 \\ +\ 63 \\ \hline 146 \end{array}$$

Diferencia + sustraendo = minuendo. El resultado es correcto.

Con frecuencia es de utilidad un diagrama cuando se analiza un problema.

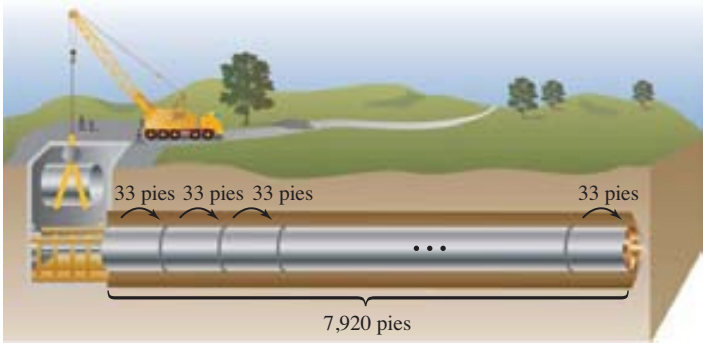
EJEMPLO 3 ***Construcción de túneles*** Una tuneladora puede perforar a través de roca sólida a una velocidad de 33 pies por día. ¿Cuántos días le tomará a la tuneladora pasar a través de 7,920 pies de roca sólida?

AP Image

Analizar

- La tuneladora perfora a través de 33 pies de roca sólida por día. *Proporcionado*
- La tuneladora tiene que perforar a través de 7,920 pies de roca sólida. *Proporcionado*
- ¿Cuántos días le tomará a la tuneladora hacer esto? *A encontrar*

En el diagrama de abajo, se observa que la perforación diaria separa una distancia de 7,920 pies en longitudes de igual tamaño de 33 pies. Esto indica una división.



Formar Se traducen las palabras del problema a números y símbolos.

El número de días que se requieren para perforar el túnel	es igual a	la longitud del túnel	dividida entre	la distancia que la tuneladora perfora cada día
El número de días que se requieren para perforar el túnel	=	7,920	÷	33

Resolver Use una división larga para encontrar 7,920 ÷ 33.

Auto-revisión 3

POZOS PETROLEROS Una plataforma de perforación de petróleo en altamar puede perforar a través del lecho oceánico a una velocidad de 17 pies por hora. ¿Cuántas horas le tomará a la máquina perforar 578 pies para alcanzar un depósito de petróleo crudo?

Ahora intente **Problema 21**

$$
\begin{array}{r}
240 \\
33\overline{)7{,}920} \\
-66 \\
\hline
132 \\
-132 \\
\hline
00 \\
-00 \\
\hline
0
\end{array}
$$

Enunciar Le tomará a la tuneladora 240 días para perforar 7,920 pies a través de roca sólida.

Comprobar Se puede comprobar utilizando una multiplicación.

$$
\begin{array}{r}
240 \\
\times\ 33 \\
\hline
720 \\
7200 \\
\hline
7920
\end{array}
$$

Cociente · divisor = dividendo. El resultado es correcto.

En ocasiones es de utilidad organizar en una tabla los hechos dados de un problema.

Auto-revisión 4

ANATOMÍA Un esqueleto humano consiste en 29 huesos en el cráneo; 26 huesos en la columna vertebral; 25 huesos en las costillas y el esternón; 64 huesos en los hombros, brazos y manos; y 62 huesos en la pelvis, piernas y pies. En total, ¿cuántos huesos conforman el esqueleto humano?

Ahora intente **Problema 23**

EJEMPLO 4 ***Orquestas*** Una orquesta consiste en una sección de viento-madera con 19 miembros, una sección de metales con 23 miembros, una sección de cuerdas con 54 miembros y una sección de percusión con dos personas. En total, ¿cuántos músicos conforman la orquesta?

Analizar Se puede utilizar una tabla para organizar los hechos del problema.

Sección	Número de músicos
Viento-madera	19
Metales	23
Cuerdas	54
Percusión	2

Proporcionados

Formar En el último enunciado del problema, la frase *en total* indica una suma. Se traducen las palabras del problema a números y símbolos.

El número total de músicos en la orquesta	es igual al	número en la sección de viento madera	más	el número en la sección de metales	más	el número en la sección de cuerdas	más	el número en la sección de percusión
El número total de músicos en la orquesta	=	19	+	23	+	54	+	2

Resolver Se usa la forma vertical para desarrollar la suma:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 19 \\ 23 \\ 54 \\ +\ 2 \\ \hline 98 \end{array}$$

Enunciar Hay 98 músicos en la orquesta.

Comprobar Para comprobar la suma, se sumará hacia arriba.

Sumar de abajo hacia arriba

$$\begin{array}{r} \underline{98} \\ 19 \\ 23 \\ 54 \\ +\ 2 \\ \hline 98 \end{array}$$

El resultado es correcto.

También se pudiera utilizar una estimación para comprobar el resultado. Si se redondea por la izquierda cada sumando, se obtiene $20 + 20 + 50 + 2 = 92$. Dado que la respuesta, 98, y el estimado, 92, son cercanos, el resultado parece razonable.

2 Resolver problemas que requieren más de una operación

En ocasiones se necesita más de una operación para resolver un problema.

EJEMPLO 5 ***Agua embotellada*** ¿Cuántas porciones de 6 onzas hay en un garrafón de agua de 5 galones? (*Sugerencia:* Hay 128 onzas líquidas en 1 galón.)

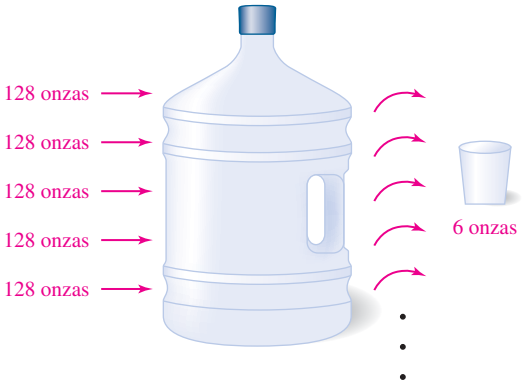
Analizar El diagrama en la siguiente página es de utilidad en la comprensión del problema.

- Dado que cada uno de los 5 galones de agua contiene 128 onzas, el número total de onzas es la suma de cinco 128. Esta *adición repetitiva* puede calcularse utilizando una multiplicación.
- Dado que de la botella provienen porciones de *igual tamaño*, esto sugiere una división.
- Por tanto, para resolver este problema, se necesitan desarrollar dos operaciones: una multiplicación y una división.

Auto-revisión 5

AGUA EMBOTELLADA
¿Cuántas porciones de 8 onzas hay en un garrafón de agua de 3 galones? (*Sugerencia:* Hay 128 onzas líquidas en 1 galón.)

Ahora intente **Problema 25**



Formar Para encontrar el número de onzas de agua en el garrafón de 5 galones, se multiplica:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,4} \\ 128 \\ \times\quad 5 \\ \hline 640 \end{array}$$

Hay 640 onzas de agua en el garrafón de 5 galones. Después se utiliza esta respuesta para encontrar el número de porciones de 6 onzas.

El número de porciones de agua	es igual al	número de onzas de agua en la botella	dividido entre	el número de onzas en una porción
El número de porciones de agua	=	640	÷	6

Resolver Use una división larga para encontrar 640 ÷ 6.

$$\begin{array}{r} 106 \\ 6\overline{)640} \\ -6 \\ \hline 4 \\ -0 \\ \hline 40 \\ -36 \\ \hline 4 \end{array}$$ ← Residuo

Enunciar En un garrafón de agua de 5 galones, hay 106 porciones de 6 onzas, con 4 onzas de agua sobrantes.

Comprobar Para comprobar la multiplicación, utilice la estimación. Para comprobar la división, use la relación: (Cociente · divisor) + residuo = dividendo.

3 Reconocer la información sin importancia en los problemas de aplicación

EJEMPLO 6 ***Transporte público*** Cuarenta y siete personas abordaron un autobús en la Ruta 66. Llegó a la parada de la 7a Calle a las 5:30 P.M., donde 11 personas pagaron la tarifa de $1.50 para abordar después de que habían bajado 16 pasajeros. Cuando el conductor reanudó la marcha a las 5:32 P.M., ¿cuántos pasajeros había en el autobús?

Analizar Si se va a encontrar el número de pasajeros en el autobús, entonces la ruta, la parada, los tiempos y la tarifa no tienen importancia. Es de utilidad tachar esa información.

¡Cuidado! A medida que lee un problema, es fácil no darse cuenta de algunos números escritos en palabras. Es de utilidad encerrar en un círculo aquellas palabras y escribir el número correspondiente arriba.

47
Cuarenta y siete personas abordaron un autobús en la Ruta 66. Llegó a la parada de la 7a Calle a las 5:30 P.M., donde 11 personas pagaron la tarifa de $1.50 para abordar después de que habían bajado 16 pasajeros. Cuando el conductor reanudó la marcha a las 5:32 P.M., ¿cuántos pasajeros había en el autobús?

Si se vuelve a leer con cuidado el problema, se observa que la frase *para abordar* indica una suma y la palabra *bajado* indica una resta.

Formar Se traducen las palabras del problema a números y símbolos.

El número de pasajeros en el autobús después de la parada	es igual al	número de pasajeros en el autobús antes de la parada	más	el número de pasajeros que abordaron	menos	el número de pasajeros que bajaron
El número de pasajeros en el autobús después de la parada	=	47	+	11	−	16

Resolver Se resolverá el problema en forma horizontal. Recuerde a partir de la Sección 1.3 que las operaciones de suma y resta deben desarrollarse a medida que aparecen, de izquierda a derecha.

$47 + 11 - 16 = 58 - 16$ Empezando de izquierda a derecha, realice la suma primero: 47 + 11 = 58.

$= 42$ Después realice la resta.

47	58
+ 11	− 16
58	42

Enunciar Había 42 pasajeros en el autobús después de la parada de la 7a calle.

Comprobar La suma puede comprobarse con una estimación. Para comprobar la resta, utilice: Diferencia + sustraendo = minuendo.

Auto-revisión 6

SERVICIO DE AUTOBÚS Había treinta y cuatro personas en el autobús número 481. A las 11:45 A.M., arribó a la parada de la 103a Calle donde 6 personas bajaron y 18 personas pagaron la tarifa de ¢75 para abordar. Cuando el conductor reanudó la marcha a las 11:47 A.M., ¿cuántos pasajeros había en el autobús?

Ahora intente **Problema 27**

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. Costará $11,390 adquirir 85 conjuntos de ropas para cama. **2.** Hay 90 calorías en un vaso de leche baja en grasa. **3.** Le tomarán 34 horas a la plataforma de perforación perforar 578 pies. **4.** Hay 206 huesos en el esqueleto humano. **5.** En un garrafón de agua de 3 galones, hay 48 porciones de 8 onzas. **6.** Había 46 pasajeros cuando el autobús reanudó la marcha en la 103a Calle.

SECCIÓN 1.6 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Complete los espacios.

1. Una _____ es un plan o método cuidadoso.

2. Para resolver problemas de aplicación, los cuales por lo regular se proporcionan en palabras, se _____ estas palabras en números y símbolos matemáticos.

Indique si se da a entender una suma, una resta, una multiplicación o una división en cada una de las siguientes palabras y frases.

3. reducir

4. grupos de igual tamaño

5. triple

6. caer

7. ganancia

8. adición repetitiva

9. arreglo rectangular **10.** en total

11. cuánto hace cada uno **12.** elevar

CONCEPTOS

13. Escriba los siguientes pasos de la estrategia para la resolución de problemas en el orden correcto:

Enunciar, Comprobar, Analizar, Formar, Resolver

14. Un Mountain Dew de 12 onzas tiene 55 miligramos de cafeína. Complete los espacios para traducir el siguiente enunciado a números y símbolos.

El número de miligramos de cafeína en un Dr Pepper de 12 onzas	es	14 menos que		el número de miligramos de cafeína en un Mountain Dew de 12 onzas
El número de miligramos de cafeína en un Dr Pepper de 12 onzas	=	☐	−	☐

15. Multiplique 15 y 8. Después divida ese resultado entre 3.

16. Reste 27 de 100. Después multiplique ese resultado por 6.

PRÁCTICA GUIADA

Resuelva los siguientes problemas. **Vea el Ejemplo 1.**

17. TRANSPORTE Un transporte de automóviles se carga con 9 sedanes nuevos Chevrolet Malibu, cada uno valorado en $21,605. ¿Cuál es el valor total de los autos transportados por el transporte?

18. MEDALLAS DE ORO Michael Phelps ganó 8 medallas de oro en los Juegos Olímpicos del 2008 en China. En ese entonces, el valor de una medalla de oro se estimaba en alrededor de $144. ¿Cuál era el valor total de las medallas de oro de Phelps?

Resuelva los siguientes problemas. **Vea el Ejemplo 2.**

19. HISTORIA DE LA TV Había 95 episodios producidos menos de *I Love Lucy* que de *The Beverly Hillbillies.* Si había 274 episodios de *The Beverly Hillbillies,* ¿cuántos episodios de *I Love Lucy* hay?

20. MASCOTAS En el 2007, el número de hogares estadounidenses que tenían un gato se estimó de 5,561,000 menos que el número de hogares que tenían un perro. Si 43,021,000 tenían un perro, ¿cuántos tenían un gato? (Fuente: *Libro de consulta de propiedad de mascotas y demografía,* Edición del 2007)

Resuelva los siguientes problemas. **Vea el Ejemplo 3.**

21. CHOCOLATE Un estudio encontró que 7 gramos de chocolate oscuro por día es la cantidad ideal para protegerse contra el riesgo de un ataque cardiaco. ¿Cuántas porciones diarias hay en una barra de chocolate oscuro que pesa 98 gramos? (Fuente: ScienceDaily.com)

22. VIAJES Un sitio web turístico asevera que los turistas pueden ver Europa por $95 al día. Si un turista ahorró $2,185 para unas vacaciones, ¿cuántos días puede pasar en Europa?

Resuelva los siguientes problemas. Use una tabla para organizar los hechos del problema. **Vea el Ejemplo 4.**

23. TEATRO La obra *Romeo y Julieta* de William Shakespeare tiene cinco actos. El primer acto tiene 5 escenas. El segundo acto tiene 6 escenas. El tercer y cuarto actos tiene cada uno 5 escenas y el último acto tiene 3 escenas. En total, ¿cuántas escenas hay en la obra?

24. ESTADIDAD De 1800 a 1850, 15 estados se integraron a la Unión. De 1851 a 1900, entraron 14 estados adicionales. Tres estados se unieron de 1901 a 1950. Desde entonces, Alaska y Hawai son los únicos en entrar a la Unión. En total, ¿cuántos estados se han unido a la Unión desde 1800?

Resuelva los siguientes problemas. Use un diagrama para mostrar los hechos del problema. **Vea el Ejemplo 5.**

25. PANIFICACIÓN Un panadero utiliza piezas de masa de pan de 3 onzas para preparar panecillos. ¿Cuántos panecillos puede preparar a partir de 5 libras de masa? (*Sugerencia:* Hay 16 onzas en una libra.)

26. FELPUDOS En un rollo quedan 7 yardas cuadradas de alfombra. ¿Cuántos felpudos de 4 pies cuadrados pueden producirse a partir del rollo? (*Sugerencia:* Hay 9 pies cuadrados en una yarda cuadrada.)

Resuelva los siguientes problemas. **Vea el Ejemplo 6.**

27. LAPTOPS Una carpeta llamada "Finanzas" en la Thinkpad T60 de un estudiante contenía 81 documentos. Para liberar 3 megabytes de memoria, borró 26 documentos de esa carpeta. Después, 48 horas más tarde, insertó 13 documentos nuevos (2 megabytes) en ella. ¿Cuántos documentos hay ahora en la carpeta "Finanzas" del estudiante?

28. iPHONES Una estudiante tenía 135 mensajes de texto guardados en su iPhone de 16 gigabytes. Borró 27 mensajes de texto (600 kilobytes) para liberar memoria. En los siguientes 7 días, recibió 19 mensajes (255 kilobytes). ¿Cuántos mensajes de texto hay ahora guardados en su teléfono?

© ICP-UK/Alamy

INTÉNTELO

29. BOSQUES Canadá tiene 2,342,949 millas cuadradas de bosque menos que Rusia. Estados Unidos tienen 71,730 millas cuadradas de bosque menos que Canadá. Si Rusia tiene 3,287,243 millas cuadradas de bosque (el país con mayor cantidad en el mundo), ¿cuántas millas cuadradas tiene Estados Unidos? (Fuente: Maps of World.com)

30. DÍAS DE VACACIONES Los trabajadores en Francia promedian 5 días de vacaciones al año menos que los italianos. Los estadounidenses promedian 24 días de vacaciones menos que los franceses. Si los italianos promedian 42 días de vacaciones cada año (la mayor cantidad en el mundo), ¿cuántos tiene el trabajador estadounidense promedio al año? (Fuente: infoplease.com)

31. BATMAN Hasta el 2008, la taquilla mundial de las siguientes películas de Batman era *The Dark Knight* (2008): $998 millones, *Batman* (1989): $411 millones, *Batman Forever* (1995): $337 millones, *Batman Begins* (2005): $372 millones, *Batman Returns* (1992): $267 millones y *Batman & Robin* (1997): $238 millones. ¿Cuál es la taquilla total de las películas? (Fuente: Wikipedia)

32. TELENOVELAS El número total de televidentes del top 4 de telenovelas para la semana del diciembre 1, 2008, fueron *The Young and the Restless* (5,016,000), *The Bold and the Beautiful* (3,587,000), *General Hospital* (2,853,000) y *As the World Turns* (2,694,000). ¿Cuál es el número total de televidentes de estos programas para esa semana? (Fuente: soapoperanetwork.com)

33. ESCUELA DE MEDICINA Hubo 375 solicitudes menos para las escuelas de medicina en E.U. enviadas por mujeres en el 2007 en comparación con el 2008. Si en el 2008 fueron enviadas 20,735 solicitudes por mujeres, ¿cuántas se enviaron en el 2007? (Fuente: AAMC: Data Warehouse)

34. AEROBICS Un ejercicio aeróbico de alto impacto de 30 minutos quema 302 calorías. Un ejercicio de bajo impacto de 30 minutos quema 64 calorías menos. ¿Cuántas calorías se queman durante el ejercicio de bajo impacto de 30 minutos?

35. VIAJES ¿Cuánto dinero ahorrará una familia de seis en el pasaje aéreo si toman ventaja de la oferta mostrada en el anuncio?

36. DESCUENTO EN HOSPEDAJE Un hotel está ofreciendo habitaciones que por lo general cuestan $129 por noche por sólo $99 la noche. ¿Cuántos dólares ahorraría un turista si permanece en tal habitación 5 noches?

37. PINTURA Un galón de pintura al látex cubre 350 pies cuadrados. ¿Cuántos galones se necesitan si el área total de las paredes y techos a pintar es de 9,800 pies cuadrados y si deben aplicarse dos capas?

38. ASFALTO Una cubeta de sellador de asfalto cubre 420 pies cuadrados. ¿Cuántas cubetas se necesitan si se va a sellar con dos capas un campo de juego de 5,040 pies cuadrados?

39. IPODS El iPod mostrado tiene 80 gigabytes (GB) de memoria. A partir de la información en la gráfica de barras, determine cuántos gigabytes de memoria están utilizados y cuántos están libres.

40. NACIMIENTOS MÚLTIPLES Refiérase a la tabla en la siguiente página.

a. Encuentre el número total de niños nacidos en un parto doble, triple o cuádruple para el año 2006.

b. Encuentre el número total de niños nacidos en un parto doble, triple o cuádruple para el año 2005.

c. ¿En qué año hubo más nacimientos de niños de estas maneras? ¿Cuántos más?

Nacimientos múltiples en E.U.

Año	Número de gemelos	Número de trillizos	Número de cuatrillizos
2005	133,122	6,208	418
2006	137,085	6,118	355

Fuente: *National Vital Statistics Report,* 2009

41. ÁRBOLES La altura del árbol más alto conocido (Una secuoya costera californiana) es de 379 pies. Algunos científicos creen que lo más que puede crecer el árbol son 47 pies más que esto debido a que es difícil que el agua se eleve de la tierra más que eso para soportar mayor crecimiento. ¿Cuál creen los científicos que sea la altura máxima que puede alcanzar el árbol? (Fuente: BBC News)

© Zack Frank, 2009. Utilizada bajo licencia de Shutterstock.com

42. CAFEÍNA Una lata de 12 onzas de Pepsi-Cola regular contiene 38 miligramos de cafeína. Una Pepsi One de igual tamaño de lata tiene 18 miligramos más de cafeína. ¿Cuántos miligramos de cafeína hay en una lata de Pepsi One? (Fuente: wilstar.com)

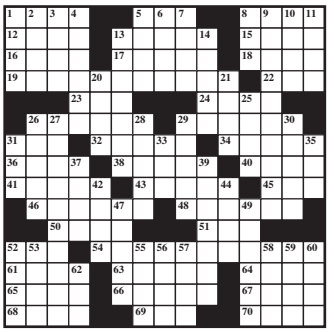
43. TIEMPO Hay 60 minutos en una hora, 24 horas en un día y 7 días en una semana. ¿Cuántos minutos hay en una semana?

44. LONGITUD Hay 12 pulgadas en un pie, 3 pies en una yarda y 1,760 yardas en una milla. ¿Cuántas pulgadas hay en una milla?.

45. CHIMENEAS Un contratista pidió doce palés de ladrillo para chimenea. Cada palé contiene 516 ladrillos. Si se requieren 430 ladrillos para construir una chimenea, ¿cuántas chimeneas pueden construirse a partir de este pedido? ¿Cuántos ladrillos sobrarán?

46. TECHADO Un techador pidió 108 cuadrados de tejas. (Un *cuadrado* cubre 100 pies cuadrados de techo.) En una nueva urbanización, las casas tienen techos de 2,800 pies cuadrados. ¿Cuántas pueden techarse por completo con este pedido?

47. CRUCIGRAMAS Un crucigrama está conformado por 15 renglones y 15 columnas de cuadrados pequeños. Cuarenta y seis de los cuadrados son negros. Cuando se complete, ¿cuántos cuadrados en el crucigrama contendrán letras?



48. AJEDREZ Un tablero de ajedrez consiste en 8 renglones, con 8 cuadrados en cada renglón. Cada uno de los dos jugadores tiene 16 piezas de ajedrez a colocar en el tablero, una por cuadrado. Al inicio del juego, ¿cuántos cuadrados no tienen piezas de ajedrez en ellos?

49. TARJETAS DE CRÉDITO El saldo el 10/23/10 en el número de cuenta de Visa 623415 era de $1,989. Si se cargaron a la tarjeta compras de $125 y $296 el 10/24/10, se abonó un pago de $1,680 el 10/31/10 y no se realizaron otros cargos o pagos, ¿cuál es el nuevo saldo el 11/01/10?

50. ARIZONA La temperatura alta promedio en Phoenix en enero es de 65°F. En mayo, se eleva en 29°F, en julio, se eleva otros 11° y en diciembre desciende 39°. ¿Cuál es la temperatura promedio en Phoenix en diciembre? (Fuente: countrystudies.us)

51. CORRER Rod Bellears, edad 59, ha corrido las $12\frac{1}{2}$ millas desde su hogar en la calle Upper Skene a su negocio en Moolap Concrete Products y regresado cada día por más de 20 años. Esa distancia es igual a tres veces una vuelta alrededor de la Tierra. Si un recorrido alrededor de la Tierra es de 7,926 millas, ¿qué tanto ha corrido el Sr. Bellears durante estos años? (Fuente: *Greelong News*.)

52. PAÑALES Cada año en Estados Unidos se utilizan 18 mil millones de pañales desechables. Puestos uno al lado de otro, son suficientes para alcanzar la Luna *y regresar* 9 veces. Si la distancia de la Tierra a la Luna es de alrededor de 238,855 millas, ¿qué tan lejos se extienden los pañales desechables? (Fuente: diapersandwipers.com)

53. DVD Un comprador adquirió cuatro Blu-ray DVD: *Planet Earth* ($59), *Wall-E* ($26), *Elf* ($23) y *Blade Runner* ($37). Hubo un impuesto sobre la venta de $11. Si pagó por los DVD con billetes de $20, ¿cuántos billetes necesitó? ¿Cuánto recibió de cambio?

54. REDECORACIÓN Una decoradora de interiores adquirió una pintura por $95, un sofá por $225, una silla por $275 y una mesa de esquina por $155. El impuesto fue de $60 y el flete fue de $75. Si pagó por los muebles con billetes de $50, ¿cuántos billetes se necesitaron? ¿Cuánto recibió de cambio?

55. BASQUETBOL FEMENIL En febrero 1, 2006, Epiphanny Prince, de Nueva York, rompió una marca preparatoriana nacional que pertenecía a Cheryl Miller. Prince hizo cincuenta anotaciones de 2 puntos, cuatro anotaciones de 3 puntos y un tiro libre. ¿Cuántos puntos anotó en el partido?

56. RECOLECCIÓN DE BASURA Después de un desfile, los empleados municipales limpiaron la calle y llenaron 8 bolsas para basura medianas (22 galones) y 16 bolsas para basura grandes (30 galones). ¿Cuántos galones de basura recogieron?

57. Un jardín rectangular de 27 pies de largo y 19 pies de ancho es un distintivo de un paisajista para un parque comunitario.

Un pasillo de concreto atravesará el jardín y ocupará 125 pies cuadrados del espacio. ¿Cuántos pies cuadrados quedan para plantar en el jardín?

Carreras del campus

Paisajista

Comstock Images/Getty Images

58. COLCHONES Un colchón queen size mide 60 pulgadas por 80 pulgadas y un colchón matrimonial mide 54 pulgadas por 75 pulgadas. ¿Cuánta más superficie para dormir (área) hay en un colchón queen size?

REDACCIÓN

59. Escriba un problema de aplicación que tendría la siguiente solución. Use la frase *menos que* en el problema.

$$\begin{array}{r} 25{,}500 \\ -\ 6{,}200 \\ \hline 19{,}300 \end{array}$$

60. Escriba un problema de aplicación que tendría la siguiente solución. Use la palabra *incrementa* en el problema.

$$\begin{array}{r} 49{,}656 \\ +\ 22{,}103 \\ \hline 71{,}759 \end{array}$$

61. Escriba un problema de aplicación que tendría la siguiente solución. Use la frase *cuánto hace cada uno* en el problema.

$$6\overline{)2{,}460{,}000}\quad 410{,}000$$

62. Escriba un problema de aplicación que tendría la siguiente solución. Use la palabra *doble* en el problema.

$$\begin{array}{r} 55 \\ \times\ 2 \\ \hline 110 \end{array}$$

REPASO

63. Compruebe la siguiente operación sumando hacia arriba. ¿La suma es correcta?

$$\begin{array}{r} 3{,}714 \\ 2{,}489 \\ 781 \\ 5{,}500 \\ +\ 303 \\ \hline 12{,}987 \end{array}$$

64. Compruebe la siguiente resta utilizando una suma. ¿La resta es correcta?

$$\begin{array}{r} 42{,}403 \\ -\ 1{,}675 \\ \hline 40{,}728 \end{array}$$

65. Compruebe la siguiente multiplicación utilizando una estimación. ¿El producto parece razonable?

$$\begin{array}{r} 73 \\ \times\ 59 \\ \hline 6{,}407 \end{array}$$

66. Compruebe la siguiente división utilizando una multiplicación. ¿El cociente es correcto?

$$27\overline{)10{,}989}\quad 407$$

Objetivos

1. Factorizar números naturales.
2. Identificar números naturales pares e impares, números primos y números compuestos.
3. Encontrar factorizaciones de primos utilizando un árbol de factores.
4. Encontrar factorizaciones de primos utilizando una escalera de una división.
5. Usar la notación exponencial.
6. Evaluar expresiones exponenciales.

SECCIÓN 1.7
Factores primos y exponentes

En esta sección, se explicará cómo expresar números naturales en forma factorizada. Los procedimientos empleados para encontrar la forma factorizada de un número natural involucran la multiplicación y la división.

1 Factorizar números naturales

El enunciado $3 \cdot 2 = 6$ tiene dos partes: los números que se están multiplicando y la respuesta. A los números que se están multiplicando se les llama *factores* y la respuesta es el *producto.* Se dice que el 3 y el 2 son factores del 6.

Factores

A los números que se multiplican entre sí se les llama **factores.**

Auto-revisión 1

Encuentre los factores del 20.

Ahora intente **Problemas 21 y 27**

EJEMPLO 1 Encuentre los factores del 12.

Estrategia Se encontrarán todos los pares de números naturales cuyo producto es 12.

POR QUÉ Cada uno de los números en esos pares es un factor del 12.

Solución

Los pares de números naturales cuyos productos son 12 son:

$$1 \cdot 12 = 12, \quad 2 \cdot 6 = 12 \quad \text{y} \quad 3 \cdot 4 = 12$$

En orden, de menor a mayor, los factores del 12 son el 1, el 2, el 3, el 4, el 6 y el 12.

Consejo útil En el Ejemplo 1, una vez que se determina que el par 1 y 12 son factores del 12, cualquier factor restante debe estar *entre* el 1 y el 12. Una vez que se determina que el par 2 y 6 son factores del 12, cualquier factor restante debe estar *entre* el 2 y el 6. Una vez que se determina que el par 3 y 4 son factores del 12, cualquier factor del 12 debe estar *entre* el 3 y el 4. Dado que no hay números naturales entre el 3 y el 4, se sabe que se han encontrado todos los factores posibles del 12.

En el Ejemplo 1, se encontró que el **1**, el **2**, el **3**, el **4**, el **6** y el **12** son factores del 12. Observe que cada uno de los factores divide el 12 de manera exacta, dejando un residuo de 0.

$$\frac{12}{\mathbf{1}} = 12 \qquad \frac{12}{\mathbf{2}} = 6 \qquad \frac{12}{\mathbf{3}} = 4 \qquad \frac{12}{\mathbf{4}} = 3 \qquad \frac{12}{\mathbf{6}} = 2 \qquad \frac{12}{\mathbf{12}} = 1$$

En general, si un número natural es un factor de un número dado, también divide el número dado de manera exacta.

Factorización de un número natural

Factorizar un número natural significa expresarlo como el producto de otros números naturales.

EJEMPLO 2 Factorice el 40 utilizando: **a.** dos factores **b.** tres factores

Estrategia Se encontrará un par de números naturales cuyo producto sea 40 y tres números naturales cuyo producto sea 40.

POR QUÉ *Factorizar* un número significa expresarlo como el producto de dos (o más) números.

Solución

a. Para factorizar el 40 utilizando dos factores, existen varias posibilidades.

$$40 = 1 \cdot 40, \quad 40 = 2 \cdot 20, \quad 40 = 4 \cdot 10 \quad \text{y} \quad 40 = 5 \cdot 8$$

b. Para factorizar el 40 utilizando tres factores, existen varias posibilidades. Dos de ellas son:

$$40 = 5 \cdot 4 \cdot 2 \quad \text{y} \quad 40 = 2 \cdot 2 \cdot 10$$

Auto-revisión 2

Factorice el 18 utilizando:
a. dos factores
b. tres factores

Ahora intente **Problemas 39 y 45**

EJEMPLO 3 Encuentre los factores del 17.

Estrategia Se encontrarán todos los pares de números naturales cuyo producto sea 17.

POR QUÉ Cada uno de los números en estos pares es un factor del 17.

Solución

El único par de números naturales cuyo producto es 17 es:

$$1 \cdot 17 = 17$$

Por tanto, los únicos factores del 17 son el 1 y el 17.

Auto-revisión 3

Encuentre los factores del 23.

Ahora intente **Problema 49**

2 Identificar números naturales pares e impares, números primos y números compuestos

Un número natural es *par* o *impar*.

Números naturales pares e impares

Si un número natural es divisible entre 2, se le llama número **par**.

Si un número natural no es divisible entre 2, se le llama número **impar**.

Los números naturales pares son los números

0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, . . .

Los números naturales impares son los números

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, . . .

Los tres puntos al final de cada lista mostrada arriba indican que hay un infinito de números naturales pares e impares.

El lenguaje de las matemáticas La palabra *infinitamente* es una forma de la palabra *infinito*, que significa *ilimitado*.

En el ejemplo 3 se vio que los únicos factores del 17 son el 1 y el 17. A los números que sólo tienen dos factores, el 1 y el número en sí, se les llama **números primos.**

Números primos

Un **número primo** es un número natural mayor que 1 que sólo tiene al 1 y a sí mismo como factores.

Los números primos son los números:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, …

Hay infinitamente números primos.

Observe que el único número primo par es el 2. Cualquier otro número natural par es divisible entre 2 y por tanto tiene al 2 como un factor, además del 1 y a sí mismo. También observe que no todos los números naturales impares son números primos. Por ejemplo, dado que el 15 tiene los factores de 1, 3, 5 y 15, no es un número primo.

El conjunto de números naturales contiene muchos números primos. También contiene muchos números que no son primos.

Números compuestos

Los **números compuestos** son los números naturales mayores que 1 que *no* son primos.

Los números compuestos son los números

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, …

Hay infinitamente números compuestos.

¡Cuidado! Los números 0 y 1 no son primos ni compuestos, debido a que ninguno es un número natural mayor que 1.

Auto-revisión 4

a. ¿Es el 39 un número primo?

b. ¿Es el 57 un número primo?

Ahora intente **Problemas 53 y 57**

EJEMPLO 4 **a.** ¿Es el 37 un número primo? **b.** ¿Es el 45 un número primo?

Estrategia Se determinará si el número dado sólo tiene al 1 y a sí mismo como factores.

POR QUÉ Si ese es el caso, es un número primo.

Solución

a. Dado que el 37 es un número natural mayor que 1 y sus únicos factores son el 1 y el 37, es primo. Dado que el 37 no es divisible entre 2, se dice que es un número primo impar.

b. Los factores del 45 son el 1, el 3, el 5, el 9, el 15 y el 45. Dado que tiene otros factores además del 1 y del 45, *no* es primo. Es un número compuesto impar.

3 Encontrar factorizaciones de primos utilizando un árbol de factores

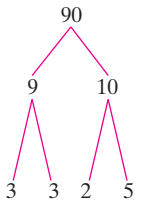
Todo número compuesto puede formarse multiplicando una combinación específica de números primos. Al proceso de encontrar esa combinación se le llama **factorización de primos.**

Factorización de primos

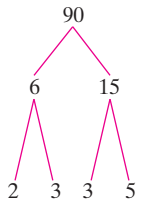
Encontrar la **factorización de primos** de un número natural significa escribirlo como el producto de sólo números primos.

A un método para encontrar la factorización de primos de un número se le llama **árbol de factores.** El árbol de factores mostrado abajo se utiliza para encontrar la factorización de primos del 90 de dos maneras.

1. Factorice el 90 como $9 \cdot 10$.
2. Ni el 9 ni el 10 son primos, así que se factoriza cada uno de ellos.
3. El proceso se completa cuando sólo aparecen números primos en la parte inferior de todas las ramas.



1. Factorice el 90 como $6 \cdot 15$.
2. Ni el 6 ni el 15 son primos, así que se factoriza cada uno de ellos.
3. El proceso se completa cuando sólo aparecen números primos en la parte inferior de todas las ramas.



De cualquier manera, la factorización del 90 contiene un factor de 2, dos factores de 3 y un factor de 5. Escribiendo los factores en orden, de menor a mayor, la **factorización de primos** del 90 es $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$. Es verdadero que ninguna otra combinación de factores primos producirá 90. Este ejemplo ilustra un hecho importante acerca de los números compuestos.

Teorema fundamental de la aritmética

Cualquier número compuesto tiene exactamente un conjunto de factores primos.

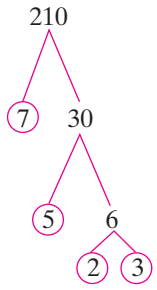
EJEMPLO 5

Use un árbol de factores para encontrar la factorización de primos del 210.

Estrategia Se factorizará cada número que se encuentre como un producto de dos números naturales (distintos al 1 y a sí mismo) hasta que *todos los factores involucrados sean primos.*

POR QUÉ La factorización de primos de un número natural sólo contiene números primos.

Solución



Factorice el 210 como $7 \cdot 30$. (La factorización de primos resultante será la misma sin importar con cuáles dos factores del 210 comience.) Dado que el 7 es primo, enciérrelo en un círculo. Esa rama del árbol está completada.

Dado que el 30 no es primo, factorícelo como $5 \cdot 6$. (La factorización de primos resultante será la misma sin importar con cuáles dos factores del 30 comience.) Dado que el 5 es primo, enciérrelo en un círculo. Esa rama del árbol está completada.

Dado que el 6 no es primo, factorícelo como $2 \cdot 3$. Dado que el 2 y el 3 son primos, enciérrelos en un círculo. Todas las ramas del árbol están ahora completadas.

La factorización de primos del 210 es $7 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3$. Escribiendo los factores primos en orden, de menor a mayor, se tiene que $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

Comprobación: Multiplique los factores primos. El producto debe ser el 210.

$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 6 \cdot 5 \cdot 7$ Escriba la multiplicación en forma horizontal. Empezando de izquierda a derecha, multiplique el 2 y el 3.

$= 30 \cdot 7$ Empezando de izquierda a derecha, multiplique el 6 y el 5.

$= 210$ Multiplique el 30 y el 7. El resultado es correcto.

Auto-revisión 5

Use un árbol de factores para encontrar la factorización de primos del 126.

Ahora intente **Problemas 61 y 71**

¡Cuidado! Recuerde que existe una diferencia entre los *factores* y los *factores primos* de un número. Por ejemplo,

Los factores del 15 son: 1, 3, 5, 15

Los factores primos del 15 son: $3 \cdot 5$

4 Encontrar factorizaciones de primos utilizando la escalera de una división

También se puede encontrar la factorización de primos de un número natural utilizando un proceso de división invertida llamado **escalera de una división.** Se le llama así debido a los "escalones" verticales que produce.

Consejo útil Las reglas de divisibilidad encontradas en la Sección 1.5 son de utilidad cuando se emplea el método de escalera de una división. Puede desear repasarlas en este momento.

Auto-revisión 6

Use una escalera de una división para encontrar la factorización de primos del 108.

Ahora intente **Problemas 63 y 73**

EJEMPLO 6 Use una escalera de una división para encontrar la factorización de primos del 280.

Estrategia Se desarrollarán divisiones repetitivas entre números primos hasta que el cociente final sea un número primo.

POR QUÉ Si un número primo es un factor del 280, dividirá el 280 de manera exacta.

Solución

Es de utilidad comenzar con el primo más pequeño, el 2, como el primer divisor a probar. Después, si es necesario, tratar los primos 3, 5, 7, 11, 13, . . . en ese orden.

Paso 1 El número primo 2 divide el 280 de manera exacta. El resultado es 140, el cual no es primo. Continúe el proceso de división.

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{2} & 280 \\ \hline & 140 \end{array}$$

Paso 2 Dado que el 140 es par, divida entre 2 de nuevo. El resultado es 70, el cual no es primo. Continúe el proceso de división.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 280 \\ \mathbf{2} & 140 \\ \hline & 70 \end{array}$$

Paso 3 Dado que el 70 es par, divida entre 2 una tercera vez. El resultado es 35, el cual no es primo. Continúe el proceso de división.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 280 \\ 2 & 140 \\ \mathbf{2} & 70 \\ \hline & 35 \end{array}$$

Paso 4 Dado que ni el número primo 2 ni el siguiente número primo mayor 3 dividen el 35 de manera exacta, se intenta el 5. El resultado es 7, el cual es primo. Se ha acabado. La factorización de primos del 280 aparece en la columna izquierda de la escalera de la división: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$. Compruebe este resultado utilizando una multiplicación.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 280 \\ 2 & 140 \\ 2 & 70 \\ \mathbf{5} & 35 \\ \hline & 7 \end{array} \leftarrow \text{Primo}$$

¡Cuidado! En el Ejemplo 6, sería incorrecto comenzar el proceso de división con

$$\begin{array}{r|l} 4 & 280 \\ \hline & 70 \end{array}$$

debido a que el 4 no es un número primo.

5 Usar la notación exponencial

En el Ejemplo 6, se vio que la factorización de primos del 280 es $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$. Debido a que esta factorización tiene tres factores de 2, se le llama al 2 un *factor repetido*. Se puede utilizar la **notación exponencial** para escribir $2 \cdot 2 \cdot 2$ de una manera más compacta.

Exponente y base

Se utiliza un **exponente** para indicar una multiplicación repetitiva. Indica cuántas veces se utiliza la **base** como un factor.

El exponente es 3.

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{Factores repetidos}} = \underbrace{2^3}_{\text{La base es 2.}}$$

Lea 2^3 como "2 a la tercera potencia" o "2 al cubo".

La factorización de primos del 280 puede escribirse utilizando exponentes: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7$.

En la **expresión exponencial** 2^3, el número 2 es la base y el 3 es el exponente. A la expresión se le llama **potencia de 2.**

EJEMPLO 7 Escriba cada producto utilizando exponentes:

a. $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ **b.** $7 \cdot 7 \cdot 11$ **c.** $2(2)(2)(2)(3)(3)(3)$

Estrategia Se determinará el número de factores repetidos en cada expresión.

POR QUÉ Puede utilizarse un exponente para representar una multiplicación repetitiva.

Solución

a. El factor 5 se repite 4 veces. Se puede representar esta multiplicación repetitiva con una expresión exponencial que tenga una base de 5 y un exponente de 4:

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$$

b. $7 \cdot 7 \cdot 11 = 7^2 \cdot 11$ El 7 se utiliza como un factor 2 veces.

c. $2(2)(2)(2)(3)(3)(3) = 2^4(3^3)$ El 2 se utiliza como un factor 4 veces y el 3 se utiliza como un factor 3 veces.

Auto-revisión 7

Escriba cada producto utilizando exponentes:

a. $3 \cdot 3 \cdot 7$

b. $5(5)(7)(7)$

c. $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$

Ahora intente **Problemas 77 y 81**

6 Evaluar expresiones exponenciales

Se puede utilizar la definición del exponente para **evaluar** (hallar el valor de) expresiones exponenciales.

EJEMPLO 8 Evalúe cada expresión:

a. 7^2 **b.** 2^5 **c.** 10^4 **d.** 6^1

Estrategia Se rescribirá cada expresión exponencial como un producto de factores repetidos y después se desarrollará la multiplicación. Esto requiere que se identifique la base y el exponente.

POR QUÉ El exponente indica el número de veces que se tiene que escribir la base como un factor.

Solución

Los pasos de las soluciones se pueden escribir en forma horizontal.

Auto-revisión 8

Evalúe cada expresión:

a. 9^2 **b.** 6^3

c. 3^4 **d.** 12^1

Ahora intente **Problema 89**

a. $7^2 = 7 \cdot 7$ Lea 7^2 como "7 a la segunda potencia" o "7 al cuadrado". La base es el 7 y el exponente es el 2. Escriba la base como un factor 2 veces.

$= 49$ Multiplique.

b. $2^5 = \mathbf{2 \cdot 2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ Lea 2^5 como "2 a la 5a potencia". La base es el 2 y el exponente es el 5. Escriba la base como un factor 5 veces.

$= \mathbf{4} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ Multiplique empezando de izquierda a derecha.

$= 8 \cdot 2 \cdot 2$

$= 16 \cdot 2$

$= 32$

c. $10^4 = \mathbf{10 \cdot 10} \cdot 10 \cdot 10$ Lea 10^4 como "10 a la 4a potencia". La base es el 10 y el exponente es el 4. Escriba la base como un factor 4 veces.

$= \mathbf{100} \cdot 10 \cdot 10$ Multiplique empezando de izquierda a derecha.

$= 1{,}000 \cdot 10$

$= 10{,}000$

d. $6^1 = 6$ Lea 6^1 como "6 a la primera potencia". Escriba la base 6 una vez.

¡Cuidado! Observe que 2^5 significa $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$. No significa $2 \cdot 5$. Es decir, $2^5 = 32$ y $2 \cdot 5 = 10$.

Auto-revisión 9

La factorización de primos de un número es $2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$. ¿Cuál es el número?

Ahora intente Problemas 93 y 97

EJEMPLO 9

La factorización de primos de un número es $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5$. ¿Cuál es el número?

Estrategia Para encontrar el número, se evaluará cada expresión exponencial y después se realizará la multiplicación.

POR QUÉ Las expresiones exponenciales deben evaluarse primero.

Solución

Los pasos de las soluciones pueden escribirse en forma horizontal.

$\mathbf{2^3} \cdot \mathbf{3^4} \cdot 5 = \mathbf{8} \cdot \mathbf{81} \cdot 5$ Evalúe las expresiones exponenciales: $2^3 = 8$ y $3^4 = 81$.

$= 648 \cdot 5$ Multiplique, comenzando de izquierda a derecha.

$= 3{,}240$ Multiplique.

$$\begin{array}{r} 81 \\ \times\ 8 \\ \hline 648 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2\ 4} \\ 648 \\ \times\ 5 \\ \hline 3{,}240 \end{array}$$

$2^3 \cdot 3^4 \cdot 5$ es la factorización de primos del 3,240.

Consejo útil Los cálculos que no pueda desarrollar de manera mental deben mostrarse fuera de los pasos de su solución.

Utilizando su CALCULADORA La tecla de exponencial: Crecimiento bacteriano

Al final de 1 hora, un cultivo contiene dos bacterias. Suponga que el número de bacterias se duplica cada hora a partir de entonces. Use exponentes para determinar cuántas bacterias contendrá el cultivo después de 24 horas.

Se puede utilizar una tabla para ayudar a modelar la situación. A partir de la tabla, se observa el desarrollo de un patrón: El número de bacterias en el cultivo

Tiempo	Número de bacterias
1 h	$2 = 2^1$
2 h	$4 = 2^2$
3 h	$8 = 2^3$
4 h	$16 = 2^4$
24 h	$? = 2^{24}$

después de 24 horas será 2^{24}. Se puede evaluar esta expresión exponencial utilizando la tecla de exponencial $\boxed{y^x}$ en una calculadora científica $\left(\boxed{x^y}\right.$ en algunos modelos$\left.\right)$.

2 $\boxed{y^x}$ 24 $\boxed{=}$ 16777216

En una calculadora gráfica, se utiliza la tecla de quilate $\boxed{\wedge}$ para elevar un número a una potencia.

2 $\boxed{\wedge}$ 24 $\boxed{\text{ENTER}}$ 16777216

Dado que $2^{24} = 16{,}777{,}216$, habrán 16,777,216 bacterias después de 24 horas.

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. 1, 2, 4, 5, 10 y 20 **2. a.** 1 · 18, 2 · 9, o 3 · 6 **b.** Dos posibilidades son 2 · 3 · 3 y 1 · 2 · 9 **3.** 1 y 23 **4. a.** no **b.** no **5.** 2 · 3 · 3 · 7 **6.** 2 · 2 · 3 · 3 · 3 **7. a.** $3^2 \cdot 7$ **b.** $5^2(7^2)$ **c.** $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ **8. a.** 81 **b.** 216 **c.** 81 **d.** 12 **9.** 1,350

SECCIÓN 1.7 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Complete los espacios.

1. A los números que se multiplican entre sí se les llama _____.

2. El _____ un número natural significa expresarlo como el producto de otros números naturales.

3. Un número _____ es un número natural mayor que 1 que sólo tiene al 1 y a sí mismo como factores.

4. Los números naturales mayores que 1 que no son números primos se les llama números _____.

5. La factorización de primos de un número significa escribirlo como un producto de sólo números _____.

6. Se utiliza un exponente para representar una multiplicación _____. Indica cuántas veces se utiliza la _____ como un factor.

7. En la expresión exponencial 6^4, el número 6 es la _____, y el 4 es el _____.

8. 5^2 se puede leer como "5 a la segunda potencia" o como "5 al _____". 7^3 se puede leer como "7 a la tercera potencia" o como "7 al _____".

CONCEPTOS

9. Complete los espacios para encontrar los pares de números naturales cuyo producto es 45.

$1 \cdot \square = 45$ $3 \cdot \square = 45$ $5 \cdot \square = 45$

Los factores del 45, en orden de menor a mayor son: $\square, \square, \square, \square, \square, \square$

10. Complete los espacios para encontrar los pares de números naturales cuyo producto es 28.

$1 \cdot \square = 28$ $2 \cdot \square = 28$ $4 \cdot \square = 28$

Los factores del 28, en orden de menor a mayor son: $\square, \square, \square, \square, \square, \square$

11. Si el 4 es un factor de un número natural, ¿el 4 dividirá el número de manera exacta?

12. Suponga que un número es divisible entre 10. ¿El 10 es un factor del número?

13. a. Complete los espacios: Si un número es divisible entre 2, es un número _____ Si no es divisible entre 2, es un número _____.

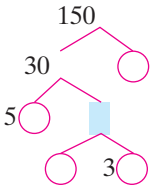
b. Liste los primeros 10 números naturales pares.

c. Liste los primeros 10 números naturales impares.

14. a. Liste los primeros 10 números primos.

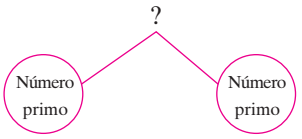
b. Liste los primeros 10 números compuestos.

15. Complete los espacios para la factorización de primos del 150 utilizando un árbol de factores.



La factorización de primos del 150 es $\square \cdot \square \cdot \square \cdot \square$.

16. ¿Cuáles de los números naturales 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 pudieran estar en la parte superior de este árbol de factores?



17. Complete los espacios para la factorización de primos del 150 utilizando una escalera de una división.

$$\begin{array}{r|l} \square & 150 \\ 3 & 75 \\ 5 & \square \\ \hline & 5 \end{array}$$

La factorización de primos del 150 es $\square \cdot \square \cdot \square \cdot \square$.

18. **a.** Cuando se utiliza el método de escalera de una división para encontrar la factorización de primos de un número, ¿cuál es el primer divisor a tratar?

b. Si el 2 no divide el número dado de manera exacta, ¿qué otros divisores deben intentarse?

NOTACIÓN

19. Para cada expresión exponencial, ¿cuál es la base y cuál es el exponente?

a. 7^6 **b.** 15^1

20. Considere la expresión $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$.

a. ¿Cuántos factores repetidos de 2 hay?

b. ¿Cuántos factores repetidos de 3 hay?

PRÁCTICA GUIADA

Encuentre los factores de cada número natural. Lístelos de menor a mayor. Vea el Ejemplo 1.

21. 10 **22.** 6
23. 40 **24.** 75
25. 18 **26.** 32
27. 44 **28.** 65
29. 77 **30.** 81
31. 100 **32.** 441

Factorice cada uno de los siguientes números naturales utilizando dos factores. **No utilice el factor 1 en su respuesta.** Vea el Ejemplo 2.

33. 8 **34.** 9
35. 27 **36.** 35
37. 49 **38.** 25
39. 20 **40.** 16

Factorice cada uno de los siguientes números naturales utilizando tres factores. **No utilice el factor 1 en su respuesta.** Vea el Ejemplo 2

41. 30 **42.** 28
43. 63 **44.** 50
45. 54 **46.** 56
47. 60 **48.** 64

Encuentre los factores de cada número natural. Vea el Ejemplo 3.

49. 11 **50.** 29
51. 37 **52.** 41

Determine si cada uno de los siguientes números es un número primo. Vea el Ejemplo 4.

53. 17 **54.** 59
55. 99 **56.** 27
57. 51 **58.** 91
59. 43 **60.** 83

Encuentre la factorización de primos de cada número. Use exponentes en su respuesta, cuando sea de utilidad. Vea el Ejemplo 5 y 6.

61. 30 **62.** 20
63. 39 **64.** 105
65. 99 **66.** 400
67. 162 **68.** 98
69. 64 **70.** 243
71. 147 **72.** 140
73. 220 **74.** 385
75. 102 **76.** 114

Escriba cada producto utilizando exponentes. Vea el Ejemplo 7.

77. $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ **78.** $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$
79. $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ **80.** $9 \cdot 9 \cdot 9$
81. $4(4)(8)(8)(8)$ **82.** $12(12)(12)(16)$
83. $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$
84. $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$

Evalúe cada expresión exponencial. Vea el Ejemplo 8.

85. **a.** 3^4 **b.** 4^3 **86.** **a.** 5^3 **b.** 3^5
87. **a.** 2^5 **b.** 5^2 **88.** **a.** 4^5 **b.** 5^4
89. **a.** 7^3 **b.** 3^7 **90.** **a.** 8^2 **b.** 2^8
91. **a.** 9^1 **b.** 1^9 **92.** **a.** 20^1 **b.** 1^{20}

Se proporciona la factorización de primos de un número. ¿Cuál es el número? **Vea el Ejemplo 9.**

93. $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$

94. $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$

95. $7 \cdot 11^2$

96. $2 \cdot 3^4$

97. $3^2 \cdot 5^2$

98. $3^3 \cdot 5^3$

99. $2^3 \cdot 3^3 \cdot 13$

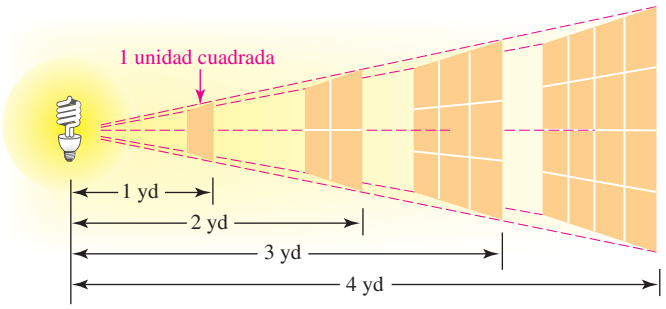
100. $2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$

APLICACIONES

101. NÚMEROS PERFECTOS A un número natural se le llama **número perfecto** cuando la suma de sus factores que son menores que el número es igual al número. Por ejemplo, el 6 es un número perfecto, debido a que $1 + 2 + 3 = 6$. Encuentre los factores del 28. Después use una suma para mostrar que el 28 también es un número perfecto.

102. CRIPTOGRAFÍA La información con se transmite frecuencia en código. Muchos códigos involucran la escritura de productos de primos grandes, debido a que son difíciles de factorizar. Para ver qué tan difícil, trate de encontrar dos factores primos del 7,663. (*Sugerencia:* Ambos primos son mayores que el 70.)

103. LUZ La ilustración muestra que la energía lumínica que pasa a través de la primera unidad de área, 1 yarda aparte de la bombilla, se dispersa a medida que viaja alejándose de la fuente. ¿Cuánta área cubre esa energía a 2 yardas, a 3 yardas y a 4 yardas de la bombilla? Exprese cada respuesta utilizando exponentes.



104. DIVISIÓN CELULAR Después de 1 hora, una célula se ha dividido para formar otra célula. En otra hora, estas dos células se han dividido por lo que existen cuatro células. En otra hora, estas cuatro células se dividen por lo que existen ocho.

a. ¿Cuántas células existen al final de la cuarta hora?

b. El número de células que existe después de cada división puede encontrarse utilizando una expresión exponencial. ¿Cuál es la base?

c. Encuentre el número de células después de 12 horas.

REDACCIÓN

105. Explique cómo comprobar una factorización de primos.

106. Explique la diferencia entre los *factores* de un número y los *factores primos* de un número. Dé un ejemplo.

107. Encuentre 1^2, 1^3 y 1^4. A partir de los resultados, ¿qué puede decirse acerca de cualquier potencia del 1?

108. Use la frase *infinitamente muchos* en un enunciado.

REPASO

109. BANDA DE MARCHA Cuando la banda de una universidad se alinea en ocho filas de quince músicos, hay 5 músicos sobrantes. ¿Cuántos miembros de la banda hay?

110. COSTOS UNIVERSITARIOS EN E.U. En el 2008, la colegiatura y los costos anuales promedio en una universidad de cuatro años privada era de $25,143. La colegiatura y los costos anuales promedio en una universidad de cuatro años pública era de $6,585. A estas tasas, ¿cuánto menos eran la colegiatura y los costos en una universidad pública en los cuatro años? (Fuente: *The College Board*.)

SECCIÓN 1.8
Mínimo común múltiplo y máximo factor común

Objetivos

1. Encontrar el mcm listando múltiplos.
2. Encontrar el mcm utilizando la factorización de primos.
3. Encontrar el mfc listando factores.
4. Encontrar el mfc utilizando la factorización de primos.

De pequeño, probablemente aprendió a contar de 2 en 2, de 5 en 5 y de 10 en 10. El contar de esa manera es un ejemplo de un concepto importante en las matemáticas llamado *múltiplos*.

1 Encontrar el mcm listando múltiplos

Los **múltiplos** de un número son los productos de ese número y el 1, 2, 3, 4, 5, etcétera.

Auto-revisión 1

Encuentre los primeros ocho múltiplos del 9.

Ahora intente **Problemas 17 y 85**

EJEMPLO 1 Encuentre los primeros ocho múltiplos del 6.

Estrategia Se multiplicará el 6 por 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8.

POR QUÉ Los *múltiplos de un número* son los productos de ese número y el 1, 2, 3, 4, 5, etcétera.

Solución

Para encontrar los múltiplos se procede como a continuación:

$6 \cdot \mathbf{1} = 6$ Este es el primer múltiplo del 6.
$6 \cdot \mathbf{2} = 12$
$6 \cdot \mathbf{3} = 18$
$6 \cdot \mathbf{4} = 24$
$6 \cdot \mathbf{5} = 30$
$6 \cdot \mathbf{6} = 36$
$6 \cdot \mathbf{7} = 42$
$6 \cdot \mathbf{8} = 48$ Este es el octavo múltiplo del 6.

Los primeros múltiplos de 6 son el 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42 y 48.

Abajo se muestran los primeros ocho múltiplos del 3 y los primeros ocho múltiplos del 4. Los números remarcados en rojo son los *múltiplos comunes* del 3 y el 4.

$3 \cdot 1 = 3$	$4 \cdot 1 = 4$
$3 \cdot 2 = 6$	$4 \cdot 2 = 8$
$3 \cdot 3 = 9$	$4 \cdot 3 = \mathbf{12}$
$3 \cdot 4 = \mathbf{12}$	$4 \cdot 4 = 16$
$3 \cdot 5 = 15$	$4 \cdot 5 = 20$
$3 \cdot 6 = 18$	$4 \cdot 6 = \mathbf{24}$
$3 \cdot 7 = 21$	$4 \cdot 7 = 28$
$3 \cdot 8 = \mathbf{24}$	$4 \cdot 8 = 32$

Si se extiende cada lista, pronto se vuelve aparente que el 3 y el 4 tienen infinitamente muchos múltiplos comunes.

Los múltiplos comunes del 3 y el 4 son: **12**, **24**, **36**, **48**, **60**, **72**, . . .

Debido a que el 12 es el número más pequeño que es un múltiplo del 3 y del 4, se le llama **mínimo común múltiplo (mcm)** del 3 y el 4. Este se puede escribir de forma compacta como:

$\text{mcm}\,(3, 4) = 12$ Se lee como "El mínimo común múltiplo del 3 y el 4 es el 12".

Mínimo común múltiplo (mcm)

El **mínimo común múltiplo** de dos números naturales es el múltiplo común más pequeño de los números.

Se ha visto que el mcm del 3 y el 4 es el 12. Es importante observar que el 12 es divisible entre el 3 y el 4.

$$\frac{12}{\mathbf{3}} = 4 \quad \text{y} \quad \frac{12}{\mathbf{4}} = 3$$

Esta observación ilustra una relación importante entre la divisibilidad y el mínimo común múltiplo.

Mínimo común múltiplo (mcm)

El **mínimo común múltiplo (mcm)** de dos números naturales es el número natural más pequeño que es divisible entre esos números.

Cuando se encuentra el mcm de dos números, escribir ambas listas de múltiplos puede ser fastidioso. A partir de la definición anterior del mcm, se tiene que sólo se necesita listar los múltiplos del número más grande. El mcm simplemente es *el primer múltiplo del número más grande que es divisible entre el número más pequeño.* Por ejemplo, para hallar el mcm del 3 y el 4, se observa que

Los múltiplos del 4 son: 4, 8, 12, 16, 20, 24, …

El 4 no es divisible entre el 3. El 8 no es divisible entre el 3. El 12 es divisible entre el 3.

Recuerde que un número es divisible entre otro si, cuando se dividen, se obtiene un residuo de 0.

Dado que el 12 es el primer múltiplo del 4 que es divisible entre el 3, el mcm del 3 y el 4 es el 12. Como se esperaba, este es el mismo resultado que se obtuvo utilizando el método con dos listas.

Encontrar el mcm listando los múltiplos del número más grande

Para encontrar el mínimo común múltiplo de dos (o más) números naturales:

1. Escriba los múltiplos del número más grande multiplicándolo por 1, 2, 3, 4, 5, etcétera.
2. Continúe este proceso hasta que halle el primer múltiplo del número más grande que es divisible entre cada uno de los números más pequeños. Ese múltiplo es su mcm.

EJEMPLO 2

Encuentre el mcm del 6 y el 8.

Estrategia Se escribirán los múltiplos del número más grande, 8, hasta que se encuentre uno que sea divisible entre el número más pequeño, 6.

POR QUÉ El mcm del 6 y el 8 es el múltiplo más pequeño del 8 que es divisible entre el 6.

Solución

El 1er múltiplo del 8: $8 \cdot 1 = 8$ ← El 8 no es divisible entre el 6. (Cuando se divide, se obtiene un residuo de 2.) Dado que el 8 no es divisible entre el 6, encuentre el siguiente múltiplo.

El 2o múltiplo del 8: $8 \cdot 2 = 16$ ← El 16 no es divisible entre el 6. Encuentre el siguiente múltiplo.

El 3er múltiplo del 8: $8 \cdot 3 = 24$ ← El 24 es divisible entre el 6. Este es el mcm.

El primer múltiplo del 8 que es divisible entre el 6 es el 24. Por tanto,

$\text{mcm}\,(6, 8) = 24$ Lea como "El mínimo común múltiplo del 6 y el 8 es el 24".

Se puede extender este método para encontrar el mcm de tres números naturales.

Auto-revisión 2

Encuentre el mcm del 8 y el 10.

Ahora intente **Problema 25**

EJEMPLO 3

Encuentre el mcm del 2, 3 y 10.

Estrategia Se escribirán los múltiplos del número más grande, 10, hasta que se encuentre uno que sea divisible entre los números más pequeños, 2 y 3.

POR QUÉ El mcm del 2, 3 y 10 es el múltiplo más pequeño del 10 que es divisible entre el 2 y el 3.

Auto-revisión 3

Encuentre el mcm del 3, 4 y 8.

Ahora intente **Problema 35**

Solución

El 1er múltiplo del 10: $10 \cdot 1 = 10$ ← El 10 es divisible entre el 2, pero no entre el 3. Encuentre el siguiente múltiplo.

El 2o múltiplo del 10: $10 \cdot 2 = 20$ ← El 20 es divisible entre el 2, pero no entre el 3. Encuentre el siguiente múltiplo.

El 3er múltiplo del 10: $10 \cdot 3 = 30$ ← El 30 es divisible entre el 2 y el 3. Este es el mcm.

El primer múltiplo del 10 que es divisible entre el 2 y el 3 es el 30. Por tanto,

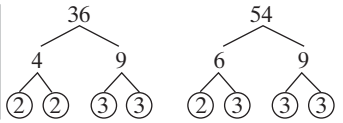
$\text{mcm}\,(2, 3, 10) = 30$ Lea como "El mínimo común múltiplo del 2, 3 y 10 es el 30".

2 Encontrar el mcm utilizando la factorización de primos

Otro método para encontrar el mcm de dos (o más) números naturales emplea la factorización de primos. Este método es especialmente útil cuando se trabaja con números más grandes. Como ejemplo, se encontrará el mcm del 36 y el 54. Primero, se encuentran sus factorizaciones de primos:

$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ Puede utilizarse árboles de factores (o escaleras de una división) para encontrar las factorizaciones de primos.

$54 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$



El mcm del 36 y el 54 debe ser divisible entre el 36 y el 54. Si el mcm es divisible entre el 36, debe tener los factores primos del 36, los cuales son $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$. Si el mcm es divisible entre el 54, debe tener los factores primos del 54, los cuales son $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$. El número más pequeño que cumple ambos requerimientos es

Estos son los factores primos del 36.

$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

Estos son los factores primos del 54.

Para encontrar el mcm, se desarrolla la multiplicación indicada:

$$\text{mcm}\,(36, 54) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 108$$

¡Cuidado! El mcm (36, 54) no es el producto de la factorización de primos del 36 y de la factorización de primos del 54. Eso da una respuesta incorrecta de 2,052.

$$\text{mcm}\,(36, 54) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 1{,}944$$

El mcm debe contener todos los factores primos del 36 y todos los factores primos del 54, pero los factores primos que el 36 y el 54 tienen en común no se repiten.

Las factorizaciones de primos del 36 y del 54 contienen los números 2 y 3.

$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ $\qquad$ $54 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

Se observa que

- El número mayor de veces que aparece el factor 2 en cualquiera de las factorizaciones de primos es de dos veces y el mcm del 36 y el 54 tiene al 2 como un factor dos veces.
- El número mayor de veces que aparece el factor 3 en cualquiera de las factorizaciones de primos es de tres veces y el mcm del 36 y el 54 tiene al 3 como un factor tres veces.

Estas observaciones sugieren un procedimiento a utilizar para encontrar el mcm de dos (o más) números empleando la factorización de primos.

Encontrar el mcm utilizando la factorización de primos

Para encontrar el mínimo común múltiplo de dos (o más) números naturales:

1. Realice la factorización de primos de cada número.
2. El mcm es un producto de los factores primos, donde cada factor se utiliza el número mayor de veces que aparece en cualquier factorización.

EJEMPLO 4 Encuentre el mcm del 24 y el 60.

Estrategia Se comenzará encontrando las factorizaciones de primos del 24 y el 60.

POR QUÉ Para encontrar el mcm, se necesita determinar el número mayor de veces que aparece cada factor en cualquier factorización.

Solución

Paso 1 Realice la factorización de primos del 24 y el 60.

$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$

Puede utilizarse escaleras de una división (o árboles de factores) para encontrar las factorizaciones de primos.

$2 \mid 24$	$2 \mid 60$
$2 \mid 12$	$2 \mid 30$
$2 \mid 6$	$3 \mid 15$
3	5

Paso 2 La factorización de primos del 24 y el 60 contiene los factores primos 2, 3 y 5. Para encontrar el mcm, se utiliza cada uno de estos factores el número mayor de veces que aparecen en cualquier factorización.

- Se utilizará el factor de 2 tres veces, debido a que el 2 aparece tres veces en la factorización del 24. Encierre en un círculo $2 \cdot 2 \cdot 2$, como se muestra abajo.
- Se utilizará el factor de 3 una vez, debido a que aparece una vez en la factorización del 24 y una vez en la factorización del 60. Cuando el número de veces que aparece un factor es el mismo, encierre en un círculo cualquiera, pero no ambos, como se muestra abajo.
- Se utilizará el factor de 5 una vez, debido a que aparece una vez en la factorización del 60. Encierre en un círculo el 5, como se muestra abajo.

$24 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (3)$

$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (5)$

Dado que no hay otros factores primos en cualquiera de las factorizaciones de primos, se tiene

Use el 2 tres veces.
Use el 3 una vez.
Use el 5 una vez.

$$\text{mcm}\,(24, 60) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 120$$

Observe que el 120 es el número más pequeño que es divisible entre el 24 y el 60:

$$\frac{120}{24} = 5 \quad \text{y} \quad \frac{120}{60} = 2$$

En el Ejemplo 4, se puede expresar las factorizaciones de primos del 24 y el 60 utilizando exponentes. Para determinar el número mayor de veces que aparece cada factor en cualquier factorización, se encierra en un círculo el factor con el exponente más grande.

Auto-revisión 4

Encuentre el mcm del 18 y el 32.

Ahora intente **Problema 37**

$24 = (2^3) \cdot (3^1)$ El exponente más grande en el factor 2 es el 3.
El exponente más grande en el factor 3 es el 1.

$60 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot (5^1)$ El exponente más grande en el factor 5 es el 1.

El mcm del 24 y el 60 es

$2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 8 \cdot 3 \cdot 5 = 120$ Evalúe: $2^3 = 8$.

Auto-revisión 5

Encuentre el mcm del 45, 60 y 75.

Ahora intente **Problema 45**

EJEMPLO 5

Encuentre el mcm del 28, 42 y 45.

Estrategia Se comenzará encontrando las factorizaciones de primos del 28, 42 y 45.

POR QUÉ Para encontrar el mcm, se necesita determinar el número mayor de veces que aparece cada factor en cualquier factorización.

Solución

Paso 1 Realice la factorización de primos del 28, 42 y 45.

$28 = (2 \cdot 2) \cdot 7$ Esta puede escribirse como $(2^2) \cdot 7^1$.

$42 = 2 \cdot 3 \cdot (7)$ Esta puede escribirse como $2^1 \cdot 3^1 \cdot (7^1)$.

$45 = (3 \cdot 3) \cdot (5)$ Esta puede escribirse como $(3^2) \cdot (5)$.

Paso 2 La factorización de primos del 28, 42 y 45 contiene los factores primos 2, 3, 5 y 7. Para encontrar el mcm (28, 42, 45), se utiliza cada uno de estos factores el número mayor de veces que aparecen en cualquier factorización.

- Se utilizará el factor de 2 dos veces, debido a que el 2 aparece dos veces en la factorización del 28. Encierre en un círculo $2 \cdot 2$, como se muestra arriba.
- Se utilizará el factor de 3 dos veces, debido a que aparece dos veces en la factorización del 45. Encierre en un círculo $3 \cdot 3$, como se muestra arriba.
- Se utilizará el factor de 5 una vez, debido a que aparece una vez en la factorización del 45. Encierre en un círculo el 5, como se muestra arriba.
- Se utilizará el factor de 7 una vez, debido a que aparece una vez en la factorización del 28 y una vez en la factorización del 42. Puede encerrar en un círculo cualquier 7, pero sólo encierre en un círculo uno de ellos.

Dado que no hay otros factores primos en cualquiera de las factorizaciones de primos, se tiene

Use el factor de 2 tres veces.
Use el factor de 3 dos veces.
Use el factor de 5 una vez.
Use el factor de 7 una vez.

$$\text{mcm } (28, 42, 45) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 1{,}260$$

Si se utilizan exponentes, se tiene

$$\text{mcm } (28, 42, 45) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 1{,}260$$

De cualquier manera, se ha encontrado que mcm (28, 42, 45) = 1,260. Observe que el 1,260 es el número más pequeño que es divisible entre el 28, el 42 y el 45:

$$\frac{1{,}260}{4} = 315 \qquad \frac{1{,}260}{42} = 30 \qquad \frac{1{,}260}{45} = 28$$

EJEMPLO 6 *Recuperación de pacientes*

Dos pacientes que se recuperan de una cirugía cardiaca se ejercitan a diario caminando alrededor de una pista. Un paciente puede completar una vuelta en 4 minutos. El otro puede completar una vuelta en 6 minutos. Si comienzan al mismo tiempo y en el mismo lugar de la pista, ¿en cuántos minutos llegarán juntos al punto inicial de su rutina?

Estrategia Se encontrará el mcm del 4 y el 6.

POR QUÉ Dado que un paciente alcanza el punto inicial de la rutina cada 4 minutos y el otro lo hace cada 6 minutos, se desea encontrar el mínimo común múltiplo de estos números. En ese tiempo, ambos estarán en el punto inicial de la rutina.

Solución

Para encontrar el mcm, se realiza la factorización de primos del 4 y del 6 y se encierra en un círculo cada factor primo el número mayor de veces que aparece en cualquier factorización.

$4 = (2 \cdot 2)$ Use el factor de 2 dos veces, debido a que el 2 aparece dos veces en la factorización del 4.

$6 = 2 \cdot (3)$ Use el factor de 3 una vez, dado que aparece una vez en la factorización del 6.

Dado que no hay otros factores primos en cualquiera de las factorizaciones de primos, se tiene

$$\text{mcm}\,(4, 6) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

Los pacientes llegarán juntos al punto inicial 12 minutos después de comenzar su rutina.

Autorevisión 6

ACUARIOS El dueño de una tienda de mascotas cambia el agua en un acuario de peces cada 45 días y cambia el filtro de la bomba cada 20 días.

Si el agua y el filtro se cambian el mismo día, ¿en cuántos días se cambiarán de nuevo juntos?

Ahora intente **Problema 87**

3 Encontrar el mfc listando factores

Se ha visto que dos números naturales pueden tener múltiplos comunes. También pueden tener *factores comunes*. Para explorar este concepto, se encuentran los factores del 26 y el 39 y se ve qué factores tienen en común.

Para encontrar los factores del 26, se encuentran todos los pares de números naturales cuyo producto sea 26. Existen dos posibilidades:

$1 \cdot 26 = 26 \qquad 2 \cdot 13 = 26$

Cada uno de los números en los pares es un factor del 26. De menor a mayor, los factores del 26 son el 1, el 2, el 13 y el 26.

Para encontrar los factores del 39, se encuentran todos los pares de números naturales cuyo producto sea 39. Existen dos posibilidades:

$1 \cdot 39 = 39 \qquad 3 \cdot 13 = 39$

Cada uno de los números en los pares es un factor del 39. De menor a mayor, los factores del 39 son el 1, el 3, el 13 y el 39. Como se muestra abajo, los *factores comunes* del 26 y el 39 son el 1 y el 13.

$(1), 2, (13), 26$ Estos son los factores del 26.

$(1), 3, (13), 39$ Estos son los factores del 39.

Debido a que el 13 es el número más grande que es un factor del 26 y el 39, se le llama **máximo factor común (mfc)** del 26 y el 39. Se puede escribir esto en forma compacta como:

$\text{mfc}\,(26, 39) = 13$ Se lee como "El máximo factor común del 26 y el 39 es el 13".

Máximo factor común (mfc)

El **máximo factor común** de dos números naturales es el factor común más grande de los números.

EJEMPLO 7 Encuentre el mfc del 18 y el 45.

Estrategia Se encontrarán los factores del 18 y el 45.

POR QUÉ Entonces se puede identificar el factor más grande que tienen en común el 18 y el 45.

Auto-revisión 7

Encuentre el mfc del 30 y el 42.

Ahora intente **Problema 49**

Solución

Para encontrar los factores del 18, se encuentran todos los pares de números naturales cuyo producto sea el 18. Existen tres posibilidades:

$1 \cdot 18 = 18 \qquad 2 \cdot 9 = 18 \qquad 3 \cdot 6 = 18$

Para encontrar los factores del 45, se encuentran todos los pares de números naturales cuyo producto sea el 45. Existen tres posibilidades:

$1 \cdot 45 = 45 \qquad 3 \cdot 15 = 45 \qquad 5 \cdot 9 = 45$

Los factores del 18 y del 45 se listan abajo. Sus factores comunes se encierran en un círculo.

Factores del 18: 1, 2, 3, 6, 9, 18
Factores del 45: 1, 3, 5, 9, 15, 45

Los factores comunes del 18 y el 45 son el 1, el 3 y el 9. Dado que el 9 es el factor común más grande,

mfc (18, 45) = 9 *Se lee como "El máximo factor común del 18 y el 45 es el 9".*

En el Ejemplo 7, se encontró que el mfc del 18 y el 45 es el 9. Observe que el 9 es el número más grande que divide el 18 y el 45.

$$\frac{18}{9} = 2 \qquad \frac{45}{9} = 5$$

En general, el máximo común factor de dos (o más) números es el número más grande que los divide de manera exacta. Por esta razón, al máximo factor común también se le conoce como **máximo común divisor (mcd)** y se puede escribir mcd (18, 45) = 9.

4 Encontrar el mfc utilizando la factorización de primos

Se puede encontrar el mfc de dos (o más) números listando los factores de cada número. Sin embargo, este método puede ser extenso. Otro método para encontrar el mfc utiliza la factorización de primos de cada número.

Encontrar el mfc utilizando la factorización de primos

Para encontrar el máximo factor común de dos (o más) números naturales:

1. Realice la factorización de primos de cada número.
2. Identifique los factores primos comunes.
3. El mfc es un producto de todos los factores primos comunes encontrados en el Paso 2. Si no hay factores primos comunes, el mfc es el 1.

Auto-revisión 8

Encuentre el mfc del 36 y el 60.

Ahora intente **Problema 57**

EJEMPLO 8 Encuentre el mfc del 48 y el 72.

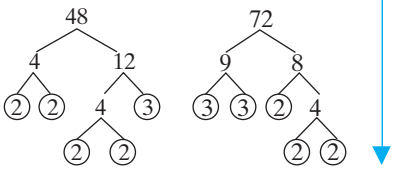
Estrategia Se comenzará encontrando las factorizaciones de primos del 48 y del 72.

POR QUÉ Entonces se puede identificar cualquier factor primo que tienen en común.

Solución

Paso 1 Realice la factorización de primos del 48 y el 72.

$48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$
$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$



Paso 2 El encerramiento en círculos en la página anterior muestra que el 48 y el 72 tienen cuatro factores primos comunes. Tres factores comunes de 2 y un factor común de 3.

Paso 3 El mfc es el producto de los factores primos encerrados en un círculo.

$$\text{mfc}\,(48, 72) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$$

EJEMPLO 9 Encuentre el mfc del 8 y el 15.

Estrategia Se comenzará encontrando las factorizaciones de primos del 8 y del 15.

POR QUÉ Entonces se puede identificar cualquier factor primo que tienen en común.

Solución

Abajo se muestran las factorizaciones de primos del 8 y del 15.

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$
$$15 = 3 \cdot 5$$

Dado que no hay factores comunes, el mfc del 8 y el 15 es el 1. Por tanto,

$$\text{mfc}\,(8, 15) = 1$$

Se lee como "El máximo factor común del 8 y el 15 es el 1".

Auto-revisión 9

Encuentre el mfc del 8 y el 25.

Ahora intente **Problema 61**

EJEMPLO 10 Encuentre el mfc del 20, 60 y 140.

Estrategia Se comenzará encontrando las factorizaciones de primos del 20, 60 y 140.

POR QUÉ Entonces se puede identificar cualquier factor primo que tienen en común.

Solución

Abajo se muestran las factorizaciones de primos del 20, 60 y 140.

$$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$$
$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$
$$140 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$$

El encerramiento en círculos arriba muestra que el 20, el 60 y el 140 tienen tres factores comunes: dos factores comunes de 2 y un factor común de 5. El mfc es el producto de los factores primos encerrados en un círculo.

$$\text{mfc}\,(20, 60, 140) = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$$

Se lee como "El máximo factor común del 20, el 60 y el 140 es el 20".

Observe que el 20 es el número más grande que divide al 20, 60 y 140 de manera exacta.

$$\frac{20}{\mathbf{20}} = 1 \qquad \frac{60}{\mathbf{20}} = 3 \qquad \frac{140}{\mathbf{20}} = 7$$

Auto-revisión 10

Encuentre el mfc del 45, 60 y 75.

Ahora intente **Problema 67**

EJEMPLO 11 ***Ramilletes de flores*** Una florista desea utilizar 12 tulipanes blancos, 30 tulipanes rosas y 42 tulipanes púrpuras para formar tantos arreglos idénticos como sea posible. Cada ramillete va a tener el mismo número de cada color de tulipán.

a. ¿Cuál es el número mayor de arreglos que puede formar?

b. ¿Cuántos tulipanes de cada color puede utilizar en cada ramillete?

Estrategia Se encontrará el mfc del 12, 30 y 42.

POR QUÉ Dado que se utilizará un número igual de tulipanes de cada color para crear arreglos idénticos, se indica una división. El máximo factor común de los tres números es el número más grande que los divide de manera exacta.

Auto-revisión 11

ÚTILES ESCOLARES El gerente de una librería desea utilizar algunos artículos sobrantes (36 marcadores, 54 lápices y 108 plumas) para formar paquetes de regalo idénticos para donar a una primaria.

a. ¿Cuál es el mayor número de paquetes de regalo que pueden formarse?

(continúa)

b. ¿Cuántos de cada tipo de artículo habrá en cada paquete de regalo?

Ahora intente **Problema 93**

Solución

a. Para encontrar el mfc, se realiza la factorización de primos del 12, 30 y 42 y se encierra en un círculo los factores primos que tienen en común.

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$
$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$
$$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$$

El mfc es el producto de los números encerrados en un círculo.

$$\text{mfc } (12, 30, 42) = 2 \cdot 3 = 6$$

La florista puede formar 6 arreglos idénticos con los tulipanes.

b. Para encontrar el número de tulipanes blancos, rosas y púrpuras en cada uno de los 6 arreglos, se divide el número de tulipanes de cada color entre 6.

Tulipanes blancos: $\frac{12}{6} = 2$ Tulipanes rosas: $\frac{30}{6} = 5$ Tulipanes púrpuras: $\frac{42}{6} = 7$

Cada uno de los 6 arreglos idénticos contendrá 2 tulipanes blancos, 5 tulipanes rosas y 7 tulipanes púrpuras.

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72 **2.** 40 **3.** 24 **4.** 288 **5.** 900 **6.** 180 días **7.** 6 **8.** 12 **9.** 1 **10.** 15 **11. a.** 18 paquetes de regalo **b.** 2 marcadores, 3 lápices, 6 plumas

SECCIÓN 1.8 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Complete los espacios.

1. Los _____ de un número son los productos de ese número y el 1, 2, 3, 4, 5, etcétera.

2. Debido a que el 12 es el número más pequeño que es un múltiplo del 3 y el 4, es el _____ _____ _____ del 3 y el 4.

3. Un número es _____ entre otros si, cuando se dividen, se obtiene un residuo de 0.

4. Debido a que el 6 es el número más grande que es un factor del 18 y el 24, es el _____ _____ _____ del 18 y el 24.

CONCEPTOS

5. a. El mcm del 4 y el 6 es el 12. ¿Cuál es el número natural más pequeño divisible entre el 4 y el 6?

b. Complete el espacio: En general, el mcm de dos números naturales es el número natural _____ que es divisible entre ambos números.

6. a. ¿Cuáles son los múltiplos comunes del 2 y el 3 que aparecen en la lista de múltiplos mostrados en la siguiente columna?

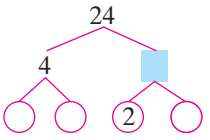
b. ¿Cuál es el mcm del 2 y el 3?

Múltiplos del 2	Múltiplos del 3
$2 \cdot 1 = 2$	$3 \cdot 1 = 3$
$2 \cdot 2 = 4$	$3 \cdot 2 = 6$
$2 \cdot 3 = 6$	$3 \cdot 3 = 9$
$2 \cdot 4 = 8$	$3 \cdot 4 = 12$
$2 \cdot 5 = 10$	$3 \cdot 5 = 15$
$2 \cdot 6 = 12$	$3 \cdot 6 = 18$

7. a. Los primeros seis múltiplos del 5 son 5, 10, 15, 20, 25 y 30. ¿Cuál es el primer múltiplo del 5 que es divisible entre 4?

b. ¿Cuál es el mcm del 4 y el 5?

8. Llene los espacios para completar la factorización de primos del 24.



9. La factorización de primos del 36 y del 90 es:

$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$
$$90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

¿Cuál es el número mayor de veces que

a. aparece el 2 en cualquier factorización?

b. aparece el 3 en cualquier factorización?

c. aparece el 5 en cualquier factorización?

d. Complete los espacios para encontrar el mcm del 36 y el 90:

$$\text{mcm} = \square \cdot \square \cdot \square \cdot \square \cdot \square = \square$$

10. La factorización de primos del 14, 70 y 140 es:

$$14 = 2 \cdot 7$$
$$70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$$
$$140 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$$

¿Cuál es el número mayor de veces que

a. aparece el 2 en cualquier factorización?

b. aparece el 5 en cualquier factorización?

c. aparece el 7 en cualquier factorización?

d. Complete los espacios para encontrar el mcm del 14, 70 y 140:

$$\text{mcm} = \square \cdot \square \cdot \square \cdot \square = \square$$

11. La factorización de primos del 12 y del 54 es:

$$12 = 2^2 \cdot 3^1$$
$$54 = 2^1 \cdot 3^3$$

¿Cuál es el número mayor de veces que

a. aparece el 2 en cualquier factorización?

b. aparece el 3 en cualquier factorización?

c. Complete los espacios para encontrar el mcm del 12 y el 54:

$$\text{mcm} = 2^{\square} \cdot 3^{\square} = \square$$

12. Abajo se muestran los factores del 18 y del 45.

Factores del 18: 1, 2, 3, 6, 9, 18

Factores del 45: 1, 3, 5, 9, 15, 45

a. Encierre en un círculo los factores comunes del 18 y el 45.

b. ¿Cuál es el mfc del 18 y el 45?

13. Las factorizaciones de primos del 60 y del 90 son:

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$
$$90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

a. Encierre en un círculo los factores comunes del 60 y el 90.

b. ¿Cuál es el mfc del 60 y el 90?

14. Las factorizaciones de primos del 36, 84 y 132 son:

$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$
$$84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$$
$$132 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11$$

a. Encierre en un círculo los factores comunes del 36, 84 y 132.

b. ¿Cuál es el mfc del 36, 84 y 132?

NOTACIÓN

15. a. La abreviación para el máximo factor común es _____.

b. La abreviación para el mínimo común múltiplo es _____.

16. a. Se lee mcm (2, 15) = 30 como "El _____ _____ múltiplo _____ 2 y el 15 _____ 30."

b. Se lee mfc (18, 24) = 6 como "El _____ _____ factor _____ 18 y el 24 _____ 6."

PRÁCTICA GUIADA

Encuentre el mcm de los números dados. Vea el Ejemplo 1.

17. 4 **18.** 2

19. 11 **20.** 10

21. 8 **22.** 9

23. 20 **24.** 30

Encuentre el mcm de los números dados. Vea el Ejemplo 2.

25. 3, 5 **26.** 6, 9

27. 8, 12 **28.** 10, 25

29. 5, 11 **30.** 7, 11

31. 4, 7 **32.** 5, 8

Encuentre el mcm de los números dados. Vea el Ejemplo 3.

33. 3, 4, 6 **34.** 2, 3, 8

35. 2, 3, 10 **36.** 3, 6, 15

Encuentre el mcm de los números dados . Vea el Ejemplo 4.

37. 16, 20 **38.** 14, 21

39. 30, 50 **40.** 21, 27

41. 35, 45 **42.** 36, 48

43. 100, 120 **44.** 120, 180

Encuentre el mcm de los números dados. Vea el Ejemplo 5.

45. 6, 24, 36 **46.** 6, 10, 18

47. 5, 12, 15 **48.** 8, 12, 16

Encuentre el mfc de los números dados. Vea el Ejemplo 7.

49. 4, 6 **50.** 6, 15

51. 9, 12 **52.** 10, 12

Encuentre el mfc de los números dados. Vea el Ejemplo 8.

53. 22, 33
54. 14, 21
55. 15, 30
56. 15, 75
57. 18, 96
58. 30, 48
59. 28, 42
60. 63, 84

Encuentre el mfc de los números dados. Vea el Ejemplo 9.

61. 16, 51
62. 27, 64
63. 81, 125
64. 57, 125

Encuentre el mfc de los números dados. Vea el Ejemplo 10.

65. 12, 68, 92
66. 24, 36, 40
67. 72, 108, 144
68. 81, 108, 162

INTÉNTELO

Encuentre el mcm y el mfc de los números dados.

69. 100, 120
70. 120, 180
71. 14, 140
72. 15, 300
73. 66, 198, 242
74. 52, 78, 130
75. 8, 9, 49
76. 9, 16, 25
77. 120, 125
78. 98, 102
79. 34, 68, 102
80. 26, 39, 65
81. 46, 69
82. 38, 57
83. 50, 81
84. 65, 81

APLICACIONES

85. CAMBIOS DE ACEITE Ford ha extendido oficialmente el intervalo de cambio de aceite para los automóviles modelo 2007 y más recientes a cada 7,500 millas. (Solía ser cada 5,000 millas.) Complete la tabla de abajo que muestra la nueva recomendación de Ford para los millajes para el cambio de aceite.

1er cambio de aceite	2o cambio de aceite	3er cambio de aceite	4o cambio de aceite	5o cambio de aceite	6o cambio de aceite
7,500 mi					

86. CAJERO AUTOMÁTICO Un cajero automático ofrece al cliente opciones de retiro en efectivo en múltiplos de $20. El retiro mínimo es de $20 y el máximo es de $200. Liste las cantidades de dólares en efectivo que pueden retirarse del cajero automático.

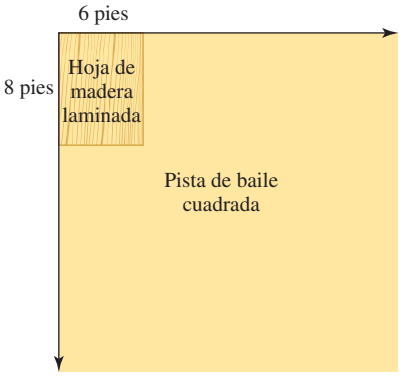
87. ENFERMERÍA A una enfermera se le instruye que compruebe la presión sanguínea de un paciente cada 45 minutos y a otra se le instruye que tome la temperatura del mismo paciente cada 60 minutos. Si ambas enfermeras están en la habitación del paciente en este momento, ¿cuánto tiempo pasará hasta que las enfermeras estén juntas en la misma habitación de nuevo?

88. BIORRITMOS Algunos científicos creen que existen ritmos naturales del cuerpo, llamados *biorritmos*, que afectan los ciclos físicos, emocionales y mentales. El ciclo biorrítmico físico dura 23 días, el ciclo biorrítmico emocional dura 28 días y el ciclo biorrítmico mental dura 33 días. Cada ciclo biorrítmico tiene una zona alta, baja y crítica. Si sus tres ciclos coinciden un día, todos en su punto más bajo, ¿en cuántos días más volverán a coincidir en su punto más bajo?

89. PICNICS Un paquete de salchichas para hot dog contiene por lo regular 10 salchichas y un paquete de pan por lo regular contiene 12 panes. ¿Cuántos paquetes de salchichas para hot dog y de pan debe comprar una persona para asegurarse de que haya un número igual de cada uno?

90. PAREJAS QUE TRABAJAN Un esposo trabaja por 6 días seguidos y después tiene un día libre. Su esposa trabaja por 7 días seguidos y después tiene un día libre. Si el esposo y la esposa tienen su día libre al mismo tiempo, ¿en cuántos días volverán a tener su día libre al mismo tiempo?

91. PISTAS DE BAILE Se va a construir una pista de baile a partir de piezas rectangulares de madera laminada que son de 6 pies por 8 pies. ¿Cuál es el número de piezas mínimo de madera laminada que se necesitan para construir una pista de baile cuadrada?



92. TAZONES DE SOPA Cada uno de los tazones de abajo contienen un número exacto de *cucharadas llenas* de sopa.

a. Si no hay derramamiento, ¿cuál es la cucharada de tamaño más grande (en onzas) que puede utilizar un chef para llenar los tres tazones?

b. ¿Cuántas cucharadas se requerirán para llenar cada tazón?

93. CLASES DE ARTE Los estudiantes en una clase de pintura deben pagar una cuota extra para artículos de arte. En el primer día de clases la profesora recolectó $28 en cuotas a partir de varios estudiantes. En el segundo día recolectó $21 más a partir de algunos estudiantes diferentes y en el tercer día recolectó $63 adicionales a partir de otros estudiantes.

a. ¿Cuál es la cuota máxima de los artículos de pintura para un estudiante?

b. Determine cuántos estudiantes pagaron la cuota para los artículos de arte cada día.

94. ENVÍO Un fabricante de juguetes necesita enviar 135 osos de peluche marrones, 105 osos de peluche negros y 30 osos de peluche blancos. Sólo puede empaquetarse un tipo de oso de peluche en cada caja y debe empaquetarse el mismo número de osos de peluche en cada caja. ¿Cuál es el mayor número de osos de peluche que pueden empaquetarse en cada caja?

REDACCIÓN

95. Explique cómo encontrar el mcm del 8 y el 28 utilizando la factorización de primos.

96. Explique cómo encontrar el mfc del 8 y el 28 utilizando la factorización de primos.

97. La factorización de primos del 12 es $2 \cdot 2 \cdot 3$ y la factorización de primos del 15 es $3 \cdot 5$. Explique por qué el mcm del 12 y el 15 *no* es $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$.

98. ¿Cómo puede decir buscando la factorización de primos de dos números naturales que su mfc es el 1?

REPASO

Desarrolle cada operación.

99. $9{,}999 + 1{,}111$

100. $10{,}000 - 7{,}989$

101. $305 \cdot 50$

102. $2{,}100 \div 105$

SECCIÓN 1.9
Orden de las operaciones

Objetivos

1. Usar la regla del orden de las operaciones.
2. Evaluar expresiones que contienen símbolos de agrupación.
3. Encontrar la media (promedio) de un conjunto de valores.

Recuerde que los números se combinan con las operaciones de suma, resta, multiplicación y división para crear **expresiones.** Con frecuencia se tiene que **evaluar** (encontrar el valor de) expresiones que involucran más de una operación. En esta sección se introduce una regla del orden de las operaciones a seguir en tales casos.

1 Usar la regla del orden de las operaciones

Suponga que un amigo le pide que lo contacte si ve un reloj Rolex a la venta mientras está viajando por Europa. Mientras está en Suiza, encuentra el reloj y envía el siguiente mensaje de texto, mostrado a la izquierda. Al siguiente día, obtiene la respuesta de su amigo mostrada a la derecha.

Envía este mensaje.

Obtiene esta respuesta.

Algo está mal. La primera parte de la respuesta ("¡No precio demasiado caro!") indica que hay que comprar el reloj a cualquier precio. La segunda parte (¡No! Precio demasiado caro.) indica que no hay que comprarlo, debido a que es demasiado caro. La posición del signo de exclamación hace diferentes las dos partes de la respuesta, lo que resulta en significados diferentes. Cuando se lee un enunciado matemático, es posible el mismo tipo de confusión. Por ejemplo, considere la expresión

$$2 + 3 \cdot 6$$

La expresión se puede evaluar de dos maneras. Se puede sumar primero y multiplicar después. O se puede multiplicar primero y sumar después. Sin embargo, los resultados son diferentes.

$$\mathbf{2 + 3} \cdot 6 = \mathbf{5} \cdot 6 \quad \text{Sumar el 2 y el 3 primero.}$$
$$= 30 \quad \text{Multiplicar el 5 y el 6.}$$

$$2 + \mathbf{3 \cdot 6} = 2 + \mathbf{18} \quad \text{Multiplicar el 3 y el 6 primero.}$$
$$= 20 \quad \text{Sumar el 2 y el 18.}$$

Diferentes resultados

Si no se establece un orden uniforme de las operaciones, la expresión tiene dos valores diferentes. Para evitar esta posibilidad, siempre se empleará la siguiente regla del orden de las operaciones.

Orden de las operaciones

1. Desarrolle todos los cálculos dentro de los paréntesis y otros símbolos de agrupación siguiendo el orden listado abajo en los Pasos 2–4, empezando desde el par más interno de símbolos de agrupación al par más externo.
2. Evalúe todas las expresiones exponenciales.
3. Desarrolle las multiplicaciones y divisiones a medida que aparezcan de izquierda a derecha.
4. Desarrolle las sumas y restas a medida que aparezcan de izquierda a derecha.

Cuando se hayan eliminado los símbolos de agrupación, repita los Pasos 2-4 para completar el cálculo.

Si está presente una barra de fracción, evalúe la expresión sobre la barra (llamada **numerador**) y la expresión debajo de la barra (llamada **denominador**) por separado. Después desarrolle la división indicada por la barra de fracción, si es posible.

No es necesario aplicar todos estos pasos en cada problema. Por ejemplo, la expresión $2 + 3 \cdot 6$ no contiene algún paréntesis y no hay expresiones exponenciales. Por lo que se buscan multiplicaciones y divisiones a desarrollar y se procede como a continuación:

$$2 + \mathbf{3 \cdot 6} = 2 + \mathbf{18} \quad \text{Realice la multiplicación primero.}$$
$$= 20 \quad \text{Realice la suma.}$$

Auto-revisión 1

Evalúe: $4 \cdot 3^3 - 6$

Ahora intente **Problema 19**

EJEMPLO 1

Evalúe: $2 \cdot 4^2 - 8$.

Estrategia Se escanearán las expresiones para determinar cuáles operaciones necesitan desarrollarse primero. Después se desarrollarán estas operaciones, una a la vez, siguiendo la regla del orden de las operaciones.

POR QUÉ Si no se sigue el orden correcto de las operaciones, la expresión puede tener más de un valor.

Solución

Dado que la expresión no contiene algún paréntesis, se comienza con el Paso 2 de la regla del orden de las operaciones: Evaluar todas las expresiones exponenciales. Se escribirán los pasos de la solución en forma horizontal.

$2 \cdot 4^2 - 8 = 2 \cdot 16 - 8$ Evalúe la expresión exponencial: $4^2 = 16$.

$= 32 - 8$ Realice la multiplicación: $2 \cdot 16 = 32$.

$= 24$ Realice la resta.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1}\\ 16\\ \times\ 2\\ \hline 32\\ -\ 8\\ \hline 24 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle 2\ 12}\\ 32\\ -\ 8\\ \hline 24 \end{array}$$

Consejo útil Los cálculos que no pueda desarrollar de manera mental deben mostrarse fuera de los pasos de su solución.

EJEMPLO 2

Evalúe: $80 - 3 \cdot 2 + 16$

Estrategia Se desarrollará la multiplicación primero.

POR QUÉ La expresión no contiene algún paréntesis ni hay exponentes.

Solución

Se escribirán los pasos de la solución en forma horizontal.

$80 - 3 \cdot 2 + 16 = 80 - 6 + 16$ Realice la multiplicación: $3 \cdot 2 = 6$.

$= 74 + 16$ Empezando de izquierda a derecha, realice la resta: $80 - 6 = 74$.

$= 90$ Realice la suma.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1}\\ 74\\ +\ 16\\ \hline 90 \end{array}$$

Auto-revisión 2

Evalúe: $60 - 2 \cdot 3 + 22$

Ahora intente **Problema 23**

¡Cuidado! En el Ejemplo 2, un error común es olvidar empezar de izquierda a derecha y desarrollar *de manera incorrecta* la suma antes de la resta. Este error produce la respuesta incorrecta, 58.

$80 - 3 \cdot 2 + 16 = 80 - 6 + 16$

$= 80 - 22$

$= 58$

Recuerde desarrollar las sumas y restas *en el orden en el que aparecen.* Lo mismo es verdadero para las multiplicaciones y divisiones.

EJEMPLO 3

Evalúe: $192 \div 6 - 5(3)2$

Estrategia Se desarrollará la división primero.

POR QUÉ Aunque la expresión contiene paréntesis, no hay cálculos a desarrollar *dentro* de ellos. Dado que no hay exponentes, se desarrollarán las multiplicaciones y divisiones a medida que aparecen de izquierda a derecha.

Solución

Se escribirán los pasos de la solución en forma horizontal.

$192 \div 6 - 5(3)2 = 32 - 5(3)2$ Empezando de izquierda a derecha, realice la división: $192 \div 6 = 32$.

$= 32 - 15(2)$ Empezando de izquierda a derecha, realice la multiplicación: $5(3) = 15$.

$= 32 - 30$ Complete la multiplicación: $15(2) = 30$.

$= 2$ Realice la resta.

$$\begin{array}{r} 32\\ 6\overline{)192}\\ -\ 18\\ \hline 12\\ -\ 12\\ \hline 0 \end{array}$$

Auto-revisión 3

Evalúe: $144 \div 9 + 4(2)3$

Ahora intente **Problema 27**

Se empleará la estrategia de cinco pasos para la resolución de problemas introducida en la Sección 1.6 y la regla del orden de las operaciones para resolver el siguiente problema de aplicación.

Auto-revisión 4

LLAMADAS DE LARGA DISTANCIA Un reportero de un periódico en Chicago realizó una llamada de 90 minutos a Afganistán, una llamada de 25 minutos a Haití y una llamada de 55 minutos a Rusia. ¿Cuál fue el costo total de las llamadas?

Ahora intente **Problema 105**

EJEMPLO 4 *Llamadas de larga distancia*

A la derecha se muestran las tarifas que cobra Skype por llamadas a líneas fijas internacionales desde Estados Unidos. El editor de un periódico en Washington D.C., realizó una llamada de 60 minutos a Canadá, una llamada de 45 minutos a Panamá y una llamada de 30 minutos a Vietnam. ¿Cuál fue el costo total de las llamadas?

Llamadas a líneas fijas

Todas las tarifas son por minuto.

Afganistán	¢41
Canadá	¢2
Haití	¢28
Panamá	¢12
Rusia	¢6
Vietnam	¢38

Impuestos incluidos

Analizar

- La llamada de 60 minutos a Canadá cuesta 2 centavos por minuto. — Proporcionado
- La llamada de 45 minutos a Panamá cuesta 12 centavos por minuto. — Proporcionado
- La llamada de 30 minutos a Vietnam cuesta 38 centavos por minuto. — Proporcionado
- ¿Cuál es el costo total de las llamadas? — A encontrar

Formar Se traducen las palabras del problema a números y símbolos. Dado que la palabra *por* indica una multiplicación, se puede encontrar el costo de cada llamada multiplicando la duración de la llamada (en minutos) por la tarifa cobrada por minuto (en centavos). Dado que la palabra *total* indica una suma, se sumará para encontrar el costo total de la llamada.

El costo total de las llamadas	es igual al	costo de la llamada a Canadá	más	el costo de la llamada a Panamá	más	el costo de la llamada a Vietnam
El costo total de las llamadas	=	60(2)	+	45(12)	+	30(38)

Resolver Para evaluar esta expresión (la cual involucra multiplicación y suma), se aplica la regla del orden de las operaciones.

$$\begin{aligned} \text{El costo total de las llamadas} &= 60(2) + 45(12) + 30(38) && \text{Las unidades son centavos.} \\ &= 120 + 540 + 1{,}140 && \text{Realice la multiplicación primero.} \\ &= 1{,}800 && \text{Realice la suma.} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 120 \\ 540 \\ +\ 1{,}140 \\ \hline 1{,}800 \end{array}$$

Enunciar El costo total de las llamadas internacionales es de ¢1,800 o $18.00.

Comprobar Se puede comprobar este resultado encontrando un estimado utilizando el redondeo por la izquierda. El costo total de las llamadas es aproximadamente 60(¢2) + 50(¢10) + 30(¢40) = ¢120 + ¢500 + ¢1,200 o ¢1,820. El resultado de ¢1,800 parece razonable.

2 Evaluar expresiones que contienen símbolos de agrupación

Los **símbolos de agrupación** determinan el orden en el que se evaluará una expresión. Son ejemplos de símbolos de agrupación los paréntesis ( ), los corchetes [ ], las llaves { } y la barra de fracción —.

Auto-revisión 5

Evalúe cada expresión:

a. $20 - 7 + 6$

b. $20 - (7 + 6)$

Ahora intente **Problema 33**

EJEMPLO 5

Evalúe cada expresión: **a.** $12 - 3 + 5$ **b.** $12 - (3 + 5)$

Estrategia Para evaluar la expresión en el inciso a, se desarrollará la resta primero. Para evaluar la expresión en el inciso b, se desarrollará la suma primero.

POR QUÉ La expresión parecida en el inciso b, se evalúa en un orden diferente debido a que contiene paréntesis. Cualquier operación dentro de paréntesis debe desarrollarse primero.

Solución

a. La expresión no contiene algún paréntesis ni hay exponentes, ni alguna multiplicación o división. Se desarrollan las sumas y restas a medida que aparecen, de izquierda a derecha.

$$\mathbf{12 - 3} + 5 = \mathbf{9} + 5 \qquad \text{Realice la resta: } 12 - 3 = 9.$$
$$= 14 \qquad \text{Realice la suma.}$$

b. Por la regla del orden de las operaciones, se debe desarrollar primero la operación de los paréntesis.

$$12 - (\mathbf{3 + 5}) = 12 - \mathbf{8} \qquad \text{Realice la suma: } 3 + 5 = 8. \text{ Se lee como "12 menos la cantidad de 3 más 5".}$$
$$= 4 \qquad \text{Realice la resta.}$$

El lenguaje de las matemáticas Cuando se lee la expresión $12 - (3 + 5)$ como "12 menos la *cantidad* de 3 más 5", la palabra *cantidad* alerta al lector de que los paréntesis se están utilizando como símbolos de agrupación.

EJEMPLO 6 Evalúe: $(2 + 6)^3$.

Estrategia Se desarrollará primero la operación dentro de los paréntesis.

POR QUÉ Este es el primer paso de la regla del orden de las operaciones.

Solución

$$(\mathbf{2 + 6})^3 = \mathbf{8}^3 \qquad \text{Se lee como "El cubo de la cantidad de 2 más 6". Realice la suma.}$$
$$= 512 \qquad \text{Evalúe la expresión exponencial: } 8^3 = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 512.$$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 3}\\ 64\\ \times\ 8\\ \hline 512 \end{array}$$

Auto-revisión 6

Evalúe: $(1 + 3)^4$

Ahora intente **Problema 35**

EJEMPLO 7 Evalúe: $5 + 2(13 - 5 \cdot 2)$

Estrategia Se desarrollará primero la multiplicación dentro de los paréntesis.

POR QUÉ Cuando hay más de una operación a desarrollar dentro de paréntesis, se sigue la regla del orden de las operaciones. Se va a desarrollar la multiplicación antes que la resta.

Solución

Se aplica la regla del orden de las operaciones dentro de los paréntesis para evaluar $13 - 5 \cdot 2$.

$$5 + 2(13 - \mathbf{5 \cdot 2}) = 5 + 2(13 - \mathbf{10}) \qquad \text{Realice la multiplicación dentro de los paréntesis.}$$
$$= 5 + 2(3) \qquad \text{Realice la resta dentro de los paréntesis.}$$
$$= 5 + 6 \qquad \text{Realice la multiplicación: } 2(3) = 6.$$
$$= 11 \qquad \text{Realice la suma.}$$

Auto-revisión 7

Evalúe: $50 - 4(12 - 5 \cdot 2)$

Ahora intente **Problema 39**

Algunas expresiones contienen dos o más conjuntos de símbolos de agrupación. Dado que puede ser confuso leer una expresión como $16 + 6(4^2 - 3(5 - 2))$, se utiliza un par de **corchetes** en lugar del segundo par de paréntesis.

$$16 + 6[4^2 - 3(5 - 2)]$$

Si una expresión contiene más de un par de símbolos de agrupación, siempre se comienza dentro del **par más interno** y después se sigue con el **par más externo.**

Paréntesis más interno

$16 + 6[4^2 - 3(5 - 2)]$

Corchetes más externos

El lenguaje de las matemáticas Se indica una multiplicación cuando un número está al lado de un paréntesis o un corchete. Por ejemplo,

$16 + 6[4^2 - 3(5 - 2)]$

Multiplicación Multiplicación

Auto-revisión 8

Evalúe:
$130 - 7[2^2 + 3(6 - 2)]$

Ahora intente **Problema 43**

EJEMPLO 8

Evalúe: $16 + 6[4^2 - 3(5 - 2)]$

Estrategia Se empezará primero con lo que hay dentro de los paréntesis y después con lo que hay dentro de los corchetes. Dentro de cada conjunto de símbolos agrupados, se seguirá la regla del orden de las operaciones.

POR QUÉ Por el orden de las operaciones, se debe empezar del par de símbolos de agrupamiento *más interno* al *más externo.*

Solución

$16 + 6[4^2 - 3(\mathbf{5 - 2})] = 16 + 6[4^2 - 3(\mathbf{3})]$ Realice la resta dentro de los paréntesis.

$= 16 + 6[16 - 3(3)]$ Evalúe la expresión exponencial: $4^2 = 16$.

$= 16 + 6[16 - 9]$ Realice la multiplicación dentro de los corchetes.

$= 16 + 6[7]$ Realice la resta dentro de los corchetes.

$= 16 + 42$ Realice la multiplicación: $6[7] = 42$.

$= 58$ Realice la suma.

¡Cuidado! En el Ejemplo 8, un error común es primero sumar *de manera incorrecta* el 16 al 6 en vez de primero multiplicar *de manera correcta* el 6 y el 7. Este error produce una respuesta incorrecta, 154.

$16 + 6[4^2 - 3(5 - 2)] = 16 + 6[4^2 - 3(3)]$
$= 16 + 6[16 - 3(3)]$
$= 16 + 6[16 - 9]$
$= 16 + 6[7]$
$= 22[7]$
$= 154$

Auto-revisión 9

Evalúe: $\dfrac{3(14) - 6}{2(3^2)}$

Ahora intente **Problema 47**

EJEMPLO 9

Evalúe: $\dfrac{2(13) - 2}{3(2^3)}$.

Estrategia Se evaluarán por separado las expresiones arriba y debajo de la barra de fracción. Después se realizará la división indicada, si es posible.

POR QUÉ Las barras de fracción son símbolos de agrupación. Agrupan el numerador y el denominador. La expresión pudiera escribirse como $[2(13) - 2)] \div [3(2^3)]$.

Solución

$$\frac{2(13) - 2}{3(2^3)} = \frac{26 - 2}{3(8)}$$ En el numerador, realice la multiplicación. En el denominador, evalúe la expresión exponencial dentro del paréntesis.

$$= \frac{24}{24}$$ En el numerador, realice la resta. En el denominador, realice la multiplicación.

$$= 1$$ Realice la división indicada por la barra de fracción: $24 \div 24 = 1$.

3 Encontrar la media (promedio) de un conjunto de valores

La **media** (en ocasiones llamada **media aritmética** o **promedio**) de un conjunto es un valor alrededor del cual se agrupan los valores de los números. Le proporciona una indicación del "centro" del conjunto de números. Para encontrar la media de un conjunto de números, se debe aplicar la regla del orden de las operaciones.

Encontrar la media

Para encontrar la media (promedio) de un conjunto de valores divida la suma de los valores entre el número de valores.

EJEMPLO 10 ***Linieros ofensivos de la NFL*** Abajo se muestran los pesos de los linieros ofensivos titulares de los New York Giants en la temporada 2008-2009. ¿Cuál era su peso medio (promedio)?

© Larry French/Getty Images

Tacle izquierdo #66 D. Diehl 319 lb

Guardia izquierdo #69 R. Seubert 310 lb

Centro #60 S. O'Hara 302 lb

Guardia derecho #76 C. Snee 317 lb

Tacle derecho #67 K. McKenzie 327 lb

(Fuente: nfl.com/New York Giants depth chart)

Estrategia Se sumarán 327, 317, 302, 310 y 319 y se dividirá la suma entre 5.

POR QUÉ Para encontrar la media (promedio) de un conjunto de valores, se divide la suma de los valores entre el número de valores.

Solución

Dado que hay 5 pesos, divida la suma entre 5.

$$\text{Media} = \frac{327 + 317 + 302 + 310 + 319}{5}$$

$$\begin{array}{r} {}^{2} \\ 327 \\ 317 \\ 302 \\ 310 \\ +\ 319 \\ \hline 1{,}575 \end{array}$$

$$= \frac{1{,}575}{5}$$ En el numerador, realice la suma.

$$\begin{array}{r} 315 \\ 5\overline{)1{,}575} \\ -15 \\ \hline 7 \\ -5 \\ \hline 25 \\ -25 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$= 315$$ Realice la división indicada: $1{,}575 \div 5$.

En la temporada 2008-2009, el peso medio (promedio) de los linieros ofensivos titulares de los New York Giants era de 315 libras.

Auto-revisión 10

LINIEROS DEFENSIVOS DE LA NFL

Los pesos de los linieros defensivos titulares de los New York Giants en la temporada 2008-2009 eran de 273 lb, 305 lb, 317 lb y 265 lb. ¿Cuál era su peso medio (promedio)? (Fuente: nfl.com/New York Giants depth chart)

Ahora intente **Problemas 51 y 113**

Utilizando su CALCULADORA Orden de las operaciones y paréntesis

Las calculadoras tienen incorporadas las reglas para el orden de las operaciones. Debe utilizarse una tecla de paréntesis izquierdo [(] y una tecla de paréntesis derecho [)] cuando se necesitan símbolos de agrupación, incluyendo una barra de fracciones. Por ejemplo, para evaluar $\frac{240}{20 - 5}$, deben utilizarse las teclas de paréntesis, como se muestra abajo.

240 [÷] [(] 20 [−] 5 [)] [=] 16

En algunos modelos de calculadora, se presiona la tecla [ENTER] en vez de la tecla [=] para que se muestre el resultado.

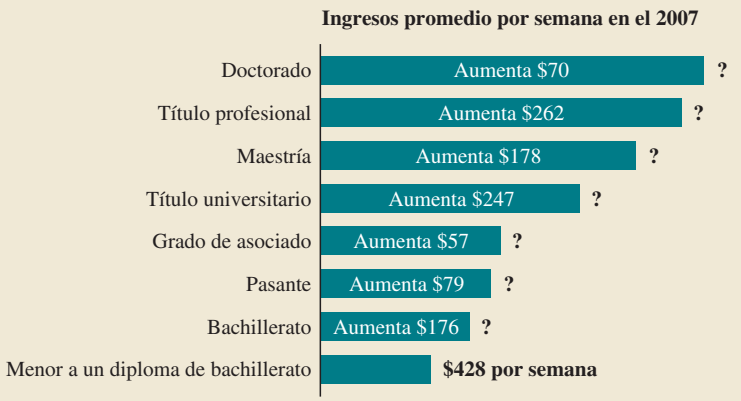
Si no se introdujeran los paréntesis, la calculadora encontrará 240 ÷ 20 y después restará 5 de ese resultado, para producir la respuesta incorrecta, 7.

PIENSE DETENIDAMENTE *La educación reditúa*

"La educación reditúa. Tiene una tasa de retorno alta para los estudiantes de todos los grupos raciales/étnicos, para hombres y para mujeres y para aquellos que provienen de todos los ambientes familiares. También tiene una tasa de retorno alta para la sociedad".

The College Board, Serie Tendencias en la Educación Superior

Acudir a la escuela requiere una inversión de tiempo, esfuerzo y sacrificio. ¿Lo vales? La gráfica de abajo muestra cómo aumentan los ingresos semanales promedio en E.U. a medida que aumenta el nivel de educación. Comience en la parte inferior de la gráfica y trabaje hacia arriba. Use las pistas proporcionadas para determinar cada una de las cantidades de los ingresos semanales promedio.



(Fuente: Bureau of Labor Statistics, Current Population Survey)

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. 102 **2.** 76 **3.** 40 **4.** ¢4,720 = $47.20 **5. a.** 19 **b.** 7 **6.** 256 **7.** 42 **8.** 18 **9.** 2 **10.** 290 lb

SECCIÓN 1.9 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Complete los espacios.

1. Los números se combinan con las operaciones de suma, resta, multiplicación y división para crear _____.
2. El *evaluar* la expresión $2 + 5 \cdot 4$ significa encontrar su _____.
3. A los símbolos de agrupación ( ) se les llama _____, y a los símbolos [ ] se les llama _____.
4. A la expresión sobre una barra de fracción se le llama _____. A la expresión debajo de una barra de fracción se le llama _____.
5. En la expresión $9 + 6[8 + 6(4 - 1)]$, los paréntesis son los símbolos de agrupación más _____ y los corchetes son los símbolos de agrupación más _____.
6. Para encontrar la _____ de un conjunto de valores, se suman los valores y se divide entre el número de valores.

CONCEPTOS

7. Liste las operaciones en el orden en el que deben desarrollarse para evaluar cada expresión. *No tiene que evaluar la expresión.*
   a. $5(2)^2 - 1$
   b. $15 + 90 - (2 \cdot 2)^3$
   c. $7 \cdot 4^2$
   d. $(7 \cdot 4)^2$
8. Liste las operaciones en el orden en el que deben desarrollarse para evaluar cada expresión. *No tiene que evaluar la expresión.*
   a. $50 + 8 - 40$
   b. $50 - 40 + 8$
   c. $16 \cdot 2 \div 4$
   d. $16 \div 4 \cdot 2$
9. Considere la expresión $\dfrac{5 + 5(7)}{(5 \cdot 20 - 8^2) - 28}$. En el numerador, ¿qué operación debe desarrollarse primero? En el denominador, ¿qué operación debe desarrollarse primero?
10. ¿Para encontrar la media (promedio) de 15, 33, 45, 12, 6, 19 y 3, se suman los valores y entre qué número se divide?

NOTACIÓN

11. En la expresión $\dfrac{60 - 5 \cdot 2}{5 \cdot 2 + 40}$, ¿cuál símbolo sirve como símbolo de agrupación? ¿Qué hace este grupo?
12. Utilice corchetes para escribir $2(12 - (5 + 4))$ de una forma más clara.

Complete los espacios.

13. Se lee la expresión $16 - (4 + 9)$ como "16 menos la _____ de 4 más 9".
14. Se lee la expresión $(8 - 3)^3$ como "El cubo de la _____ de 8 menos 3".

Complete cada solución para evaluar la expresión.

15. $7 \cdot 4 - 5(2)^2 = 7 \cdot 4 - 5(\square)$
    $= 28 - \square$
    $= \square$
16. $2 + (5 + 6 \cdot 2) = 2 + (5 + \square)$
    $= 2 + \square$
    $= \square$
17. $[4(2 + 7)] - 4^2 = [4(\square)] - 4^2$
    $= \square - 4^2$
    $= 36 - \square$
    $= \square$
18. $\dfrac{12 + 5 \cdot 3}{3^2 - 2 \cdot 3} = \dfrac{12 + \square}{\square - 6}$
    $= \dfrac{\square}{3}$
    $= \square$

PRÁCTICA GUIADA

Evalúe cada expresión. Vea el Ejemplo 1.

19. $3 \cdot 5^2 - 28$
20. $4 \cdot 2^2 - 11$
21. $6 \cdot 3^2 - 41$
22. $5 \cdot 4^2 - 32$

Evalúe cada expresión. Vea el Ejemplo 2.

23. $52 - 6 \cdot 3 + 4$
24. $66 - 8 \cdot 7 + 16$
25. $32 - 9 \cdot 3 + 31$
26. $62 - 5 \cdot 8 + 27$

Evalúe cada expresión. Vea el Ejemplo 3.

27. $192 \div 4 - 4(2)3$
28. $455 \div 7 - 3(4)5$
29. $252 \div 3 - 6(2)6$
30. $264 \div 4 - 7(4)2$

Evalúe cada expresión. Vea el Ejemplo 5.

31. **a.** $26 - 2 + 9$
b. $26 - (2 + 9)$
32. **a.** $37 - 4 + 11$
b. $37 - (4 + 11)$
33. **a.** $51 - 16 + 8$
b. $51 - (16 + 8)$
34. **a.** $73 - 35 + 9$
b. $73 - (35 + 9)$

Evalúe cada expresión. Vea el Ejemplo 6.

35. $(4 + 6)^2$ **36.** $(3 + 4)^2$

37. $(3 + 5)^3$ **38.** $(5 + 2)^3$

Evalúe cada expresión. Vea el Ejemplo 7.

39. $8 + 4(29 - 5 \cdot 3)$ **40.** $33 + 6(56 - 9 \cdot 6)$

41. $77 + 9(38 - 4 \cdot 6)$ **42.** $162 + 7(47 - 6 \cdot 7)$

Evalúe cada expresión. Vea el Ejemplo 8.

43. $46 + 3[5^2 - 4(9 - 5)]$

44. $53 + 5[6^2 - 5(8 - 1)]$

45. $81 + 9[7^2 - 7(11 - 4)]$

46. $81 + 3[8^2 - 7(13 - 5)]$

Evalúe cada expresión. Vea el Ejemplo 9.

47. $\dfrac{2(50) - 4}{2(4^2)}$ **48.** $\dfrac{4(34) - 1}{5(3^2)}$

49. $\dfrac{25(8) - 8}{6(2^3)}$ **50.** $\dfrac{6(31) - 26}{4(2^3)}$

Encuentre la media (promedio) de cada lista de números. Vea el Ejemplo 10.

51. 6, 9, 4, 3, 8 **52.** 7, 1, 8, 2, 2

53. 3, 5, 9, 1, 7, 5 **54.** 8, 7, 7, 2, 4, 8

55. 19, 15, 17, 13 **56.** 11, 14, 12, 11

57. 5, 8, 7, 0, 3, 1 **58.** 9, 3, 4, 11, 14, 1

INTÉNTELO

Evalúe cada expresión.

59. $(8 - 6)^2 + (4 - 3)^2$ **60.** $(2 + 1)^2 + (3 + 2)^2$

61. $2 \cdot 3^4$ **62.** $3^3 \cdot 5$

63. $7 + 4 \cdot 5$ **64.** $10 - 2 \cdot 2$

65. $(7 - 4)^2 + 1$ **66.** $(9 - 5)^3 + 8$

67. $\dfrac{10 + 5}{52 - 47}$ **68.** $\dfrac{18 + 12}{61 - 55}$

69. $5 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 9$

70. $8 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 4$

71. $20 - 10 + 5$ **72.** $80 - 5 + 4$

73. $25 \div 5 \cdot 5$ **74.** $6 \div 2 \cdot 3$

75. $150 - 2(2 \cdot 6 - 4)^2$ **76.** $760 - 2(2 \cdot 3 - 4)^2$

77. $190 - 2[10^2 - (5 + 2^2)] + 45$

78. $161 - 8[6(6) - 6^2] + 2^2(5)$

79. $2 + 3(0)$ **80.** $5(0) + 8$

81. $\dfrac{(5 - 3)^2 + 2}{4^2 - (8 + 2)}$ **82.** $\dfrac{(4^3 - 2) + 7}{5(2 + 4) - 7}$

83. $4^2 + 3^2$ **84.** $12^2 + 5^2$

85. $3 + 2 \cdot 3^4 \cdot 5$ **86.** $3 \cdot 2^3 \cdot 4 - 12$

87. $60 - \left(6 + \dfrac{40}{2^3}\right)$ **88.** $7 + \left(5^3 - \dfrac{200}{2}\right)$

89. $\dfrac{(3 + 5)^2 + 2}{2(8 - 5)}$ **90.** $\dfrac{25 - (2 \cdot 3 - 1)}{2 \cdot 9 - 8}$

91. $(18 - 12)^3 - 5^2$ **92.** $(9 - 2)^2 - 3^3$

93. $30(1)^2 - 4(2) + 12$

94. $5(1)^3 + (1)^2 + 2(1) - 6$

95. $16^2 - \dfrac{25}{5} + 6(3)4$ **96.** $15^2 - \dfrac{24}{6} + 8(2)(3)$

97. $\dfrac{3^2 - 2^2}{(3 - 2)^2}$ **98.** $\dfrac{5^2 + 17}{6 - 2^2}$

99. $3\left(\dfrac{18}{3}\right) - 2(2)$ **100.** $2\left(\dfrac{12}{3}\right) + 3(5)$

101. $4[50 - (3^3 - 5^2)]$ **102.** $6[15 + (5 \cdot 2^2)]$

103. $80 - 2[12 - (5 + 4)]$

104. $15 + 5[12 - (2^2 + 4)]$

APLICACIONES

Escriba una expresión para resolver cada problema y evaluarlo.

105. COMPRAS En un supermercado, Carlos está comprando 3 cajas de refresco, 4 bolsas de chips de tortilla y 2 botellas de salsa. Cada caja de refresco cuesta \$7, cada bolsa de chips cuesta \$4 y cada botella de salsa cuesta \$3. Encuentre el costo total de los refrigerios.

106. BANCA Cuando un cliente deposita efectivo, un cajero debe completar una cuenta monetaria en la parte trasera del recibo de depósito. En la ilustración, un cajero ha escrito el número de cada tipo de billete depositado. ¿Cuál es la cantidad total de efectivo que se está depositando?

Cuenta monetaria, sólo para uso financiero			
24	× 1'		
—	× 2'		
6	× 5'		
10	× 10'		
12	× 20'		
2	× 50'		
1	× 100'		
	TOTAL \$		

107. CLAVADOS A continuación se muestran las calificaciones otorgadas a un clavadista por siete jueces al igual que el grado de dificultad de su clavado. Use el siguiente proceso de dos pasos para calcular la calificación total del clavadista.

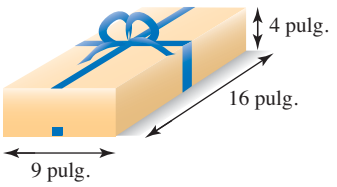
Paso 1 Deseche la calificación más baja y la calificación más alta.

Paso 2 Sume las calificaciones restantes y multiplique por el grado de dificultad.

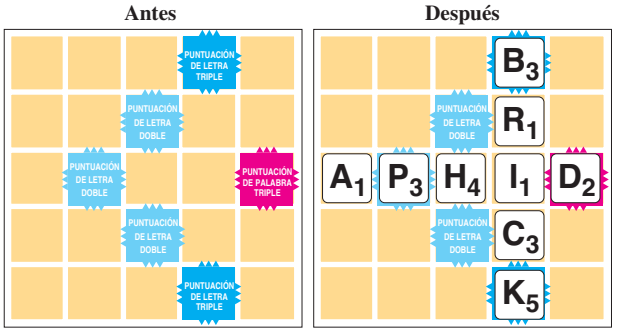
Juez	1	2	3	4	5	6	7
Calificación	9	8	7	8	6	8	7

Grado de dificultad: 3

108. ENVOLTURA DE REGALOS ¿Cuánto listón se necesita para envolver el paquete mostrado si se necesitan 15 pulgadas de listón para formar el moño?



109. SCRABBLE La ilustración a) muestra parte del tablero de juego y la ilustración b) lo muestra después que se agregaron las palabras en inglés *brick* y *aphid*. Determine la puntuación para cada palabra. (*Sugerencia:* El número en cada casilla da el valor de puntos de la letra.)



a) b)

110. LA BATALLA DE GETTYSBURG Aquí hay un extracto del discurso de Gettysburg de Abraham Lincoln:

> Hace ocho décadas y siete años, nuestros padres hicieron nacer en este continente una nueva nación concebida en la libertad y consagrada al principio de que todas las personas son creadas iguales.

Los comentarios de Lincoln se refieren al año 1776, cuando las Trece Colonias declararon su independencia. Si una veintena son 20 años, ¿en qué año dio Lincoln el discurso de Gettysburg?

111. NÚMEROS PRIMOS Muestre que el 87 es la suma de los cuadrados de los primeros cuatro números primos.

112. SUMA-PRODUCTO DE NÚMEROS

a. Evalúe la expresión de abajo, la cual es la suma de los dígitos del 135 por el producto de los dígitos de 135.

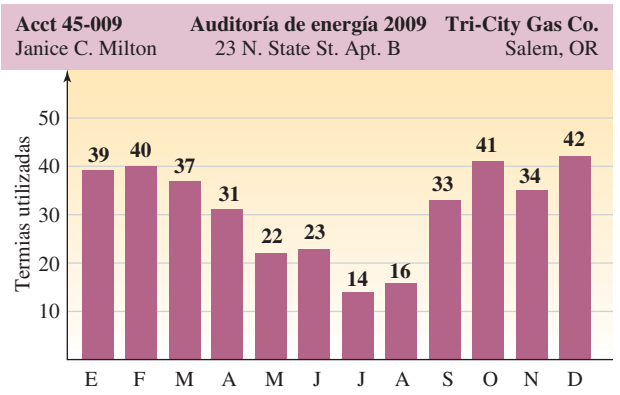
$$(1 + 3 + 5)(1 \cdot 3 \cdot 5)$$

b. Escriba una expresión que represente la suma de los dígitos de 144 por el producto de los dígitos de 144. Después evalúe la expresión.

113. CLIMA Una semana de diciembre, las temperaturas altas en Honolulu, Hawai, fueron de 75°, 80°, 83°, 80°, 77°, 72° y 86°. Encuentre la temperatura alta media (promedio) de la semana.

114. CALIFICACIONES En una clase de ciencias, un estudiante tuvo calificaciones de exámenes 94, 85, 81, 77 y 89. También no despertó a tiempo, faltó al examen final y recibió un 0 en este. ¿Cuál fue su calificación de exámenes promedio (media) en la clase?

115. USO DE ENERGÍA Vea la gráfica de abajo. Encuentre el número medio (promedio) de termias de gas natural utilizadas por mes para el año 2009.



116. NÚMEROS CARDINALES ¿Cuál es el promedio (media) de los primeros nueve números cardinales: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9?

117. COMIDAS RÁPIDAS La tabla de la siguiente página muestra los anuncios de los sándwiches Subway en su menú de 6 gramos de grasa o

menos. ¿Cuál es el número medio (promedio) de calorías para el grupo de sándwiches?

Sándwiches de 6 pulgadas	Calorías
Delicia vegetariana	230
Pechuga de pavo	280
Pechuga de pavo & jamón	295
Jamón	290
Carne asada	290
Club Subway	330
Pechuga de pollo asada	310
Teriyaki de pollo	375

(Fuente: Subway.com/NutritionInfo)

118. RATINGS DE TV La tabla de abajo muestra el número de televidentes* de la Serie mundial de las MLB del 2008 entre los Philadelphia Phillies y los Tampa Bay Rays. ¿Qué tan grande fue la audiencia promedio (media)?

Juego 1	Miércoles, Oct. 22	14,600,000
Juego 2	Jueves, Oct. 23	12,800,000
Juego 3	Sábado, Oct. 25	9,900,000
Juego 4	Domingo, Oct. 26	15,500,000
Juego 5 (suspendido en la 6a entrada por lluvia)	Lunes, Oct. 27	13,200,000
Juego 5 (conclusión del juego 5)	Miércoles, Oct. 29	19,800,000

* Redondeado a la centena de millar más cercana
(Fuente: The Nielsen Company)

AP Images

119. YOUTUBE Un concurso de video en YouTube es parte del lanzamiento de una nueva bebida deportiva. En la siguiente columna se muestran los premios en efectivo a entregarse.

a. ¿Cuántos premios se entregarán?

b. ¿Cuál es la cantidad total de dinero que se entregará?

c. ¿Cuál es el premio en efectivo promedio (medio)?

Concurso de video en YouTube
Gran premio: Vacaciones en Disney World más $2,500
Cuatro 1os lugares de $500
Treinta y cinco 2os lugares de $150
Ochenta y cinco 3os lugares de $25

120. ENCUESTAS Se le pidió a algunos estudiantes que calificaran la comida de su cafetería en su universidad en una escala de 1 a 5. Las respuestas se muestran abajo en la hoja de recuento.

a. ¿Cuántos estudiantes tomaron la encuesta?

b. Encuentre la calificación media (promedio).

Pobre		Aceptable		Excelente
1	2	3	4	5
IIII	I	~~IIII~~	I	IIII

REDACCIÓN

121. Explique por qué la regla del orden de las operaciones es necesaria.

122. ¿A qué se refiere cuando se dice que se realicen todas las sumas y restas *a medida que aparecen de izquierda a derecha*? Dé un ejemplo.

123. Explique el error en la siguiente solución:

Evalúe:

$$\begin{aligned} 8 + 2[6 - 3(9 - 8)] &= 8 + 2[6 - 3(1)] \\ &= 8 + 2[6 - 3] \\ &= 8 + 2(3) \\ &= 10(3) \\ &= 30 \end{aligned}$$

124. Explique el error en la siguiente solución:

Evalúe:

$$\begin{aligned} 24 - 4 + 16 &= 24 - 20 \\ &= 4 \end{aligned}$$

REPASO

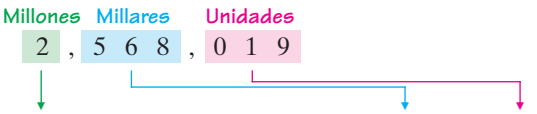
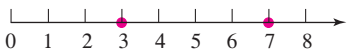
Escriba cada número en palabras.

125. 254,309

126. 504,052,040

CAPÍTULO 1 RESUMEN Y REPASO

SECCIÓN 1.1 Introducción a los números naturales

DEFINICIONES Y CONCEPTOS	EJEMPLOS
El conjunto de **números naturales** es {0, 1, 2, 3, 4, 5…}. Cuando se escribe un número natural utilizando los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, se dice que está en **forma estándar.**	Algunos ejemplos de números naturales escritos en la forma estándar son: 2, 16, 530, 7,894 y 3,201,954
La posición de un dígito en un número natural determina su **valor posicional.** Una **tabla de valores posicionales** muestra el valor posicional de cada dígito en un número. Para hacer que los números naturales grandes sean más sencillos de leer, se utilizan comas para separar sus dígitos en grupos de tres, llamados **periodos.**	 El valor posicional del dígito 7 es 7 decenas de millones. El dígito 4 indica el número de millares.
Para **escribir un número natural en palabras,** comience desde la izquierda. Escriba el número en cada periodo seguido por el nombre del periodo (excepto para el *periodo de las unidades,* el cual no se utiliza). Use comas para separar los periodos. **Para leer un número natural en voz alta,** siga el mismo procedimiento. Las comas se leen como pausas cortas.	 Dos **millones,** quinientos sesenta y ocho **mil,** diecinueve
Para cambiar de la **forma de palabra escrita de un número a la forma estándar,** busque las comas. Las comas se utilizan para separar los periodos.	Seis mil , cuarenta y un millones , doscientos ocho mil , treinta y seis 6,041,208,036
Escribir un número en **forma expandida (notación expandida)** significa escribirlo como una suma de los valores posicionales de cada uno de sus dígitos.	La forma expandida del 32,159 es: 30,000 + 2,000 + 100 + 50 + 9
Los números naturales pueden mostrarse dibujando puntos en una **recta numérica.**	Abajo se muestran en la recta numérica las gráficas del 3 y el 7. 
Los **símbolos de desigualdad** se emplean para comparar números naturales: $>$ significa *es mayor que* $<$ significa *es menor que*	$9 > 8$ y $2{,}343 > 762$ $1 < 2$ y $9{,}000 < 12{,}453$

Cuando no se necesitan resultados exactos, con frecuencia se **redondean** los números.

Redondear un número natural

1. Para redondear un número a un cierto valor posicional, localice el **dígito a redondear** en esa posición.
2. Busque el **dígito a examinar,** el cual está directamente a la derecha del dígito a redondear.
3. Si el dígito a examinar es 5 o mayor, redondee a la alta sumando 1 al dígito a redondear y reemplazando todos los dígitos a su derecha con 0.

Si el dígito a examinar es menor que 5, reemplace este y todos los dígitos a su derecha con 0.

Redondee el 9,842 a la decena más cercana.

Dígito a redondear: columna de las decenas

9,842

Dígito a examinar: Dado que el 2 es menor que 5, deje el dígito a redondear sin cambiar y reemplace el dígito a examinar con 0.

Por tanto, el 9,842 redondeado a la decena más cercana es el 9,840.

Redondee el 63,179 a la centena más cercana.

Dígito a redondear: columna de las centenas

63,179

Dígito a examinar: Dado que el 7 es 5 o mayor, sume 1 al dígito a redondear y reemplace todos los dígitos a su derecha con 0.

Por tanto, el 61,179 redondeado a la centena más cercana es el 63,200.

Los números naturales se utilizan con frecuencia en **tablas, gráficas de barras** y **gráficas de líneas.**

Vea la página 9 para un ejemplo de una tabla, de una gráfica de barras y de una gráfica de rectas.

EJERCICIOS DE REPASO

Considere el número 41,948,365,720.

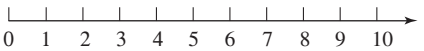
1. ¿Cuál dígito está en la columna de las decenas de millares?
2. ¿Cuál dígito está en la columna de las centenas?
3. ¿Cuál es el valor posicional del dígito 1?
4. ¿Cuál dígito indica el número de millones?
5. Escriba cada número en palabras.
   - **a.** 97,283
   - **b.** 5,444,060,017
6. Escriba cada número en forma estándar.
   - **a.** Tres mil, doscientos siete
   - **b.** Veintitrés millones, doscientos cincuenta y tres mil, cuatrocientos doce

Escriba cada número en forma expandida.

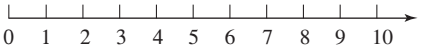
7. 570,302
8. 37,309,154

Grafique cada uno de los siguientes números en una recta numérica.

9. 0, 2, 8, 10



10. los números naturales entre el 3 y el 7.



Coloque un símbolo < o > en el recuadro para formar un enunciado verdadero.

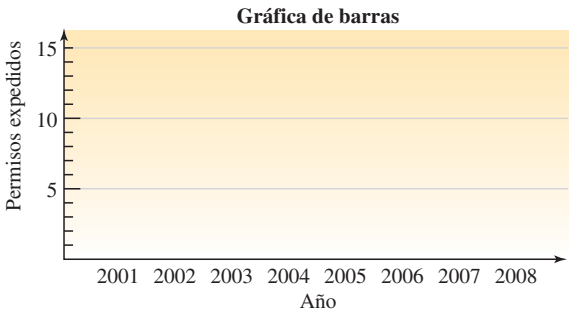
11. 9 ☐ 7

12. 301 ☐ 310

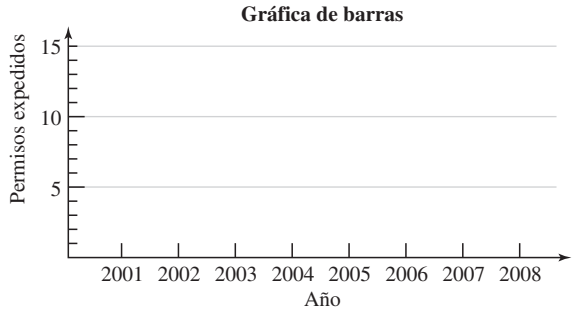
13. Redondee el 2,507,348
    - **a.** a la centena más cercana
    - **b.** a la decena de millar más cercana
    - **c.** a la decena más cercana
    - **d.** al millón más cercano
14. Redondee el 969,501
    - **a.** al millar más cercano
    - **b.** a la centena de millar más cercana
15. CONSTRUCCIÓN La siguiente tabla lista el número de permisos de construcción expedidos en la ciudad de Springsville para el periodo 2001-2008.

Año	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Permisos de construcción	12	13	10	7	9	14	6	5

   - **a.** Construya una gráfica de barras de la información.



b. Construya una gráfica de rectas de la información.



16. GEOGRAFÍA Abajo se listan los nombres y las longitudes de los cinco ríos más largos en el mundo. Escríbalos en orden, comenzando con el más largo.

Amazonas (América del Sur)	4,049 mi
Mississippi-Missouri (Estados Unidos)	3,709 mi
Nilo (África)	4,160 mi
Ob-Irtysh (Rusia)	3,459 mi
Yangtsé (China)	3,964 mi

(Fuente: geography.about.com)

SECCIÓN 1.2 Suma de números naturales

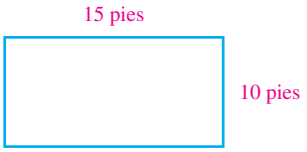
DEFINICIONES Y CONCEPTOS	EJEMPLOS
Para **sumar números naturales,** piense en la combinación de conjuntos de objetos similares. **Forma vertical:** Apile los sumandos. Sume los dígitos en la columna de las unidades, la columna de las decenas, la columna de las centenas, etc. **Acarree** cuando sea necesario.	Sume: 10,892 + 5,467 + 499 Acarreo 1 2 1 10,892 ← Sumando 5,467 ← Sumando + 499 ← Sumando 16,858 ← Suma Para comprobar, sume de abajo hacia arriba
Propiedad conmutativa de la suma: El orden en el que se suman los números no cambia su suma. **Propiedad asociativa de la suma:** La manera en la que se agrupan los números naturales no cambia su suma.	$6 + 5 = 5 + 6$ Por la propiedad conmutativa, la suma es la misma. $(17 + 5) + 25 = 17 + (5 + 25)$ Por la propiedad asociativa, la suma es la misma.
Para estimar una suma, use el **redondeo por la izquierda** para aproximar los sumandos. Después sume.	Estime la suma: 7,219 → 7,000 Redondee al millar más cercano. 592 → 600 Redondee a la centena más cercana. +3,425 → +3,000 Redondee al millar más cercano 10,600 El estimado es el 10,600.
Para resolver problemas de aplicación, con frecuencia se deben *traducir* las **palabras y frases clave** del problema a números y símbolos. Algunas **palabras** y **frases clave** que se utilizan con frecuencia para indicar una suma son: *ganancia, elevar, en total, incremento, más que, en el futuro, arriba, total, extra, hacia adelante, combinado, junto*	Traduzca las palabras a números y símbolos: VACACIONES Hubo 4,279,439 visitantes en el Parque nacional del Gran Cañón en el 2006. Al siguiente año, la concurrencia incrementó en 134,229. ¿Cuántas personas visitaron el parque en el 2007? La frase *incrementó en* indica una suma: El número de visitantes en el parque en el 2007 = 4,279,439 + 134,229

A la distancia alrededor de un rectángulo o de un cuadrado se le llama **perímetro.**

Perímetro de un rectángulo = largo + largo + ancho + ancho

Perímetro de un cuadrado = lado + lado + lado + lado

Encuentre el perímetro del rectángulo mostrado abajo.



Perímetro = 15 + 15 + 10 + 10 Sume los dos largos y los dos anchos.

= 50

El perímetro del rectángulo es de 50 pies.

EJERCICIOS DE REPASO

Sume.

17. 27 + 436

18. (9 + 3) + 6

19. 4 + (36 + 19)

20.
$$\begin{array}{r} 236 \\ +782 \\ \hline \end{array}$$

21.
$$\begin{array}{r} 5{,}345 \\ +\ 655 \\ \hline \end{array}$$

22. 2 + 1 + 38 + 3 + 6

23. 4,447 + 7,478 + 676

24.
$$\begin{array}{r} 32{,}812 \\ 65{,}034 \\ +54{,}323 \\ \hline \end{array}$$

25. Sume de abajo hacia arriba para comprobar la suma. ¿Es correcta?

$$\begin{array}{r} 1{,}291 \\ 859 \\ 345 \\ +\ 226 \\ \hline 1{,}821 \end{array}$$

26. ¿Cuál es la suma del tres mil setecientos seis y del diez mil novecientos cincuenta y cinco?

27. Use el redondeo por la izquierda para estimar la suma.

615 + 789 + 14,802 + 39,902 + 8,098

28. **a.** Use la propiedad conmutativa de la suma para completar lo siguiente:

24 + 61 = ____

b. Use la propiedad asociativa de la suma para completar lo siguiente:

9 + (91 + 29) = ____

29. AEROPUERTOS Abajo se listan los tres aeropuertos más ocupados en Estados Unidos. Encuentre el número total de pasajeros que pasan a través de estos aeropuertos.

Aeropuerto	Total de pasajeros
Hartsfield-Jackson Atlanta	89,379,287
Chicago O'Hare	76,177,855
Internacional de Los Ángeles	61,896,075

Fuente: Airports Council International–North America

30. ¿Cuánto más es 451,755 que 327,891?

31. GASTOS DE CAMPAÑA En la elección presidencial de E.U. del 2004, los candidatos gastaron $717,900,000. En la elección presidencial del 2008, los gastos se incrementaron en $606,800,000 más que en el 2004. ¿Cuánto fue gastado por los candidatos en la elección presidencial del 2008? (Fuente: Centro de Política Responsiva.)

32. Encuentre el perímetro del rectángulo mostrado abajo.

SECCIÓN 1.3 Resta de números naturales

DEFINICIONES Y CONCEPTOS	EJEMPLOS
Para **restar números naturales,** piense en remover objetos de un conjunto. **Forma vertical:** Apile los números. Reste los dígitos en la columna de las unidades, la columna de las decenas, la columna de las centenas, etcétera. Realice. **acarreo negativo** cuando sea necesario. Para **comprobar:** Diferencia + sustraendo = minuendo	Reste: 4,957 − 869 Acarreo negativo 14 8 4 17 4,9 5 7 ← Minuendo − 8 6 9 ← Sustraendo 4,0 8 8 ← Diferencia ***Compruebe utilizando una suma:*** 1 1 4,088 + 869 4,957
Tenga cuidado al traducir la instrucción para restar un número **de** otro número. El orden de los números en la oración debe invertirse cuando se traduce a símbolos.	Traduzca las palabras a números y símbolos: Reste 41 de 97. — Dado que el 41 es el número a restar, es el sustraendo. 97 − 41
Toda resta tiene un **enunciado de suma relacionado.**	10 − **3** = **7** debido a que **7** + **3** = 10
Para estimar una diferencia, use el **redondeo por la izquierda** para aproximar el minuendo y el sustraendo. Después reste.	Estime la diferencia: 59,033 → 60,000 — Redondee a la decena de millar más cercana − 4,124 → − 4,000 — Redondee al millar más cercano 56,000 El estimado es 56,000.
Algunas de las **palabras** y **frases clave** que se utilizan con frecuencia para indicar una resta son: *pérdida, decremento, abajo, hacia atrás, cae, menor que, menos, reduce, remueve, débito, en el pasado, permanece, declinó, tomar* Para responder las preguntas acerca de *cuánto más* o *cuántos más,* se utiliza una resta.	PESOS DE AUTOMÓVILES Una Suburban Chevy pesa 5,607 libras y un Smart Car pesa 1,852 libras. ¿Por cuánto es más pesada la Suburban? La frase *por cuánto es más pesada* indica una resta: 5,607 — Peso de la Suburban −1,852 — Peso del Smart Car 3,755 La Suburban pesa 3,755 libras más que el Smart Car.
Para **evaluar** (encontrar el valor de) expresiones que involucran suma y resta escritas en la **forma horizontal,** las operaciones se desarrollan a medida que aparecen *de izquierda a derecha.*	Evalúe: 75 − 23 + 9 **75 − 23** + 9 = **52** + 9 — Empezando de izquierda a derecha, realice la resta primero. = 61 — Ahora realice la suma.

EJERCICIOS DE REPASO

Reste.

33. 148 − 87

34. $\begin{array}{r} 343 \\ -269 \\ \hline \end{array}$

35. Reste 10,218 de 10,435.

36. 5,231 − 5,177

37. 750 − 259 + 14

38. $\begin{array}{r} 7{,}800 \\ -5{,}725 \\ \hline \end{array}$

39. Compruebe la resta utilizando una suma.

$$\begin{array}{r} 8{,}017 \\ -6{,}949 \\ \hline 1{,}168 \end{array}$$

40. Complete el espacio: 20 − 8 = 12 debido a que _____.

41. Estime la diferencia: 181,232 − 44,810

42. TERRITORIO Use la información en la tabla para determinar cuánto más grande es el territorio de Rusia en comparación con el de Canadá.

País	Territorio (millas cuadradas)
Rusia	6,592,115
Canadá	3,551,023

(Fuente: *The World Almanac, 2009*)

43. BANCA Una cuenta de ahorros contiene $12,975. Su dueño realiza un retiro de $3,800 y después deposita $4,270, ¿cuál es el nuevo saldo de la cuenta?

44. DÍAS SOLEADOS En Estados Unidos, la ciudad de Yuma, Arizona, por lo regular tiene la mayor cantidad de días soleados al año: alrededor de 242. La ciudad de Búfalo, Nueva York, por lo regular tiene 188 días menos que eso. ¿Cuántos días soleados al año tiene Búfalo?

SECCIÓN 1.4 Multiplicación de números naturales

DEFINICIONES Y CONCEPTOS	EJEMPLOS
La **multiplicación de números naturales** es una suma repetitiva pero con una notación diferente.	Suma repetitiva: La suma de cuatro 6 = Multiplicación $6 + 6 + 6 + 6 = 4 \times 6 = 24$
Para escribir una multiplicación, se utiliza un símbolo de por $\times$, un punto $\cdot$, y paréntesis ( ).	4×6 $4 \cdot 6$ $4(6)$ ó $(4)(6)$ o $(4)6$
Forma vertical: Apile los factores. Si el factor inferior tiene más de un dígito, multiplique en escalones para encontrar los productos parciales. Después súmelos para encontrar el producto.	Multiplique: $24 \cdot 163$ 163 ← Factor × 24 ← Factor 652 ← Producto parcial $4 \cdot 163$ 3260 ← Producto parcial $20 \cdot 163$ 3,912 ← Producto
Para encontrar el **producto de un número natural y 10, 100, 1,000, etc.,** añada el número de ceros en ese número a la derecha del número natural. Esta regla puede extenderse para multiplicar dos números naturales cualesquiera que terminen en ceros.	Multiplique: $8 \cdot 1{,}000 = 8{,}000$ Dado que el 1,000 tiene tres ceros, añada tres 0 después del 8. $43(10{,}000) = 430{,}000$ Dado que el 10,000 tiene cuatro ceros, añada cuatro 0 después del 43. $160 \cdot 20{,}000 = 3{,}200{,}000$ El 160 y el 20,000 tienen un total de cinco ceros finales. Añada cinco 0 después del 32. Multiplique el 16 y el 2 para obtener 32.

Propiedades de la multiplicación del 0 y el 1

El producto de cualquier número natural y el 0 es 0.

El producto de cualquier número natural y el 1 es ese número natural.

$0 \cdot 9 = 0$ y $3(0) = 0$

$15 \cdot 1 = 15$ y $1(6) = 6$

Propiedad conmutativa de la multiplicación: El orden en el que se multiplican los números naturales no cambia su producto.

Propiedad asociativa de la multiplicación: La manera en la que se agrupan los números naturales no cambia su producto.

$5 \cdot 9 = 9 \cdot 5$

Por la propiedad conmutativa, el producto es el mismo.

$(3 \cdot 7) \cdot 10 = 3 \cdot (7 \cdot 10)$

Por la propiedad asociativa, el producto es el mismo.

Para **estimar** un producto, use el **redondeo por la izquierda** para aproximar los factores. Después multiplique.

Para estimar el producto para $74 \cdot 873$, encuentre $70 \cdot 900$.

Redondee a la decena más cercana

$74 \cdot 873$ $70 \cdot 900$

Redondee a la centena más cercana

Los problemas de aplicación que involucran una **suma repetitiva** son con frecuencia más sencillos de resolver utilizando una multiplicación.

ATENCIÓN MÉDICA El consultorio de un médico está abierto 210 días al año. Cada día el médico ve 25 pacientes. ¿Cuántos pacientes ve el médico en 1 año?

La **suma repetitiva** puede calcularse por medio de una multiplicación:

El número de pacientes vistos cada año $= 25 \cdot 210$

Se puede utilizar la multiplicación para contar objetos arreglados en patrones rectangulares de renglones y columnas ordenados con esmero llamados **arreglos rectangulares.**

Algunas **palabras** y **frases clave** que se utilizan con frecuencia para indicar una multiplicación son:

duplicar *triple* *doble* *de* *veces*

SALONES DE CLASE Un salón de clases grande tiene 16 filas de pupitres y hay 12 pupitres en cada fila. ¿Cuántos pupitres hay en el salón de clases?

El **arreglo rectangular** de pupitres indica una multiplicación:

El número de pupitres en el salón de clases $= 16 \cdot 12$

El **área de un rectángulo** es la medida de la cantidad de región que delimita. El área se mide en unidades cuadradas, como pulgadas cuadradas (escritas como pulg.^{2}) o centímetros cuadrados (cm^2).

Área de un rectángulo $=$ largo $\cdot$ ancho

o

$A = la$

A las letras (o símbolos) empleadas para representar números se les llama **variables**.

Encuentre el área del rectángulo mostrado abajo.

$A = la$

$= 25 \cdot 4$ Reemplace l con 25 y a con 4.

$= 100$ Multiplique.

El área del rectángulo es de 100 pulgadas cuadradas, lo cual puede escribirse en forma más compacta como 100 pulg.^{2}.

EJERCICIOS DE REPASO

Multiplique.

45. 47×9

46. $5 \cdot (7 \cdot 6)$

47. $72 \cdot 10{,}000$

48. $110(400)$

49. $157 \cdot 59$

50.
$$\begin{array}{r} 3{,}723 \\ \times\ 46 \\ \hline \end{array}$$

51.
$$\begin{array}{r} 5{,}624 \\ \times\ 281 \\ \hline \end{array}$$

52. $502 \cdot 459$

53. Estime el producto: $6{,}891 \cdot 438$

54. Escriba la suma repetitiva $7 + 7 + 7 + 7 + 7$ como una multiplicación.

55. Encuentre cada producto:

a. $8 \cdot 0$ **b.** $7 \cdot 1$

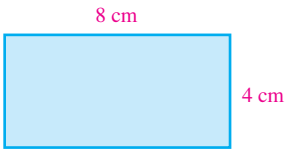
56. ¿Qué propiedad de la multiplicación se muestra?

a. $2 \cdot (5 \cdot 7) = (2 \cdot 5) \cdot 7$

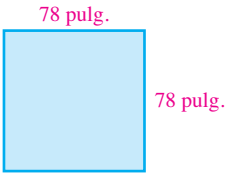
b. $100(50) = 50(100)$

Encuentre el área del rectángulo y del cuadrado.

57.



58.



59. SUEÑO La National Sleep Foundation de Estados Unidos recomienda que los adultos duerman de 7 a 9 horas por noche.

a. ¿Cuántas horas de sueño hay en un año utilizando el número más pequeño? (Use un año de 365 días.)

b. ¿Cuántas horas de sueño hay en un año utilizando el número más grande?

60. GRADUACIÓN Para una ceremonia de graduación, los graduados se acomodan en una formación rectangular de 22 filas y 15 columnas. ¿Cuántos miembros hay en la clase que se gradúa?

61. PAGO DE NÓMINA Sarah trabajó 12 horas a $9 por hora y Santiago trabajó 14 horas a $8 por hora. ¿Quién ganó más dinero?

62. COMPRAS Hay 12 huevos en una docena y 12 docenas en una gruesa. ¿Cuántos huevos hay en un envío de 100 gruesas?

SECCIÓN 1.5 División de números naturales

DEFINICIONES Y CONCEPTOS	EJEMPLO
Para **dividir números naturales,** piense en separar una cantidad en dos grupos de igual tamaño. Para escribir una división se utiliza un símbolo de división $\div$, un símbolo de división larga $\overline{)}$, o una barra de fracción $-$.	Dividendo, Divisor, Cociente: $8 \div 2 = 4$ $2\overline{)8}$ (4) $\frac{8}{2} = 4$
Otra manera de responder un problema de división es pensar en términos de una multiplicación y escribir un **enunciado de multiplicación relacionado.**	$8 \div \mathbf{2} = \mathbf{4}$ debido a que $\mathbf{4} \cdot \mathbf{2} \div 8$
Puede utilizarse un proceso llamado **división larga** para dividir números naturales. Sigue un proceso de cuatro pasos: • Estimar • Multiplicar • Restar • Descender	Dividir: $8{,}317 \div 23$ Cociente: 361 R 14 Divisor: 23 | Dividendo: 8,317 -69 141 -138 37 -23 14 (Residuo)

Para **comprobar** el resultado de una división, se multiplica el divisor entre el cociente y se suma el residuo. El resultado debe ser el dividendo.

Para la división mostrada en la página anterior, el resultado es correcto.

Cociente · divisor + residuo

$(361 \cdot 23) + 14 = 8{,}303 + 14$

$= 8{,}317$ ← Dividendo

Propiedades de la división

Cualquier número natural dividido entre el 1 es igual a ese número.

Cualquier número natural diferente de cero dividido entre sí mismo es igual a 1.

$\frac{4}{1} = 4$ y $\frac{58}{1} = 58$

$\frac{9}{9} = 1$ y $\frac{103}{103} = 1$

División con cero

El cero dividido entre cualquier número diferente de cero es igual a 0.

La división entre 0 no está definida.

$\frac{0}{7} = 0$ y $\frac{0}{23} = 0$

$\frac{7}{0}$ no está definida y $\frac{2{,}190}{0}$ no está definida

Existen **pruebas para la divisibilidad** que ayudan a decidir si un número es divisible entre otro. Se listan en la página 61.

¿Es el 21,507 divisible entre el 3?

El 21,507 es divisible entre el 3, debido a que la suma de sus dígitos es divisible entre 3.

$2 + 1 + 5 + 0 + 7 = 15$ y $15 \div 3 = 5$

Existe un atajo para **dividir un dividendo entre un divisor cuando ambos terminan con ceros.** Simplemente *se eliminan los ceros finales en el divisor y se elimina el mismo número de ceros finales en el dividendo.*

Divida:

$64{,}000 \div 1{,}600 = 640 \div 16$

Elimine dos ceros del dividendo y del divisor y divida.

Para **estimar cocientes** se emplea un método que aproxima el dividendo y el divisor para que puedan dividirse con facilidad.

Estime el cociente para $154{,}908 \div 46$ encontrando $150{,}000 \div 50$.

El dividendo es aproximadamente 150,000

$154{,}908 \div 46$ $\qquad$ $150{,}000 \div 50$

El divisor es aproximadamente 50

Los problemas de aplicación que involucran la **formación de grupos de igual tamaño** puede resolverse por medio de una división.

Algunas **palabras** y **frases clave** que se utilizan con frecuencia para indicar una división son:

repartir equitativamente	*distribuir equitativamente*
compartir equitativamente	*cuánto hace cada uno*
cuánto más	*por*
cuántos más	*entre*

FRENILLOS Un ortodontista le ofrece a su paciente un plan de pago del costo de $5,400 de los frenillos en 36 pagos iguales. ¿Cuál es la cantidad de cada pago?

La frase *36 pagos iguales* indica una división:

La cantidad de cada pago $= 5{,}400 \div 36$

EJERCICIOS DE REPASO

Divida, si es posible.

63. $\frac{72}{4}$

64. $\frac{595}{35}$

65. $1{,}443 \div 39$

66. $68\overline{)20{,}876}$

67. $1{,}269 \div 54$

68. $21\overline{)405}$

69. $\frac{0}{10}$

70. $\frac{165}{0}$

71. $127\overline{)5{,}347}$

72. $1{,}482{,}000 \div 3{,}900$

73. Escriba el enunciado de multiplicación relacionado para $160 \div 4 = 40$.

74. Use una comprobación para determinar si la siguiente división es correcta.

$$7\overline{)320}$$
$$45 \text{ R } 6$$

75. ¿Es el 364,545 divisible entre 2, 3, 4, 5, 6, 9 o 10?

76. Estime el cociente: 210,999 ÷ 53

77. OBSEQUIOS Si se distribuyeran de manera equitativa 745 dulces entre 45 niños, ¿cuántos recibirá cada niño? ¿Cuántos dulces sobrarán?

78. COMPRAS Un condado recibió una donación de $850,000 para adquirir algunas patrullas de policía nuevas. Si una patrulla completamente equipada cuesta $25,000, ¿cuántas puede adquirir el condado con el dinero donado?

SECCIÓN 1.6 Resolución de problemas

DEFINICIONES Y CONCEPTOS

Para volverse un buen solucionador de problemas, necesita un plan a seguir, como la siguiente estrategia de cinco pasos para la resolución de problemas:

1. **Analizar el problema** leyendo con cuidado. ¿Qué información se proporciona? ¿Qué se le pide que encuentre? ¿Qué vocabulario se proporciona? Con frecuencia, un *diagrama* o una *tabla* le ayudará a visualizar los hechos del problema.
2. **Formar un plan** traduciendo las palabras del problema a números y símbolos.
3. **Resolver el problema** desarrollando los cálculos.
4. **Enunciar la conclusión** de manera clara. Asegúrese de incluir las unidades (como pies, segundos o libras) en su respuesta.
5. **Comprobar el resultado.** Con frecuencia es de utilidad un estimado para ver si una respuesta es razonable.

EJEMPLOS

SALARIOS DE CEO Un reporte reciente asevera que en el 2007 los gerentes generales de las compañías grandes en E.U. promediaron 364 veces más en salario que el trabajador promedio en E.U. Si al trabajador promedio en E.U. se le pagó $30,000 al año, ¿cuál fue el salario de CEO? (Fuente: moneycentral.msn.com)

Analizar

- A los CEO se les pagaron 364 veces más que al trabajador promedio — *Proporcionado*
- A un trabajador promedio se le pagó $30,000 al año. — *Proporcionado*
- ¿Cuál fue el salario de un CEO en el 2007? — *A encontrar*

Formar Traducir las palabras del problema a números y símbolos.

El salario de un CEO en el 2007	fue igual a	364	veces	el salario del trabajador promedio en E.U.
El salario de un CEO en el 2007	=	364	·	30,000

Resolver Use un atajo para desarrollar la multiplicación.

$$364 \cdot 30{,}000 = 10{,}920{,}000$$

Multiplicar el 364 y el 3 para obtener 1092. *Añada cuatro 0 después del 1092.*

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1} \\ 364 \\ \times\ \ 3 \\ \hline 1092 \end{array}$$

Enunciar En el 2007, el salario anual de un CEO fue de $10,920,000.

Comprobar Use el redondeo por la izquierda para estimar el producto: 364 es aproximadamente 400.

$$400 \cdot 30{,}000 = 12{,}000{,}000$$

Dado que el estimado, $12,000,000, y el resultado, $10,920,000, son cercanos, el resultado parece razonable.

EJERCICIOS DE REPASO

79. SALCHICHAS Para preparar una salchicha ahumada, primero debe secarse la salchicha a una temperatura de 130 °F. Después se eleva otros 20° para humear la carne. La temperatura se eleva otros 20° para cocer la carne. En la última etapa, la temperatura se eleva otros 15°. ¿Cuál es la temperatura final en el proceso?

80. AUTOCINEMAS La cifra alta para los autocinemas en Estados Unidos era de 4,063 en 1958. Desde entonces, el número de autocinemas ha disminuido en 3,680. ¿Cuántos autocinemas hay actualmente? (Fuente: United Drive-in Theater Owners Association.)

81. ENTRENAMIENTO CON PESAS Una mujer, para ejercitar la parte superior de su cuerpo, realiza 1 serie de doce repeticiones de 75 libras en una máquina de banco de pesas. ¿Cuántas libras totales levanta en esa serie?

82. ESTACIONAMIENTO El estacionamiento B4 en un parque de diversiones abre a las 8:00 A.M. y cierra a las 11:00 P.M. La tarifa del estacionamiento es de $5. ¿Si hay veinticuatro filas y cada fila tiene cincuenta espacios, ¿cuántos automóviles pueden caber en este estacionamiento?

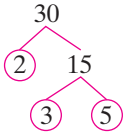
83. PRODUCCIÓN Un fabricante produce 15,000 bombillas de luz al día. Las bombillas se empaquetan de 6 por caja. ¿Cuántas cajas de bombillas se producen al día?

84. GORRAS BORDADAS Una máquina de bordado digital utiliza 16 yardas de hilo para coser el logotipo de un equipo en la parte frontal de una gorra de beisbol. ¿Cuántas gorras pueden bordarse si el hilo viene en carretes de 1,100 yardas? ¿Cuántas yardas de hilo quedarán en el carrete?

85. AGRICULTURA En un envío de 350 animales, 124 eran cerdos, 79 eran ovejas y el resto eran ganado. Encuentre el número de ganado en el envío.

86. HALLOWEEN Una pareja compra 6 bolsas de minibarras de Snickers. Cada bolsa contiene 48 piezas de chocolate. Si planean darle a cada niño 3 barras de chocolate, ¿a cuántos niños serán capaces de darles chocolates?

SECCIÓN 1.7 Factores primos y exponentes

DEFINICIONES Y CONCEPTOS	EJEMPLOS
A los números que se están multiplicando se les llama **factores.** **Factorizar** un número natural significa expresarlo como el producto de otros números naturales. Si un número natural es un factor de un número dado, también *divide el número dado de manera exacta.*	Los pares de números naturales cuyo producto es 6 son: $1 \cdot 6 = 6$ y $2 \cdot 3 = 6$ De menos a mayor, los factores del 6 son el 1, el 2, el 3 y el 6. Cada uno de los factores del 6 divide al 6 de manera exacta (sin residuo): $\frac{6}{1} = 6$ $\frac{6}{2} = 3$ $\frac{6}{3} = 2$ $\frac{6}{6} = 1$
Si un número natural es divisible entre el 2 se le llama número **par**. Si un número natural no es divisible entre el 2 se le llama número **impar**.	Números naturales pares: 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, . . . Números naturales impares: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, . . .
Un **número primo** es un número natural mayor que 1 que sólo tiene al 1 y a sí mismo como factores. Existen infinitamente muchos números primos.	Números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, . . .
Los **números compuestos** son números naturales mayores que 1 que *no* son primos. Existen infinitamente muchos números compuestos.	Números compuestos: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, . . .
Encontrar la **factorización de primos** de un número natural significa escribirlo como el producto de sólo números primos. Puede utilizarse un **árbol de factores** y una **escalera de una división** para encontrar las factorizaciones de primos.	Use un árbol de factores para encontrar la factorización de primos del 30.  *Factorice cada número que se encuentre como un producto de dos números naturales (distintos del 1 y sí mismo) hasta que todos los factores involucrados sean primos.* La factorización de primos del 30 es $2 \cdot 3 \cdot 5$. Use una escalera de una división para encontrar la factorización de primos del 70. $\begin{array}{r\|l} 2 & 70 \\ 5 & 35 \\ 7 & \end{array}$ *Desarrolle divisiones repetitivas entre números primos hasta que el cociente final sea un número primo.* La factorización de primos del 70 es $2 \cdot 5 \cdot 7$.

Se utiliza un **exponente** para indicar una multiplicación repetitiva. Indica cuántas veces se utiliza la **base** como un factor.

Exponente

$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{Factores repetitivos}} = 2^4$ (Base)

A 2^4 se le llama expresión exponencial.

Se puede utilizar la definición del exponente para **evaluar** (encontrar el valor de) expresiones exponenciales.

Evalúe: 7^3

$7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7$ Escriba la base 7 como un factor 3 veces.

$= 49 \cdot 7$ Multiplique, empezando de izquierda a derecha.

$= 343$ Multiplique.

Evalúe: $2^2 \cdot 3^3$

$2^2 \cdot 3^3 = 4 \cdot 27$ Evalúe primero la expresión exponencial.

$= 108$ Multiplique.

EJERCICIOS DE REPASO

Encuentre todos los factores de cada número. Lístelos de menor a mayor.

87. 18 **88.** 75

89. Factorice el 20 utilizando dos factores. *No use el factor de 1 en su respuesta.*

90. Factorice el 54 utilizando tres factores. *No use el factor de 1 en su respuesta.*

Indique si cada número es un número primo, un número compuesto o ninguno de los anteriores.

91. **a.** 31 **b.** 100
c. 1 **d.** 0
e. 125 **f.** 47

Indique si cada número es un número par o impar.

92. **a.** 171 **b.** 214
c. 0 **d.** 1

Encuentre la factorización de primos de cada número. Use exponentes en su respuesta, cuando sea de utilidad.

93. 42 **94.** 75
95. 220 **96.** 140

Escriba cada expresión utilizando exponentes.

97. $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$ **98.** $5(5)(5)(13)(13)$

Evalúe cada expresión.

99. 5^3 **100.** 11^2
101. $2^4 \cdot 7^2$ **102.** $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$

SECCIÓN 1.8 Mínimo común múltiplo y máximo factor común

DEFINICIONES Y CONCEPTOS

Los **múltiplos** de un número son los productos de ese número y el 1, 2, 3, 4, 5, etcétera.

El **mínimo común múltiplo (mcm)** de dos números naturales es el múltiplo común más pequeño de los números.

El **mcm** de dos números naturales es el número natural *más pequeño* que es divisible entre estos números.

EJEMPLOS

Múltiplos del 2: 2, 4, **6**, 8, 10, **12**, 14, 16, **18**, 20, 22, **24**, …

Múltiplos del 3: 3, **6**, 9, **12**, 15, **18**, 21, **24**, 27, …

Los múltiplos comunes del 2 y el 3 son: 6, 12, 18, 24, 30, …

El mínimo común múltiplo del 2 y el 3 es el 6, lo cual se escribe como: mcm (2, 3) = 6.

$\frac{6}{2} = 3$ y $\frac{6}{3} = 2$

Para **encontrar el mcm** de dos (o más) números naturales **listando:**

1. Escriba los múltiplos del número más grande multiplicándolo por 1, 2, 3, 4, 5, etcétera.
2. Continúe este proceso hasta que encuentre el *primer* múltiplo del número más grande que es divisible entre cada uno de los números más pequeños. Ese múltiplo es el mcm.

Encuentre el mcm del 3 y el 5.

Múltiplos del 5: 5, 10, 15, 20, 25, . . .

No divisible entre el 3. No divisible entre el 3. Divisible entre el 3.

Dado que el 15 es el primer múltiplo del 5 que es divisible entre el 3, el mcm (3, 5) = 15.

Para **encontrar el mcm** de dos (o más) números naturales **utilizando la factorización de primos:**

1. Realice la factorización de primos de cada número.
2. El mcm es el producto de los factores primos donde cada factor se utiliza el mayor número de veces que aparece en cualquier factorización.

Encuentre el mcm del 6 y el 20.

$6 = 2 \cdot 3$ El mayor número de veces que aparece el 3 es una vez.

$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$ El mayor número de veces que aparece el 2 es dos veces.

El mayor número de veces que aparece el 5 es una vez.

Use el factor 2 dos veces. Use el factor 3 una vez. Use el factor 5 una vez.

mcm (6, 20) = $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

El **máximo factor común (mfc)** de dos (o más) números naturales es el factor común más grande de los números.

El máximo factor común de dos (o más) números es el número natural *más grande* que los divide de manera exacta.

Los factores del 18: 1, 2, 3, 6, 9, 18

Los factores del 30: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

Los factores comunes del 18 y el 30 son el 1, el 2, el 3 y el 6.

El máximo factor común del 18 y el 30 es el 6, lo cual se escribe como: mfc (18, 30) = 6

$\frac{18}{6} = 3$ y $\frac{30}{6} = 5$

Para encontrar el **mfc** de dos (o más) números naturales utilizando la **factorización de primos:**

1. Realice la factorización de primos de cada número.
2. Identifique los factores primos comunes.
3. El mfc es un producto de todos los factores primos comunes encontrados en el Paso 2.

Si no hay factores primos comunes, el mfc es el 1.

Encuentre el mfc del 36 y el 60.

$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$

$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$

El 36 y el 60 tienen dos factores comunes de 2 y un factor común de 3.

El mfc es el producto de los factores primos encerrados en un círculo.

mfc (36, 60) = $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot = 12$

EJERCICIOS DE REPASO

103. Encuentre los primeros 10 múltiplos del 9.

104. a. Encuentre los múltiplos comunes del 6 y el 8 en la lista de abajo.

Múltiplos del 6: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54 . . .

Múltiplos del 8: 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72 . . .

b. Encuentre los factores comunes del 6 y el 8 en la lista abajo.

Factores del 6: 1, 2, 3, 6

Factores del 8: 1, 2, 4, 8

Encuentre el mcm de los números dados.

105. 4, 6 **106.** 3, 4

107. 9, 15 **108.** 12, 18

109. 18, 21 **110.** 24, 45

111. 4, 14, 20 **112.** 21, 28, 42

Encuentre el mfc de los números dados.

113. 8, 12 **114.** 9, 12

115. 30, 40 **116.** 30, 45

117. 63, 84 **118.** 112, 196

119. 48, 72, 120 **120.** 88, 132, 176

121. REUNIONES El Rotary Club se reúne cada 14 días y el Kiwanis Club se reúne cada 21 días. Si ambos clubes tienen una reunión en el mismo día, ¿en cuántos días más se volverán a reunir el mismo día?

122. FLORES Una florista está formando arreglos florales para la celebración del 4 de julio. Tiene 32 claveles rojos, 24 claveles blancos y 16 claveles azules. Desea que cada arreglo sea idéntico.

a. ¿Cuál es número mayor de arreglos que puede formar si se utiliza cada clavel?

b. ¿Cuántos de cada tipo de claveles se utilizará en cada arreglo?

SECCIÓN 1.9 Orden de las operaciones

DEFINICIONES Y CONCEPTOS

Para **evaluar** (encontrar el valor de) expresiones que involucran más de una operación, se emplea la regla del orden de las operaciones.

Orden de las operaciones

1. Desarrolle todos los cálculos dentro de los paréntesis y otros símbolos de agrupación siguiendo el orden listado abajo en los Pasos 2-4, empezando desde el par más interno de símbolos de agrupación al par más externo.
2. Evalúe todas las expresiones exponenciales.
3. Desarrolle las multiplicaciones y divisiones a medida que aparezcan de izquierda a derecha.
4. Desarrolle las sumas y restas a medida que aparezcan de izquierda a derecha.

Cuando se hayan eliminado los símbolos de agrupación, repita los Pasos 2-4 para completar el cálculo.

Si está presente una barra de fracción, evalúe la expresión sobre la barra (llamada **numerador**) y la expresión debajo de la barra (llamada **denominador**) por separado. Después desarrolle la división indicada por la barra de fracción, si es posible.

EJEMPLOS

Evalúe: $10 + 3[2^4 - 3(5 - 2)]$

Resuelva primero dentro de los paréntesis *más internos* y después dentro de los corchetes *más externos*.

$10 + 3[2^4 - 3(\mathbf{5 - 2})] = 10 + 3[2^4 - 3(\mathbf{3})]$ Realice la operación dentro de los paréntesis.

$= 10 + 3[16 - 3(3)]$ Evalúe la expresión exponencial dentro de los corchetes: $2^4 = 16$.

$= 10 + 3[16 - 9]$ Realice la multiplicación dentro de los corchetes.

$= 10 + 3[7]$ Realice la resta dentro de los corchetes.

$= 10 + 21$ Realice la multiplicación: $3[7] = 21$.

$= 31$ Realice la suma.

Evalúe: $\dfrac{3^3 + 8}{7(15 - 14)}$

Evalúe por separado las expresiones sobre y debajo de la barra de fracción.

$\dfrac{3^3 + 8}{7(15 - 14)} = \dfrac{27 + 8}{7(1)}$ En el numerador, evalúe la expresión exponencial. En el denominador, reste.

$= \dfrac{35}{7}$ En el numerador, sume. En el denominador, multiplique.

$= 5$ Divida.

La **media aritmética,** o **promedio,** de un conjunto de números es un valor alrededor del cual se agrupan los valores de los números.

Para **encontrar la media (promedio)** de un conjunto de valores, divida la suma de los valores entre el número de valores.

Encuentre la media (promedio) de las calificaciones de examen 74, 83, 79, 91 y 73.

$\text{Media} = \dfrac{74 + 83 + 79 + 91 + 73}{5}$ Dado que hay 5 calificaciones, divida entre 5.

$= \dfrac{400}{5}$ Realice la suma en el numerador.

$= 80$ Divida.

La media (promedio) de las calificaciones de los exámenes es de 80.

EJERCICIOS DE REPASO

Evalúe cada expresión.

123. $3^2 + 12 \cdot 3$

124. $35 - 5 \cdot 3 + 3$

125. $(6 \div 2 \cdot 3)^2 \cdot 3$

126. $(35 - 5 \cdot 3) \div 5$

127. $2^3 \cdot 5 - 4 \div 2 \cdot 4$

128. $8 \cdot (5 - 4 \div 2)^2$

129. $2 + 3\left(\frac{100}{10} - 2^2 \cdot 2\right)$

130. $4(4^2 - 5 \cdot 3 + 2) - 4$

131. $\frac{4(6) - 6}{2(3^2)}$

132. $\frac{6 \cdot 2 + 3 \cdot 7}{5^2 - 2(7)}$

133. $7 + 3[3^3 - 10(4 - 2)]$

134. $5 + 2\left[\left(2^4 - 3 \cdot \frac{8}{2}\right) - 2\right]$

Encuentre la media aritmética (promedio) de cada conjunto de calificaciones de examen.

135.

Examen	1	2	3	4
Calificación	80	74	66	88

136.

Examen	1	2	3	4	5
Calificación	73	77	81	0	69

CAPÍTULO 1 EXAMEN

1. a. El conjunto de números _____ es {0, 1, 2, 3, 4, 5, . . .}.

b. Los símbolos > y < son símbolos de _____.

c. El *evaluar* una expresión como 58 − 33 + 9 significa encontrar su _____.

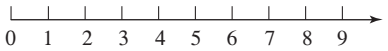
d. El _____ de un rectángulo es una medida de la cantidad de superficie que delimita.

e. Un número es _____ entre otro número si, cuando se dividen, el residuo es de 0.

f. A los símbolos de agrupación ( ) se les llama _____, y a los símbolos [ ] se les llama _____.

g. Un número _____ es un número natural mayor que 1 y que sólo tiene al 1 y a sí mismo como factores.

2. Grafique los números menores que el 7 en una recta numérica.



3. Considere el número natural 402,198.

a. ¿Cuál es el valor posicional del dígito 1?

b. ¿Cuál dígito está en la columna de decenas de millares?

4. a. Escriba el 7,018,641 en palabras.

b. Escriba "un millón, trescientos ochenta y cinco mil, doscientos sesenta y seis" en forma estándar.

c. Escriba el 92,561 en forma expandida.

5. Coloque un símbolo < o > en el recuadro para formar un enunciado verdadero.

a. 15 ☐ 10 **b.** 1,247 ☐ 1,427

6. Redondee el 34,759,841 al(a la) . . .

a. millón más cercano

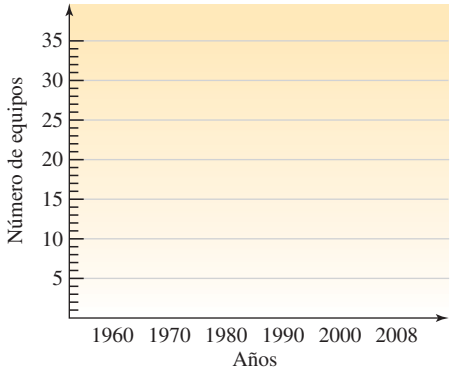
b. centena de millar más cercana

c. millar más cercano

7. NHL La tabla de abajo muestra el número de equipos en la National Hockey League en varias épocas durante su historia. Use la información para completar la gráfica de barras en la siguiente columna.

Año	1960	1970	1980	1990	2000	2008
Número de equipos	6	14	21	21	28	30

Fuente: www.rauzulusstreet.com



8. Reste 287 de 535. Muestre una comprobación de su resultado.

9. Sume:
$$\begin{array}{r} 136{,}231 \\ 82{,}574 \\ +\ 6{,}359 \\ \hline \end{array}$$

10. Reste:
$$\begin{array}{r} 4{,}521 \\ -3{,}579 \\ \hline \end{array}$$

11. Multiplique:
$$\begin{array}{r} 53 \\ \times\ 8 \\ \hline \end{array}$$

12. Multiplique: $74 \cdot 562$

13. Divida: $6\overline{)432}$

14. Divida: $8{,}379 \div 73$. Muestre una comprobación de su resultado.

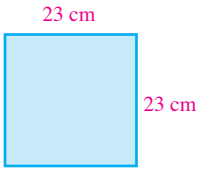
15. Encuentre el producto del 23,000 y el 600.

16. Encuentre el cociente del 125,000 y el 500.

17. Use el redondeo por la izquierda para estimar la diferencia: 49,213 − 7,198

18. Un rectángulo es de 327 pulgadas de ancho y 757 pulgadas de largo. Encuentre su perímetro.

19. Encuentre el área del cuadrado mostrado abajo.



20. **a.** Encuentre los factores del 12.

b. Encuentre los primeros seis múltiplos del 4.

c. Escriba $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$ como una multiplicación.

21. Encuentre la factorización de primos del 1,260.

22. DIENTES Los niños tienen un conjunto primario de dientes (de leche) utilizado en su desarrollo inicial. Estos 20 dientes por lo general son reemplazados por un segundo conjunto de dientes más grandes permanentes (de adulto). Determine el número de dientes permanentes si hay 12 más de estos que de dientes de leche.

23. LANZAMIENTO DE UNA MONEDA Durante la Segunda Guerra Mundial, John Kerrich, un prisionero de guerra, lanzó una moneda 10,000 veces y escribió los resultados. Si registró 5,067 caras, ¿cuántas cruces sucedieron? (Fuente: *¡Imagine esto!*)

24. CLASES DE EDUCACIÓN FÍSICA En una clase de educación física, los estudiantes permanecieron de pie en una formación rectangular de 8 filas y 12 columnas cuando el instructor tomó asistencia. ¿Cuántos estudiantes hay en la clase?

25. SUPERFICIE ÚTIL Los departamentos de caballeros, damas y niños en una tienda de ropa ocupan un total de 12,255 pies cuadrados. Encuentre la longitud en pies de cada departamento si ocupan la misma cantidad de superficie útil.

26. MILLAJE El tanque de combustible de un Hummer H3 contiene 23 galones de gasolina. ¿Qué tan lejos puede viajar un Hummer con un tanque de gasolina si su rendimiento en carretera es de 18 millas por galón?

27. HERENCIA Un padre heredó su patrimonio, valuado en $1,350,000, a sus cuatro hijos adultos. A su muerte, los hijos pagaron los costos legales de $26,000 y después dividieron el resto de la herencia de manera equitativa entre ellos. ¿Cuánto recibió cada uno?

28. ¿Qué propiedad se ilustra por medio de cada enunciado?

a. $18 \cdot (9 \cdot 40) = (18 \cdot 9) \cdot 40$

b. $23{,}999 + 1 = 1 + 23{,}999$

29. Desarrolle cada operación, si es posible.

a. $15 \cdot 0$ **b.** $\frac{0}{15}$

c. $\frac{8}{8}$ **d.** $\frac{8}{0}$

30. Encuentre el mcm del 15 y el 18.

31. Encuentre el mcm del 8, 9 y 12.

32. Encuentre el mfc del 30 y el 54.

33. Encuentre el mfc del 24, 28 y 36.

34. SURTIDO DE ESTANTES Se están acomodando cajas de arroz al lado de cajas de puré de papa instantáneo en el mismo estante inferior en un mostrador de un supermercado. Las cajas de arroz son de 8 pulgadas de alto y las cajas de puré instantáneo son de 10 pulgadas de alto.

a. ¿Cuál es la altura más corta a la que las dos pilas tendrán la misma altura?

b. ¿Cuántas cajas de arroz y cuántas cajas de puré de papas se utilizarán en cada pila?

35. ¿El 521,340 es divisible entre 2, 3, 4, 5, 6, 9 o 10?

36. CALIFICACIONES Un estudiante obtuvo 73, 52, 95 y 70 en cuatro exámenes y obtuvo 0 en un examen al que faltó. Encuentre su calificación de examen media (promedio).

Evalúe cada expresión.

37. $9 + 4 \cdot 5$

38. $3^4 \cdot 10 - 2(6)(4)$

39. $20 + 2[4^2 - 2(6 - 2^2)]$

40. $\dfrac{3^3 - 2(15 - 14)^2}{33 - 9 + 1}$

2

Enteros

© OJO Images Ltd/Alamy

2.1 Introducción a los enteros
2.2 Suma de enteros
2.3 Resta de enteros
2.4 Multiplicación de enteros
2.5 División de enteros
2.6 Orden de las operaciones y estimación
Resumen y repaso
Examen
Repaso acumulativo

Carreras del campus

Asesor financiero personal

Los asesores financieros personales ayudan a las personas a administrar su dinero y les enseñan cómo hacer que crezca. Ofrecen asesoría sobre cómo presupuestar los gastos mensuales, al igual que a cómo ahorrar para el retiro. Una licenciatura en negocios, contabilidad, finanzas, economía o estadística provee una buena preparación para la profesión. Una comunicación sólida y habilidades para la resolución de problemas son igualmente importantes para lograr el éxito en este campo.

En el **Problema 90** del **Espacio para el estudio 2.2,** verá cómo un asesor financiero personal utiliza enteros para determinar si una unidad de alquiler dúplex sería una inversión redituable para un cliente.

CARGO LABORAL: Asesor financiero personal

EDUCACIÓN: Debe tener al menos una licenciatura. Algunos estados exigen un certificado o licencia.

PERSPECTIVA LABORAL: Excelente. Se espera que la ocupación crezca en 41% durante la siguiente década.

INGRESOS ANUALES: En el 2007, los salarios anuales eran de $89,220.

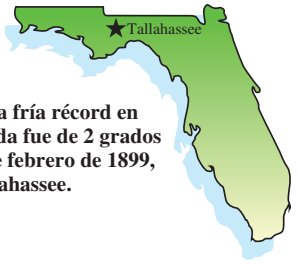
PARA MÁS INFORMACIÓN: http://www.collegeboard.com/csearch/majors_careers/profiles/careers/101000.html

Objetivos

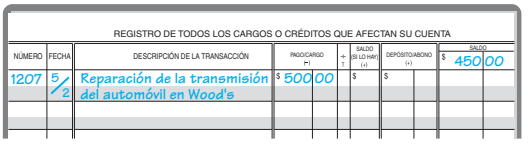
1. Definir el conjunto de enteros.
2. Graficar enteros en una recta numérica.
3. Usar símbolos de desigualdad para comparar enteros.
4. Encontrar el valor absoluto de un entero.
5. Encontrar el opuesto de un entero.

SECCIÓN 2.1
Introducción a los enteros

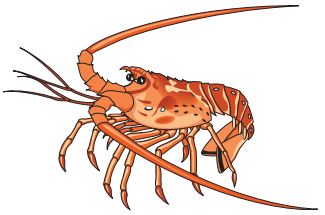
Se ha visto que los números naturales pueden utilizarse para describir varias situaciones que surgen en la vida diaria. Sin embargo, no se pueden utilizar los números naturales para expresar una temperatura bajo cero, el saldo en una cuenta de cheques que está sobregirada o qué tan lejos está un objeto debajo del nivel del mar. En esta sección se verá cómo pueden utilizarse números negativos para describir estas tres situaciones al igual que muchas otras.



La temperatura fría récord en el estado de Florida fue de 2 grados *bajo* cero el 13 de febrero de 1899, en Tallahassee.



Se escribió un cheque por $500 cuando sólo había $450 en la cuenta. La cuenta de cheques está *sobregirada.*



La langosta estadounidense se encuentra fuera de la Costa Este de Estados Unidos a profundidades de hasta 600 pies *debajo* del nivel del mar.

1 Definir el conjunto de enteros

Para describir una temperatura de 2 grados sobre cero, un saldo de $50 ó 600 pies sobre el nivel del mar, se pueden utilizar los llamados **números positivos.** Todos los números positivos son mayores que el 0 y se pueden escribir con o sin **signo positivo** +.

En palabras	En símbolos	Se lee como
2 grados sobre cero	+2 ó 2	dos positivo
Un saldo de $50	+50 ó 50	cincuenta positivo
600 pies sobre el nivel del mar	+600 ó 600	seiscientos positivo

Para describir una temperatura de 2 grados bajo cero, un sobregiro de $50, o 600 pies debajo del nivel del mar, se necesita utilizar números negativos. Los **números negativos** son números menores que el 0 y se escriben utilizando un **signo negativo** −.

En palabras	En símbolos	Se lee como
2 grados bajo cero	−2	dos negativo
Un sobregiro de $50	−50	cincuenta negativo
600 pies debajo del nivel del mar	−600	seiscientos negativo

En conjunto, a los números positivos y negativos se les llama **números con signo.**

Números positivos y negativos

Los **números positivos** son mayores que el 0. Los **números negativos** son menores que el 0.

¡Cuidado! El cero no es positivo ni negativo.

A la colección de los números naturales positivos, de los negativos de los números naturales y el 0 se le llama conjunto de **enteros**.

Conjunto de enteros

$$\{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

Los tres puntos a la derecha indican que la lista continúa por siempre —no existe un entero más grande—. Los tres puntos a la izquierda indican que la lista continúa por siempre —no existe un entero más pequeño—. El conjunto de **enteros positivos** es $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ y el conjunto de **enteros negativos** es $\{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1\}$.

El lenguaje de las matemáticas Dado que todo número natural es un entero, se dice que el conjunto de números naturales es un **subconjunto** de los enteros.

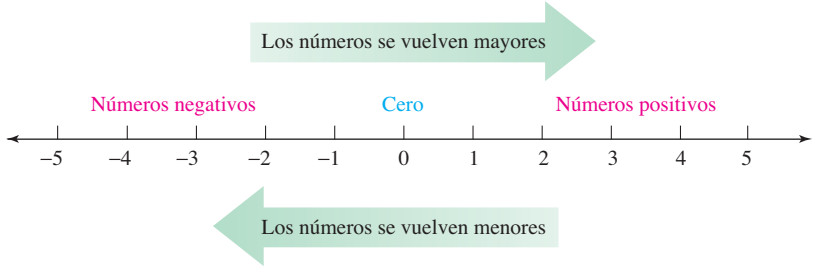
Conjunto de enteros → $\{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, \underbrace{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots}\}$

Conjunto de números naturales

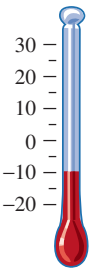
2 Graficar enteros en una recta numérica

En la Sección 1.1 se introdujo la recta numérica. Se puede utilizar una extensión de esta recta para aprender acerca de los números negativos.

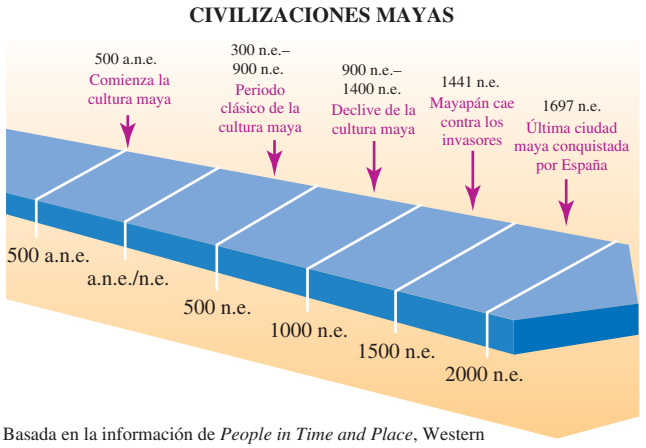
Los números negativos pueden representarse en una recta extendiendo la línea a la izquierda y dibujando una punta de flecha. Comenzando en el origen (el punto 0), se mueve a la izquierda, marcando puntos igualmente espaciados como se muestra abajo. A medida que se mueve a la derecha en la recta , los valores de los números aumentan. A medida que se mueve a la izquierda, los valores de los números disminuyen.



El termómetro mostrado en la siguiente página es un ejemplo de una recta numérica vertical. Tiene una escala de grados y muestra una temperatura de $-10°$. La línea de tiempo es un ejemplo de una recta numérica horizontal. Tiene una escala en unidades de 500 años.



Una recta numérica vertical

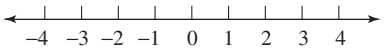


Basada en la información de *People in Time and Place*, Western Hemisphere (Silver Burdett & Ginn., 1991), p. 129

Una recta numérica horizontal

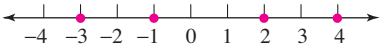
Auto-revisión 1

Grafique -4, -2, 1 y 3 en una recta numérica.



Ahora intente **Problema 23**

EJEMPLO 1 Grafique $-3, 2, -1$ y 4 en una recta numérica.



Estrategia Se localizará la posición de cada entero en la recta numérica y se trazará un punto en negritas.

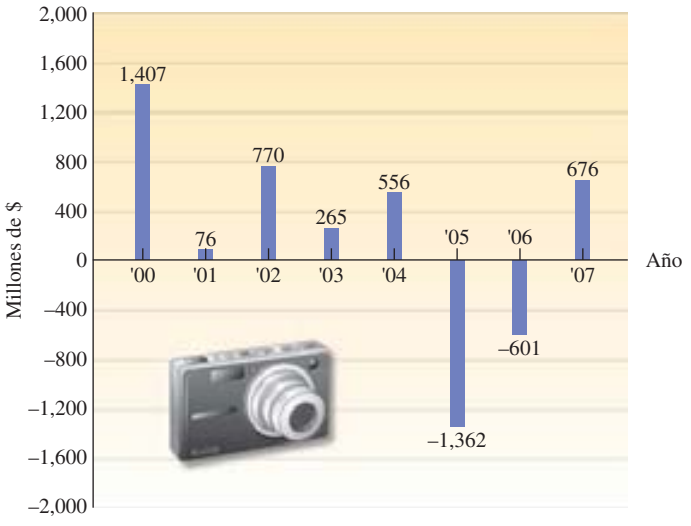
POR QUÉ *Graficar un número* significa construir un diagrama que representa al número.

Solución

La posición de cada entero negativo está a la izquierda del 0. La posición de cada entero positivo está a la derecha del 0.

Al extender la recta numérica para incluir números negativos, se pueden representar más situaciones utilizando gráficas de barras y gráficas de líneas. Por ejemplo, la siguiente gráfica de barras muestra el ingreso neto de la compañía Eastman Kodak para los años 2000 a 2007. Dado que el ingreso neto en el 2004 fue de \$556 millones positivos, la compañía generó una *ganancia.* Dado que el ingreso neto en el 2005 fue de $-\$1{,}362$ millones, la compañía tuvo una *pérdida.*

Ingreso neto de la compañía Eastman Kodak



Fuente: Morningstar.com

El lenguaje de las matemáticas *Neto* se refiere a lo que queda después de que se han tomado en cuenta todas las deducciones (pérdidas). El **ingreso neto** es un término empleado en los negocios que con frecuencia se le refiere como *balance final*. El ingreso neto indica lo que una compañía ha ganado (o perdido) en un periodo dado de tiempo (por lo general, de 1 año).

PIENSE DETENIDAMENTE *Deuda de tarjeta de crédito*

"La trampa más peligrosa para muchos estudiantes universitarios es el sobreuso de las tarjetas de crédito. Varios bancos hacen su mejor esfuerzo para tentar a los nuevos titulares de tarjetas con tarjetas de interés bajo o cero".

Gary Schatsky, planificador financiero certificado

¿Cuáles números en el estado de cuenta de una tarjeta de crédito abajo son en realidad deudas y, por tanto, pudieran representarse utilizando números negativos?

Resumen de la cuenta

Saldo anterior	Nuevas compras	Pagos & créditos	Nuevo saldo
$4,621	$1,073	$2,369	$3,325

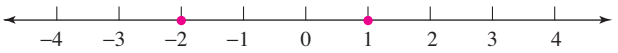
04/21/10 Fecha de facturación	05/16/10 Fecha de vencimiento de pago	$67 Pago mínimo

BANK STAR

Las tasas periódicas pueden variar. Vea el reverso para una explicación e información importante. Favor de permitir el tiempo suficiente para que el correo llegue al Bank Star.

3 Usar símbolos de desigualdad para comparar enteros

Recuerde que el símbolo $<$ significa "es menor que", y que $>$ significa "es mayor que". La figura abajo muestra la gráfica de los enteros -2 y 1. Dado que el -2 está a la izquierda del 1 en la recta numérica, $-2 < 1$. Dado que $-2 < 1$, también es verdadero que $1 > -2$.



EJEMPLO 2 Coloque un símbolo $<$ o $>$ en el recuadro para formar un enunciado verdadero. **a.** $4 \square -5$ **b.** $-8 \square -7$

Estrategia Para elegir el símbolo de desigualdad correcto a colocar entre el par de números, se determinará la posición de cada número en la recta numérica.

POR QUÉ Para dos números cualesquier en una recta numérica, el número a la *izquierda* es el más pequeño y el número a la *derecha* es el más grande.

Solución

a. Dado que el 4 está a la derecha del -5 en la recta numérica, $4 > -5$.

b. Dado que el -8 está a la izquierda del -7 en la recta numérica, $-8 < -7$.

Auto-revisión 2

Coloque un símbolo $<$ o $>$ en el recuadro para formar un enunciado verdadero.

a. $6 \square -6$

b. $-11 \square -10$

Ahora intente **Problemas 31 y 35**

El lenguaje de las matemáticas Debido a que el símbolo $<$ requiere que un número sea estrictamente menor que otro número, y debido a que el símbolo $>$ requiere que un número sea estrictamente mayor que otro número, a los enunciados matemáticos que involucran los símbolos $<$ y $>$ se les llama *desigualdades estrictas.*

Existen otros tres símbolos de desigualdad utilizados de manera común.

Símbolos de desigualdad

$\neq$ significa *no es igual a*
$\geq$ significa *es mayor que o igual a*
$\leq$ significa *es menor que o igual a*

$-5 \neq -2$ Se lee como "-5 no es igual a -2".

$-6 \leq 10$ Se lee como "-6 es menor que o igual a 10". Este enunciado es verdadero, debido a que $-6 < 10$.

$12 \leq 12$ Se lee como "12 es menor que o igual a 12". Este enunciado es verdadero, debido a que $12 = 12$.

$-15 \geq -17$ Se lee como "-15 es mayor que o igual a -17". Este enunciado es verdadero, debido a que $-15 > -17$.

$-20 \geq -20$ Se lee como "-20 es mayor que o igual a -20". Este enunciado es verdadero, debido a que $-20 = -20$.

EJEMPLO 3 Indique si cada enunciado es verdadero o falso.

a. $-9 \geq -9$ **b.** $-1 \leq -5$ **c.** $-27 \geq 6$ **d.** $-32 \leq -32$

Estrategia Se determinará si la desigualdad estricta o la igualdad que los símbolos $\leq$ y $\geq$ permiten es verdadera.

POR QUÉ Si alguna de las dos es verdadera, entonces el enunciado proporcionado es verdadero.

Solución

a. $-9 \geq -9$ Este enunciado es verdadero, debido a que $-9 = -9$.

b. $-1 \leq -5$ Este enunciado es falso, debido a que ni $-1 < -5$ ni $-1 = -5$ es verdadero.

c. $-27 \geq 6$ Este enunciado es falso, debido a que ni $-27 > 6$ ni $-27 = 6$ es verdadero.

d. $-32 \leq -31$ Este enunciado es verdadero, debido a que $-32 < -31$.

Auto-revisión 3

Indique si cada enunciado es verdadero o falso:

a. $-17 \geq -15$

b. $-35 \leq -35$

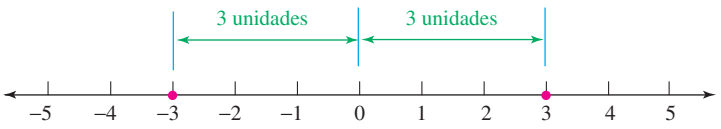
c. $-2 \geq -2$

d. $-61 \leq -62$

Ahora intente **Problemas 41 y 45**

4 Encontrar el valor absoluto de un entero

Utilizando una recta numérica, se puede observar que los números 3 y -3 están a una distancia de 3 unidades del 0, como se muestra abajo.



El **valor absoluto** de un número proporciona la distancia entre el número y el 0 en la recta numérica. Para indicar el valor absoluto, el número se inserta entre dos barras verticales, llamada **símbolo de valor absoluto.** Por ejemplo, se puede escribir $|-3| = 3$. Esto se lee como "El valor absoluto del 3 negativo es 3" e indica que la distancia entre el -3 y el 0 en la recta numérica es de 3 unidades. A partir de la figura, también se observa que $|3| = 3$.

Valor absoluto

El **valor absoluto** de un número es la distancia en la recta numérica entre el número y el 0.

¡Cuidado! El valor absoluto expresa distancia. El valor absoluto de un número siempre es positivo o 0. Nunca es negativo.

EJEMPLO 4 Encuentre cada valor absoluto: **a.** $|8|$ **b.** $|-5|$ **c.** $|0|$

Estrategia Se necesita determinar la distancia a la que está del 0 en una recta numérica el número dentro de las barras verticales de valor absoluto.

POR QUÉ El valor absoluto de un número es la distancia entre el 0 y el número en una recta numérica.

Solución

a. En la recta numérica, la distancia entre el 8 y el 0 es de 8. Por tanto,

$$|8| = 8$$

b. En la recta numérica, la distancia entre el -5 y el 0 es de 5. Por tanto,

$$|-5| = 5$$

c. En la recta numérica, la distancia entre el 0 y el 0 es de 0. Por tanto,

$$|0| = 0$$

Auto-revisión 4

Encuentre cada valor absoluto:

a. $|-9|$

b. $|4|$

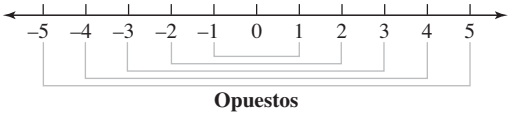
Ahora intente **Problemas 47 y 49**

5 Encontrar el opuesto de un entero

Opuestos o negativos

Dos números que están a la misma distancia del 0 en la recta numérica, pero en lados opuestos de ésta, se llaman **opuestos** o **negativos.**

La figura de abajo muestra que para cada número natural en la recta numérica hay un número natural correspondiente, su *opuesto,* a la izquierda del 0. Por ejemplo, se observa que el 3 y el -3 son opuestos al igual que el -5 y el 5. Observe que el 0 es su propio opuesto.



Opuestos

Para escribir el opuesto de un número se utiliza un símbolo $-$. Por ejemplo, el opuesto del 5 es el -5 (se lee como "5 negativo"). Se necesitan paréntesis para expresar el opuesto de un número negativo. El opuesto del -5 se escribe como $-(-5)$. Dado que el 5 y el -5 están a la misma distancia del 0, el opuesto del -5 es el 5. Por tanto, $-(-5) = 5$. Esto ilustra la siguiente regla.

El opuesto de la regla del opuesto

El opuesto del opuesto (o negativo) de un número es ese número.

Número	Opuesto	
57	-57	Se lee como "cincuenta y siete negativo".
-8	$-(-8) = 8$	Se lee como "el opuesto del ocho negativo es el ocho".
0	$-0 = 0$	Se lee como "el opuesto del 0 es el 0".

El concepto del opuesto también puede aplicarse a un valor absoluto. Por ejemplo, el opuesto del valor absoluto del -8 puede escribirse como $-|-8|$. Piense en esto como un proceso de dos pasos, donde el símbolo de valor absoluto sirve como un símbolo de agrupación. Encuentre el valor absoluto primero y después añada un signo $-$ a ese resultado.

Primero, encuentre el valor absoluto.

$-|-8| = -8$

Se lee como "el opuesto del valor absoluto del ocho negativo es el ocho negativo".

Después añada un signo $-$.

Auto-revisión 5

Simplifique cada expresión:

a. $-(-1)$

b. $-|4|$

c. $-|-99|$

Ahora intente **Problemas 55, 65 y 67**

EJEMPLO 5

Simplifique cada expresión: **a.** $-(-44)$ **b.** $-|11|$ **c.** $-|-225|$

Estrategia Se encontrará el opuesto de cada número.

POR QUÉ En cada caso, el símbolo $-$ escrito fuera de los símbolos de agrupación significa "el opuesto de".

Solución

a. $-(-44)$ significa el opuesto del -44. Dado que el opuesto del -44 , es el 44, se escribe

$$-(-44) = 44$$

b. $-|11|$ significa el opuesto del valor absoluto del 11. Dado que $|11| = 11$, y el opuesto del 11 es el -11, se escribe

$$-|11| = -11$$

c. $-|-225|$ significa el opuesto del valor absoluto del -225. Dado que $|-225| = 225$, y el opuesto del 225 es el -225, se escribe

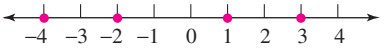
$$-|-225| = -225$$

El símbolo $-$ se utiliza para indicar un número negativo, el opuesto de un número y la operación de resta. La clave para leer el símbolo $-$ de manera correcta es examinar el contexto en que se utiliza.

Lectura del símbolo –

-12	Doce negativo	Un símbolo $-$ escrito directamente antes de un número se lee como "negativo".
$-(-12)$	El opuesto del doce negativo	El primer símbolo $-$ se lee como "el opuesto del" y el segundo como "negativo".
$12 - 5$	Doce menos cinco	Observe el espacio utilizado antes y después del símbolo $-$. Esto indica una resta y se lee como "menos".

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. 

2. a. $>$ **b.** $<$

3. a. falso **b.** verdadero **c.** verdadero **d.** falso **4. a.** 9 **b.** 4 **5. a.** 1 **b.** -4 **c.** -99

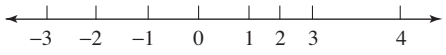
SECCIÓN 2.1 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

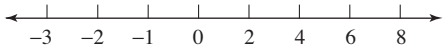
VOCABULARIO

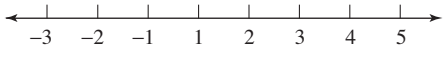
Complete los espacios.

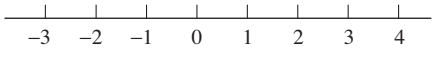
1. Los números _____ son mayores que el 0 y los números _____ son menores que el 0.
2. Al $\{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ se le llama conjunto de los _____.
3. _____ un entero significa localizarlo en la recta numérica y remarcarlo con un punto.
4. A los símbolos $>$ y $<$ se les llama símbolos de _____.
5. El _____ _____ de un número es la distancia entre el número y el 0 en la recta numérica.
6. A dos números que están a la misma distancia del 0 en una recta numérica, pero en lados opuestos de ésta, se les llama _____.

CONCEPTOS

7. Represente cada una de estas situaciones utilizando un número con signo.
   - **a.** Un sobregiro de $225
   - **b.** 10 segundos antes del despegue
   - **c.** 3 grados debajo de lo normal
   - **d.** Un déficit de $12,000
   - **e.** Una retirada de 1 kilómetro por un ejército
8. Represente cada una de estas situaciones utilizando un número con signo y después describa su opuesto en palabras.
   - **a.** Un superávit comercial de $3 millones
   - **b.** Un conteo de bacterias de 70 más que la estándar
   - **c.** Una ganancia de $67
   - **d.** Un negocio de $1 millón en "números negros"
   - **e.** 20 unidades sobre su cuota
9. Determine lo incorrecto en cada recta numérica.
   - **a.**
   

   - **b.**
   

   - **c.**
   

   - **d.**
   

10. **a.** Si un número es menor que el 0, ¿qué tipo de número debe ser?
    b. Si un número es mayor que el 0, ¿qué tipo de número debe ser?
11. En la recta numérica, ¿qué número está a
    - **a.** 3 unidades a la derecha del -7?
    - **b.** 4 unidades a la izquierda del 2?
12. Nombre dos números en la recta numérica que estén a una distancia de
    - **a.** 5 del -3.
    - **b.** 4 del 3.
13. **a.** ¿Cuál número está más cerca del -3 en la recta numérica: el 2 ó el -7?
    b. ¿Cuál número está más alejado del 1 en la recta numérica: el -5 o el 8?
14. ¿Existe un número que sea mayor que el 10 y menor que el 10 al mismo tiempo?
15. **a.** Exprese el hecho $-12 < 15$ utilizando un símbolo $>$.
    b. Exprese el hecho $-4 > -5$ utilizando un símbolo $<$.
16. Complete el espacio: El opuesto del _____ de un número es ese número.
17. Complete la tabla indicando el opuesto y el valor absoluto de los números dados.

Número	Opuesto	Valor absoluto
−25		
39		
0		

18. ¿El valor absoluto de un número siempre es positivo?

NOTACIÓN

19. Traduzca cada frase a símbolos matemáticos.
    - **a.** El opuesto del ocho negativo
    - **b.** El valor absoluto del ocho negativo
    - **c.** Ocho menos ocho
    - **d.** El opuesto del valor absoluto del ocho negativo

20. **a.** Escriba el conjunto de los enteros.

b. Escriba el conjunto de los enteros positivos.

c. Escriba el conjunto de los enteros negativos.

21. Complete los espacios.

a. Se lee $\geq$ como "es _____ que o _____ a".

b. Se lee $\leq$ como "es _____ que o _____ a".

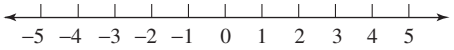
22. ¿Cuál de las siguientes expresiones contiene un signo menos?

$15 - 8 \qquad -(-15) \qquad -15$

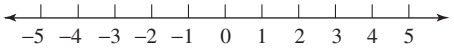
PRÁCTICA GUIADA

Grafique los números siguientes en una recta numérica. Vea el Ejemplo 1.

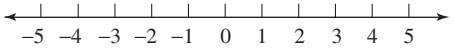
23. $-3, 4, 3, 0, -1$



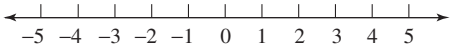
24. $2, -4, 5, 1, -1$



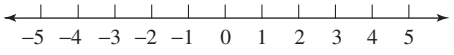
25. Los enteros menores que el 3 pero mayores que el -5



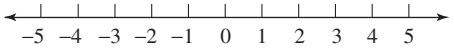
26. Los enteros que son menores que el 4 pero mayores que el -3



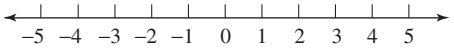
27. El opuesto del -3, el opuesto del 5 y el valor absoluto del -2



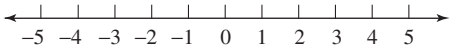
28. El valor absoluto del 3, el opuesto del 3 y el número que es 1 menor que el -3



29. 2 más que el 0, 4 menos que el 0, 2 más que el 5 negativo y 5 menos que el 4



30. 4 menos que el 0, 1 más que el 0, 2 menos que el -2, y 6 más que el -4



Coloque un símbolo $<$ o $>$ en el recuadro para formar un enunciado verdadero. Vea el Ejemplo 2.

31. $-5 \square 5$

32. $0 \square -1$

33. $-12 \square -6$

34. $-7 \square -6$

35. $-10 \square -17$

36. $-11 \square -20$

37. $-325 \square -532$

38. $-401 \square -104$

Indique si cada enunciado es falso o verdadero. Vea el Ejemplo 3.

39. $-15 \leq -14$

40. $-77 \leq -76$

41. $210 \geq 210$

42. $37 \geq 37$

43. $-1{,}255 \geq -1{,}254$

44. $-6{,}546 \geq -6{,}465$

45. $0 \leq -8$

46. $-6 \leq -6$

Encuentre cada valor absoluto. Vea el Ejemplo 4.

47. $|9|$

48. $|12|$

49. $|-8|$

50. $|-1|$

51. $|-14|$

52. $|-85|$

53. $|180|$

54. $|371|$

Simplifique cada expresión. Vea el Ejemplo 5.

55. $-(-11)$

56. $-(-1)$

57. $-(-4)$

58. $-(-9)$

59. $-(-102)$

60. $-(-295)$

61. $-(-561)$

62. $-(-703)$

63. $-|20|$

64. $-|143|$

65. $-|6|$

66. $-|0|$

67. $-|-253|$

68. $-|-11|$

69. $-|-0|$

70. $-|97|$

INTÉNTELO

Coloque un símbolo $<$ o $>$ en el recuadro para formar un enunciado verdadero.

71. $|-12| \square -(-7)$

72. $|-50| \square -(-40)$

73. $-|-71| \square -|-65|$

74. $-|-163| \square -|-150|$

75. $-(-343) \square -(-161)$

76. $-(-999) \square -(-998)$

77. $-|-30| \square -|-(-8)|$

78. $-|-100| \square -|-(-88)|$

Escriba los enteros en orden, de menor a mayor.

79. $82, -52, 52, -22, 12, -12$

80. $49, -9, 19, -39, 89, -49$

Complete los espacios para continuar cada patrón.

81. $5, 3, 1, -1, \square, \square, \square, \ldots$

82. $4, 2, 0, -2, \square, \square, \square, \ldots$

APLICACIONES

83. CARRERAS DE CABALLOS En el Belmont Stakes de 1973, *Secretariat* ganó por 31 cuerpos sobre el segundo lugar, *Twice a Prince*. Algunos expertos la llaman la mejor actuación de un pura

sangre en la historia de las carreras. Exprese la posición de *Twice a Prince* en comparación con *Secretariat* como un número con signo. (Fuente: ezinearticles.com)

© Bettmann/Corbis

84. NASCAR En el campeonato de pilotos de la NASCAR se utilizan números negativos para indicar cuántos puntos detrás del líder está un determinado piloto. En el 2008 Jimmie Johnson fue el líder. Los otros pilotos en los primeros 10 lugares fueron Greg Biffle (−217), Clint Bowyer (−303), Jeff Burton (−349), Kyle Busch (−498), Carl Edwards (−69), Jeff Gordon (−368), Denny Hamlin (−470), Kevin Harvick (−276) y Tony Stewart (−482). Use esta información para clasificar a los pilotos en la tabla de abajo.

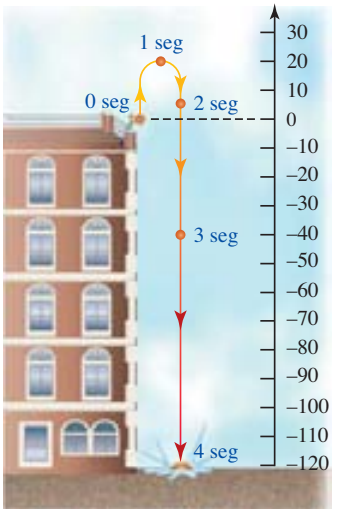
AP Images

Final del campeonato de pilotos de NASCAR 2008

Lugar	Conductor	Puntos detrás del líder
1	Jimmie Johnson	Líder
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

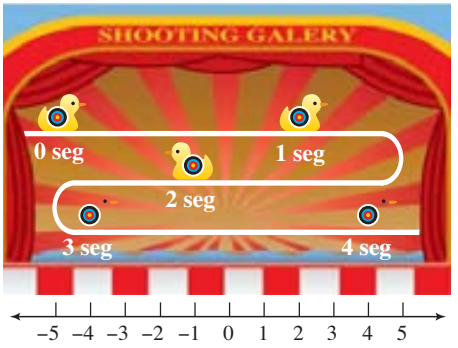
(Fuente: NASCAR.com)

85. CAÍDA LIBRE Un niño lanza un globo con agua desde la parte superior de un edificio, como se muestra en la siguiente columna. En ese instante su amigo activa un cronómetro y mide el tiempo a medida que el globo se eleva del edificio y después cae al suelo. Use la recta numérica para estimar la posición del globo en cada tiempo listado en la tabla de abajo.



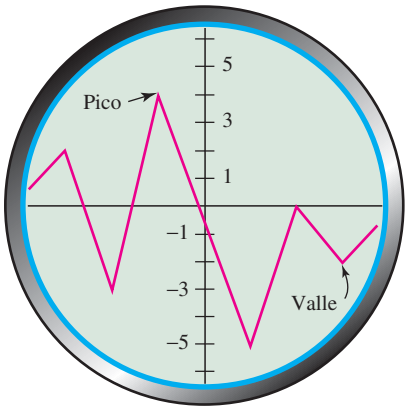
Tiempo	Posición del globo
0 seg	
1 seg	
2 seg	
3 seg	
4 seg	

86. JUEGOS DE FERIA En la galería de tiro de una feria, los participantes apuntan a patos en movimiento. Se muestra la trayectoria de un pato, junto con el tiempo que le toma al pato alcanzar cierta posición en el muro de la galería. Use la recta numérica para estimar la posición del pato en cada tiempo listado en la tabla de abajo.



Tiempo	Posición del pato
0 seg	
1 seg	
2 seg	
3 seg	
4 seg	

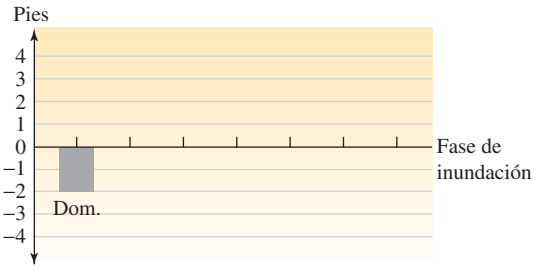
87. TECNOLOGÍA Se muestra la lectura de un osciloscopio. Use la recta numérica para encontrar la altura de cada uno de los picos y la profundidad de cada uno de los valles.



88. INUNDACIÓN En la tabla se da una semana de reportes diarios que listan la altura de un río en comparación con la fase de inundación. Complete la gráfica de barras mostrada abajo.

Reporte de la fase de inundación

Dom.	2 pies debajo
Lun.	3 pies sobre
Mar.	4 pies sobre
Mié.	2 pies sobre
Jue.	1 pies debajo
Vie.	3 pies debajo
Sáb.	4 pies debajo

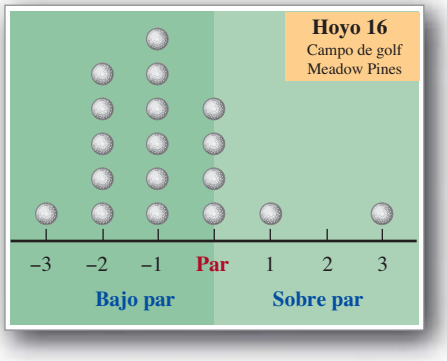


89. GOLF En el golf, el *par* es el número estándar de golpes considerados necesarios en un hoyo dado. Un marcador de −2 indica que el golfista utilizó 2 golpes menos que el par. Un marcador de +2 significa que se utilizaron 2 golpes más que el par. En la gráfica en la siguiente columna, cada pelota de golf representa el marcador de un golfista profesional en el hoyo 16 de cierto campo.

a. ¿Qué marcador fue tirado con mayor frecuencia en este hoyo?

b. ¿Cuál fue el mejor marcador en ese hoyo?

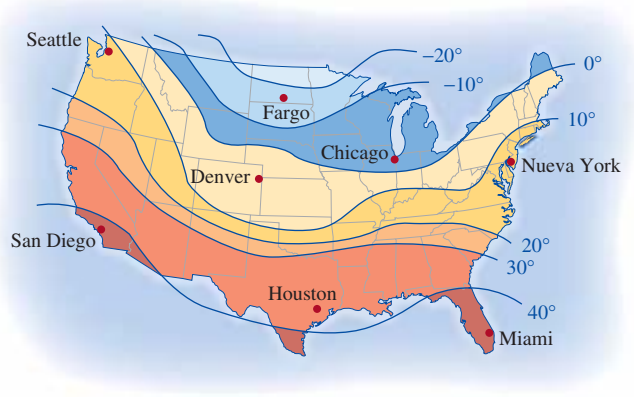
c. Explique por qué este hoyo parece ser más fácil para un golfista profesional.



90. RECIBO DE NÓMINA Examine los datos listados en el siguiente recibo de nómina. Después escriba dos columnas en su hoja, una titulada "positivo" y la otra "negativo". Liste cada dato bajo el título adecuado.

Tom Dryden Dic. 09		Bono de navidad	$100
Sueldo bruto	$2,000	**Reducciones**	
Horas extra	$300	Retiro	$200
Deducciones		**Impuestos**	
Cuotas sindicales	$30	Retención federal	$160
Obligaciones de E.U.	$100	Retención estatal	$35

91. MAPAS DEL CLIMA La ilustración muestra las temperaturas Fahrenheit pronosticadas para un día a mediados de enero.



a. ¿Cuál es el intervalo de temperatura para la región, que incluye a Fargo, Dakota del Norte?

b. De acuerdo con el pronóstico, ¿qué es lo más caluroso que se debe poner en Houston?

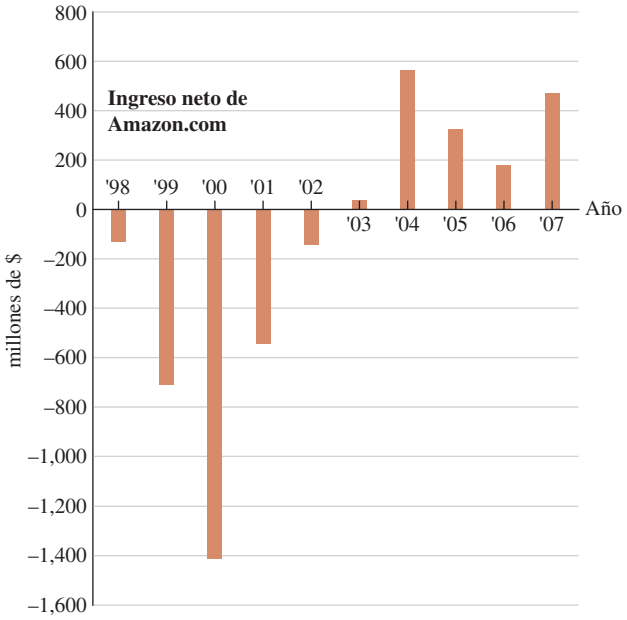
c. De acuerdo con este pronóstico, ¿qué es lo más frío que se debe poner en Seattle?

92. COMPAÑÍAS EN INTERNET La gráfica en la siguiente página muestra el ingreso neto de Amazon.com para los años 1998-2007. (Fuente: Morningstar.)

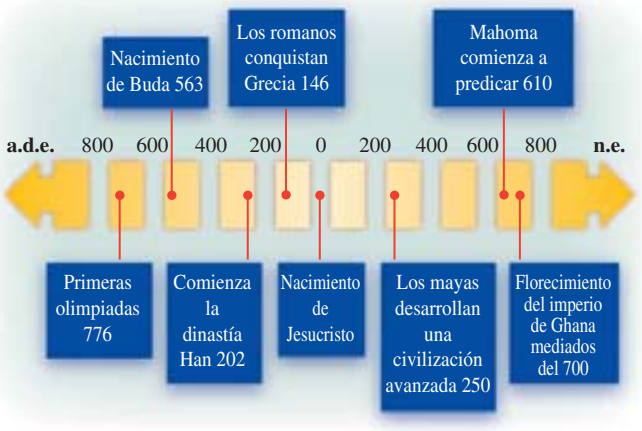
a. ¿En qué años sufrió Amazon una pérdida? Estime cada pérdida.

b. ¿En qué año Amazon obtuvo primero una ganancia? Estímela.

c. ¿En qué año tuvo Amazon su mayor ganancia? Estímela.



93. HISTORIA Se puede utilizar una recta numérica para mostrar información histórica. En la línea de tiempo de abajo se muestran algunos eventos mundiales importantes.



a. ¿Qué unidad básica se utiliza para escalar esta línea cronológica?

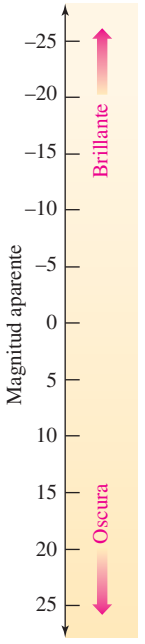
b. ¿Cuáles pueden considerarse números positivos?

c. ¿Cuáles pueden considerarse números negativos?

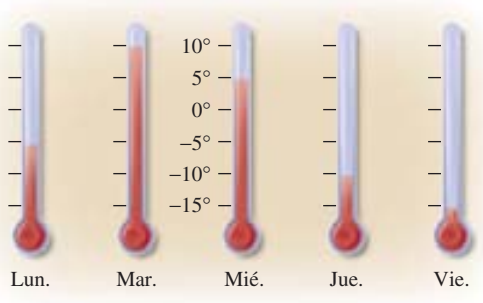
d. ¿Qué evento importante distingue a los números positivos de los negativos?

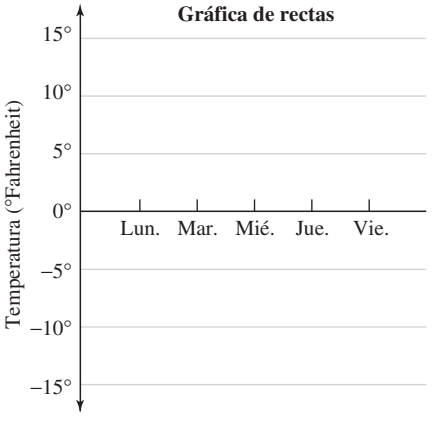
94. ASTRONOMÍA Los astrónomos emplean una recta numérica vertical invertida llamada *escala de magnitud aparente* para indicar la luminosidad de los objetos en el cielo. Mientras más brillante parezca un objeto a un observador en la Tierra, más negativa es su magnitud aparente. Grafique cada uno de los siguientes en la escala a la derecha.

- Límite visual de binoculares +10
- Límite visual de un telescopio grande +20
- Límite visual a simple vista +6
- Luna llena −12
- Plutón +15
- Sirio (una estrella brillante) −2
- Sol −26
- Venus −4



95. GRÁFICAS DE RECTAS Cada termómetro en la ilustración proporciona la temperatura alta diaria en grados Fahrenheit. Use la información para completar la gráfica de rectas abajo.



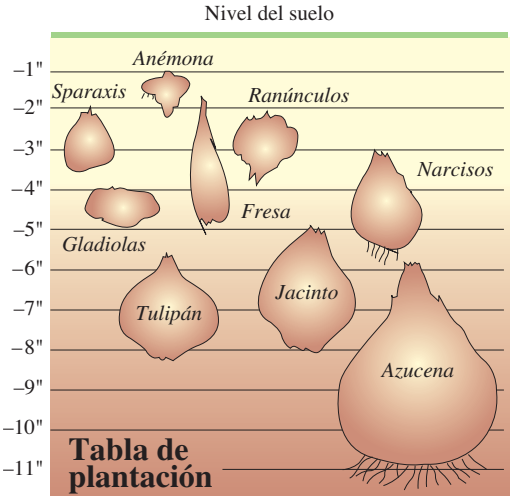


96. JARDINERÍA La ilustración muestra las profundidades a la que deben plantarse las raíces de varios tipos de bulbos de flor. (El símbolo ″ representa pulgadas.)

a. ¿A qué profundidad se debe plantar un bulbo de tulipán?

b. ¿Qué más profundo se plantan los bulbos de jacinto que los bulbos de gladiola?

c. ¿Qué bulbo debe plantarse lo más profundamente? ¿Qué tan profundo?



REDACCIÓN

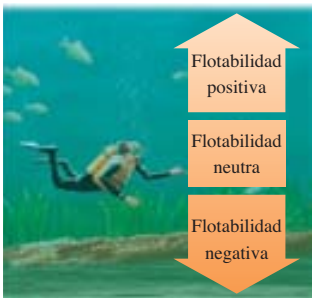
97. Explique el concepto de *opuesto de un número.*

98. ¿Qué situación en la vida real piensa que da origen al concepto de un número negativo?

99. Explique por qué el valor absoluto de un número nunca es negativo.

100. Dé un ejemplo del uso de la recta numérica que haya visto en otro curso.

101. BUCEO Los buzos emplean los términos *flotabilidad positiva, flotabilidad neutra* y *flotabilidad negativa* como se muestra. ¿Qué piensa que significa cada uno de estos términos?



102. GEOGRAFÍA Gran parte de Holanda está a altitud baja, con la mitad del país debajo del nivel del mar. Explique por qué no está bajo el agua.

103. Suponga que el entero A es mayor que el entero B. ¿El opuesto del entero A es mayor que el entero B? Explique por qué o por qué no. Use un ejemplo.

104. Explique por qué el -11 es menor que el -10.

REPASO

105. Redondee el 23,456 a la centena más cercana.

106. Evalúe: $19 - 2 \cdot 3$

107. Reste 2,081 de 2,842.

108. Divida 346 entre 15.

109. Dé el nombre de la propiedad mostrada abajo:

$$(13 \cdot 2) \cdot 5 = 13 \cdot (2 \cdot 5)$$

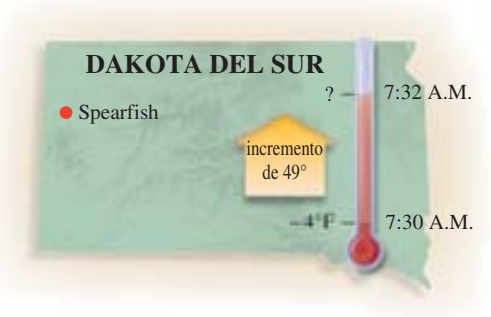
110. Escriba *cuatro veces cinco* utilizando tres símbolos diferentes.

Objetivos

1. Sumar dos enteros que tienen el mismo signo.
2. Sumar dos enteros que tienen signos diferentes.
3. Desarrollar varias sumas para evaluar expresiones.
4. Identificar opuestos (inversos aditivos) cuando se suman enteros.
5. Resolver problemas de aplicación sumando enteros.

SECCIÓN 2.2
Suma de enteros

En 1943 ocurrió un cambio sorprendente en la temperatura en Spearfish, Dakota del Sur. En enero 22, a las 7:30 A.M., la temperatura era de -4 grados Fahrenheit. De repente golpearon vientos cálidos fuertes y, en sólo 2 minutos, ¡la temperatura se elevó 49 grados! Para calcular la temperatura a las 7:32 A.M., se necesita sumar 49 a -4.



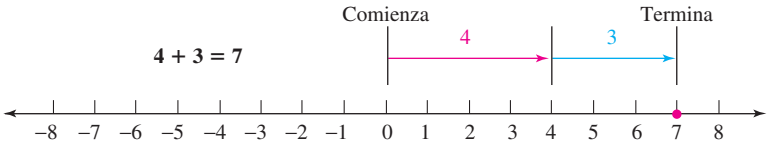
$$-4 + 49$$

Para desarrollar esta adición, se debe conocer cómo sumar enteros positivos y negativos. En esta sección se desarrollan las reglas para ayudarle a realizar tales cálculos.

El lenguaje de las matemáticas En 1724, Daniel Gabriel Fahrenheit, científico alemán, introdujo la escala de temperatura que lleva su nombre. Estados Unidos es uno de los pocos países que sigue empleando esta escala. La temperatura de -4 grados Fahrenheit puede escribirse de forma más compacta como $-4\ ^\circ\text{F}$.

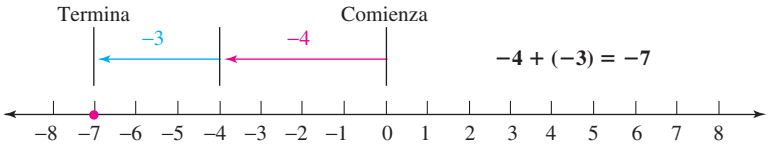
1 Sumar dos enteros que tienen el mismo signo

Se puede utilizar la recta numérica para explicar la suma de enteros. Por ejemplo, para encontrar $4 + 3$ se comienza en el 0 y se traza una flecha de cuatro unidades de largo que apunte a la derecha. Esta representa al 4 positivo. Después desde la punta de esa flecha, se traza una segunda, de 3 unidades de largo, que apunte a la derecha. Esta representa al 3 positivo. Dado que se termina en el 7, se tiene que $4 + 3 = 7$.



Para comprobar este resultado, se piensa en el problema en términos de dinero. Si tuviese \$4 y obtuviera \$3 más, tendría un total de \$7.

Para encontrar $-4 + (-3)$ en una recta numérica, se comienza en el 0 y se traza una flecha de 4 unidades de largo que apunte a la izquierda. Esta representa al -4. Desde la punta de la flecha, se traza una segunda flecha, de 3 unidades de largo, que apunte a la izquierda. Esta representa al -3. Dado que se termina en -7, se tiene que $-4 + (-3) = -7$.



Se piensa en este problema en términos de dinero. Si perdiera \$4 (-4) y después perdiera otros \$3 (-3), habría perdido un total de \$7 (-7).

Aquí hay algunas observaciones acerca del proceso de suma de dos números que tienen el mismo signo en una recta numérica.

- Las flechas que representan los enteros apuntan a la misma dirección y se trazan una después de la otra.
- La respuesta tiene el mismo signo que los enteros que se suman.

Estas observaciones ilustran las siguientes reglas.

Suma de dos enteros que tienen los mismos signos (similares)

1. Para sumar dos enteros positivos, súmelos como siempre. La respuesta final es positiva.
2. Para sumar dos enteros negativos, sume sus valores positivos y haga negativa la respuesta final.

El lenguaje de las matemáticas Cuando se escriben sumas que involucran enteros, se escriben entre paréntesis los enteros negativos para separar el signo negativo, −, del símbolo positivo +.

$9 + (-4)$ $9 + -4$ y $-9 + (-4)$ $-9 + -4$

Auto-revisión 1

Sume:

a. $-7 + (-2)$

b. $-25 + (-48)$

c. $-325 + (-169)$

Ahora intente **Problemas 19, 23 y 27**

EJEMPLO 1 Sume: **a.** $-3 + (-5)$ **b.** $-26 + (-65)$ **c.** $-456 + (-177)$

Estrategia Se utilizará la regla para la suma de dos enteros que tienen el *mismo signo.*

POR QUÉ En cada caso, se le pide que sume dos enteros negativos.

Solución

a. Para sumar dos enteros negativos, se suman los valores absolutos de los enteros y se hace negativa la respuesta final. Dado que $|-3| = 3$ y $|-5| = 5$, se tiene

$-3 + (-5) = -8$ Sume sus valores absolutos, 3 y 5, para obtener 8. Después haga negativa la respuesta final.

b. Encuentre los valores absolutos: $|-26| = 26$ y $|-65| = 65$

$-26 + (-65) = -91$ Sume sus valores absolutos, 26 y 65, para obtener 91. Después haga negativa la respuesta final.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 26 \\ +65 \\ \hline 91 \end{array}$$

c. Encuentre los valores absolutos: $|-456| = 456$ y $|-177| = 177$

$-456 + (-177) = -633$ Sume sus valores absolutos, 456 y 177, para obtener 633. Después haga negativa la respuesta final.

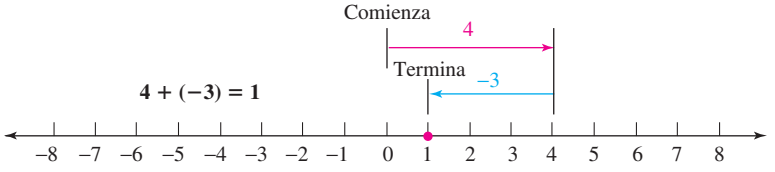
$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1} \\ 456 \\ +177 \\ \hline 633 \end{array}$$

Consejo útil Los cálculos que no pueda desarrollar de manera mental deben mostrarse fuera de los pasos de su solución.

El lenguaje de las matemáticas Se dice que dos enteros negativos, al igual que dos enteros positivos, tienen signos *similares*.

2 Sumar dos enteros que tienen signos diferentes

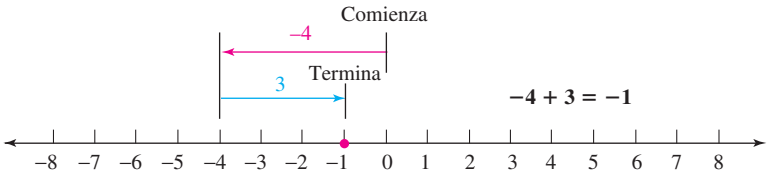
Para encontrar $4 + (-3)$ en una recta numérica, se comienza en el 0 y se traza una flecha de 4 unidades de largo que apunte a la derecha. Esta representa al 4 positivo. A partir de la punta de esa flecha, se traza una segunda flecha, de 3 unidades de largo, que apunte a la izquierda. Esta representa al -3. Dado que se termina en el 1, se tiene que $4 + (-3) = 1$.



En términos de dinero, si ganó \$4 y después perdió \$3 (-3), en total le quedaría \$1.

Para encontrar $-4 + 3$ en una recta numérica, se comienza en el 0 y se traza una flecha de 4 unidades de largo que apunte a la izquierda. Esta representa al -4. A partir de la punta de esa flecha, se traza una segunda flecha, de 3 unidades de largo, que

apunte a la derecha. Esta representa al 3 positivo. Dado que se termina en el -1, se tiene que $-4 + 3 = -1$.



En términos de dinero, si perdió \$4 (-4) y después ganó \$3, en total ha perdido \$1 (-1).

Aquí hay algunas observaciones acerca del proceso de la suma de dos enteros que tienen signos diferentes en una recta numérica.

- Las flechas que representan a los enteros apuntan en direcciones opuestas.
- La más larga de las dos flechas determina el signo de la respuesta. Si la flecha más larga representa a un entero positivo, la suma es positiva. Si representa a un entero negativo, la suma es negativa.

Estas observaciones sugieren las siguientes reglas.

Suma de dos enteros que tienen signos diferentes (no similares)

Para sumar un entero positivo y un entero negativo, reste el valor absoluto más pequeño del más grande.

1. Si el entero positivo tiene el valor absoluto más grande, la respuesta final es positiva.
2. Si el entero negativo tiene el valor absoluto más grande, haga negativa la respuesta final.

EJEMPLO 2

Sume: $5 + (-7)$

Estrategia Se utilizará la regla para la suma de dos enteros que tienen signos diferentes.

POR QUÉ El sumando 5 es positivo y el sumando -7 es negativo.

Solución

Paso 1 Para sumar dos enteros con signos diferentes, primero se resta el valor absoluto más pequeño del valor absoluto más grande. Dado que $|5|$, el cual es 5, es menor que $|-7|$, el cual es 7, se comienza restando 5 de 7.

$$7 - 5 = 2$$

Paso 2 Dado que el número negativo, -7, tiene el valor absoluto más grande, se añade un signo negativo $-$ al resultado del paso 1. Por tanto,

$$5 + (-7) = -2$$

Haga negativa la respuesta final.

Auto-revisión 2

Sume: $6 + (-9)$

Ahora intente **Problema 31**

El lenguaje de las matemáticas Se dice que un entero positivo y un entero negativo tienen signos *no similares*.

Auto-revisión 3

Sume:

a. $7 + (-2)$

b. $-53 + 39$

c. $-506 + 888$

Ahora intente **Problemas 33, 35 y 39**

EJEMPLO 3 Sume: **a.** $8 + (-4)$ **b.** $-41 + 17$ **c.** $-206 + 568$

Estrategia Se utilizará la regla para la suma de dos enteros que tienen signos diferentes.

POR QUÉ En cada caso, se le pide que sume un entero positivo y un entero negativo.

Solución

a. Encuentre los valores absolutos: $|8| = 8$ y $|-4| = 4$

$8 + (-4) = 4$

Reste el valor absoluto más pequeño del más grande, $8 - 4 = 4$. Dado que el número positivo, 8, tiene el valor absoluto más grande, la respuesta final es positiva.

b. Encuentre los valores absolutos: $|-41| = 41$ y $|17| = 17$

$-41 + 17 = -24$

Reste el valor absoluto más pequeño del más grande, $41 - 17 = 24$. Dado que el número negativo, -41, tiene el valor absoluto más grande, haga negativa la respuesta.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 3\,11} \\ 4\not{1} \\ -\,17 \\ \hline 24 \end{array}$$

c. Encuentre los valores absolutos: $|-206| = 206$ y $|568| = 568$

$-206 + 568 = 362$

Reste el valor absoluto más pequeño del más grande, $568 - 206 = 362$. Dado que el número positivo, 568, tiene el valor absoluto más grande, la respuesta final es positiva.

$$\begin{array}{r} 568 \\ -\,206 \\ \hline 362 \end{array}$$

¡Cuidado! ¿Se dio cuenta de que las respuestas para los problemas de suma en los Ejemplos 2 y 3 se encontraron utilizando una resta? Este es el caso cuando la suma involucra dos enteros que tienen *signos diferentes*.

PIENSE DETENIDAMENTE ***Flujo de efectivo***

"La universidad puede ser una prueba de fuego: un examen de cómo hacerle frente a la presión, la libertad, las distracciones y a una inundación de ofertas de tarjetas de crédito. Es fácil como estudiante entrar en un ciclo de sobregasto y endeudamiento innecesario."

Planning for College, Wells Fargo Bank

Si su ingreso es menor que sus gastos, tiene un flujo de efectivo *negativo*. Un flujo de efectivo negativo puede ser una bandera roja de que debe aumentar su ingreso y/o reducir sus gastos. ¿Cuáles de las siguientes actividades pueden aumentar su ingreso y cuáles pueden reducir sus gastos?

- Comprar artículos genéricos o de marca propia.
- Obtener más entrenamiento y/o más educación.
- Usar su identificación de estudiante para obtener descuentos en tiendas, eventos, etcétera.
- Trabajar más horas.
- Convertir un pasatiempo o una actividad en un negocio que produzca dinero.
- Ser tutor de estudiantes más jóvenes.
- Detener hábitos caros, como fumar, comprar golosinas cada día, etcétera.
- Asistir a actividades gratis y días gratis o con descuento en atracciones locales.
- Vender artículos usados con poca regularidad, como un reproductor de CD viejo.
- Comparar los precios de al menos tres productos o en tres tiendas antes de comprar.

Basado en *Construcción de habilidades financieras*, por Fundación Nacional para la Educación Financiera.

3 Desarrollar varias sumas para evaluar expresiones

Para evaluar expresiones que contienen varias sumas, se hace un uso repetitivo de las reglas para la suma de dos enteros.

EJEMPLO 4 Evalúe: $-3 + 5 + (-12) + 2$

Estrategia Dado que no hay cálculos dentro de paréntesis, no hay expresiones exponenciales y no hay multiplicación o división, se desarrollarán las sumas, empezando de izquierda a derecha.

POR QUÉ Este es el paso 4 de la regla del orden de las operaciones que se introdujo en la Sección 1.9.

Solución

$$\begin{aligned} -3 + 5 + (-12) + 2 &= 2 + (-12) + 2 && \text{Use la regla para la suma de dos enteros que tienen signos diferentes: } -3 + 5 = 2. \\ &= -10 + 2 && \text{Use la regla para la suma de dos enteros que tienen signos diferentes: } 2 + (-12) = -10. \\ &= -8 && \text{Use la regla para la suma de dos enteros que tienen signos diferentes.} \end{aligned}$$

Auto-revisión 4

Evalúe:
$-12 + 8 + (-6) + 1$

Ahora intente **Problema 43**

Las propiedades de la suma que se introdujeron en la Sección 1.2, *Suma de números naturales,* también son verdaderas para los enteros.

Propiedad conmutativa de la suma

El orden en que se suman los enteros no cambia su suma.

Propiedad asociativa de la suma

El orden en que se agrupan los enteros no cambia su suma.

Otro método para evaluar una expresión como la del Ejemplo 4 es utilizar estas propiedades para reordenar y reagrupar los enteros de una manera útil.

EJEMPLO 5 Use las propiedades conmutativa y/o asociativa de la suma para que le ayuden a evaluar la expresión: $-3 + 5 + (-12) + 2$

Estrategia Se utilizarán las propiedades conmutativa y/o asociativa de la suma para que se puedan sumar los positivos y sumar los negativos por separado. Después se sumarán esos resultados para obtener la respuesta final.

POR QUÉ Es más fácil sumar enteros que tienen el mismo signo que enteros que tienen signos diferentes. Este método disminuye la posibilidad de un error, debido a que sólo se tienen que sumar enteros que tienen signos diferentes una vez.

Solución

$$\begin{aligned} &-3 + 5 + (-12) + 2 \\ &= -3 + (-12) + 5 + 2 && \text{Use la propiedad conmutativa de la suma para reordenar los enteros.} \\ &\quad \text{Negativos} \qquad \text{Positivos} \\ &= [-3 + (-12)] + (5 + 2) && \text{Use la propiedad asociativa de la suma para agrupar los negativos y para agrupar los positivos.} \end{aligned}$$

Auto-revisión 5

Use las propiedades conmutativa y/o asociativa de la suma para que le ayuden a evaluar la expresión:
$-12 + 8 + (-6) + 1$

Ahora intente **Problema 45**

$= -15 + 7$ Use la regla para la suma de dos enteros que tienen el mismo signo dos veces. Sume los negativos dentro de los corchetes. Sume los positivos dentro de los paréntesis.

$= -8$ Use la regla para la suma de dos enteros que tienen signos diferentes. Este es el mismo resultado que en el Ejemplo 4.

Auto-revisión 6

Evalúe:
$(-6 + 8) + [10 + (-17)]$

Ahora intente **Problema 47**

EJEMPLO 6 Evalúe: $[-21 + (-5)] + (-17 + 6)$

Estrategia Primero se desarrollarán la suma dentro de los corchetes y la suma dentro de los paréntesis. Después se sumarán esos resultados.

POR QUÉ Por la regla del orden de las operaciones se deben desarrollar primero los cálculos dentro de los símbolos de agrupación.

Solución Use la regla para la suma de dos enteros que tienen el mismo signo para realizar la suma dentro de los corchetes, y la regla para la suma de dos enteros que tienen signos diferentes para realizar la suma dentro de los paréntesis.

$[-21 + (-5)] + (-17 + 6) = -26 + (-11)$ Sume dentro de cada par de símbolos de agrupación.

$= -37$ Use la regla para la suma de dos enteros que tienen el mismo signo.

4 Identificar opuestos (inversos aditivos) cuando se suman enteros

Recuerde a partir de la Sección 1.2 que cuando se suma el 0 a un número natural, el número natural permanece igual. Esto también es verdadero para los enteros. Por ejemplo, $-5 + 0 = -5$ y $0 + (-43) = -43$. Debido a esto, se le llama al 0 **identidad aditiva.**

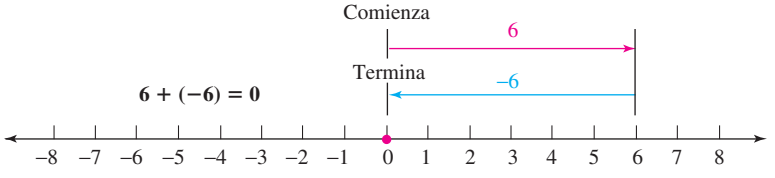
El lenguaje de las matemáticas *Identidad* es la palabra de la que se deriva *idéntico,* que significa lo mismo. Probablemente ha visto gemelos *idénticos*.

Propiedad de la suma del 0

La suma de cualquier entero y el 0 es ese entero. Por ejemplo,

$-3 + 0 = -3, \quad -19 + 0 = -19 \quad$ y $\quad 0 + (-76) = -76$

Existe otro hecho importante acerca de la operación de la suma y el 0. Para ilustrarlo, se usa la recta numérica de abajo para sumar el 6 y su opuesto, el -6. Observe que $6 + (-6) = 0$.



Si la suma de dos números es 0, se dice que los números son **inversos aditivos** entre sí. Dado que $6 + (-6) = 0$, se dice que el 6 y el -6 son inversos aditivos. De manera similar, el -7 es el inverso aditivo del 7 y el 51 es el inverso aditivo del -51.

Ahora se puede clasificar un par de enteros como el 6 y el -6 de tres maneras: como opuestos, negativos o inversos aditivos.

Propiedad de la suma de los opuestos

La suma de un entero y su opuesto (inverso aditivo) es 0. Por ejemplo,

$4 + (-4) = 0, \quad -53 + 53 = 0 \quad$ y $\quad 710 + (-710) = 0$

En ciertas ocasiones, la propiedad de la suma de los opuestos puede utilizarse para hacer más sencilla la suma de varios enteros.

EJEMPLO 7 Evalúe: $12 + (-5) + 6 + 5 + (-12)$

Estrategia En vez de resolver de izquierda a derecha, se utilizarán las propiedades conmutativa y asociativa de la suma para sumar los *pares de opuestos*.

POR QUÉ Dado que la suma de un entero y su opuesto es 0, es de utilidad identificar tales pares en una suma.

Solución

opuestos

$12 + (-5) + 6 + 5 + (-12) = 0 + 0 + 6$ Localice los pares de opuestos y súmelos para obtener 0.

opuestos

$= 6$ La suma de cualquier entero y el 0 es ese entero.

Auto-revisión 7

Evalúe:
$8 + (-1) + 6 + (-8) + 1$

Ahora intente **Problema 51**

5 Resolver problemas de aplicación sumando enteros

Dado que los problemas de aplicación casi siempre están escritos en palabras, la habilidad para comprender lo que lee es muy importante. Recuerde a partir del Capítulo 1 que las palabras y frases como *ganó, incrementa en* y *eleva* indican una suma.

EJEMPLO 8 ***Récord de cambio de temperatura*** Al inicio de esta sección se indicó que a las 7:30 A.M. el 22 de enero de 1943, en Spearfish, Dakota del Sur, la temperatura era de -4 °F. Después la temperatura se elevó 49 grados en justo 2 minutos. ¿Cuál era la temperatura a las 7:32 A.M.?

Estrategia Se leerá con cuidado el problema buscando una palabra o frase clave.

POR QUÉ Las palabras y frases clave indican qué operaciones aritméticas deben utilizarse para resolver el problema.

Solución La frase *se elevó 49 grados* indica una suma. Con eso en mente, se traducen las palabras del problema a números y símbolos.

La temperatura a las 7:32 A.M.	era	la temperatura de las 7:30 A.M.	más	49 grados
La temperatura a las 7:32 A.M.	=	-4	+	49

Para encontrar la suma, se utilizará la regla para la suma de dos enteros que tienen signos diferentes. Primero, se encuentran los valores absolutos: $|-4| = 4$ y $|49| = 49$.

$-4 + 49 = 45$ Reste el valor absoluto más pequeño del valor absoluto más grande: $49 - 4 = 45$. Dado que el número positivo 49 tiene el valor absoluto más grande, la respuesta final es positiva.

A las 7:32 A.M., la temperatura fue de 45 °F.

Auto-revisión 8

CAMBIO DE TEMPERATURA En la mañana del 21 de febrero de 1918, en Granville, Dakota del Sur, la temperatura baja en la mañana era de -33 °F. En la tarde, la temperatura se había elevado un récord de 83 grados. ¿Cuál era la temperatura alta en la tarde en Granville? (Fuente: *Clima extremo* por Christopher C. Burt.)

Ahora intente **Problema 83**

Utilizando su CALCULADORA Introducción de números negativos

Canadá es el socio comercial más grande de E.U. Para calcular el balance comercial en el 2007 de E.U. con Canadá, se suma el valor de $249 mil millones de las exportaciones de E.U. *a* Canadá (considerado positivo) al valor de $317 mil millones de las importaciones de E.U. *desde* Canadá (considerado negativo). Se puede utilizar una calculadora para desarrollar la suma $249 + (-317)$

No se tiene que hacer nada especial para introducir un número positivo. Los números negativos se introducen utilizando una **introducción directa** o **inversa**, dependiendo del tipo de calculadora que posea.

Para introducir el -317 utilizando la introducción inversa, presione la tecla de cambio de signo [+/−] *después de introducir* el 317. Para introducir el -317 utilizando una introducción directa, presione la tecla [(−)] *antes* de introducir el 317. En cualquier caso, observe que las teclas [+/−] y [(−)] son diferentes de la tecla de resta [−].

Introducción inversa: 249 [+] 317 [+/−] [=]

Introducción directa: 249 [+] [(−)] 317 [ENTER]

En el 2007, Estados Unidos tuvo un balance comercial de $-\$68$ mil millones con Canadá. Debido a que el resultado es negativo, se le llama *déficit* comercial.

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. a. -9 **b.** -73 **c.** -494 **2.** -3 **3. a.** 5 **b.** -14 **c.** 382 **4.** -9 **5.** -9 **6.** -5 **7.** 6 **8.** 50°F

SECCIÓN 2.2 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Complete los espacios.

1. Se dice que dos enteros negativos, al igual que dos enteros positivos, tienen signos iguales o _____.
2. Se dice que un entero positivo y un entero negativo tienen signos diferentes o _____.
3. Cuando se suma el 0 a un número, el número permanece igual. Al 0 se le llama _____ aditivo.
4. Dado que $-5 + 5 = 0$, se dice que el 5 es el _____ aditivo del -5. También se puede decir que el 5 y el -5 son _____.
5. Propiedad _____ de la suma: El orden en el que se suman los enteros no cambia su suma.
6. Propiedad _____ de la suma: La manera en la que se agrupan los enteros no cambia su suma.

CONCEPTOS

7. **a.** ¿Cuál es el valor absoluto del 10? ¿Cuál es el valor absoluto del -12?
   b. ¿Cuál número tiene el valor absoluto más grande, el 10 ó el -12?
   c. Utilizando sus respuestas al inciso a, reste el valor absoluto más pequeño del valor absoluto más grande. ¿Cuál es el resultado?
8. **a.** Si perdió \$6 y después perdió \$8, en total, ¿qué cantidad de dinero perdió?
   b. Si perdió \$6 y después ganó \$8, ¿qué cantidad de dinero ganó?

Complete los espacios.

9. Para sumar dos enteros con signos no similares, _____ sus valores absolutos, el menor del mayor. Después añada a ese resultado el signo del número con el valor absoluto _____.
10. Para sumar dos enteros con signos similares, sume sus valores _____ y añada su _____ común a la suma.

11. a. ¿La suma de dos enteros positivos siempre es positiva?

b. ¿La suma de dos enteros negativos siempre es negativa?

c. ¿La suma de un entero positivo y un entero negativo siempre es positiva?

d. ¿La suma de un entero positivo y un entero negativo siempre es negativa?

12. Complete la siguiente tabla encontrando el inverso aditivo, el opuesto y el valor absoluto de los números dados.

Número	Inverso aditivo	Opuesto	Valor absoluto
19			
−2			
0			

13. a. ¿Cuál es la suma de un entero y su inverso aditivo?

b. ¿Cuál es la suma de un entero y su opuesto?

14. a. ¿Qué número debe sumársele al −5 para obtener 0?

b. ¿Qué número debe sumársele al 8 para obtener 0?

NOTACIÓN

Complete cada solución para evaluar la expresión.

15. $-16 + (-2) + (-1) = \square + (-1)$
$= \square$

16. $-8 + (-2) + 6 = \square + 6$
$= \square$

17. $(-3 + 8) + (-3) = \square + (-3)$
$= \square$

18. $-5 + [2 + (-9)] = -5 + (\square)$
$= \square$

PRÁCTICA GUIADA

Sume. Vea el Ejemplo 1.

19. $-6 + (-3)$
20. $-2 + (-3)$
21. $-5 + (-5)$
22. $-8 + (-8)$
23. $-51 + (-11)$
24. $-43 + (-12)$
25. $-69 + (-27)$
26. $-55 + (-36)$
27. $-248 + (-131)$
28. $-423 + (-164)$
29. $-565 + (-309)$
30. $-709 + (-187)$

Sume. Vea los Ejemplos 2 y 3.

31. $-8 + 5$
32. $-9 + 3$
33. $7 + (-6)$
34. $4 + (-2)$
35. $20 + (-42)$
36. $-18 + 10$
37. $71 + (-23)$
38. $75 + (-56)$
39. $479 + (-122)$
40. $589 + (-242)$
41. $-339 + 279$
42. $-704 + 649$

Evalúe cada expresión. Vea los Ejemplos 4 y 5.

43. $9 + (-3) + 5 + (-4)$
44. $-3 + 7 + (-4) + 1$
45. $6 + (-4) + (-13) + 7$
46. $8 + (-5) + (-10) + 6$

Evalúe cada expresión. Vea el Ejemplo 6.

47. $[-3 + (-4)] + (-5 + 2)$
48. $[9 + (-10)] + (-7 + 9)$
49. $(-1 + 34) + [16 + (-8)]$
50. $(-32 + 13) + [5 + (-14)]$

Evalúe cada expresión. Vea el Ejemplo 7.

51. $23 + (-5) + 3 + 5 + (-23)$
52. $41 + (-1) + 9 + 1 + (-41)$
53. $-10 + (-1) + 10 + (-6) + 1$
54. $-14 + (-30) + 14 + (-9) + 9$

INTÉNTELO

Sume.

55. $-2 + 6 + (-1)$
56. $4 + (-3) + (-2)$
57. $-7 + 0$
58. $0 + (-15)$
59. $24 + (-15)$
60. $-4 + 14$
61. $-435 + (-127)$
62. $-346 + (-273)$
63. $-7 + 9$
64. $-3 + 6$
65. $2 + (-2)$
66. $-10 + 10$
67. $2 + (-10 + 8)$
68. $(-9 + 12) + (-4)$
69. $-9 + 1 + (-2) + (-1) + 9$
70. $5 + 4 + (-6) + (-4) + (-5)$
71. $[6 + (-4)] + [8 + (-11)]$
72. $[5 + (-8)] + [9 + (-15)]$
73. $(-4 + 8) + (-11 + 4)$
74. $(-12 + 6) + (-6 + 8)$
75. $-675 + (-456) + 99$
76. $-9{,}750 + (-780) + 2{,}345$
77. Encuentre la suma del −6, −7 y −8.
78. Encuentre la suma del −11, −12 y −13.
79. $-2 + [789 + (-9{,}135)]$
80. $-8 + [2{,}701 + (-4{,}089)]$
81. ¿Cuál es 25 más que −45?
82. ¿Cuál es 31 más que −65?

APLICACIONES

Use números con signo para resolver cada problema.

83. RÉCORD DE TEMPERATURA Abajo se muestran las temperaturas récord más bajas para Michigan y Minnesota. Use la información proporcionada para encontrar la temperatura récord más alta para cada estado:

Estado	Temperatura más baja	Temperatura más alta
Michigan	Feb. 9, 1934: −51°F	Julio 13 1936: 163 °F más caliente que la temperatura más baja
Minnesota	Feb. 2, 1996: −60°F	Julio 6 1936: 174 °F más caliente que la temperatura más baja

(Fuente: *The World Almanac Book of Facts,* 2009)

84. ELEVACIONES El punto más bajo en los Estados Unidos es el Valle de la Muerte, California, con una elevación de −282 pies (282 pies debajo del nivel del mar). El Monte McKinley (Alaska) es el punto más alto en los Estados Unidos. Su elevación es 20,602 pies más alta que el Valle de la Muerte. ¿Cuál es la elevación del Monte McKinley? (Fuente: *The World Almanac Book of Facts,* 2009)

85. BARCOS HUNDIDOS Refiérase al mapa de abajo.

a. El acorazado alemán *Bismarck,* una de las naves de guerra más temidas de la Segunda Guerra Mundial, fue hundido por los británicos en 1941. Se encuentra en el lecho marino 15,720 pies debajo del nivel del mar fuera de la costa oeste de Francia. Represente esa profundidad utilizando un número con signo.

b. En 1912, el famoso crucero *Titanic* se hundió después de golpear un iceberg. Se encuentra en el lecho marino del Atlántico Norte, 3,220 pies más alto que el *Bismarck.* ¿A qué profundidad se encuentra el *Titanic*?

86. TROTAR La rutina a la hora del almuerzo de un hombre de negocios incluye trotar 10 pisos de escaleras en su edificio de oficinas. Comienza la rutina en el cuarto nivel debajo del suelo en el estacionamiento subterráneo.

a. Represente ese nivel utilizando un número con signo.

b. ¿En qué piso del edificio finalizará su rutina?

87. INUNDACIONES Después de una tormenta fuerte, un río que había estado 9 pies bajo la fase de inundación se elevó 11 pies en un periodo de 48 horas.

a. Represente el nivel del río antes de la tormenta utilizando un número con signo.

b. Encuentre la altura del río después de la tormenta en comparación con la fase de inundación.

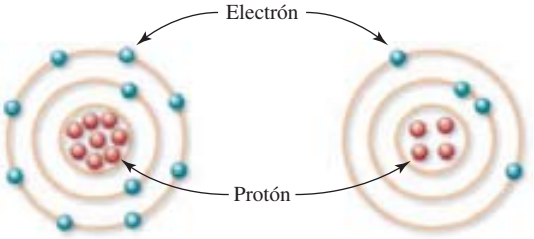
88. ÁTOMOS Un átomo está compuesto por protones, neutrones y electrones. Un protón posee carga positiva (representada por +1), un neutrón no tiene carga y un electrón posee carga negativa (−1). Abajo se muestran dos modelos sencillos de átomos.

a. ¿Cuántos protones tiene el átomo en la figura a)? ¿Cuántos electrones?

b. ¿Cuál es la carga neta del átomo en la figura a)?

c. ¿Cuántos protones tiene el átomo en la figura b)? ¿Cuántos electrones?

d. ¿Cuál es la carga neta del átomo en la figura b)?



a) b)

89. QUÍMICA Abajo se listan los tres pasos de un experimento en un laboratorio de química. El experimento comienza con un compuesto que está almacenado a −40°F.

Paso 1 Eleve la temperatura del compuesto 200°.

Paso 2 Añada azufre y después eleve la temperatura 10°.

Paso 3 Añada 10 mililitros de agua, agite y eleve la temperaturae 25°.

¿Cuál es la temperatura resultante de la mezcla después del paso 3?

Carreras del campus

Asesor financiero personal

© OJO Images Ltd/Alamy

90. Suponga que como asesor financiero personal, sus clientes están considerando comprar una propiedad para ganar dinero. Usted encuentra un departamento dúplex que está a la venta y descubre que los costos de mantenimiento, servicios e impuestos dan un total de $900 por mes. Si el dueño actual recibe pagos de renta mensuales de $450 y $380 de los inquilinos, ¿el dúplex produce un flujo de efectivo positivo cada mes?

91. SALUD Encuentre el total de puntos para los seis factores de riesgo (mostrados con títulos en azul) en el cuestionario médico abajo. Después use la tabla en la parte inferior de la forma (bajo el título en rojo) para determinar el riesgo de contraer una enfermedad cardíaca para el hombre cuyas respuestas se muestran.

Edad		Colesterol total	
Edad	Puntos	Lectura	Puntos
35	–4	280	3
Colesterol		**Presión sanguínea**	
HDL	Puntos	Sistólica/Diastólica	Puntos
62	–3	124/100	3
Diabético		**Fumador**	
	Puntos		Puntos
Si	4	Si	2

Riesgo de enfermedad cardíaca en 10 años

Puntos totales	Riesgo	Puntos totales	Riesgo
–2 o menos	1%	5	4%
–1 a 1	2%	6	6%
2 a 3	3%	7	6%
4	4%	8	7%

Fuente: National Heart, Lung, and Blood Institute

92. ENCUESTAS POLÍTICAS Seis meses antes de una elección general, el senador titular se encontró 18 puntos rezagado de su adversario. Para superar a su oponente, el equipo de campaña decidió emplear una estrategia de cuatro partes. Abajo se muestra cada parte del plan, con la ganancia de puntos anticipada.

Parte 1 Bombardeo intenso de comerciales de TV: ganancia de 10 puntos

Parte 2 Pedir el respaldo de sindicatos: ganancia de 2 puntos

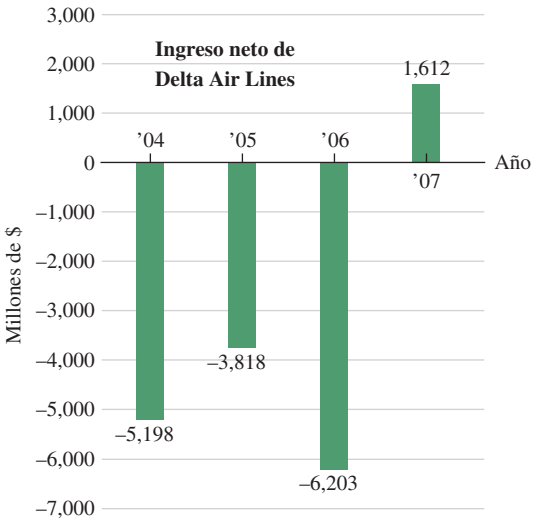
Parte 3 Correspondencia a los votantes: ganancia de 3 puntos

Parte 4 Campaña para obtener el voto: ganancia de 1 punto

Con estas ganancias, ¿el titular superará al adversario el día de la elección?

93. CIENCIA MILITAR Durante una batalla, un ejército se retiró 1,500 metros, se reagrupó y avanzó 3,500 metros. El siguiente día, avanzó 1,250 metros. Encuentre la ganancia neta del ejército.

94. AEROLÍNEAS La gráfica en la siguiente columna muestra el ingreso neto anual de Delta Air Lines durante los años 2004-2007.



(Fuente: *The Wall Street Journal*)

a. Estime, en millones de dólares, el ingreso neto total de la compañía en este periodo de cuatro años.

b. Exprese su respuesta del inciso a en miles de millones de dólares.

95. CONTABILIDAD En un estado financiero, los pasivos (considerados números negativos) se escriben dentro de paréntesis. Los activos (considerados números positivos) se escriben sin paréntesis. ¿Cuál es el patrimonio neto de 2009 para el preescolar cuyos registros financieros se muestran abajo?

Estado financiero del preescolar ABC, Junio de 2009

Fondo	Balance $
Útiles escolares	$5,889
Necesidades de emergencia	$927
Programa de vacaciones	($2,928)
Seguro	$1,645
Limpieza	($894)
Permisos	$715
Mantenimiento	($6,321)
SALDO	?

96. HOJAS DE DATOS En la hoja de datos de abajo se listan los totales de lluvia mensuales para cuatro condados. El −1 introducido en la celda B1 significa que el total de la lluvia para el Condado Suffolk para cierto mes fue de 1 pulgada *debajo* del promedio. Se puede analizar esta información pidiéndole a la computadora que desarrolle varias operaciones.

Libro 1

Archivo Edición Vista Insertar Formato Herramientas Datos Ventana Ayuda

	A	B	C	D	E	F
1	Suffolk	–1	–1	0	+1	+1
2	Marin	0	–2	+1	+1	–1
3	Logan	–1	+1	+2	+1	+1
4	Tipton	–2	–2	+1	–1	–3
5						

a. Para pedirle a la computadora que sume los números en las celdas B1, B2, B3 y B4, se teclea SUM(B1:B4). Encuentre esta suma.

b. Encuentre SUM(F1:F4).

REDACCIÓN

97. ¿La suma de un número positivo y uno negativo siempre es positiva? Explique por qué sí o por qué no.

98. ¿Cómo explica el hecho de que cuando se pide que se *sumen* -4 y 8, en realidad se debe *restar* para obtener el resultado?

99. Explique por qué la suma de dos números negativos es un número negativo.

100. Escriba un problema de aplicación que requiera que se sumen el -50 y el -60.

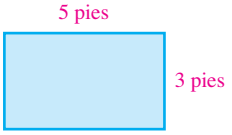
101. Si la suma de dos enteros es 0, ¿qué puede decirse acerca de los enteros? Dé un ejemplo.

102. Explique por qué la expresión $-6 + -5$ no está escrita de manera correcta. ¿Cómo debe escribirse?

REPASO

103. **a.** Encuentre el perímetro del rectángulo mostrado abajo.

b. Encuentre el área del rectángulo mostrado abajo.



104. ¿Qué propiedad está ilustrada por el enunciado $5 \cdot 15 = 15 \cdot 5$?

105. Realice la factorización de primos del 250. Use exponentes para expresar el resultado.

106. Divida: $\dfrac{144}{12}$

Objetivos

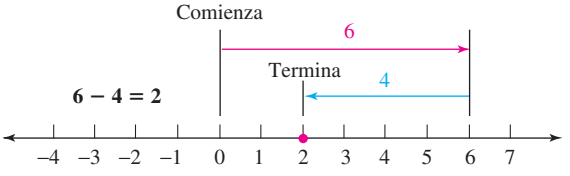
1. Usar la regla de la resta.
2. Evaluar expresiones que involucran resta y suma.
3. Resolver problemas de aplicación restando enteros.

SECCIÓN 2.3
Resta de enteros

En esta sección se explicará una regla que es de utilidad cuando se restan números con signo.

1 Usar la regla de la resta

El problema de resta $6 - 4$ puede pensarse como tomar 4 de 6. Se puede utilizar una recta numérica para ilustrar esto. Comenzando en el cero, se traza una flecha de seis unidades de largo que apunte a la derecha. Esta representa al 6 positivo. Desde la punta de esa flecha, se traza una segunda flecha, de 4 unidades de largo, que apunte a la izquierda. Esta representa el tomar 4. Dado que se termina en el 2, se tiene que $6 - 4 = 2$.



Observe que la ilustración de arriba también representa la *suma* $6 + (-4) = 2$. Se observa que

El restar 4 de 6 . . . es lo mismo que . . . sumar el opuesto del 4 al 6.

$$6 - 4 = 2 \qquad 6 + (-4) = 2$$

Los resultados son iguales.

Esta observación sugiere la siguiente regla.

Regla para la resta

Para restar dos enteros, sume el primer entero al opuesto (inverso aditivo) del entero a restarse.

De manera más sencilla, esta regla dice que la *resta es lo mismo que sumar el opuesto.*

Después de rescribir una resta como la suma del opuesto, entonces se emplea una de las reglas de la suma de números con signo explicada en la Sección 2.2 para encontrar el resultado.

No necesitará emplear esta regla para cada problema de resta. Por ejemplo, $6 - 4$ es obviamente 2; no necesita rescribirse como sumar el opuesto. Pero para problemas más complicados como $-6 - 4$ ó $3 - (-5)$, donde el resultado no es obvio, la regla para la resta será de utilidad.

EJEMPLO 1 Reste y compruebe el resultado:

a. $-6 - 4$ **b.** $3 - (-5)$ **c.** $7 - 23$

Estrategia Para encontrar cada diferencia, se aplicará la regla para la resta: Sumar el primer entero al opuesto del entero a restarse.

POR QUÉ Es fácil cometer un error cuando se restan números con signo. Probablemente será más acertado si se escribe cada resta como una suma del opuesto.

Solución

a. Se lee $-6 - 4$ como "seis negativo *menos* cuatro". Por tanto, el número a restarse es el 4. El restar el 4 es lo mismo que sumar su opuesto, -4.

Cambie la resta a una suma.

$$-6 - 4 = -6 + (-4) = -10$$

Use la regla para la suma de dos enteros con el mismo signo.

Cambie el número que se está restando a su opuesto.

Para comprobar, se suma la *diferencia,* -10, y el *sustraendo,* 4. Se debe obtener el *minuendo,* -6.

Comprobación: $-10 + 4 = -6$ El resultado es correcto.

¡Cuidado! No olvide escribir dentro de paréntesis el opuesto del número a restarse si es negativo.

$$-6 - 4 = -6 + (-4)$$

b. Se lee $3 - (-5)$ como "tres *menos* cinco negativo". Por tanto, el número a restarse es el -5. El restar el -5 es lo mismo que sumar su opuesto, 5.

Sume . . .

$$3 - (-5) = 3 + 5 = 8$$

. . . el opuesto

Comprobación: $8 + (-5) = 3$ El resultado es correcto.

Auto-revisión 1

Reste y compruebe el resultado:

a. $-2 - 3$

b. $4 - (-8)$

c. $6 - 85$

Ahora intente **Problemas 21, 25, y 29**

c. Se lee $7 - 23$ como "siete *menos* veintitrés". Por tanto, el número a restarse es el 23. El restar el 23 es lo mismo que sumar su opuesto, -23.

Sume . . .

$$7 - 23 = 7 + (-23) = -16$$

. . . el opuesto

Use la regla para la suma de dos enteros con signos diferentes.

Comprobación: $-16 + 23 = 7$ El resultado es correcto.

¡Cuidado! Cuando aplique la regla para la resta, *no cambie* el primer número.

$$-6 - 4 = -6 + (-4) \qquad 3 - (-5) = 3 + 5$$

Auto-revisión 2

a. Restar -10 de -7.

b. Restar -7 de -10.

Ahora intente **Problema 33**

EJEMPLO 2

a. Reste -12 de -8. **b.** Reste -8 de -12.

Estrategia Se traducirá cada frase a símbolos matemáticos y después se desarrollará la resta. Se debe tener cuidado cuando se traduce la instrucción para restar un número *de* otro número.

POR QUÉ El orden de los números en cada frase en palabras debe invertirse cuando se traduce a símbolos matemáticos.

Solución

a. Dado que el -12 es el número a restarse, se invierte el orden en el que aparecen en el enunciado el -12 y el -8 cuando se traduce a símbolos.

Restar -12 de -8

$$-8 - (-12)$$

Escribir -12 dentro de paréntesis.

Para encontrar la diferencia, se escribe la resta como una suma del opuesto:

Sume . . .

$$-8 - (-12) = -8 + 12 = 4$$

. . . el opuesto

Use la regla para la suma de dos enteros con signos diferentes.

b. Dado que el -8 es el número a restarse, se invierte el orden en el que aparecen en el enunciado el -8 y el -12 cuando se traduce a símbolos.

Restar -8 de -12

$$-12 - (-8)$$

Escribir -8 dentro de paréntesis.

Para encontrar la diferencia, se escribe la resta como una suma del opuesto:

Sume . . .

$$-12 - (-8) = -12 + 8 = -4$$

. . . el opuesto

Use la regla para la suma de dos enteros con signos diferentes.

El lenguaje de las matemáticas Cuando se cambia un número a su opuesto, se dice que se ha *cambiado* (o *invertido*) su signo.

Recuerde que cualquier problema de resta puede rescribirse como una suma equivalente. Sólo se suma el opuesto del número que se va a restar. Aquí hay cuatro ejemplos:

- $4 - 8 = 4 + (-8) = -4$
- $4 - (-8) = 4 + 8 = 12$
- $-4 - 8 = -4 + (-8) = -12$
- $-4 - (-8) = -4 + 8 = 4$

Cualquier resta puede escribirse como una suma del opuesto del número a restarse.

2 Evaluar expresiones que involucran resta y suma

Las expresiones pueden involucrar una resta repetitiva o combinaciones de resta y suma. Para evaluarlas, se usa la regla del orden de las operaciones explicada en la Sección 1.9.

EJEMPLO 3 Evalúe: $-1 - (-2) - 10$

Estrategia Esta expresión involucra dos restas. Se escribirá cada resta como una suma del opuesto y después se evaluará la expresión utilizando la regla del orden de las operaciones.

POR QUÉ Es fácil cometer un error cuando se restan números con signo. Probablemente será más acertado si se escribe cada resta como una suma del opuesto.

Solución Se aplica la regla para la resta dos veces y después se desarrollan las sumas, empezando de izquierda a derecha. (También se podría sumar por separado los positivos y los negativos y después sumar esos resultados.)

$-1 - (-2) - 10 = -1 + 2 + (-10)$ Sume el opuesto del -2, el cual es el 2. Sume el opuesto del 10, el cual es el -10.

$= 1 + (-10)$ Resuelva de izquierda a derecha. Sume $-1 + 2$ utilizando la regla para la suma de enteros que tienen signos diferentes.

$= -9$ Use la regla para la suma de enteros que tienen signos diferentes.

Auto-revisión 3
Evalúe: $-3 - 5 - (-1)$
Ahora intente **Problema 37**

EJEMPLO 4 Evalúe: $-80 - (-2 - 24)$

Estrategia Se considerará primero la resta dentro de los paréntesis y se rescribirá ésta como una adición del opuesto.

POR QUÉ Por la regla del orden de las operaciones, se deben desarrollar primero los cálculos dentro de paréntesis.

Solución

$-80 - (-2 - 24) = -80 - [-2 + (-24)]$ Sume el opuesto del 24, el cual es el -24. Dado que el -24 debe rescribirse dentro de paréntesis, se escribe $-2 + (-24)$ con corchetes.

$= -80 - (-26)$ Dentro de los corchetes, sume el -2 y el -24. Dado que ahora sólo se necesita un conjunto de símbolos de agrupación, se puede escribir la respuesta, -26, dentro de paréntesis.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 7\,10} \\ 8\not{0} \\ -26 \\ \hline 54 \end{array}$$

$= -80 + 26$ Sume el opuesto del -26, el cual es el 26.

$= -54$ Use la regla para la suma de enteros que tienen signos diferentes.

Auto-revisión 4
Evalúe: $-72 - (-6 - 51)$
Ahora intente **Problema 49**

EJEMPLO 5 Evalúe: $-(-6) + (-18) - 4 - (-51)$

Estrategia Esta expresión involucra una suma y dos restas. Se escribirá cada resta como una suma del opuesto y después se evaluará la expresión.

Auto-revisión 5
Evalúe:
$-(-3) + (-16) - 9 - (-28)$
Ahora intente **Problema 55**

POR QUÉ Es fácil cometer un error cuando se restan números con signo. Probablemente será más acertado si se escribe cada resta como una suma del opuesto.

Solución Se aplica la regla para la resta dos veces. Después se sumarán por separado los positivos y los negativos y se sumarán esos resultados. (Por las propiedades conmutativa y asociativa de la suma, se puede sumar los enteros en cualquier orden.)

$$\begin{aligned} &-(-6) + (-18) - 4 - (-51) \\ &= 6 + (-18) + (-4) + 51 && \text{Simplifique: } -(-6) = 6. \text{ Sume el opuesto del 4, el cual es el } -4, \text{ y sume el opuesto del } -51, \text{ el cual es el 51.} \\ &= (6 + 51) + [(-18) + (-4)] && \text{Reordene los enteros. Después agrupe los positivos entre sí y agrupe los negativos entre sí.} \\ &= 57 + (-22) && \text{Sume los positivos dentro de los paréntesis. Sume los negativos dentro de los corchetes.} \\ &= 35 && \text{Use la regla para la suma de enteros que tienen signos diferentes.} \end{aligned}$$

3 Resolver problemas de aplicación restando enteros

La resta encuentra la *diferencia* entre dos números. Cuando se encuentra la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de una colección de mediciones, se está encontrando el **rango** de los valores.

Auto-revisión 6

CIUDAD DEL PÓRTICO El récord de temperatura alta para St. Louis, Missouri es de 107 °F. El récord de temperatura baja es de −18 °F. Encuentre el rango de temperaturas para estos extremos. (Fuente: *The World Almanac and Book of Facts,* 2009)

Ahora intente **Problema 101**

EJEMPLO 6 ***La ciudad del viento*** El récord de temperatura alta para Chicago, Illinois, es de 104ºF. El récord de temperatura baja es de −27 °F. Encuentre el rango de temperaturas para estos extremos. (Fuente: *The World Almanac and Book of Facts,* 2009)

Estrategia Se restará la temperatura más baja (−27 °F) de la temperatura más alta (104 °F).

POR QUÉ El *rango* de una colección de información indica la dispersión de la información. Es la diferencia entre los valores mayor y menor.

Solución Se aplica la regla para la resta y se suma el opuesto del −27.

$$\begin{aligned} 104 - (-27) &= 104 + 27 && 104^\circ \text{ es la temperatura más alta y } -27^\circ \text{ es la más baja.} \\ &= 131 \end{aligned}$$

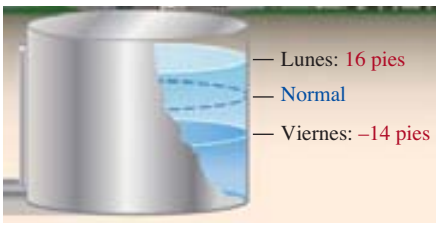
El rango de temperaturas para estos extremos es de 131 °F.

Las circunstancias están cambiando de manera constante en la vida diaria. La cantidad de dinero que se tiene en el banco, el precio de la gasolina y las edades son ejemplos. En las matemáticas, la operación de resta se utiliza para medir un cambio. Para encontrar el **cambio** en una cantidad se resta el valor anterior del valor posterior.

Cambio = valor posterior − valor anterior

La estrategia de los cinco pasos para la resolución de problemas que se introdujo en la Sección 1.6 puede utilizarse para resolver problemas de aplicación más complicados.

EJEMPLO 7 ***Administración del agua*** El lunes, el nivel del agua en un tanque de almacenamiento en la ciudad era de 16 pies sobre lo normal. Para el viernes, el nivel había descendido a una marca de 14 pies debajo de lo normal. Encuentre el cambio en el nivel del agua del lunes al viernes.



Analizar Es de utilidad listar los hechos proporcionados y lo que va a encontrar.

- El lunes, el nivel del agua estaba 16 pies sobre lo normal. *Proporcionado*
- El viernes, el nivel del agua estaba 14 pies debajo de lo normal. *Proporcionado*
- Encontrar el cambio en el nivel del agua. *A encontrar*

Formar Para encontrar el cambio en el nivel del agua, se *resta el valor anterior del valor posterior.* Los niveles del agua de 16 pies sobre lo normal (valor anterior) y de 14 pies debajo de lo normal (valor posterior) pueden representarse por medio de 16 y −14.

Se traducen las palabras del problema a números y símbolos.

El cambio en el nivel del agua	es igual al	nivel del agua posterior (viernes)	menos	el nivel del agua anterior (lunes).
El cambio en el nivel del agua	=	−14	−	16

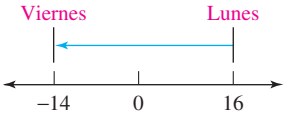
Resolver Se puede utilizar la regla para la resta para encontrar la diferencia.

$$-14 - 16 = -14 + (-16)$$ *Sume el opuesto del 16, el cual es el −16.*

$$= -30$$ *Use la regla para la suma de enteros con el mismo signo.*

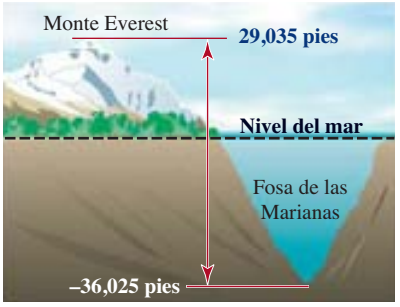
Enunciar El resultado negativo significa que el nivel del agua *descendió* 30 pies del lunes al viernes.

Comprobar Si se representa el cambio en el nivel del agua en una recta numérica horizontal, se observa que el nivel del agua desciende 16 + 14 = 30 unidades. El resultado es correcto.



Utilizando su CALCULADORA Resta con números negativos

El pico más alto del mundo es el Monte Everest en el Himalaya. La mayor profundidad de un océano medida se encuentra en la Fosa de las Marianas cerca de la isla de Guam en el Pacífico Occidental. Para encontrar el intervalo entre el pico más alto y la mayor profundidad, se debe restar:



29,035 − (−36,025)

Para desarrollar esta resta en una calculadora, se introduce lo siguiente:

Introducción inversa: 29035 [−] 36025 [+/−] [=]

Introducción directa: 29035 [−] [(−)] 36025 [ENTER] 65060

El intervalo es de 65,060 pies entre el pico más alto y la profundidad más baja. (También se pudo escribir 29,035 − (−36,025) como 29,035 + 36,025 y después usado la tecla de suma [+] para encontrar la respuesta.)

Auto-revisión 7

PETRÓLEO CRUDO El miércoles, el nivel del petróleo crudo en un tanque de almacenamiento estaba 5 pies sobre la capacidad estándar. El jueves, después de una sesión de refinamiento larga, el nivel descendió a una marca de 76 pies debajo de la capacidad estándar.

Encuentre el cambio en el nivel del petróleo crudo del miércoles al jueves.

Ahora intente **Problema 103**

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. a. −5 **b.** 12 **c.** −79 **2. a.** 3 **b.** −3 **3.** −7 **4.** −15 **5.** 6 **6.** 125°F
7. El nivel del petróleo crudo descendió 81 pies.

SECCIÓN 2.3 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Complete los espacios.

1. -8 es el _____ (o inverso _____) del 8.
2. Cuando se cambia un número a su opuesto, se dice que se ha *cambiado* (o *invertido*) *su* _____.
3. Evaluar una expresión significa encontrar su _____.
4. A la diferencia entre los valores máximo y mínimo de una colección de medidas se le llama _____ de los valores.

CONCEPTOS

Complete los espacios.

5. Para restar dos enteros, sume el primer entero al _____ (inverso aditivo) del entero a restarse.
6. Restar es lo mismo que _____ el opuesto.
7. Restar el 3 es lo mismo que sumar el ☐.
8. Restar el -6 es lo mismo que sumar el ☐.
9. Se puede encontrar el _____ en una cantidad restando el valor anterior del valor posterior.
10. Después de rescribir una resta como una suma del opuesto, se utiliza una de las reglas para la _____ de números con signo explicadas en la sección anterior para encontrar el resultado.
11. En cada caso, determine qué número se está restando.
    a. $-7 - 3$ **b.** $1 - (-12)$
12. Complete los espacios para rescribir cada resta como una suma del opuesto del número que se está restando.
    a. $2 - 7 = 2 +$ ☐
    b. $2 - (-7) = 2 +$ ☐
    c. $-2 - 7 = -2 +$ ☐
    d. $-2 - (-7) = -2 +$ ☐
13. Aplique la regla para la resta y complete los tres espacios.

$$3 - (-6) = 3 \square \square = \square$$

14. Use una suma para comprobar esta resta: $14 - (-2) = 12$. ¿El resultado es correcto?

NOTACIÓN

15. Escriba cada frase utilizando símbolos.
    a. ocho negativo menos cuatro negativo
    b. ocho negativo restado de cuatro negativo
16. Escriba cada frase en palabras.
    a. $7 - (-2)$
    b. $-2 - (-7)$

Complete cada solución para evaluar las expresiones.

17. $1 - 3 - (-2) = 1 + (\ \square\ ) + 2$
    $= -2 +$ ☐
    $=$ ☐

18. $-6 + 5 - (-5) = -6 + 5 +$ ☐
    $=$ ☐ $+ 5$
    $=$ ☐

19. $(-8 - 2) - (-6) = [-8 + (\ \square\ )] - (-6)$
    $=$ ☐ $- (-6)$
    $= -10 +$ ☐
    $=$ ☐

20. $-(-5) - (-1 - 4) =$ ☐ $- [-1 + (\ \square\ )]$
    $= 5 - (\ \square\ )$
    $= 5 +$ ☐
    $=$ ☐

PRÁCTICA GUIADA

Reste. Vea el Ejemplo 1.

21. $-4 - 3$	**22.** $-4 - 1$
23. $-5 - 5$	**24.** $-7 - 7$
25. $8 - (-1)$	**26.** $3 - (-8)$
27. $11 - (-7)$	**28.** $10 - (-5)$
29. $3 - 21$	**30.** $8 - 32$
31. $15 - 65$	**32.** $12 - 82$

Desarrolle la operación indicada. Vea el Ejemplo 2.

33. **a.** Reste -1 de -11.
    b. Reste -11 de -1.
34. **a.** Reste -2 de -19.
    b. Reste -19 de -2.
35. **a.** Reste -41 de -16.
    b. Reste -16 de -41.
36. **a.** Reste -57 de -15.
    b. Reste -15 de -57.

Evalúe cada expresión. Vea el Ejemplo 3.

37. $-4 - (-4) - 15$	**38.** $-3 - (-3) - 10$
39. $10 - 9 - (-8)$	**40.** $16 - 14 - (-9)$

41. $-1 - (-3) - 4$ **42.** $-2 - 4 - (-1)$

43. $-5 - 8 - (-3)$ **44.** $-6 - 5 - (-1)$

Evalúe cada expresión. **Vea el Ejemplo 4.**

45. $-1 - (-4 - 6)$ **46.** $-7 - (-2 - 14)$

47. $-42 - (-16 - 14)$ **48.** $-45 - (-8 - 32)$

49. $-9 - (6 - 7)$ **50.** $-13 - (6 - 12)$

51. $-8 - (4 - 12)$ **52.** $-9 - (1 - 10)$

Evalúe cada expresión. **Vea el Ejemplo 5.**

53. $-(-5) + (-15) - 6 - (-48)$

54. $-(-2) + (-30) - 3 - (-66)$

55. $-(-3) + (-41) - 7 - (-19)$

56. $-(-1) + (-52) - 4 - (-21)$

Use una calculadora para desarrollar cada resta. **Vea *Utilizando su calculadora.***

57. $-1{,}557 - 890$ **58.** $20{,}007 - (-496)$

59. $-979 - (-44{,}879)$ **60.** $-787 - 1{,}654 - (-232)$

INTÉNTELO

Evalúe cada expresión.

61. $5 - 9 - (-7)$ **62.** $6 - 8 - (-4)$

63. Reste -3 de 7. **64.** Reste 8 de -2.

65. $-2 - (-10)$ **66.** $-6 - (-12)$

67. $0 - (-5)$ **68.** $0 - 8$

69. $(6 - 4) - (1 - 2)$ **70.** $(5 - 3) - (4 - 6)$

71. $-5 - (-4)$ **72.** $-9 - (-1)$

73. $-3 - 3 - 3$ **74.** $-1 - 1 - 1$

75. $-(-9) + (-20) - 14 - (-3)$

76. $-(-8) + (-33) - 7 - (-21)$

77. $[-4 + (-8)] - (-6) + 15$

78. $[-5 + (-4)] - (-2) + 22$

79. Reste -6 de -10.

80. Reste -4 de -9.

81. $-3 - (-3)$ **82.** $-5 - (-5)$

83. $-8 - [4 - (-6)]$ **84.** $-1 - [5 - (-2)]$

85. $4 - (-4)$ **86.** $-3 - 3$

87. $(-6 - 5) - 3 + (-11)$ **88.** $(-2 - 1) - 5 + (-19)$

APLICACIONES

Use números con signo para resolver cada problema.

89. SUBMARINOS Un submarino viajaba 2,000 pies debajo de la superficie del océano cuando el sistema de radar advirtió una posible colisión con otro submarino. El capitán ordenó al navegador que se sumergiera unos 200 pies adicionales y después se nivelara. Encuentre la profundidad del submarino después de la inmersión.

90. BUCEO Un buzo salta de su bote al agua y desciende a una profundidad de 50 pies. Se detiene para comprobar su equipo y después desciende unos 70 pies adicionales. Use un número con signo para representar la profundidad final del buzo.

91. GEOGRAFÍA El Valle de la Muerte, California, es el punto terrestre más bajo en los Estados Unidos, a 282 pies debajo del nivel del mar. El punto terrestre más bajo de la Tierra es el Mar Muerto, el cual está 1,348 pies debajo del nivel del mar. ¿Cuánto más abajo está el Mar Muerto que el Valle de la Muerte?

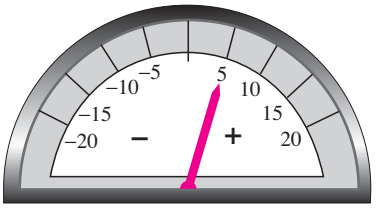
92. HISTORIA Dos de los más grandes matemáticos griegos fueron Arquímedes (287–212 a.n.e.) y Pitágoras (569–500 a.n.e.).

a. Exprese el año del nacimiento de Arquímedes como un número negativo.

b. Exprese el año del nacimiento de Pitágoras como un número negativo.

c. ¿Cuál es la diferencia de años entre el nacimiento de uno y otro?

93. AMPERAJE Durante la operación normal, el amperímetro en un automóvil lee $+5$. Si se encienden los faros, la lectura del amperímetro disminuye 7 amperes. Si se enciende el radio, la lectura disminuye 6 amperes. ¿Qué lectura registrará el amperímetro si ambos se encienden?



94. RUMÍ Después de perder una ronda, un jugador de cartas debe deducir el valor de cada una de las cartas que le quedan en su mano de su total de puntos anterior de 21. Si las cartas con figura se cuentan como 10 puntos, ¿cuál es el nuevo marcador?

95. FUTBOL AMERICANO Un equipo colegial registra el resultado de cada una de sus jugadas durante un partido en una hoja de estadísticas. Encuentre la ganancia (o pérdida) neta después de la tercera jugada.

Oportunidad	Jugada	Resultado
1er	Carrera	Pérdida de 1 yd
2do	Pase-¡Captura!	Pérdida de 6 yd
Falta	Retraso de juego	Pérdida de 5 yd
3er	Pase	Ganancia de 8 yd

96. CONTABILIDAD Complete el estado de cuenta de abajo. Después determine la condición financiera general de la compañía restando los pasivos totales de los activos totales.

Walker Corporation
Estado de cuenta 2010

Activos	
Efectivo	$11,109
Suministros	7,862
Terreno	67,543
Activos totales	$
Pasivos	
Cuentas por pagar	$79,037
Impuestos sobre los ingresos	20,181
Pasivos totales	$

97. PROTECCIÓN DE SOBREGIRO Una estudiante olvidó que sólo tenía $15 en su cuenta de banco y expidió un cheque por $25, usó un cajero automático para obtener $40 en efectivo y utilizó su tarjeta de débito para comprar $30 de comestibles. En cada una de estas tres transacciones, el banco le cargó una cuota de protección de sobregiro de $20. Encuentre el nuevo estado de cuenta.

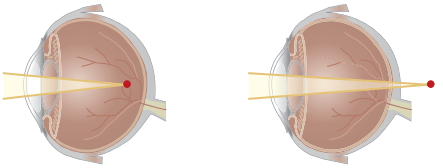
98. CUENTA DE CHEQUES Michael tiene $1,303 en su cuenta de cheques. ¿Puede pagar el seguro premium de su automóvil de $676, su cuenta de servicios públicos de $121 y su renta de $750 sin tener que realizar otro depósito? Explique.

99. EXTREMOS DE TEMPERATURA Abajo se muestran las temperaturas más altas y más bajas en grados Fahrenheit registradas en varias ciudades. Liste las ciudades en orden, de la de mayor a la de menor rango de temperaturas extremas.

Temperaturas extremas

Ciudad	Más alta	Más baja
Atlantic City, NJ	106	−11
Barrow, AK	79	−56
Kansas City, MO	109	−23
Norfolk, VA	104	−3
Portland, ME	103	−39

100. VISTA La *miopía,* la condición donde los objetos cercanos son claros y los objetos lejanos son borrosos, se mide utilizando números negativos. La hipermetropía, la condición donde los objetos lejanos son claros y los objetos cercanos son borrosos, se mide utilizando números positivos. Encuentre el rango en las mediciones mostradas en la siguiente columna.



Miopía −2 Hipermetropía +4

101. LIOFILIZACIÓN Para preparar café liofilizado, los granos de café se tuestan a una temperatura de 360 °F y después la mezcla de los granos de café molidos se congela a una temperatura de −110 °F. ¿Cuál es el rango de temperaturas del proceso de liofilización?

© Tony Freeman/Photo Edit

102. CLIMA Rashawn voló de su hogar en Nueva York a Hawai para una semana de vacaciones. Dejó condiciones de nevasca y una temperatura de −6 °F, y se bajó del avión a un clima de 85 °F. ¿Qué cambio de temperatura experimentó?

103. PROGRAMAS DE LECTURA En la prueba de lectura estatal dada al inicio del año escolar, el desempeño de una escuela primaria fue de 23 puntos debajo del promedio del condado. El director comenzó inmediatamente un programa de tutoría especial. Al final del año escolar, la reexaminación mostró que los estudiantes sólo estaban 7 puntos debajo del promedio. ¿Cuánto cambió la calificación de lectura de la escuela en el año?

104. PRUEBAS DETECTORAS DE MENTIRAS En una prueba detectora de mentiras, un ladrón sacó −18, lo cual indica que miente. Sin embargo, en una segunda prueba, sacó −1, lo cual es poco concluyente. Encuentre el cambio en las calificaciones.

REDACCIÓN

105. Explique a qué se refiere cuando se dice que la resta es lo mismo que la suma del opuesto.

106. Dé un ejemplo que muestre que es posible restar algo de nada.

107. Explique cómo comprobar el resultado: $-7 - 4 = -11$

108. Explique por qué los estudiantes no necesitan cambiar toda resta que se encuentren a una suma del opuesto. Dé algunos ejemplos.

REPASO

109. **a.** Redondee el 24,085 a la decena más cercana.
b. Redondee el 5,999 a la centena más cercana.

110. Liste los factores del 20 de menor a mayor.

111. Se requieren 13 naranjas para preparar una lata de jugo de naranja. Encuentre el número de naranjas utilizadas para preparar 12 latas.

112. **a.** Encuentre el mcm del 15 y el 18.
b. Encuentre el mfc del 15 y el 18.

SECCIÓN 2.4

Multiplicación de enteros

Objetivos

1. Multiplicar dos enteros que tienen signos diferentes.
2. Multiplicar dos enteros que tienen el mismo signo.
3. Desarrollar varias multiplicaciones para evaluar expresiones.
4. Evaluar expresiones exponenciales que tienen bases negativas.
5. Resolver problemas de aplicación multiplicando enteros.

La multiplicación de enteros es muy similar a la multiplicación de números naturales. La única diferencia es que se debe determinar si la respuesta es positiva o negativa.

Cuando se multiplican dos enteros diferentes de cero tienen signos distintos o tienen el mismo signo. Esto significa que hay dos posibilidades a considerar.

1 Multiplicar dos enteros que tienen signos diferentes

Para desarrollar una regla para la multiplicación de dos enteros que tienen signos diferentes, se encontrará $4(-3)$, que es el producto de un entero positivo y un entero negativo. Se dice que los signos de los factores son *no similares*. Por la definición de la multiplicación, $4(-3)$ significa que se va a sumar el -3 cuatro veces.

$$4(-3) = (-3) + (-3) + (-3) + (-3)$$ Escriba cuatro veces el −3 como un sumando.

$$= -12$$ Use la regla para la suma de dos enteros que tienen el mismo signo.

El resultado es negativo. Como comprobación, piense en términos de dinero. Si pierde cuatro veces \$3, ha perdido un total de \$12, lo cual se escribe $-\$12$. Este ejemplo ilustra la siguiente regla.

Multiplicación de dos enteros que tienen signos diferentes (no similares)

Para multiplicar un entero positivo y un entero negativo, multiplique sus valores absolutos. Después haga negativa la respuesta final.

EJEMPLO 1 Multiplique:

a. $7(-5)$ **b.** $20(-8)$ **c.** $-93 \cdot 16$ **d.** $-34(1{,}000)$

Estrategia Se utilizará la regla para la multiplicación de dos enteros que tienen signos diferentes (no similares).

POR QUÉ En cada caso, se pide que se multiplique un entero positivo y un entero negativo.

Solución

a. Encuentre los valores absolutos: $|7| = 7$ y $|-5| = 5$.

$$7(-5) = -35$$ Multiplique los valores absolutos 7 y 5 para obtener 35. Después haga negativa la respuesta final.

b. Encuentre los valores absolutos: $|20| = 20$ y $|-8| = 8$.

$$20(-8) = -160$$ Multiplique los valores absolutos 20 y 8 para obtener 160. Después haga negativa la respuesta final.

c. Encuentre los valores absolutos: $|-93| = 93$ y $|16| = 16$.

$$-93 \cdot 16 = -1{,}488$$ Multiplique los valores absolutos 93 y 16 para obtener 1,488. Después haga negativa la respuesta final.

$$\begin{array}{r} 93 \\ \times\ 16 \\ \hline 558 \\ 930 \\ \hline 1{,}488 \end{array}$$

d. Recuerde a partir de la Sección 1.4 que, para encontrar el producto de un número natural y el 10, 100, 1,000, etc., *añada el número de ceros en ese número a la derecha del número natural.* Esta regla puede extenderse para los productos de enteros y el 10, 100, 1,000, etcétera.

$$-34(1{,}000) = -34{,}000$$ Dado que el 1,000 tiene tres ceros, añada tres ceros después del −34.

Auto-revisión 1

Multiplique:

a. $2(-6)$
b. $30(-4)$
c. $-75 \cdot 17$
d. $-98(1{,}000)$

Ahora intente **Problemas 21, 25, 29 y 31**

¡Cuidado! Cuando se escribe una multiplicación que involucra números con signo, no se escribe un signo negativo al lado de un punto · (el símbolo de la multiplicación). En su lugar, se utilizan paréntesis para mostrar la multiplicación.

$6(-2)$ $6 \cdot -2$ y $-6(-2)$ $-6 \cdot -2$

2 Multiplicar dos enteros que tienen el mismo signo

Para desarrollar una regla para la multiplicación de dos enteros que tienen el mismo signo, primero se considerará 4(3), que es el producto de dos enteros positivos. Se dice que los signos de los factores son *similares.* Por la definición de la multiplicación, 4(3) significa que se está sumando el 3 cuatro veces.

$$4(3) = 3 + 3 + 3 + 3$$ Escribir el 3 como un sumando cuatro veces.

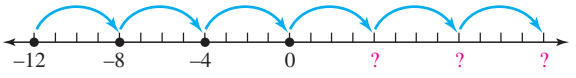
$$= 12$$ El resultado es 12, el cual es un número positivo.

Como es de esperar, el resultado es positivo.

Para desarrollar una regla para la multiplicación de dos enteros negativos, considere la siguiente lista, donde se multiplica el -4 por factores que disminuyen en 1. Se sabe cómo encontrar los primeros cuatro productos. La graficación de estos resultados en una recta numérica es de utilidad para determinar los últimos tres productos.

Este factor disminuye en 1 cada vez. → Busque un patrón aquí. ←

$$-4(\mathbf{3}) = -12$$
$$-4(\mathbf{2}) = -8$$
$$-4(\mathbf{1}) = -4$$
$$-4(\mathbf{0}) = 0$$
$$-4(\mathbf{-1}) = ?$$
$$-4(\mathbf{-2}) = ?$$
$$-4(\mathbf{-3}) = ?$$



Una gráfica de los productos

A partir del patrón, se observa que el producto aumenta en 4 cada vez. Por tanto,

$$-4(-1) = 4, \quad -4(-2) = 8 \quad \text{y} \quad -4(-3) = 12$$

Estos resultados ilustran que el *producto de dos enteros negativos es positivo.* Como comprobación, piense en esto como si perdiera cuatro adeudos de \$3. Esto es equivalente a ganar \$12. Por tanto, $-4(-\$3) = \$12$.

Se ha visto que el producto de dos enteros positivos es positivo, y que el producto de dos enteros negativos también es positivo. Estos resultados ilustran la siguiente regla.

Multiplicación de dos enteros que tienen los mismos signos (similares)

Para multiplicar dos enteros que tienen el mismo signo, multiplique sus valores absolutos. La respuesta final es positiva.

EJEMPLO 2 Multiplique:

a. $-5(-9)$ **b.** $-8(-10)$ **c.** $-23(-42)$ **d.** $-2{,}500(-30{,}000)$

Estrategia Se utilizará la regla para la multiplicación de dos enteros que tienen los mismos signos (similares).

POR QUÉ En cada caso, se pide que se multipliquen dos enteros negativos.

Solución

a. Encuentre los valores absolutos: $|-5| = 5$ y $|-9| = 9$.

$-5(-9) = 45$ Multiplique los valores absolutos 5 y 9 para obtener 45. La respuesta final es positiva.

b. Encuentre los valores absolutos: $|-8| = 8$ y $|-10| = 10$.

$-8(-10) = 80$ Multiplique los valores absolutos 8 y 10 para obtener 80. La respuesta final es positiva.

c. Encuentre los valores absolutos: $|-23| = 23$ y $|-42| = 42$.

$-23(-42) = 966$ Multiplique los valores absolutos 23 y 42 para obtener 966. La respuesta final es positiva.

$$\begin{array}{r} 42 \\ \times\ 23 \\ \hline 126 \\ 840 \\ \hline 966 \end{array}$$

d. Se puede extender el método explicado en la Sección 1.4 para la multiplicación de factores de números naturales con ceros finales a los productos de enteros con ceros finales.

$-2{,}500(-30{,}000) = 75{,}000{,}000$ Añada seis ceros después del 75.

Multiplique el -25 y el -3 para obtener 75.

Auto-revisión 2

Multiplique:

a. $-9(-7)$

b. $-12(-2)$

c. $-34(-15)$

d. $-4{,}100(-20{,}000)$

Ahora intente **Problemas 33, 37, 41, y 43**

Ahora se resume las reglas para la multiplicación de dos enteros.

Multiplicación de dos enteros

Para multiplicar dos enteros diferentes del cero, multiplique sus valores absolutos.

1. El producto de dos enteros que tienen los mismos signos (*similares*) es positivo.
2. El producto de dos enteros que tienen signos diferentes (*no similares*) es negativo.

Utilizando su CALCULADORA Multiplicación con números negativos

En época de Acción de gracias, una cadena de supermercados grande les ofreció a sus clientes un pavo gratis con cada compra de comestibles de \$200 o más. Cada pavo le costó a la tienda \$8 y 10,976 personas aprovecharon la oferta. Dado que cada uno de los 10,976 pavos regalados representaron una pérdida de \$8 (la cual puede expresarse como $-\$8$), la compañía perdió un total de $10{,}976(-\$8)$. Para desarrollar esta multiplicación utilizando una calculadora, se introduce lo siguiente:

Introducción inversa: 10976 [×] 8 [+/−] [=] -87808

Introducción directa: 10976 [×] [(−)] 8 [ENTER] -87808

El resultado negativo indica que con la promoción de un pavo de regalo, la cadena de supermercados perdió \$87,808.

3 Desarrollar varias multiplicaciones para evaluar expresiones

Para evaluar expresiones que contienen varias multiplicaciones, se hace un uso repetitivo de las reglas para la multiplicación de dos enteros.

Auto-revisión 3

Evalúe cada expresión:

a. $3(-12)(-2)$

b. $-1(9)(-6)$

c. $-4(-5)(8)(-3)$

Ahora intente **Problemas 45, 47 y 49**

EJEMPLO 3 Evalúe cada expresión:

a. $6(-2)(-7)$ **b.** $-9(8)(-1)$ **c.** $-3(-5)(2)(-4)$

Estrategia Dado que no hay cálculos dentro de paréntesis y tampoco expresiones exponenciales, se desarrollarán las multiplicaciones empezando de izquierda a derecha.

POR QUÉ Este es el paso 3 de la regla del orden de las operaciones, que se introdujo en la Sección 1.9.

Solución

a. $\mathbf{6(-2)}(-7) = \mathbf{-12}(-7)$ Use la regla para la multiplicación de dos enteros que tienen signos diferentes: $6(-2) = -12$.

$= 84$ Use la regla para la multiplicación de dos enteros que tienen el mismo signo.

$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1}\\ 12\\ \times 7\\ \hline 84 \end{array}$

b. $\mathbf{-9(8)}(-1) = \mathbf{-72}(-1)$ Use la regla para la multiplicación de dos enteros que tienen signos diferentes: $-9(8) = -72$.

$= 72$ Use la regla para la multiplicación de dos enteros que tienen el mismo signo.

c. $\mathbf{-3(-5)}(2)(-4) = \mathbf{15}(2)(-4)$ Use la regla para la multiplicación de dos enteros que tienen el mismo signo: $-3(-5) = 15$.

$= 30(-4)$ Use la regla para la multiplicación de dos enteros que tienen el mismo signo: $15(2) = 30$.

$= -120$ Use la regla para la multiplicación de dos enteros que tienen signos diferentes.

Las propiedades de la multiplicación que se introdujeron en la Sección 1.3, Multiplicación de números naturales, también son verdaderas para los enteros.

Propiedades de la multiplicación

Propiedad conmutativa de la multiplicación: El orden en el que se multiplican los enteros no cambia su producto.

Propiedad asociativa de la multiplicación: La manera en la que se agrupan los enteros no cambia su producto.

Propiedad de la multiplicación del 0: El producto de cualquier entero y el 0 es 0.

Propiedad de la multiplicación del 1: El producto de cualquier entero y el 1 es ese entero.

Otro método para evaluar expresiones como las del Ejemplo 3 es emplear las propiedades de la multiplicación para reordenar y reagrupar los factores de una manera útil.

Auto-revisión 4

Use las propiedades conmutativa y/o asociativa de la multiplicación para evaluar cada expresión de la Auto-revisión 3 de una manera diferente:

a. $3(-12)(-2)$

b. $-1(9)(-6)$

c. $-4(-5)(8)(-3)$

Ahora intente **Problemas 45, 47 y 49**

EJEMPLO 4 Use las propiedades conmutativa y/o asociativa de la multiplicación para evaluar cada expresión del Ejemplo 3 de una manera diferente:

a. $6(-2)(-7)$ **b.** $-9(8)(-1)$ **c.** $-3(-5)(2)(-4)$

Estrategia Cuando sea posible, se utilizarán las propiedades conmutativa y/o asociativa de la multiplicación para multiplicar pares de factores negativos.

POR QUÉ El producto de dos factores negativos es positivo. Con este método se trabaja con menos números negativos y se disminuye la posibilidad de error.

Solución

a. $6\mathbf{(-2)(-7)} = 6\mathbf{(14)}$ Multiplique los últimos dos factores negativos para formar un producto positivo: $-7(-2) = 14$.

$= 84$

$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2}\\ 14\\ \times 6\\ \hline 84 \end{array}$

b. $-9(8)(-1) = 9(8)$ Multiplique los factores negativos para formar un producto positivo: $-9(-1) = 9$.

$= 72$

c. $-3(-5)(2)(-4) = 15(-8)$ Multiplique los primeros dos factores negativos para formar un producto positivo. Multiplique los últimos dos factores.

$= -120$ Use la regla para la multiplicación de dos enteros que tienen signos diferentes.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 4} \\ 15 \\ \times 8 \\ \hline 120 \end{array}$$

EJEMPLO 5 Evalúe: **a.** $-2(-4)(-5)$ **b.** $-3(-2)(-6)(-5)$

Estrategia Cuando sea posible, se utilizarán las propiedades conmutativa y/o asociativa de la multiplicación para multiplicar pares de factores negativos.

POR QUÉ El producto de dos factores negativos es positivo. Con este método se trabaja con menos números negativos y se disminuye la posibilidad de un error.

Solución

a. Observe que esta expresión es el producto de tres (un número impar) enteros negativos.

$-2(-4)(-5) = 8(-5)$ Multiplique los primeros dos factores negativos para formar un producto positivo.

$= -40$ El producto es negativo.

b. Observe que esta expresión es el producto de cuatro (un número par) enteros negativos.

$-3(-2)(-6)(-5) = 6(30)$ Multiplique los primeros dos factores negativos y los últimos dos factores negativos para formar productos positivos.

$= 180$ El producto es positivo.

El Ejemplo 5, inciso a, ilustra que un producto es negativo cuando hay un número impar de factores negativos. El Ejemplo 5, inciso b, ilustra que un producto es positivo cuando hay un número par de factores negativos.

Auto-revisión 5

Evalúe cada expresión:

a. $-1(-2)(-5)$

b. $-2(-7)(-1)(-2)$

Ahora intente **Problemas 53 y 57**

Multiplicación de un número par e impar de enteros negativos

El producto de un número par de enteros negativos es positivo.
El producto de un número impar de enteros negativos es negativo.

4 Evaluar expresiones exponenciales que tienen bases negativas

Recuerde que las expresiones exponenciales se utilizan para representar una multiplicación repetitiva. Por ejemplo, 2 a la tercera potencia, o 2^3, es una manera acortada de escribir $2 \cdot 2 \cdot 2$. En esta expresión, el *exponente* es el 3 y la base es el 2 *positivo*. En el siguiente ejemplo se evalúan expresiones exponenciales con bases que son números negativos.

EJEMPLO 6 Evalúe cada expresión: **a.** $(-2)^4$ **b.** $(-5)^3$ **c.** $(-1)^5$

Estrategia Se escribirá cada expresión exponencial como un producto de factores repetitivos y después se desarrollará la multiplicación. Esto requiere que se identifique la base y el exponente.

POR QUÉ El exponente indica el número de veces que la base se va a escribir como un factor.

Auto-revisión 6

Evalúe cada expresión:

a. $(-3)^4$

b. $(-4)^3$

c. $(-1)^7$

Ahora intente **Problemas 61, 65 y 67**

Solución

a. Se lee $(-2)^4$ como "dos negativo elevado a la cuarta potencia" o como "la cuarta potencia de dos negativo". Observe que el exponente es par.

$$(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2)$$ Escriba la base, el -2, como un factor 4 veces.

$$= 4(4)$$ Multiplique los primeros dos factores negativos y los últimos dos factores negativos para formar productos positivos.

$$= 16$$ El resultado es positivo.

b. Se lee $(-5)^3$ como "cinco negativo elevado a la tercera potencia" o como "la tercera potencia del cinco negativo" o como "cinco negativo al cubo". Observe que el exponente es impar.

$$(-5)^3 = (-5)(-5)(-5)$$ Escriba la base, el -5, como un factor 3 veces.

$$= 25(-5)$$ Multiplique los primeros dos factores para formar un producto positivo.

$$= -125$$ El resultado es negativo.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2}\\ 25\\ \times 5\\ \hline 125 \end{array}$$

c. Se lee $(-1)^5$ como "uno negativo elevado a la quinta potencia" o como "la quinta potencia de uno negativo". Observe que el exponente es impar.

$$(-1)^5 = (-1)(-1)(-1)(-1)(-1)$$ Escriba la base, el -1, como un factor 5 veces.

$$= 1(1)(-1)$$ Multiplique el primer y el segundo factores negativos y multiplique el tercer y el cuarto factores negativos para formar productos positivos.

$$= -1$$ El resultado es negativo.

En el Ejemplo 6, inciso a, se elevó el -2 a una potencia par y la respuesta fue positiva. En los incisos b y c, el -5 y el -1 se elevaron a potencias impares y, en cada caso, la respuesta fue negativa. Estos resultados sugieren una regla general.

Potencias pares e impares de un entero negativo

Cuando se eleva un entero negativo a una potencia par, el resultado es positivo. Cuando se eleva un entero negativo a una potencia impar, el resultado es negativo.

Aunque las expresiones exponenciales $(-3)^2$ y -3^2 son similares, no son iguales. Se lee $(-3)^2$ como "3 negativo al cuadrado" y -3^2 como "el opuesto del cuadrado de tres". Cuando se evalúan, se vuelve claro que no son equivalentes.

$(-3)^2 = (-3)(-3)$ Debido a los paréntesis, la base es el -3. El exponente es el 2.

$= 9$

$-3^2 = -(3 \cdot 3)$ Dado que no hay paréntesis alrededor del -3, la base es el 3 y el exponente es el 2.

$= -9$

Resultados diferentes

¡Cuidado! La base de una expresión exponencial *no incluye* al signo negativo a menos que se utilicen paréntesis.

-7^3 Base positiva: 7

$(-7)^3$ Base negativa: -7

EJEMPLO 7 Evalúe: -2^2

Estrategia Se reescribirá la expresión como un producto de factores repetitivos y después se desarrollará la multiplicación. Se debe tener cuidado cuando se identifica la base. Ésta es el 2, no el -2.

POR QUÉ Dado que no hay paréntesis alrededor del -2, la base es el 2.

Solución

$-2^2 = -(2 \cdot 2)$ Se lee como "el opuesto del cuadrado del dos".

$= -4$ Realice la multiplicación dentro de los paréntesis para obtener 4. Después escriba el opuesto de ese resultado.

Auto-revisión 7

Evalúe: -4^2

Ahora intente **Problema 71**

Utilizando su CALCULADORA **Elevar a una potencia un número negativo**

Se pueden encontrar potencias de números negativos, como $(-5)^6$, utilizando una calculadora. Las pulsaciones de teclas que se utilizan para evaluar tal expresión varían de modelo a modelo, como se muestra abajo. Necesitará determinar cuáles pulsaciones de teclas producen el resultado positivo que se espera cuando se eleva a una potencia par un número negativo.

5 [+/−] [y^x] 6 [=] Algunas calculadores no requieren que se introduzcan paréntesis.

[(] 5 [+/−] [)] [y^x] 6 [=] Otras calculadoras requieren que se introduzcan paréntesis.

[(] [(−)] 5 [)] [^] 6 [ENTER] 15625

A partir de la pantalla de la calculadora, se observa que $(-5)^6 = 15{,}625$.

5 Resolver problemas de aplicación multiplicando enteros

Los problemas que involucran una suma repetitiva son con frecuencia más fáciles de resolver utilizando una multiplicación.

EJEMPLO 8 ***Oceanografía*** Los científicos bajaron un navío subacuático llamado *sumergible* en el Océano Pacífico para registrar la temperatura del agua. La primera medición se realizó a 75 pies debajo del nivel del mar y se hicieron más cada 75 pies hasta que se alcanzó el lecho marino. Encuentre la profundidad del sumergible cuando se realizó la 25a medición.

Emory Kristof/National Geographic/Getty Images

Analizar

- La primera medición se realizó a 75 pies debajo del nivel del mar. Proporcionado
- Se realizaron más mediciones cada 75 pies. Proporcionado
- Encontrar la profundidad del sumergible cuando se realizó la 25a medición. A encontrar

Formar Si se utilizan números negativos para representar las profundidades a las que se realizaron las mediciones, entonces la primera fue a 75 pies. La profundidad (en pies) del sumergible cuando se realizó la 25a medición puede encontrarse sumando -75 veinticinco veces. Esta suma repetitiva puede calcularse de manera más sencilla por medio de una multiplicación.

Auto-revisión 8

FUGAS DE GASOLINA Para determinar qué tan mala es la fuga de un tanque de gasolina, los inspectores utilizaron un proceso de horadación para tomar muestras de tierra de las cercanías. La primera muestra se tomó a 6 pies debajo del nivel del suelo y se tomaron más cada 6 pies después de esa. La 14a muestra fue la primera que no mostró signos de gasolina. ¿Qué tan debajo del nivel del suelo se tomó ésta?

Ahora intente **Problema 97**

Se traducen las palabras del problema a números y símbolos.

La profundidad del sumergible cuando se realizó la 25a medición	es igual al	número de mediciones realizadas	por	la cantidad que se descendió cada vez
La profundidad del sumergible cuando se realizó la 25a medición	=	25	·	(−75)

Resolver Para encontrar el producto se utiliza la regla para la multiplicación de dos enteros que tienen signos diferentes. Primero, se encuentran los valores absolutos: $|25| = 25$ y $|-75| = 75$.

$25(-75) = -1{,}875$ Multiplique los valores absolutos 25 y 75 para obtener 1,875. Dado que los enteros tienen signos diferentes, haga negativa la respuesta final.

$$\begin{array}{r} 75 \\ \times\ 25 \\ \hline 375 \\ 1\,500 \\ \hline 1{,}875 \end{array}$$

Enunciar La profundidad del sumergible era de 1,875 pies debajo del nivel del mar (−1,875 pies) cuando se tomó la 25a medición de la temperatura.

Comprobar Se puede utilizar una estimación o simplemente desarrollar la multiplicación real de nuevo para ver si el resultado parece razonable.

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. a. −12 **b.** −120 **c.** −1,275 **d.** −98,000 **2. a.** 63 **b.** 24 **c.** 510 **d.** 82,000,000 **3. a.** 72 **b.** 54 **c.** −480 **4. a.** 72 **b.** 54 **c.** −480 **5. a.** −10 **b.** 28 **6. a.** 81 **b.** −64 **c.** −1 **7.** −16 **8.** 84 pies debajo del nivel del suelo (−84 pies)

SECCIÓN 2.4 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Complete los espacios.

1. En el problema de multiplicación mostrado abajo, etiquete cada *factor* y el *producto*.

$$-5 \quad \cdot \quad 10 \quad = \quad -50$$

2. Se dice que dos enteros negativos, al igual que dos enteros positivos, tienen los mismos signos o signos _____.

3. Se dice que un entero positivo y un entero negativo tienen signos diferentes o signos _____.

4. Propiedad _____ de la multiplicación: El orden en que se multiplican los enteros no cambia su producto.

5. Propiedad _____ de la multiplicación: La manera en la que se agrupan los enteros no cambia su producto.

6. En la expresión $(-3)^5$, la _____ es el −3, y el 5 es el _____.

CONCEPTOS

Complete los espacios.

7. La multiplicación de enteros es muy similar a la multiplicación de números naturales. La única diferencia es que se debe determinar si la respuesta es _____ o _____.

8. Cuando se multiplican dos enteros diferentes del cero, tienen signos _____ o el _____ signo.

9. Para multiplicar un entero positivo y un entero negativo, multiplique sus valores absolutos. Después haga _____ la respuesta final.

10. Para multiplicar dos enteros que tienen el mismo signo, multiplique sus valores absolutos. La respuesta final es _____.

11. El producto de dos enteros con signos _____ es negativo.

12. El producto de dos enteros con signos _____ es positivo.

13. El producto de cualquier entero y el 0 es _____.

14. El producto de un número par de enteros negativos es _____ y el producto de un número impar de enteros negativos es _____.

15. Encuentre cada valor absoluto.

a. $|-3|$ **b.** $|12|$

16. Si se evaluara cada una de las siguientes expresiones, ¿cuál sería el *signo* del resultado?

a. $(-5)^{13}$ **b.** $(-3)^{20}$

NOTACIÓN

17. Para cada expresión, identifique la base y el exponente.

a. -8^4 **b.** $(-7)^9$

18. Traduzca a símbolos matemáticos.

a. tres negativo por dos negativo

b. cinco negativo al cuadrado

c. el opuesto del cuadrado del cinco

Complete cada solución para evaluar las expresiones.

19. $-3(-2)(-4) = \square(-4)$
$= \square$

20. $(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)\square$
$= \square(9)$
$= \square$

PRÁCTICA GUIADA

Multiplique. Vea el Ejemplo 1.

21. $5(-3)$ **22.** $4(-6)$

23. $9(-2)$ **24.** $5(-7)$

25. $18(-4)$ **26.** $17(-8)$

27. $21(-6)$ **28.** $39(-3)$

29. $-45 \cdot 37$ **30.** $-42 \cdot 24$

31. $-94 \cdot 1{,}000$ **32.** $-76 \cdot 1{,}000$

Multiplique. Vea el Ejemplo 2.

33. $(-8)(-7)$ **34.** $(-9)(-3)$

35. $-7(-1)$ **36.** $-5(-1)$

37. $-3(-52)$ **38.** $-4(-73)$

39. $-6(-46)$ **40.** $-8(-48)$

41. $-59(-33)$ **42.** $-61(-29)$

43. $-60{,}000(-1{,}200)$ **44.** $-20{,}000(-3{,}200)$

Evalúe cada expresión. Vea los Ejemplos 3 y 4.

45. $6(-3)(-5)$ **46.** $9(-3)(-4)$

47. $-5(10)(-3)$ **48.** $-8(7)(-2)$

49. $-2(-4)(6)(-8)$ **50.** $-3(-5)(2)(-9)$

51. $-8(-3)(7)(-2)$ **52.** $-9(-3)(4)(-2)$

Evalúe cada expresión. Vea el Ejemplo 5.

53. $-4(-2)(-6)$ **54.** $-4(-6)(-3)$

55. $-3(-9)(-3)$ **56.** $-5(-2)(-5)$

57. $-1(-3)(-2)(-6)$ **58.** $-1(-4)(-2)(-4)$

59. $-9(-4)(-1)(-4)$ **60.** $-6(-3)(-6)(-1)$

Evalúe cada expresión. Vea el Ejemplo 6.

61. $(-3)^3$ **62.** $(-6)^3$

63. $(-2)^5$ **64.** $(-3)^5$

65. $(-5)^4$ **66.** $(-7)^4$

67. $(-1)^8$ **68.** $(-1)^{10}$

Evalúe cada expresión. Vea el Ejemplo 7.

69. $(-7)^2$ y -7^2

70. $(-5)^2$ y -5^2

71. $(-12)^2$ y -12^2

72. $(-11)^2$ y -11^2

INTÉNTELO

Evalúe cada expresión.

73. $6(-5)(2)$ **74.** $4(-2)(2)$

75. $-8(0)$ **76.** $0(-27)$

77. $(-4)^3$ **78.** $(-8)^3$

79. $(-2)10$ **80.** $(-3)8$

81. $-2(-3)(3)(-1)$ **82.** $5(-2)(3)(-1)$

83. Encuentre el producto del -6 y el opuesto del 10.

84. Encuentre el producto del opuesto del 9 y el opuesto del 8.

85. $-6(-4)(-2)$ **86.** $-3(-2)(-3)$

87. $-42 \cdot 200{,}000$ **88.** $-56 \cdot 10{,}000$

89. -5^4 **90.** -2^4

91. $-12(-12)$ **92.** $-5(-5)$

93. $(-1)^6$ **94.** $(-1)^5$

95. $(-1)(-2)(-3)(-4)(-5)$

96. $(-10)(-8)(-6)(-4)(-2)$

APLICACIONES

Use números con signo para resolver cada problema.

97. SUBMARINOS Como parte de un ejercicio de entrenamiento, el capitán de un submarino ordenó descender 250 pies, nivelarse por 5 minutos y después repetir el proceso varias veces. Si el submarino estaba en la superficie del océano al inicio del ejercicio, encuentre su profundidad después de la 8a sumersión.

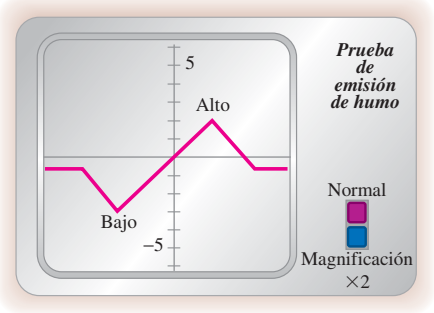
98. CONSTRUCCIÓN DE UN MUELLE Un *martinete* utiliza un peso pesado para martillear postes altos en el lecho marino. Si cada martilleo en la parte superior del poste lo envía 6 pulgadas más abajo, encuentre la profundidad del poste después de 20 martilleos.

Image Source/Getty Images

99. MAGNIFICACIÓN Un mecánico utiliza un osciloscopio para comprobar las emisiones de humo de un automóvil. Los resultados de la prueba se muestran en una pantalla.

a. Encuentre los valores alto y bajo para esta prueba como se muestran en la pantalla.

b. Al cambiar la configuración, puede magnificarse la imagen en la pantalla. ¿Cuáles serían el nuevo bajo y el nuevo alto si se duplicara cada valor?

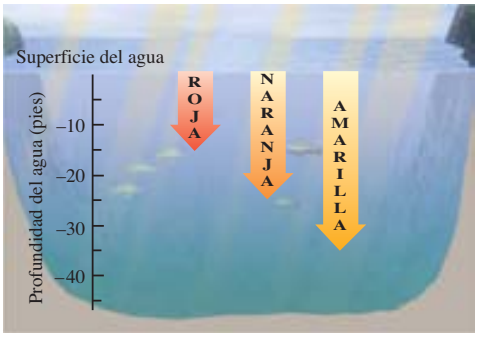


100. LUZ La luz solar es una mezcla de todos los colores. Cuando la luz solar pasa a través del agua, el agua absorbe colores diferentes a distintas velocidades, como se muestra.

a. Use un número con signo para representar la profundidad a la que la luz roja penetra el agua.

b. La luz verde penetra 4 veces más profundo que la luz roja. ¿Qué tan profundo es esto?

c. La luz azul penetra 34 veces más profundo que la luz naranja. ¿Qué tan profundo es esto?



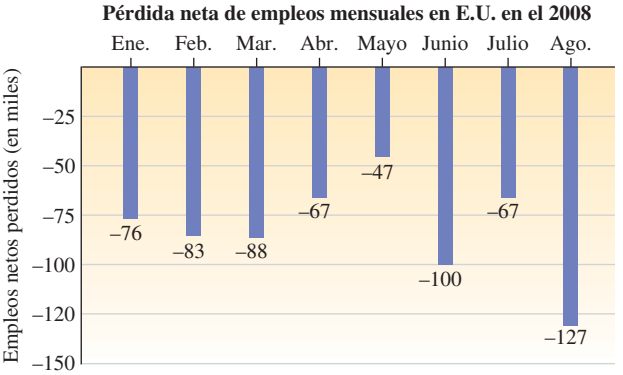
101. PÉRDIDAS DE EMPLEOS Refiérase a la gráfica de barras. Encuentre el número de empleos perdidos en . . .

a. Septiembre del 2008 si fue de casi 6 veces el número perdido en abril.

b. Octubre del 2008 si fue de casi 9 veces el número perdido en mayo.

c. Noviembre del 2008 si fue de casi 7 veces el número perdido en febrero.

d. Diciembre si fue de casi 6 veces el número perdido en marzo.



Fuente: Bureau of Labor Statistics

102. RUSIA La Oficina de Censo de E.U. estima que la población en Rusia está disminuyendo en alrededor de 700,000 por año debido a las altas tasas de defunciones y a las bajas tasas de nacimientos. Si este patrón continúa, ¿cuál será la disminución en la población de Rusia en los siguientes 30 años? (Fuente: About.com)

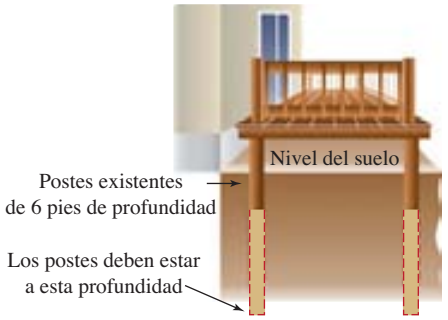
103. PLANETAS La temperatura promedio en la superficie de Marte es de −81 °F. Encuentre la temperatura promedio en la superficie de Urano si es cuatro veces más frío que Marte. (Fuente: *The World Almanac and Book of Facts,* 2009)

104. PÉRDIDA DE CULTIVOS Un granjero, preocupado de que sus árboles frutales sufran daño por congelación, llama al servicio meteorológico para pedir información sobre la temperatura. Se le dice que las temperaturas comenzarán a descender aproximadamente 5 grados cada hora por las siguientes cinco horas. ¿Qué número con signo representa el cambio total en temperatura esperado en las siguientes cinco horas?

105. DEDUCCIÓN DE IMPUESTOS Para cada uno de los últimos seis años, una mujer de negocios ha presentado una desgravación por depreciación de $200 en su declaración de impuestos. ¿Qué número con signo representa la cantidad total de la depreciación deducida en el periodo de 6 años?

106. EROSIÓN Un dique protege de una inundación a un pueblo en un área de baja altitud. De acuerdo con los geólogos, los bancos del dique se están erosionando a una velocidad de 2 pies por año. Si no se hace algo para corregir el problema, ¿qué número con signo indica cuánto del dique se erosionará durante la siguiente década?

107. SOPORTES DE UNA PLATAFORMA Después de una tormenta de invierno, el dueño de una casa hace que una firma de ingeniería inspeccione su plataforma dañada. El reporte concluye que los postes de los cimientos originales no estaban hundidos lo suficiente, por un factor de 3. ¿Qué número con signo representa la profundidad a la que los postes se debieron haber hundido?



108. DIETA Después de hacerle un examen físico a un paciente, un médico siente que el paciente debe comenzar una dieta. En la siguiente tabla se muestran las dos opciones que se abordaron.

	Plan 1	Plan 2
Duración	10 semanas	14 semanas
Ejercicio diario	1 hr	30 min
Pérdida de peso por semana	3 lb	2 lb

a. Encuentre la pérdida de peso esperada a partir del Plan 1. Exprese la respuesta con un número con signo.

b. Encuentre la pérdida de peso esperada a partir del Plan 2. Exprese la respuesta con un número con signo.

c. ¿Con cuál plan el paciente debe esperar la mayor pérdida de peso? Explique por qué el paciente podría no elegirla.

109. PUBLICIDAD La asistencia con boleto pagado para la última noche del Rodeo Houston 2008 fue de 71,906. Suponga que una estación de radio local de música country le dio una maleta deportiva, con valor de $3, a todo el que asistió. Encuentre el número con signo que expresa la pérdida financiera de la estación de radio debido a su obsequio.

110. ATENCIÓN MÉDICA Un proveedor de atención médica para una compañía estima que por semana se pierden 75 horas por los empleados que sufren de enfermedades relacionadas con el estrés o prevenibles. En un año con 52 semanas, ¿cuántas horas se pierden? Use un número con signo para responder.

REDACCIÓN

111. Explique por qué el producto de un número positivo y un número negativo es negativo, utilizando $5(-3)$ como ejemplo.

112. Explique la regla de la multiplicación para enteros que se muestra en el patrón de signos abajo.

$$(-)(-) = +$$
$$(-)(-)(-) = -$$
$$(-)(-)(-)(-) = +$$
$$(-)(-)(-)(-)(-) = -$$
$$\vdots$$

113. Cuando se multiplica un número por -1, el resultado es el opuesto del número original. Explique por qué.

114. Un estudiante asevera: "Un positivo y un negativo es negativo". ¿Qué hay de equivocado en este enunciado?

REPASO

115. Liste los primeros 10 números primos.

116. MATRICULACIÓN El número de estudiantes que asisten a una universidad pasó de 10,250 a 12,300 en un año. ¿Cuál fue el aumento en la matriculación?

117. Divida: $175 \div 4$

118. ¿Qué significa el símbolo $<$?

SECCIÓN 2.5
División de enteros

Objetivos

1. Dividir dos enteros.
2. Identificar la *división del 0* y la *división entre 0*.
3. Resolver problemas de aplicación dividiendo enteros.

En esta sección se desarrollarán las reglas para la división de enteros, tal como se hizo anteriormente para la multiplicación de enteros.

1 Dividir dos enteros

Recuerde a partir de la Sección 1.5 que toda división tiene un enunciado de multiplicación relacionado. Por ejemplo,

$$\frac{6}{3} = 2 \quad \text{debido a que} \quad 2(3) = 6$$

y

$$\frac{20}{5} = 4 \qquad \text{debido a que} \qquad 4(5) = 20$$

Se puede utilizar una relación entre la multiplicación y la división para ayudar a desarrollar reglas para la división de enteros. Existen cuatro casos a considerar.

***Caso 1:* Un entero positivo dividido entre un entero positivo**
A partir de años de experiencia, ya se sabe que el resultado es positivo. Por tanto, *el cociente de dos enteros positivos es positivo.*

***Caso 2:* Un entero negativo dividido entre un entero negativo**
Como ejemplo, considere la división $\frac{-12}{-2} = ?$. Se puede encontrar ? examinando el enunciado de multiplicación relacionado.

Enunciado de multiplicación relacionado	Enunciado de la división
$?(-2) = -12$	$\frac{-12}{-2} = ?$
Este debe ser el 6 positivo si el producto va a ser el 12 negativo.	Por lo que el cociente es el 6 positivo.

Por tanto, $\frac{-12}{-2} = 6$. Este ejemplo ilustra que *el cociente de dos enteros negativos es positivo.*

***Caso 3:* Un entero positivo dividido entre un entero negativo**
Se considera la división $\frac{12}{-2} = ?$. Se puede encontrar ? examinando el enunciado de multiplicación relacionado.

Enunciado de multiplicación relacionado	Enunciado de la división
$?(-2) = 12$	$\frac{12}{-2} = ?$
Este debe ser el −6 si el producto va a ser el 12 positivo.	Por lo que el cociente es el −6.

Por tanto, $\frac{12}{-2} = -6$. Este ejemplo ilustra que *el cociente de un entero positivo y un entero negativo es negativo.*

***Caso 4:* Un entero negativo dividido entre un entero positivo**
Se considera la división $\frac{-12}{2} = ?$. Se puede encontrar ? examinando el enunciado de multiplicación relacionado.

Enunciado de multiplicación relacionado	Enunciado de la división
$?(2) = -12$	$\frac{-12}{2} = ?$
Este debe ser el −6 si el producto va a ser el −12.	Por lo que el cociente es el −6.

Por tanto, $\frac{-12}{2} = -6$. Este ejemplo ilustra que *el cociente de un entero negativo y un entero positivo es negativo.*

Ahora se resumen los resultados de los ejemplos anteriores y se observa que son similares a las reglas para la multiplicación.

División de dos enteros

Para dividir dos enteros, divida sus valores absolutos.

1. El cociente de dos enteros que tienen signos iguales (*similares*) es positivo.
2. El cociente de dos enteros que tienen signos diferentes (*no similares*) es negativo.

EJEMPLO 1

Divida y compruebe el resultado:

a. $\frac{-14}{7}$ **b.** $30 \div (-5)$ **c.** $\frac{176}{-11}$ **d.** $-24{,}000 \div 600$

Estrategia Se utilizará la regla para la división de dos enteros que tienen signos diferentes (no similares).

POR QUÉ Cada división involucra un entero positivo y uno negativo.

Solución

a. Encuentre los valores absolutos: $|-14| = 14$ y $|7| = 7$.

$$\frac{-14}{7} = -2$$

Divida los valores absolutos 14 entre 7 para obtener 2. Después haga negativa la respuesta final.

Para comprobar, se multiplica el *cociente,* el -2, y el *divisor,* el 7. Se debe obtener el *dividendo,* -14.

Comprobación: $-2(7) = -14$ El resultado es correcto.

b. Encuentre los valores absolutos: $|30| = 30$ y $|-5| = 5$.

$$30 \div (-5) = -6$$

Divida los valores absolutos 30 entre 5 para obtener 6. Después haga negativa la respuesta final.

Comprobación: $-6(-5) = 30$ El resultado es correcto.

c. Encuentre los valores absolutos: $|176| = 176$ y $|-11| = 11$.

$$\frac{176}{-11} = -16$$

Divida los valores absolutos 176 entre 11 para obtener 16. Después haga negativa la respuesta final.

$$\begin{array}{r} 16 \\ 11\overline{)176} \\ -11 \\ \hline 66 \\ -\ 66 \\ \hline 0 \end{array}$$

Comprobación: $-16(-11) = 176$ El resultado es correcto.

d. Recuerde a partir de la Sección 1.5 que, si un divisor tiene ceros finales, se puede simplificar la división eliminando el mismo número de ceros finales en el divisor y el dividendo.

Hay dos ceros en el divisor.

$$-24{,}000 \div 600 = -240 \div 6 = -40$$

Elimine dos ceros del dividendo y el divisor y divida.

Divida los valores absolutos 240 entre 6 para obtener 40. Después haga negativa la respuesta final.

Comprobación: $-40(600) = -24{,}000$ Use el divisor y el dividendo originales en la comprobación.

Auto-revisión 1

Divida y compruebe el resultado:

a. $\frac{-45}{5}$

b. $28 \div (-4)$

c. $\frac{336}{-14}$

d. $-18{,}000 \div 300$

Ahora intente Problemas 13, 15, 21 y 27

EJEMPLO 2

Divida y compruebe el resultado:

a. $\frac{-12}{-3}$ **b.** $-48 \div (-6)$ **c.** $\frac{-315}{-9}$ **d.** $-200 \div (-40)$

Estrategia Se utilizará la regla para la división de dos enteros que tienen signos iguales (similares).

POR QUÉ En cada caso, se pide encontrar el cociente de dos enteros negativos.

Solución

a. Encuentre los valores absolutos: $|-12| = 12$ y $|-3| = 3$.

$$\frac{-12}{-3} = 4$$

Divida los valores absolutos 12 entre 3 para obtener 4. La respuesta final es positiva.

Comprobación: $4(-3) = -12$ El resultado es correcto.

Auto-revisión 2

Divida y compruebe el resultado:

a. $\frac{-27}{-3}$

b. $-24 \div (-4)$

c. $\frac{-301}{-7}$

d. $-400 \div (-20)$

Ahora intente Problemas 33, 37, 41 y 43

b. Encuentre los valores absolutos: $|-48| = 48$ y $|-6| = 6$.

$-48 \div (-6) = 8$ Divida los valores absolutos 48 entre 6 para obtener 8. La respuesta final es positiva.

Comprobación: $8(-6) = -48$ El resultado es correcto.

c. Encuentre los valores absolutos: $|-315| = 315$ y $|-9| = 9$.

$$\frac{-315}{-9} = 35$$

Divida los valores absolutos 315 entre 9 para obtener 35. La respuesta final es positiva.

$$\begin{array}{r} 35 \\ 9\overline{)315} \\ -27 \\ \hline 45 \\ -45 \\ \hline 0 \end{array}$$

Comprobación: $35(-9) = -315$ El resultado es correcto.

d. Se puede simplificar la división eliminando el mismo número de ceros finales en el divisor y el dividendo.

Hay un cero en el divisor.

$-200 \div (-40) = -20 \div (-4) = 5$

Elimine un cero del dividendo y el divisor y divida.

Divida los valores absolutos 20 entre 4 para obtener 5. La respuesta final es positiva.

Comprobación: $5(-40) = -200$ El resultado es correcto.

2 Identificar la *división del 0* y la *división entre 0*

Para repasar el concepto de la división del 0, se considera $\frac{0}{-2} = ?$. Se intenta encontrar ? examinando el enunciado de multiplicación relacionado.

Enunciado de multiplicación relacionado	Enunciado de la división
$(?)(-2) = 0$	$\frac{0}{-2} = ?$
Este debe ser 0 si el producto va a ser 0.	Por lo que el cociente es 0.

Por tanto, $\frac{0}{-2} = 0$. Este ejemplo ilustra que *el cociente del 0 dividido entre cualquier entero diferente del cero es 0.*

Para repasar la división entre el 0, se considera $\frac{-2}{0} = ?$. Se intenta encontrar ? examinando el enunciado de multiplicación relacionado.

Enunciado de multiplicación relacionado	Enunciado de la división
$(?)0 = -2$	$\frac{-2}{0} = ?$
No existe un número que dé -2 cuando se multiplica por 0.	No hay cociente.

Por tanto, $\frac{-2}{0}$ no tiene una respuesta y se dice $\frac{-2}{0}$ no está definido. Este ejemplo ilustra que *el cociente de cualquier entero diferente del cero dividido entre el 0 no está definido.*

División con el 0

1. Si se divide el 0 entre cualquier entero diferente del cero, el cociente es 0.
2. La división de cualquier entero diferente del cero entre el 0 no está definida.

EJEMPLO 3 Divida, si es posible: **a.** $\frac{-4}{0}$ **b.** $0 \div (-8)$

Estrategia En cada caso, se necesita determinar si se tiene una división *del 0* o una división *entre 0*.

POR QUÉ *La división del 0 entre* cualquier entero diferente del cero está definida y la respuesta es 0. Sin embargo, *la división de un entero diferente del cero entre el 0* no está definida; no hay respuesta.

Solución

a. $\frac{-4}{0}$ no está definida. Esta es una división entre 0.

b. $0 \div (-8) = 0$ debido a que $0(-8) = 0$. Esta es una división del 0.

Auto-revisión 3

Divida, si es posible:

a. $\frac{-12}{0}$ **b.** $0 \div (-6)$

Ahora intente **Problemas 45 y 47**

3 Resolver problemas de aplicación dividiendo enteros

Los problemas que involucran la formación de grupos de igual tamaño pueden resolverse por medio de una división.

EJEMPLO 4 ***Bienes raíces*** En el transcurso de un año, el dueño de una casa redujo el precio de su casa en una cantidad igual cada mes, debido a que no se vendía. Al final del año, el precio era $11,400 menos que al inicio del año. ¿En cuánto se redujo el precio de la casa cada mes?

David McNew/Getty Images

Analizar

- El dueño de la casa disminuyó el precio $11,400 en 1 año. Proporcionado
- El precio se redujo en una cantidad igual cada mes. Proporcionado
- ¿En cuánto se redujo el precio de la casa cada mes? A encontrar

Formar Se puede expresar la caída en el precio de la casa por año como de −$11,400. La frase *redujo en una cantidad igual cada mes* indica una división.

Se traducen las palabras del problema a números y símbolos.

La cantidad en que se redujo el precio cada mes	es igual a	la reducción en el precio de la casa para el año	dividida entre	el número de meses en 1 año
La cantidad que se redujo el precio cada mes	=	−11,400	÷	12

Resolver Para encontrar el cociente, se usa la regla para la división de dos enteros que tienen signos diferentes. Primero, se encuentran los valores absolutos: $|-11{,}400| = 11{,}400$ y $|12| = 12$.

$-11{,}400 \div 12 = -950$ Divida los valores absolutos 11,400 entre 12 para obtener 950. Haga negativa la respuesta final.

$$\begin{array}{r} 950 \\ 12\overline{)11{,}400} \\ -108 \\ \hline 60 \\ -60 \\ \hline 00 \\ -00 \\ \hline 0 \end{array}$$

Enunciar El resultado negativo indica que el precio de la casa *se redujo* en $950 cada mes.

Comprobar Se puede usar una estimación para comprobar el resultado. Una reducción de $1,000 cada mes ocasionaría que el precio disminuya $12,000 en 1 año. Parece razonable que una reducción de $950 cada mes ocasionaría que el precio disminuya $11,400 en un año.

Auto-revisión 4

VENTA DE BOTES El dueño de un velero redujo el precio del velero en una cantidad igual cada mes, debido a que no había compradores interesados. Después de 8 meses y una reducción de $960 en el precio, el velero se vendió. ¿En cuánto se redujo el precio del velero cada mes?

Ahora intente **Problema 81**

Utilizando su CALCULADORA División con números negativos

La Oficina de Estadística Laboral estimó que en los Estados Unidos se perdieron 162,000 empleos en la fabricación de automóviles (automóviles y partes) en el 2008. Debido a que se perdieron empleos, se escribe esto como −162,000. Para encontrar el número promedio de empleos de fabricación de automóviles perdidos cada mes, se divide: $\frac{-162{,}000}{12}$. Se puede utilizar una calculadora para desarrollar la división.

Introducción inversa: 162000 [+/−] [÷] 12 [=]

Introducción directa: 162000 [÷] [(−)] 12 [ENTER] −13500

El número promedio de empleos perdidos en la fabricación de automóviles cada mes en el 2008 fue de 13,500.

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. a. −9 **b.** −7 **c.** −24 **d.** −60 **2. a.** 9 **b.** 6 **c.** 43 **d.** 20 **3. a.** indefinida **b.** 0 **4.** El precio se redujo $120 cada mes.

SECCIÓN 2.5 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Complete los espacios.

1. En el problema de división mostrado abajo, etiquete el *dividendo*, el *divisor* y el *cociente*.

$$12 \quad \div \quad (-4) \quad = \quad -3$$

$$\frac{12}{-4} = -3$$

2. El enunciado de _____ relacionado para $\frac{-6}{3} = -2$ es $-2(3) = -6$.

3. $\frac{-3}{0}$ es una división _____ 0 y $\frac{0}{-3} = 0$ es una división _____ 0.

4. La división de un entero diferente del cero entre el 0, como $\frac{-3}{0}$, está _____.

CONCEPTOS

5. Escriba el enunciado de multiplicación relacionado para cada división.

a. $\frac{-25}{5} = -5$ **b.** $-36 \div (-6) = 6$ **c.** $\frac{0}{-15} = 0$

6. Utilizando una multiplicación, compruebe para determinar si $-720 \div 45 = -12$.

7. Complete los espacios.
Para dividir dos enteros, divida sus valores absolutos.

a. El cociente de dos enteros que tienen los mismos signos (*similares*) es _____.

b. El cociente de dos enteros que tienen signos diferentes (*no similares*) es _____.

8. Si un divisor tiene ceros finales, se puede simplificar la división eliminando el mismo número de ceros finales en el divisor y el dividendo. Complete el espacio: $-2{,}400 \div 60 = -240 \div$ ☐

9. Complete los espacios.

a. Si se divide el 0 entre cualquier entero diferente de cero, el cociente es ☐.

b. La división de cualquier entero diferente de cero entre 0 es _____.

10. ¿Qué operación puede utilizarse para resolver problemas que involucran la formación de grupos de igual tamaño?

11. Determine si cada enunciado es siempre verdadero, en ocasiones verdadero o nunca verdadero.

a. El producto de un entero positivo y un entero negativo es negativo.

b. La suma de un entero positivo y un entero negativo es negativa.

c. El cociente de un entero positivo y un entero negativo es negativo.

12. Determine si cada enunciado es siempre verdadero, en ocasiones verdadero o nunca verdadero.

a. El producto de dos enteros negativos es positivo.

b. La suma de dos enteros negativos es negativa.

c. El cociente de dos enteros negativos es negativo.

PRÁCTICA GUIADA

Divida y compruebe el resultado. Vea el Ejemplo 1.

13. $\frac{-14}{2}$

14. $\frac{-10}{5}$

15. $\frac{-20}{5}$

16. $\frac{-24}{3}$

17. $36 \div (-6)$

18. $36 \div (-9)$

19. $24 \div (-3)$

20. $42 \div (-6)$

21. $\frac{264}{-12}$

22. $\frac{364}{-14}$

23. $\frac{702}{-18}$

24. $\frac{396}{-12}$

25. $-9{,}000 \div 300$

26. $-12{,}000 \div 600$

27. $-250{,}000 \div 5{,}000$

28. $-420{,}000 \div 7{,}000$

Divida y compruebe el resultado. Vea el Ejemplo 2.

29. $\frac{-8}{-4}$

30. $\frac{-12}{-4}$

31. $\frac{-45}{-9}$

32. $\frac{-81}{-9}$

33. $-63 \div (-7)$

34. $-21 \div (-3)$

35. $-32 \div (-8)$

36. $-56 \div (-7)$

37. $\frac{-400}{-25}$

38. $\frac{-490}{-35}$

39. $\frac{-651}{-31}$

40. $\frac{-736}{-32}$

41. $-800 \div (-20)$

42. $-800 \div (-40)$

43. $-15{,}000 \div (-30)$

44. $-36{,}000 \div (-60)$

Divida, si es posible. Vea el Ejemplo 3.

45. **a.** $\frac{-3}{0}$ **b.** $\frac{0}{-3}$

46. **a.** $\frac{-5}{0}$ **b.** $\frac{0}{-5}$

47. **a.** $\frac{0}{-24}$ **b.** $\frac{-24}{0}$

48. **a.** $\frac{0}{-32}$ **b.** $\frac{-32}{0}$

INTÉNTELO

Divida, si es posible.

49. $-36 \div (-12)$

50. $-45 \div (-15)$

51. $\frac{425}{-25}$

52. $\frac{462}{-42}$

53. $0 \div (-16)$

54. $0 \div (-6)$

55. Encuentre el cociente del -45 y el 9.

56. Encuentre el cociente del -36 y el -4.

57. $-2{,}500 \div 500$

58. $-52{,}000 \div 4{,}000$

59. $\frac{-6}{0}$

60. $\frac{-8}{0}$

61. $\frac{-19}{1}$

62. $\frac{-9}{1}$

63. $-23 \div (-23)$

64. $-11 \div (-11)$

65. $\frac{40}{-2}$

66. $\frac{35}{-7}$

67. $9 \div (-9)$

68. $15 \div (-15)$

69. $\frac{-10}{-1}$

70. $\frac{-12}{-1}$

71. $\frac{-888}{37}$

72. $\frac{-456}{24}$

73. $\frac{3{,}000}{-100}$

74. $\frac{-60{,}000}{-1{,}000}$

75. Divida 8 entre -2.

76. Divida -16 entre -8.

Use una calculadora para desarrollar cada división.

77. $\frac{-13{,}550}{25}$

78. $\frac{3{,}876}{-19}$

79. $\frac{27{,}778}{-17}$

80. $\frac{-168{,}476}{-77}$

APLICACIONES

Use números con signo para resolver cada problema.

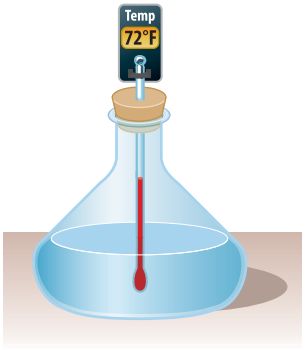
81. REDUCCIÓN DE PRECIOS El propietario de una tienda de muebles redujo el precio de una mesa de roble una cantidad igual cada semana, debido a que no se vendía. Después de seis semanas y una reducción de $210 en el precio, la mesa fue adquirida. ¿En cuánto se redujo el precio de la mesa cada semana?

82. DESCENSO DE TEMPERATURA Durante un periodo de cinco horas, la temperatura disminuyó de manera constante 20°F. ¿En cuántos grados cambió la temperatura cada hora?

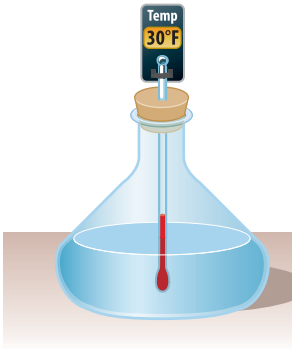
83. SUBMARINOS En una serie de tres inmersiones iguales, se programa que un submarino alcance una profundidad de 3,030 pies debajo de la superficie del océano. ¿Qué número con signo describe qué tan profunda será cada una de las inmersiones?

84. GRAN CAÑÓN Un recua de mulas va a viajar de un establo en el borde del Gran Cañón a un campamento en el fondo del cañón, aproximadamente 5,500 pies debajo del borde. Si el guía desea que las mulas descansen cada 500 pies de descenso, ¿cuántas paradas se harán durante el viaje?

85. QUÍMICA Durante un experimento, se enfrió de manera continua una disolución y se registraron los tiempos y las temperaturas, como se muestra en la ilustración abajo. ¿En cuántos grados cambió la temperatura de la disolución cada minuto?



Al inicio del experimento
8:00 A.M.



Al final del experimento
8:06 A.M.

86. EXPLORACIÓN DEL OCÉANO La Fosa de las Marianas es la parte más profunda de los océanos del mundo. Se localiza en el Océano Pacífico Norte cerca de las Filipinas y tiene una profundidad máxima de 36,201 pies. Si se envía un navío controlado de manera remota al fondo de la fosa en una serie de 11 descensos iguales, ¿qué tanto descenderá el navío en cada inmersión? (Fuente: marianatrench.com)

87. TRASPASOS EN EL BEISBOL A media temporada, un equipo de beisbol se encuentra 12 juegos detrás del líder de la liga. El gerente del equipo decide adquirir un bateador talentoso, esperando reducir al menos a la mitad el déficit en las posiciones al final del año. ¿En qué parte de la tabla espera finalizar el gerente la campaña?

88. DÉFICITS PRESUPUESTARIOS Un político propuso un plan de dos años para reducir el déficit de $20 millones en el presupuesto de un condado, como se muestra. Si este plan se pone en marcha, ¿en cuánto cambiará el déficit en dos años?

	Plan	Predicción
1er año	Elevar impuestos, eliminar programas fallidos	Se cortará el déficit a la mitad
2do año	Investigar despilfarros y fraudes	Se cortará el déficit restante a la mitad

89. REBAJAS La dueña de una tienda de ropa decide reducir el precio de una línea de jeans que no se están vendiendo. Siente que puede permitirse perder $300 del ingreso proyectado en estos pantalones. ¿En cuánto puede rebajar cada uno de los 20 pares de jeans?

90. ALMACENAMIENTO DE AGUA En el periodo de una semana, los ingenieros en un depósito de agua citadino liberaron el agua suficiente para disminuir el nivel 105 pies. En promedio, ¿cuánto cambió el nivel del agua cada día durante este periodo?

91. BOLSA DE VALORES El lunes, el valor de las 255 acciones de María estaban en su punto más alto de la historia. El viernes, el valor había caído $4,335. ¿Cuál fue su pérdida por acción esa semana?

92. CORTES DE PRESUPUESTO En un esfuerzo para disminuir costos, una compañía decide cortar $5,840,000 de su presupuesto anual. Para hacer esto, los 160 departamentos de la compañía tendrán que reducir sus presupuestos en una cantidad igual. ¿En cuánto reducirá cada departamento su presupuesto?

REDACCIÓN

93. Explique por qué el cociente de dos enteros negativos es positivo.

94. ¿En qué se comparan las reglas para la multiplicación de enteros con las reglas para la división de enteros?

95. Use un ejemplo específico para explicar cómo puede utilizarse una multiplicación para comprobar una división.

96. Explique a qué se refiere cuando se dice que la división entre el 0 no está definida.

97. Explique las reglas para la división de enteros que se muestran abajo utilizando símbolos.

$$\frac{+}{+} = + \qquad \frac{-}{-} = + \qquad \frac{-}{+} = - \qquad \frac{+}{-} = -$$

98. Explique la diferencia entre *división del 0 y división entre 0.*

REPASO

99. Evalúe: $5^2\left(\frac{2 \cdot 3^2}{6}\right)^2 - 7(2)$

100. Encuentre la factorización de primos del 210.

101. ¿Qué propiedad ilustra el enunciado $(4 + 8) + 10 = 4 + (8 + 10)$?

102. ¿$17 \geq 17$ es un enunciado verdadero?

103. ¿Es igual $8 - 2 = 2 - 8$?

104. Sharif sacó 55, 70, 80 y 75 en cuatro exámenes de matemáticas. ¿Cuál es su calificación media (promedio)?

SECCIÓN 2.6

Orden de las operaciones y estimación

Objetivos

1. Usar la regla del orden de las operaciones.
2. Evaluar expresiones que contienen símbolos de agrupación.
3. Evaluar expresiones que contienen valores absolutos.
4. Estimar el valor de una expresión.

En este capítulo se han explicado las reglas para la suma, resta, multiplicación y división de enteros. Ahora se utilizarán estas reglas en combinación con la regla del orden de las operaciones de la Sección 1.9 para evaluar expresiones que involucran más de una operación.

1 Usar la regla del orden de las operaciones

Recuerde que si no se establece un orden uniforme de las operaciones, una expresión como $2 + 3 \cdot 6$ puede tener más de un valor. Para evitar esta posibilidad, siempre use la siguiente regla para el orden de las operaciones.

Orden de las operaciones

1. Desarrolle todos los cálculos dentro de los paréntesis y otros símbolos de agrupación siguiendo el orden listado abajo en los Pasos 2–4, empezando desde el par más interno de símbolos de agrupación al par más externo.
2. Evalúe todas las expresiones exponenciales.
3. Desarrolle las multiplicaciones y divisiones a medida que aparezcan de izquierda a derecha.
4. Desarrolle las sumas y restas a medida que aparezcan de izquierda a derecha.

Cuando se hayan eliminado los símbolos de agrupación, repita los Pasos 2–4 para completar el cálculo.

Si está presente una barra de fracción, evalúe la expresión sobre la barra (llamada **numerador**) y la expresión debajo de la barra (llamada **denominador**) por separado. Después desarrolle la división indicada por la barra de fracción, si es posible.

Se puede utilizar esta regla para evaluar expresiones que involucran enteros.

EJEMPLO 1 Evalúe: $-4(-3)^2 - (-2)$

Estrategia Se examinará la expresión para determinar qué operaciones se necesitan desarrollar primero. Después se desarrollarán estas operaciones, una a la vez, siguiendo la regla del orden de las operaciones.

POR QUÉ Si no se sigue el orden correcto de las operaciones, la expresión puede tener más de un valor.

Solución Aunque la expresión contiene paréntesis, no hay cálculos a desarrollar *dentro* de ellos. Se comienza con el paso 2 de la regla del orden de las operaciones: Evalúe todas las expresiones exponenciales.

$$-4(-3)^2 - (-2) = -4(9) - (-2)$$ Evalúe la expresión exponencial: $(-3)^2 = 9$.

$$= -36 - (-2)$$ Realice la multiplicación: $-4(9) = -36$.

$$= -36 + 2$$ Si es de utilidad, use la regla para la resta: Sume el opuesto del -2, el cual es el 2.

$$= -34$$ Realice la suma.

Auto-revisión 1

Evalúe: $-5(-2)^2 - (-6)$

Ahora intente **Problema 13**

Auto-revisión 2
Evalúe:
$4(9) + (-4)(-3)(-2)$
Ahora intente **Problema 17**

EJEMPLO 2 Evalúe: $12(3) + (-5)(-3)(-2)$

Estrategia Se desarrollará primero la multiplicación.

POR QUÉ No hay operaciones a desarrollar dentro de paréntesis, tampoco hay exponentes.

Solución

$$12(3) + (-5)(-3)(-2) = 36 + (-30)$$ Empezando de izquierda a derecha, realice la multiplicación.

$$= 6$$ Realice la suma.

Auto-revisión 3
Evalúe: $45 \div (-5)3$
Ahora intente **Problema 21**

EJEMPLO 3 Evalúe: $40 \div (-4)5$

Estrategia Esta expresión contiene las operaciones de división y multiplicación. Se desarrollarán las divisiones y multiplicaciones a medida que aparezcan de izquierda a derecha.

POR QUÉ No hay operaciones a desarrollar dentro de paréntesis, tampoco hay exponentes.

Solución

$$40 \div (-4)5 = -10 \cdot 5$$ Realice primero la división: $40 \div (-4) = -10$.

$$= -50$$ Realice la multiplicación.

¡Cuidado! En el Ejemplo 3, un error común es olvidar empezar de izquierda a derecha y desarrollar de manera incorrecta primero la multiplicación. Esto produce la respuesta incorrecta, -2.

$$40 \div (-4)5 = 40 \div (-20)$$
$$= -2$$

Auto-revisión 4
Evalúe: $-3^2 - (-3)^2$
Ahora intente **Problema 25**

EJEMPLO 4 Evalúe: $-2^2 - (-2)^2$

Estrategia Hay dos expresiones exponenciales a evaluar y una resta a desarrollar. Se comenzará con las expresiones exponenciales.

POR QUÉ Dado que no hay operaciones a desarrollar dentro de paréntesis, se comienza con el paso 2 de la regla del orden de las operaciones: Evalúe todas las expresiones exponenciales.

Solución Recuerde a partir de la Sección 2.4 que los valores del -2^2 y el $(-2)^2$ no son iguales.

$$-2^2 - (-2)^2 = -4 - 4$$ Evalúe las expresiones exponenciales: $-2^2 = -(2 \cdot 2) = -4$ y $(-2)^2 = -2(-2) = 4$.

$$= -4 + (-4)$$ Si es de utilidad, utilice la regla para la resta: Sume el opuesto del 4, que es el -4.

$$= -8$$ Realice la suma.

2 Evaluar expresiones que contienen símbolos de agrupación

Recuerde que a los **paréntesis** ( ), **corchetes** [ ], **símbolos de valor absoluto** | | y **barra de fracción** — se les llama **símbolos de agrupación.** Cuando se evalúan expresiones, primero se deben desarrollar todos los cálculos dentro de paréntesis y otros símbolos de agrupación.

EJEMPLO 5

Evalúe: $-15 + 3(-4 + 7 \cdot 2)$

Estrategia Se comenzará evaluando la expresión $-4 + 7 \cdot 2$ que está dentro de los paréntesis. Dado que contiene más de una operación, se utilizará la regla del orden de las operaciones para evaluarla. Se desarrollará primero la multiplicación y después la suma.

POR QUÉ Por la regla del orden de las operaciones, se deben desarrollar primero todos los cálculos dentro de los paréntesis siguiendo el orden listado en los Pasos 2–4 de la regla.

Solución

$$-15 + 3(-4 + \mathbf{7 \cdot 2}) = -15 + 3(-4 + \mathbf{14})$$ Realice la multiplicación dentro de los paréntesis: $7 \cdot 2 = 14$.

$$= -15 + 3(10)$$ Realice la suma dentro de los paréntesis: $-4 + 14 = 10$.

$$= -15 + 30$$ Realice la multiplicación: $3(10) = 30$.

$$= 15$$ Realice la suma.

Las expresiones pueden contener dos o más pares de símbolos de agrupación. Para evaluar la siguiente expresión, se comienza con el par más interno de símbolos de agrupación, los paréntesis. Después se resuelve lo que está dentro del par más externo, los corchetes.

Par más interno

$$67 - 5[-1 + (2 - 8)^2]$$

Par más externo

Auto-revisión 5

Evalúe: $-18 + 6(-7 + 9 \cdot 2)$

Ahora intente **Problema 29**

EJEMPLO 6

Evalúe: $67 - 5[-1 + (2 - 8)^2]$

Estrategia Se resolverá primero lo que hay dentro de los paréntesis y después lo que hay dentro de los corchetes. Dentro de cada par de símbolos de agrupación, se seguirá la regla del orden de las operaciones.

POR QUÉ Se debe resolver del par *más interno* de símbolos de agrupación al *más externo*.

Solución

$$67 - 5[-1 + (\mathbf{2 - 8})^2]$$

$$= 67 - 5[-1 + (\mathbf{-6})^2]$$ Realice la resta dentro de los paréntesis: $2 - 8 = -6$.

$$= 67 - 5[-1 + 36]$$ Evalúe la expresión exponencial dentro de los corchetes.

$$= 67 - 5[35]$$ Realice la suma dentro de los corchetes: $-1 + 36 = 35$.

$$= 67 - \mathbf{175}$$ Realice la multiplicación: $5(35) = 175$.

$$= 67 + \mathbf{(-175)}$$ Si es de utilidad, use la regla para la resta. Sume el opuesto del 175, que es el -175.

$$= -108$$ Realice la suma.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2}\\ 35\\ \times\ 5\\ \hline 175 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle 6\,15}\\ 1\not{7}\not{5}\\ -\ 67\\ \hline 108 \end{array}$$

Consejo útil Cualquier paso aritmético que no pueda desarrollar de manera mental debe mostrarse fuera de los pasos horizontales de su solución.

Auto-revisión 6

Evalúe:
$81 - 4[-2 + (5 - 9)^2]$

Ahora intente **Problema 33**

Auto-revisión 7

Evalúe: $-\left[8-\left(3^3+\frac{90}{-9}\right)\right]$

Ahora intente **Problema 37**

EJEMPLO 7 Evalúe: $-\left[1-\left(2^4+\frac{66}{-6}\right)\right]$

Estrategia Se resolverá primero lo que hay dentro de los paréntesis y después lo que hay dentro de los corchetes. Dentro de cada par de símbolos de agrupación se seguirá la regla del orden de las operaciones.

POR QUÉ Se debe resolver del par *más interno* de símbolos de agrupación al *más externo*.

Solución

$$-\left[1-\left(\mathbf{2^4}+\frac{66}{-6}\right)\right]=-\left[1-\left(\mathbf{16}+\frac{66}{-6}\right)\right]$$ Evalúe la expresión exponencial dentro del paréntesis: $2^4 = 16$.

$$=-\left[1-\left(16+(-11)\right)\right]$$ Realice la división dentro de los paréntesis: $66 \div (-6) = -11$.

$$=-[1-5]$$ Realice la suma dentro de los paréntesis: $16 + (-11) = 5$.

$$=-[-4]$$ Realice la resta dentro de los corchetes: $1 - 5 = -4$.

$$=4$$ El opuesto del -4 es el 4.

Auto-revisión 8

Evalúe: $\frac{-9+6(-4)}{28-(-5)^2}$

Ahora intente **Problema 41**

EJEMPLO 8 Evalúe: $\frac{-20+3(-5)}{21-(-4)^2}$

Estrategia Se evaluará por separado la expresión arriba y la expresión debajo de la barra de fracción. Después se realizará la división indicada, si es posible.

POR QUÉ Las barras de fracción son símbolos de agrupación que agrupan al numerador y al denominador. La expresión podría escribirse $[-20 + 3(-5)] \div [21 - (-4)^2]$.

Solución

$$\frac{-20+\mathbf{3(-5)}}{21-\mathbf{(-4)^2}}=\frac{-20+(\mathbf{-15})}{21-\mathbf{16}}$$ En el numerador, realice la multiplicación: $3(-5) = -15$. En el denominador, evalúe la expresión exponencial: $(-4)^2 = 16$.

$$=\frac{-35}{5}$$ En el numerador, sume: $-20 + (-15) = -35$. En el denominador, reste: $21 - 16 = 5$.

$$=-7$$ Realice la división indicada por la barra de fracción.

3 Evaluar expresiones que contienen valores absolutos

Anteriormente en este capítulo se encontraron los valores absolutos de enteros. Por ejemplo, recuerde que $|-3| = 3$ y $|10| = 10$. Se utiliza la regla del orden de las operaciones para evaluar expresiones más complicadas que contienen valores absolutos.

Auto-revisión 9

Evalúe cada expresión:

a. $|(-6)(5)|$

b. $|-3+96|$

Ahora intente **Problema 45**

EJEMPLO 9 Evalúe cada expresión: **a.** $|-4(3)|$ **b.** $|-6+1|$

Estrategia Se desarrollará primero el cálculo dentro de los símbolos de valor absoluto. Después se encontrará el valor absoluto del resultado.

POR QUÉ Los símbolos de valor absoluto son símbolos de agrupación, y por la regla del orden de las operaciones todos los cálculos dentro de los símbolos de agrupación deben desarrollarse primero.

Solución

a. $|-4(3)| = |-12|$ Realice la multiplicación dentro del símbolo de valor absoluto: $-4(3) = -12$.

$= 12$ Encuentre el valor absoluto del -12.

b. $|-6+1| = |-5|$ Realice la suma dentro del símbolo de valor absoluto: $-6 + 1 = -5$.

$= 5$ Encuentre el valor absoluto del -5.

El lenguaje de las matemáticas Se indica una multiplicación cuando un número está fuera y al lado de un símbolo de valor absoluto. Por ejemplo,

$8 - 4|-6 - 2|$ significa $8 - 4 \cdot |-6 - 2|$

EJEMPLO 10 Evalúe: $8 - 4|-6 - 2|$

Estrategia Las barras de valor absoluto son símbolos de agrupación. Se desarrollará primero la resta entre ellas.

POR QUÉ Por la regla del orden de las operaciones se deben desarrollar primero todos los cálculos dentro de paréntesis y otros símbolos de agrupación (como las barras de valor absoluto).

Solución

$8 - 4|\mathbf{-6 - 2}| = 8 - 4|\mathbf{-6 + (-2)}|$ Si es de utilidad, use la regla para la resta dentro del símbolo de valor absoluto: Sume el opuesto del 2, el cual es el -2.

$= 8 - 4|\mathbf{-8}|$ Realice la suma dentro del símbolo de valor absoluto: $-6 + (-2) = -8$.

$= 8 - 4(8)$ Encuentre el valor absoluto: $|-8| = 8$.

$= 8 - 32$ Realice la multiplicación: $4(8) = 32$.

$= 8 + (-32)$ Si es de utilidad, use la regla para la resta: Sume el opuesto del 32, el cual es el -32.

$= -24$ Realice la suma.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 212} \\ 32 \\ -8 \\ \hline 24 \end{array}$$

Auto-revisión 10

Evalúe: $7 - 5|-1 - 6|$

Ahora intente **Problema 49**

4 Estimar el valor de una expresión

Recuerde que la idea detrás de la estimación es simplificar cálculos utilizando números redondeados que son cercanos a los valores reales en el problema. Cuando no es necesaria una respuesta exacta y se realizará una aproximación rápida, se puede utilizar una estimación.

EJEMPLO 11 ***Bolsa de valores***

El cambio en el Promedio Industrial Dow Jones se anuncia al final de cada jornada financiera para dar un cuadro general de cómo se está desempeñando el mercado de valores. Un cambio positivo significa un buen desempeño, mientras que un cambio negativo indica un desempeño pobre. La semana del 13–17 de octubre del 2008 tuvo algunos cambios récord, como se muestra abajo. Redondee cada número a la decena más cercana y estime la ganancia o pérdida neta de puntos en el Dow esa semana.

EIGHTFISH/Getty Images

Estrategia Para estimar la ganancia o pérdida neta, se redondeará cada número a la decena más cercana y se *sumarán* las aproximaciones.

+936	-78	-733	+402	-123
Lunes 13 de oct. del 2008 (mayor aumento en 1 día)	Martes 14 de oct. del 2008	Miércoles 15 de oct. del 2008 (segundo mayor descenso en 1 día)	Jueves 16 de oct. del 2008 (décimo mayor aumento en 1 día)	Viernes 17 de oct. del 2008

Fuente: finance.yahoo.com

Auto-revisión 11

BOLSA DE VALORES Para la semana del 15–19, de diciembre del 2008, el Promedio Industrial Dow Jones se desempeñó como a continuación, lunes: -63, martes: $+358$, miércoles: -98, jueves: -219, viernes: -27.

Redondee cada número a la decena más cercana y estime la ganancia o pérdida neta de puntos en el Dow para esa semana. (Fuente: finance.yahoo.com)

Ahora intente **Problemas 53 y 97**

POR QUÉ La frase *ganancia o pérdida neta* se refiere a lo que permanece después de que se han combinado (sumado) todas las pérdidas o ganancias.

Solución A la decena más cercana:

936 se redondea a 940 −78 se redondea a −80 −733 se redondea a −730
402 se redondea a 400 −123 se redondea a −120

Para estimar la ganancia o pérdida neta para la semana, se suman los números redondeados.

$$\begin{aligned} &940 + (-80) + (-730) + 400 + (-120) \\ &= 1{,}340 + (-930) \quad \text{Sume por separado los positivos y los negativos.} \\ &= 410 \quad \text{Realice la suma.} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 13}\\ 1{,}340 \\ -\,930 \\ \hline 410 \end{array}$$

El resultado positivo significa que hubo una ganancia neta esa semana de aproximadamente 410 puntos en el Dow.

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. −14 **2.** 12 **3.** −27 **4.** −18 **5.** 48 **6.** 25 **7.** 9 **8.** −11 **9. a.** 30 **b.** 93 **10.** −28 **11.** Hubo una pérdida neta de aproximadamente 50 puntos esa semana.

SECCIÓN 2.6 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Complete los espacios.

1. Para evaluar expresiones que contienen más de una operación, se utiliza la regla del _____ de las operaciones.

2. Los símbolos de valor absoluto, paréntesis y corchetes son tipos de símbolos de _____.

3. En la expresión $-9 + 2[-5 - 6(-3 - 1)]$, los paréntesis son símbolos de agrupación más _____ y los corchetes son símbolos de agrupación más _____.

4. En situaciones donde no se necesita una respuesta exacta, una aproximación o _____ es una manera rápida de obtener una idea aproximada del tamaño de la respuesta real.

CONCEPTOS

5. Liste las operaciones en el orden en el que deben desarrollarse para evaluar cada expresión. *No tiene que evaluar la expresión.*

a. $5(-2)^2 - 1$

b. $15 - 3 + (-5 \cdot 2)^3$

c. $4 + 2(-7 - 3)$

d. $-2 \cdot 3^2$

6. Considere la expresión $\dfrac{5 + 5(7)}{2 + (4 - 8)}$. En el numerador, ¿qué operación debe desarrollarse primero? En el denominador, ¿qué operación debe desarrollarse primero?

NOTACIÓN

7. Dé el nombre de cada símbolo de agrupación: ( ), [ ], | | y —.

8. ¿Qué operación se indica?

$$-2 + 9|8 - (-2 + 4)|$$

Complete cada solución para evaluar las expresiones.

9. $-8 - 5(-2)^2 = -8 - 5(\ \square\ )$
$= -8 - \square$
$= -8 + (\ \square\ )$
$= \square$

10. $2 + (5 - 6 \cdot 2) = 2 + (5 - \ \square\ )$
$= 2 + [5 + (\ \square\ )]$
$= 2 + (\ \square\ )$
$= \square$

11. $-9 + 5[-4 \cdot 2 + 7] = -9 + 5[\ \square\ + 7]$
$= -9 + 5[\ \square\ ]$
$= -9 + (\ \square\ )$
$= \square$

12. $\dfrac{|-9 + (-3)|}{9 - 6} = \dfrac{|\ \square\ |}{3}$
$= \dfrac{\square}{3}$
$= \square$

PRÁCTICA GUIADA

Evalúe cada expresión. Vea el Ejemplo 1.

13. $-2(-3)^2 - (-8)$ **14.** $-6(-2)^2 - (-9)$

15. $-5(-4)^2 - (-18)$ **16.** $-3(-5)^2 - (-24)$

Evalúe cada expresión. Vea el Ejemplo 2.

17. $9(7) + (-6)(-2)(-4)$

18. $9(8) + (-2)(-5)(-7)$

19. $8(6) + (-2)(-9)(-2)$

20. $7(8) + (-3)(-6)(-2)$

Evalúe cada expresión. Vea el Ejemplo 3.

21. $30 \div (-5)2$ **22.** $50 \div (-2)5$

23. $60 \div (-3)4$ **24.** $120 \div (-4)3$

Evalúe cada expresión. Vea el Ejemplo 4.

25. $-6^2 - (-6)^2$ **26.** $-7^2 - (-7)^2$

27. $-10^2 - (-10)^2$ **28.** $-8^2 - (-8)^2$

Evalúe cada expresión. Vea el Ejemplo 5.

29. $-14 + 2(-9 + 6 \cdot 3)$

30. $-18 + 3(-10 + 3 \cdot 7)$

31. $-23 + 3(-15 + 8 \cdot 4)$

32. $-31 + 6(-12 + 5 \cdot 4)$

Evalúe cada expresión. Vea el Ejemplo 6.

33. $77 - 2[-6 + (3 - 9)^2]$

34. $84 - 3[-7 + (5 - 8)^2]$

35. $99 - 4[-9 + (6 - 10)^2]$

36. $67 - 5[-6 + (4 - 7)^2]$

Evalúe cada expresión. Vea el Ejemplo 7.

37. $-\left[4 - \left(3^3 + \frac{22}{-11}\right)\right]$

38. $-\left[1 - \left(2^3 + \frac{40}{-20}\right)\right]$

39. $-\left[50 - \left(5^3 + \frac{50}{-2}\right)\right]$

40. $-\left[12 - \left(2^5 + \frac{40}{-4}\right)\right]$

Evalúe cada expresión. Vea el Ejemplo 8.

41. $\dfrac{-24 + 3(-4)}{42 - (-6)^2}$ **42.** $\dfrac{-18 + 6(-2)}{52 - (-7)^2}$

43. $\dfrac{-38 + 11(-2)}{69 - (-8)^2}$ **44.** $\dfrac{-36 + 8(-2)}{85 - (-9)^2}$

Evalúe cada expresión. Vea el Ejemplo 9.

45. **a.** $|-6(2)|$ **b.** $|-12 + 7|$

46. **a.** $|-4(9)|$ **b.** $|-15 + 6|$

47. **a.** $|15(-4)|$ **b.** $|16 + (-30)|$

48. **a.** $|12(-5)|$ **b.** $|47 + (-70)|$

Evalúe cada expresión. Vea el Ejemplo 10.

49. $16 - 6|-2 - 1|$ **50.** $15 - 6|-3 - 1|$

51. $17 - 2|-6 - 4|$ **52.** $21 - 9| - 3 - 1|$

Estime el valor de cada expresión redondeando cada número a la decena más cercana. Vea el Ejemplo 11.

53. $-379 + (-13) + 287 + (-671)$

54. $-363 + (-781) + 594 + (-42)$

Estime el valor de cada expresión redondeando cada número a la centena más cercana. Vea el Ejemplo 11.

55. $-3{,}887 + (-5{,}806) + 4{,}701$

56. $-5{,}684 + (-2{,}270) + 3{,}404 + 2{,}689$

INTÉNTELO

Evalúe cada expresión.

57. $(-3)^2 - 4^2$ **58.** $-7 + 4 \cdot 5$

59. $3^2 - 4(-2)(-1)$ **60.** $2^3 - 3^3$

61. $|-3 \cdot 4 + (-5)|$ **62.** $|-8 \cdot 5 - 2 \cdot 5|$

63. $(2 - 5)(5 + 2)$ **64.** $-3(2)^24$

65. $6 + \dfrac{25}{-5} + 6 \cdot 3$ **66.** $-5 - \dfrac{24}{6} + 8(-2)$

67. $\dfrac{-6 - 2^3}{-2 - (-4)}$ **68.** $\dfrac{-6 - 6}{-2 - 2}$

69. $-12 \div (-2)2$ **70.** $-60(-2) \div 3$

71. $-16 - 4 \div (-2)$ **72.** $-24 + 4 \div (-2)$

73. $-|2 \cdot 7 - (-5)^2|$ **74.** $-|8 \div (-2) - 5|$

75. $|-4 - (-6)|$ **76.** $|-2 + 6 - 5|$

77. $(7 - 5)^2 - (1 - 4)^2$ **78.** $5^2 - (-9 - 3)$

79. $-1(2^2 - 2 + 1^2)$ **80.** $(-7 - 4)^2 - (-1)$

81. $\dfrac{-5 - 5}{1^4 + 1^5}$ **82.** $\dfrac{-7 - (-3)}{2 - 2^2}$

83. $-50 - 2(-3)^3(4)$ **84.** $(-2)^3 - (-3)(-2)(4)$

85. $-6^2 + 6^2$

86. $-9^2 + 9^2$

87. $3\left(\frac{-18}{3}\right) - 2(-2)$

88. $2\left(\frac{-12}{3}\right) + 3(-5)$

89. $2|1 - 8| \cdot |-8|$

90. $2(5) - 6(|-3|)^2$

91. $\frac{2 + 3[5 - (1 - 10)]}{|2(-8 + 2) + 10|}$

92. $\frac{11 + (-2 \cdot 2 + 3)}{|15 + (-3 \cdot 4 - 8)|}$

93. $-2 + |6 - 4^2|$

94. $-3 - 4|6 - 7|$

95. $\frac{-4(-5) - 2}{3 - 3^2}$

96. $\frac{(-6)^2 - 1}{-(2^2 - 3)}$

APLICACIONES

97. BOLSA DE VALORES Para la semana del 5–9, de enero del 2009, el Promedio Industrial Dow Jones se desempeñó como a continuación, lunes: −74, martes: +61, miércoles: −227, jueves: −27, viernes: −129. Redondee cada número a la decena más cercana y estime la ganancia o pérdida neta de puntos en el Dow para esa semana. (Fuente: finance.yahoo.com)

98. RÉCORDS DE LA BOLSA DE VALORES Refiérase a las tablas de abajo. Redondee cada ganancia y pérdida de puntos récord del Dow Jones a la centena más cercana y después sume las 10 a todas ellas. Hay un resultado interesante. ¿Cuál es?

5 mayores ganancias de puntos diarias del Dow Jones

Clasificación	Fecha	Ganancia
1	10/13/2008	+936
2	10/28/2008	+889
3	11/13/2008	+553
4	11/21/2008	+494
5	9/30/2008	+485

5 mayores pérdidas de puntos diarias del Dow Jones

Clasificación	Fecha	Pérdida
1	9/29/2008	−778
2	10/15/2008	−733
3	12/1/2008	−680
4	10/9/2008	−679
5	10/22/2008	−514

(Fuente: Índices Dow Jones)

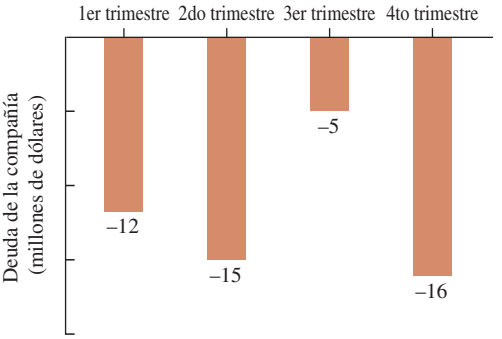
99. EXÁMENES En un esfuerzo para disuadir a sus estudiantes para adivinar en los exámenes de opción múltiple, una profesora utiliza la escala de calificaciones mostrada en la siguiente columna. Si no está seguro de una respuesta, mejor un estudiante se salta la pregunta, debido a que las respuestas incorrectas son penalizadas de manera más severa. Encuentre la calificación del examen de un estudiante que obtiene 12 correctas y 3 incorrectas y deja 5 preguntas en blanco.

Respuesta	Valor
Correcta	+3
Incorrecta	−4
Dejada en blanco	−1

100. HOJAS DE CÁLCULO La tabla muestra la información de un experimento químico en forma de hoja de datos. Para obtener un resultado, el químico necesita sumar los valores en el renglón 1, duplicar la suma y después dividir ese número entre el valor más pequeño en la columna C. ¿Cuál es el resultado final de estos cálculos?

	A	B	C	D
1	12	−5	6	−2
2	15	4	5	−4
3	6	4	−2	8

101. ADQUISICIONES DE NEGOCIOS Seis inversionistas están adquiriendo una compañía administrada de manera deficiente, pero primero deben reembolsar la deuda que la compañía sumó en los pasados cuatro trimestres. (Vea la gráfica abajo.) Si los inversionistas planean una propiedad equitativa, ¿de cuánto de la deuda total de la compañía es responsable cada inversionista?



102. DISMINUCIÓN DE LA MATRICULACIÓN Encuentre la disminución en la matriculación para cada preparatoria en Mesa, Arizona, mostrada en la tabla abajo. Exprese cada disminución como un número negativo. Después encuentre la disminución media (promedio) en la matriculación para estas cuatro escuelas.

Preparatoria	Matriculación en el 2008	Matriculación en el 2009	Disminución
Mesa	2,683	2,573	
Red Mountain	2,754	2,662	
Skyline	1,948	1,875	
Westwood	2,257	2,192	

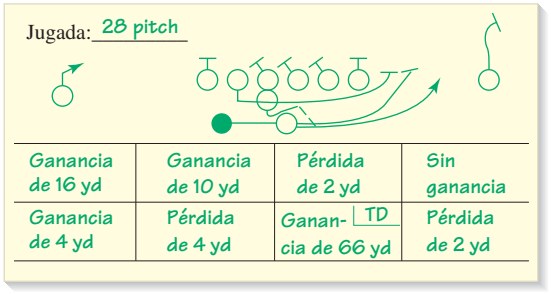
(Fuente: azcentral.com)

103. PRESUPUESTO FEDERAL Vea la gráfica de abajo. Suponga que se le contrató para escribir un discurso para un político que desea destacar la mejora en las finanzas del gobierno federal durante la década de 1990. ¿Sería mejor que el político hablara del déficit/superávit presupuestal medio (promedio) para la última mitad de la década o para los últimos cuatro años de la década? Explique su razonamiento.

Déficit/superávit presupuestal
($ miles de millones)

Déficit	Año	Superávit
−164	1995	
−107	1996	
−22	1997	
	1998	+70
	1999	+123

104. REPORTES DE RECONOCIMIENTO La ilustración le muestra a un entrenador de futbol americano qué tan exitoso fue su oponente al realizar un "28 pitch" la última ocasión en la que los dos equipos se enfrentaron. ¿Cuál fue la ganancia media (promedio) del oponente con esta jugada?



105. ESTIMACIÓN Determine de manera rápida un estimado razonable de la respuesta exacta en cada una de las siguientes situaciones.

a. Un buzo, nadando a una profundidad de 34 pies debajo del nivel del mar, divisa un barco hundido debajo de él. Se sumerge otros 57 pies para alcanzarlo. ¿Cuál es la profundidad del barco hundido?

b. Una compañía de higiene dental ofrece una garantía de devolución de dinero en su juego de blanqueamiento dental. Cuando el juego es devuelto por un cliente insatisfecho, la compañía pierde los $11 que costó producirlo, debido a que no puede volverlo a vender. ¿Cuánto dinero ha perdido la compañía debido a esta política de devolución si los consumidores han enviado por correo 56 juegos?

c. Una línea de tranvía realiza un descenso de 7,891 pies desde la cima de una montaña en 18 etapas iguales. ¿Cuánto desciende en cada etapa?

106. ESTIMACIÓN Determine de manera rápida un estimado razonable de la respuesta exacta en cada una de las siguientes situaciones.

a. Un submarino, navegando a una profundidad de −175 pies, desciende otros 605 pies. ¿Cuál es la profundidad del submarino?

b. Una pareja casada tiene activos que suman $840,756 y pasivos que suman $265,789. ¿Cuál es su valor neto?

c. De acuerdo con pokerlistings.com, el top 5 de pérdidas de póker en línea hasta enero del 2009 eran de $52,256; $52,235; $31,545; $28,117 y $27,475. Encuentre la cantidad perdida total.

REDACCIÓN

107. Cuando se evalúan expresiones, ¿por qué es necesaria la regla del orden de las operaciones?

108. En las reglas para el orden de las operaciones, ¿a qué se refiere la frase *a medida que aparecen de izquierda a derecha*?

109. Explique el error en cada evaluación de abajo.

a. $80 \div (-2)4 = 80 \div (-8)$
$= -10$

b. $-1 + 8|4 - 9| = -1 + 8|-5|$
$= 7|-5|$
$= 35$

110. Describa una situación en la vida diaria donde utilice una estimación.

REPASO

111. En la recta numérica, ¿qué número está

a. 4 unidades a la derecha del −7?

b. 6 unidades a la izquierda del 2?

112. ¿Es 834,540 divisible entre: **a.** 2 **b.** 3 **c.** 4 **d.** 5 **e.** 6 **f.** 9 **g.** 10

113. ELEVADORES Un elevador tiene una capacidad máxima de 1,000 libras. Siete personas, con un peso promedio de 140 libras, están en él. ¿Está sobrecargado?

114. **a.** Encuentre el mcm del 12 y el 44.

b. Encuentre el mfc del 12 y el 44.

LISTA DE VERIFICACIÓN DE LAS HABILIDADES DE ESTUDIO

¿Conoce las bases?

La clave para dominar el temario del Capítulo 2 es conocer las bases. Coloque una marca de verificación en cada recuadro después de responder la pregunta.

☐ Comprendo el orden en la recta numérica:

$-4 < -3$ y $-15 > -20$

☐ Conozco cómo sumar dos enteros que tienen el mismo signo.

- La suma de dos números positivos es *positiva.*

  $4 + 5 = 9$

- La suma de dos números negativos es *negativa.*

  $-4 + (-5) = -9$

☐ Conozco cómo sumar dos enteros que tienen signos diferentes.

- Si el entero positivo tiene el valor absoluto más grande, la suma es positiva.

  $-7 + 11 = 4$

- Si el entero negativo tiene el valor absoluto más grande, la suma es negativa.

  $12 + (-20) = -8$

☐ Conozco cómo utilizar la regla para la resta: *La resta es lo mismo que la suma del opuesto.*

$-2 - (-7) = -2 + 7 = 5$

y

$-9 - 3 = -9 + (-3) = -12$

☐ Conozco que las reglas para la multiplicación y división de dos enteros son las mismas:

- Signos similares: resultado positivo

  $(-2)(-3) = 6$ y $\dfrac{-15}{-3} = 5$

- Signos no similares: resultado negativo

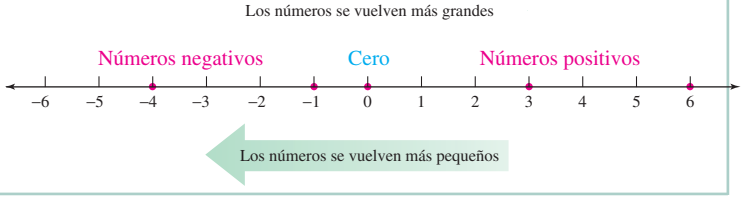
  $2(-3) = -6$ y $\dfrac{-15}{3} = -5$

☐ Conozco el significado de un símbolo $-$:

$-(-6) = 6$ $\quad -|-6| = -6$

CAPÍTULO 2 RESUMEN Y REPASO

SECCIÓN 2.1 Introducción a los enteros

DEFINICIONES Y CONCEPTOS	EJEMPLOS
A la colección de los números naturales positivos, los negativos de los números naturales y el 0 se le llama conjunto de **enteros.**	El conjunto de enteros: $\{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
Los **números positivos** son mayores que el 0 y los **números negativos** son menores que el 0.	El conjunto de enteros positivos: $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ El conjunto de enteros negativos: $\{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1\}$
Los números negativos pueden representarse en una **recta numérica** extendiendo la recta a la izquierda y trazando una punta de flecha. A medida que se mueve hacia la derecha en la recta numérica, los valores de los números aumentan. A medida que se mueve hacia la izquierda, los valores de los números disminuyen.	Grafique el -1, el 6, el 0, el -4 y el 3 en la recta numérica. 

Símbolos de desigualdad $\neq$ significa *no es igual a* $\geq$ significa *es mayor que o igual a* $\leq$ significa *es menor que o igual a*	Cada uno de los siguientes enunciados es verdadero: $5 \neq -3$ Se lee como "el 5 no es igual al -3". $4 \geq -6$ Se lee como "el 4 es mayor que o igual al -6". $-2 \leq -2$ Se lee como "el -2 es menor que o igual al -2".
El **valor absoluto** de un número es la distancia en la recta numérica entre el número y el 0.	Encuentre cada valor absoluto: $\|12\| = 12$ $\|-9\| = 9$ $\|0\| = 0$
Dos números que están a la misma distancia del 0 en la recta numérica, pero en lados opuestos de ésta, se les llama **opuestos** o **negativos.**	El opuesto del 4 es el -4. El opuesto del -77 es el 77. El opuesto del 0 es el 0.
Regla del opuesto del opuesto El opuesto del opuesto (o negativo) de un número es ese número.	Simplifique cada expresión: $-(-6) = 6$ $-\|8\| = -8$ $-\|-26\| = -26$
Se utiliza el **símbolo** $-$ para indicar un número negativo, el opuesto de un número y la operación de resta.	-2 2 negativo $-(-4)$ el opuesto del cuatro negativo $6 - 1$ seis menos uno

EJERCICIOS DE REPASO

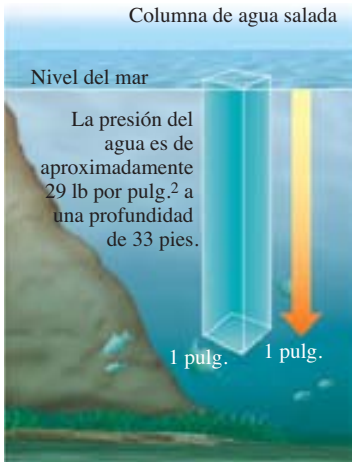
1. Escriba el conjunto de los enteros.

2. Represente cada una de las siguientes situaciones utilizando un número con signo.

a. un déficit de \$1,200

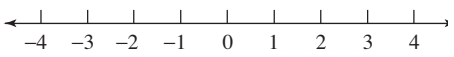
b. 10 segundos antes de entrar al aire

3. PRESIÓN DEL AGUA El agua salada ejerce una presión de aproximadamente 29 libras por pulgada cuadrada a una profundidad de 33 pies. Exprese la profundidad utilizando un número con signo.

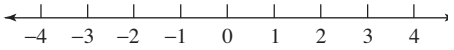


4. Grafique los siguientes enteros en una recta numérica.

a. $-3, 0, 4, -1$



b. los enteros mayores que el -3 pero menores que el 4



5. Coloque un símbolo $<$ o $>$ en el recuadro para formar un enunciado verdadero.

a. $0 \square -7$ **b.** $-20 \square -19$

6. Indique si cada enunciado es verdadero o falso.

a. $-17 \geq -16$ **b.** $-56 \leq -56$

7. Encuentre cada valor absoluto.

a. $|5|$ **b.** $|-43|$ **c.** $|0|$

8. **a.** ¿Cuál es el opuesto del 8?

b. ¿Cuál es el opuesto del -8?

c. ¿Cuál es el opuesto del 0?

9. Simplifique cada expresión.

a. $-|12|$

b. $-(-12)$

c. -0

10. Explique el significado de cada símbolo − rojo.

a. −5

b. −(−5)

c. −(−5)

d. 5 − (−5)

11. ASOCIACIÓN DE GOLF PROFESIONAL FEMENIL Las posiciones de las seis mejores finalistas del Torneo de la LPGA Grand China Air del 2008 y sus puntuaciones relacionadas al par fueron: Helen Alfredsson (−12), Laura Diaz (−8), Shanshan Feng (−5), Young Kim (−6), Karen Stupples (−7) y Yani Tseng (−9). Complete la tabla de abajo. Recuerde, en el golf gana la puntuación más baja.

Posición	Jugadora	Calificación al par
1		
2		
3		
4		
5		
6		

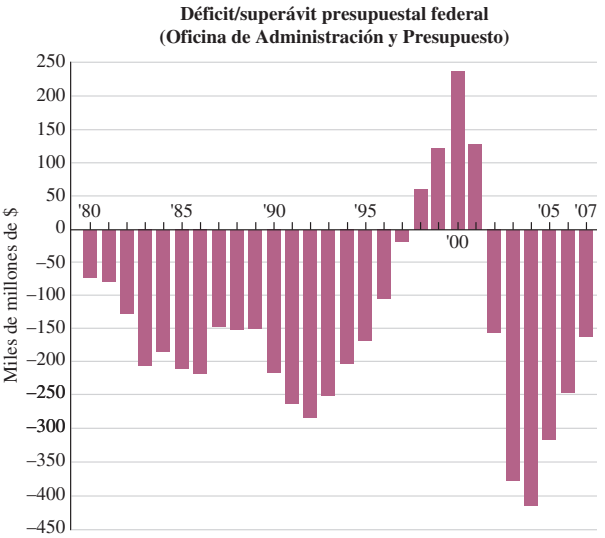
Fuente: golf.fanhouse.com

12. PRESUPUESTO FEDERAL La gráfica muestra la información del déficit/superávit presupuestal del gobierno de E.U. para los años 1980-2007.

a. ¿Cuándo ocurrió el primer superávit presupuestal? Estímelo.

b. ¿En qué año hubo el mayor superávit? Estímelo.

c. ¿En qué año hubo el mayor déficit? Estímelo.



(Fuente: U.S. Bureau of the Census)

SECCIÓN 2.2 Suma de enteros

DEFINICIONES Y CONCEPTOS	EJEMPLOS
Suma de dos enteros que tienen signos iguales (similares) **1.** Para sumar dos enteros positivos, súmelos como siempre. La respuesta final es positiva. **2.** Para sumar dos enteros negativos, sume sus valores absolutos y haga negativa la respuesta final.	Sume: $-5 + (-10)$ Encuentre los valores absolutos: $\lvert -5\rvert = 5$ y $\lvert -10\rvert = 10$. $-5 + (-10) = -15$ Sume sus valores absolutos 5 y 10 para obtener 15. Después haga negativa la respuesta final.
Suma de dos enteros que tienen signos diferentes (no similares) Para sumar un entero positivo y un entero negativo, reste el valor absoluto más pequeño del más grande. **1.** Si el entero positivo tiene el valor absoluto más grande, la respuesta final es positiva. **2.** Si el entero negativo tiene el valor absoluto más grande, haga negativa la respuesta final.	Sume: $-7 + 12$ Encuentre los valores absolutos: $\lvert -7\rvert = 7$ y $\lvert 12\rvert = 12$. $-7 + 12 = 5$ Reste el valor absoluto más pequeño del más grande: 12 − 7 = 5. Dado que el número positivo, el 12, tiene el valor absoluto más grande, haga positiva la respuesta final. Sume: $-8 + 3$ Encuentre los valores absolutos: $\lvert -8\rvert = 8$ y $\lvert 3\rvert = 3$. $-8 + 3 = -5$ Reste el valor absoluto más pequeño del más grande: 8 − 3 = 5. Dado que el número negativo, el −8, tiene el valor absoluto más grande, haga negativa la respuesta final.

Para **evaluar expresiones** que contienen varias sumas, haga uso repetitivo de las reglas para la suma de dos enteros.	Evalúe: $-7 + 1 + (-20) + 1$ Desarrolle las sumas comenzando de izquierda a derecha. $-7 + 1 + (-20) + 1 = -6 + (-20) + 1$ $= -26 + 1$ $= -25$
Se pueden utilizar las propiedades conmutativa y asociativa de la suma para **reordenar** y **reagrupar** sumandos.	Otra manera de evaluar esta expresión es sumar por separado los negativos y los positivos. Después sumar esos resultados. Negativos Positivos $-7 + 1 + (-20) + 1 = [-7 + (-20)] + (1 + 1)$ $= -27 + 2$ $= -25$
Propiedad de la suma del 0 La suma de cualquier entero y el 0 es el entero.	$-2 + 0 = -2$ y $0 + (-25) = -25$
Si la suma de dos números es 0, se dice que los números son **inversos aditivos** entre sí.	El 3 y el -3 son *inversos aditivos* debido a que $3 + (-3) = 0$.
Propiedad de la suma de opuestos La suma de un entero y su opuesto (inverso aditivo) es 0.	$4 + (-4) = 0$ y $712 + (-712) = 0$
En ciertas ocasiones puede utilizarse la **propiedad de la suma de opuestos** para hacer más sencilla la suma de varios enteros.	Evalúe: $14 + (-9) + 8 + 9 + (-14)$ Localice los pares de opuestos y súmelos para obtener 0. Opuestos $14 + (-9) + 8 + 9 + (-14) = 0 + 0 + 8$ Opuestos $= 8$ La suma de cualquier entero y el 0 es ese entero.

EJERCICIOS DE REPASO

Sume.

13. $-6 + (-4)$

14. $-3 + (-6)$

15. $-28 + 60$

16. $93 + (-20)$

17. $-8 + 8$

18. $73 + (-73)$

19. $-1 + (-4) + (-3)$

20. $3 + (-2) + (-4)$

21. $[7 + (-9)] + (-4 + 16)$

22. $(-2 + 11) + [(-5) + 4]$

23. $-4 + 0$

24. $0 + (-20)$

25. $-2 + (-1) + (-76) + 1 + 2$

26. $-5 + (-31) + 9 + (-9) + 5$

27. Encuentre la suma de -102, 73 y -345.

28. ¿Cuánto es 3,187 más que -59?

29. ¿Cuál es el inverso aditivo de cada número?

a. -11 **b.** 4

30. a. ¿La suma de dos enteros positivos siempre es positiva?

b. ¿La suma de dos enteros negativos siempre es negativa?

c. ¿La suma de un entero positivo y un entero negativo siempre es positiva?

d. ¿La suma de un entero positivo y un entero negativo siempre es negativa?

31. SEQUÍA Durante una sequía, el nivel del agua en una reserva cayó a un punto de 100 pies debajo de lo normal. Después la lluvia intensa en abril lo elevó 16 pies y después la lluvia en mayo lo elevó otros 18 pies.

a. Exprese el nivel del agua de la reserva antes de los meses lluviosos como un número con signo.

b. ¿Cuál era el nivel del agua después de las lluvias?

32. EXTREMOS DE TEMPERATURA El récord mundial para la temperatura más baja es de -129 °F. Se registró el 21 de julio de 1983 en la Antártida. El récord mundial para la temperatura más alta es una sorprendente 265 °F más cálida. Se registró el 13 de septiembre de 1922 en Libia. Encuentre el récord de temperatura alta. (Fuente: *The World Almanac and Book of Facts*, 2009.)

SECCIÓN 2.3 Resta de enteros

DEFINICIONES Y CONCEPTOS	EJEMPLOS
La **regla para la resta** es de utilidad cuando se restan números con signo. Para restar dos enteros, sume el primer entero al opuesto del entero a restarse. *La resta es lo mismo que la suma del opuesto.*	Reste: $3 - (-5)$ Sume . . . $3 - (-5) = 3 + 5 = 8$ Use la regla para sumar dos enteros con el mismo signo. . . . el opuesto Compruebe utilizando una suma: $8 + (-5) = 3$
Después de rescribir una resta como la suma del opuesto, use una de las reglas para la suma de números con signo explicada en la Sección 2.2 para encontrar el resultado.	Reste: $-3 - 5 = -3 + (-5) = -8$ Sume el opuesto del 5, el cual es el -5. $-4 - (-7) = -4 + 7 = 3$ Sume el opuesto del -7, el cual es el 7.
Tenga cuidado cuando traduzca la instrucción para restar un número *de* otro.	Reste -6 de -9. $-9 - (-6)$ El número a restarse es el -6.
Las expresiones pueden involucrar una resta repetitiva o combinaciones de resta y adición. Para evaluarlas, use la **regla para el orden de las operaciones** explicada en la Sección 1.9.	Evalúe: $43 - (-6 - 15)$ $-43 - (-6 - 15) = -43 - [-6 + (-15)]$ Dentro de los paréntesis, sume el opuesto del 15, el cual es el -15. $= -43 - [-21]$ Dentro de los corchetes, sume el -6 y el -15. $= -43 + 21$ Sume el opuesto del -21, el cual es el 21. $= -22$ Use la regla para la suma de enteros que tienen signos diferentes.
Cuando se encuentra la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de una colección de mediciones se está encontrando el **rango** de los valores.	GEOGRAFÍA El punto más alto en Estados Unidos es el monte McKinley a 20,230 pies. El punto más bajo está a -282 pies en el Valle de la Muerte, California. Encuentre el intervalo entre el punto más alto y el más bajo. Intervalo $= 20{,}320 - (-282)$ $= 20{,}320 + 282$ Sume el opuesto del -282, el cual es el 282. $= 20{,}602$ Realice la suma. El intervalo entre el punto más alto y el punto más bajo en los Estados Unidos es de 20,602 pies.
Para encontrar el **cambio** en una cantidad, se resta el *valor anterior* del *valor posterior.* Cambio = valor anterior − valor posterior	SUBMARINOS Un submarino viajaba a una profundidad de 165 pies debajo del nivel del mar. El capitán ordenó una nueva posición de sólo 8 pies debajo de la superficie. Encuentre el cambio en la profundidad del submarino. Se puede representar 165 pies bajo el nivel del mar como -165 pies y 8 pies bajo la superficie como -8 pies. Cambio en la profundidad $= -8 - (-165)$ Reste la profundidad anterior de la profundidad posterior. $= -8 + 165$ Sume el opuesto del -165, el cual es el 165. $= 157$ Use la regla para la suma de enteros que tienen signos diferentes. El cambio en la profundidad del submarino fue de 157 pies.

EJERCICIOS DE REPASO

33. Complete el espacio: La resta de un entero es lo mismo que la suma del _____ de ese entero.

34. Escriba cada frase utilizando símbolos.

a. nueve negativo menos uno negativo.

b. diez negativo restado del seis negativo

Reste.

35. $5 - 8$ **36.** $-9 - 12$

37. $-4 - (-8)$ **38.** $-8 - (-2)$

39. $-6 - 106$ **40.** $-7 - 1$

41. $0 - 37$ **42.** $0 - (-30)$

Evalúe cada expresión.

43. $12 - 2 - (-6)$ **44.** $-16 - 9 - (-1)$

45. $-9 - 7 + 12$ **46.** $-5 - 6 + 33$

47. $1 - (2 - 7)$ **48.** $-12 - (6 - 10)$

49. $-70 - [(-6) - 2]$ **50.** $89 - [(-2) - 12]$

51. $-(-5) + (-28) - 2 - (-100)$

52. **a.** Reste el 27 del -50.

b. Reste el -50 del 27.

Use números con signo para resolver cada problema.

53. MINERÍA Algunos mineros descubrieron una pequeña veta de oro a una profundidad de 150 pies. Esto los motivó a continuar su exploración. Después de descender otros 75 pies, llegaron a un hallazgo mucho mayor. Utilice un número con signo para representar la profundidad del segundo hallazgo.

54. TEMPERATURAS RÉCORD Se muestran las temperaturas más bajas y más altas para Alaska y Virginia. Para cada estado, encuentre el intervalo entre las temperaturas récord alta y baja.

Alaska	Virginia
Baja: $-80°$ Ene. 23, 1971	Baja: $-30°$ Ene. 22, 1985
Alta: $100°$ Junio 27, 1915	Alta: $110°$ Julio 15, 1954

55. POLÍTICA El 20 de julio del 2007, una encuesta de CNN/Opinion Research tenía a Barack Obama detrás por 16 puntos de Hillary Clinton en las elecciones primarias presidenciales demócratas en Carolina del Sur. El 26 de enero del 2008, Obama finalizó 28 puntos delante de Clinton en la elección primaria real. Encuentre el cambio de los puntos en el apoyo a Barack Obama.

56. CARGOS POR SOBREGIRO Una estudiante tenía un saldo de $255 en su cuenta de cheques. Expidió un cheque para la renta de $300 y cuando llegó al banco le hicieron un cargo por sobregiro de $35. ¿Cuál es el nuevo saldo en la cuenta?

SECCIÓN 2.4 Multiplicación de enteros

DEFINICIONES Y CONCEPTOS	EJEMPLOS
Multiplicación de dos enteros que tienen signos diferentes (no similares) Para multiplicar un entero positivo y un entero negativo, multiplique sus valores absolutos. Después haga negativa la respuesta final. **Multiplicación de dos enteros que tienen signos iguales (similares)** Para multiplicar dos enteros que tienen el mismo signo, multiplique sus valores absolutos. La respuesta final es positiva.	Multiplique: $6(-8)$ Encuentre los valores absolutos: $\|6\| = 6$ y $\|-8\| = 8$. $6(-8) = -48$ Multiplique los valores absolutos 6 y 8 para obtener 48. Después haga negativa la respuesta final. Multiplique: $-2(-7)$ Encuentre los valores absolutos: $\|-2\| = 2$ y $\|-7\| = 7$. $-2(-7) = 14$ Multiplique los valores absolutos 2 y 7 para obtener 14. La respuesta final es positiva.
Para **evaluar expresiones** que contienen varias multiplicaciones, se hace un uso repetitivo de las reglas para la multiplicación de dos enteros. Otro método para evaluar expresiones es utilizar las propiedades conmutativa y/o asociativa de la multiplicación para reordenar y reagrupar los factores de una manera útil.	Evalúe $-5(3)(-6)$ de dos maneras. Desarrolle las multiplicaciones, empezando de izquierda a derecha. $-5(3)(-6) = -15(-6)$ $= 90$ Primero, multiplique el par de de factores negativos. $-5(3)(-6) = 30(3)$ Multiplique los factores negativos para formar un producto positivo. $= 90$

Multiplicación de un número par e impar de enteros negativos

El producto de un número par de enteros negativos es positivo.

El producto de un número impar de enteros negativos es negativo.

Cuatro factores negativos: $-5(-1)(-6)(-2) = 60$ (positivo)

Cinco factores positivos: $-2(-4)(-3)(-1)(-5) = -120$ (negativo)

Potencias pares e impares de un entero negativo

Cuando se eleva un entero negativo a una potencia par, el resultado es positivo.

Cuando se eleva un entero negativo a una potencia impar, el resultado es negativo.

Evalúe: $(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3)$ El exponente es par.
$= 9(9)$ Multiplique los pares de enteros.
$= 81$ La respuesta es positiva.

Evalúe: $(-2)^3 = (-2)(-2)(-2)$ El exponente es impar.
$= -8$ La respuesta es negativa.

Aunque las expresiones exponenciales $(-6)^2$ y -6^2 parezcan similares, no son iguales. Las bases son diferentes.

Evaluate: $(-6)^2$ y -6^2

Debido a los paréntesis, la base es el -6. El exponente es el 2.

$(-6)^2 = (-6)(-6)$
$= 36$

Dado que no hay paréntesis alrededor del -6, la base es el 6. El exponente es el 2

$-6^2 = -(6 \cdot 6)$
$= -36$

Los problemas de aplicación que involucran una **suma repetitiva** con frecuencia son más fáciles de resolver utilizando una multiplicación.

QUÍMICA Un compuesto químico que por lo regular se almacena a 0°F se le ha disminuido su temperatura en 8°F cada hora por 6 horas. ¿Qué número con signo representa el cambio en la temperatura del compuesto después de 6 horas?

$-8 \cdot 6 = -48$ Multiplique el cambio en la temperatura cada hora por el número de horas.

El cambio en la temperatura del compuesto es de -48°F.

EJERCICIOS DE REPASO

Multiplique.

57. $7(-2)$

58. $(-8)(47)$

59. $-23(-14)$

60. $-5(-5)$

61. $-1 \cdot 25$

62. $(6)(-34)$

63. $-4{,}000(17{,}000)$

64. $-100{,}000(-300)$

65. $(-6)(-2)(-3)$

66. $-4(-3)(-3)$

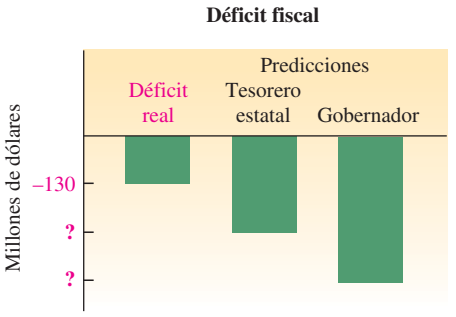
67. $(-3)(4)(2)(-5)$

68. $(-1)(10)(10)(-1)$

69. Encuentre el producto del -15 y el opuesto del 30.

70. Encuentre el producto del opuesto del 16 y el opuesto del 3.

71. DÉFICITS La predicción de un tesorero estatal de un déficit fiscal era de $130 millones. La predicción del gobernador del déficit fiscal era incluso peor, tres veces la cantidad del déficit real. Complete la marcación del eje vertical de la gráfica en la siguiente columna para mostrar las dos predicciones incorrectas.



72. MINERÍA Se utiliza un elevador para bajar a los mineros de la entrada al nivel del suelo a varias profundidades en la mina. El elevador se detiene cada 45 pies verticales para dejar a los mineros. ¿A qué profundidad trabajan los mineros cuando se bajan del elevador en la 12a parada?

Evalúe cada expresión.

73. $(-5)^3$

74. $(-2)^5$

75. $(-8)^4$

76. $(-4)^4$

77. Cuando se evalúe $(-17)^9$, ¿el resultado será positivo o negativo?

78. Explique la diferencia entre -9^2 y $(-9)^2$ y después evalúe cada expresión.

SECCIÓN 2.5 División de enteros

DEFINICIONES Y CONCEPTOS

División de dos enteros

Para dividir dos enteros, divida sus valores absolutos.

1. El cociente de dos enteros que tienen signos iguales (*similares*) es positivo.
2. El cociente de dos enteros que tienen signos diferentes (*no similares*) es negativo.

Para **comprobar una división** de enteros, multiplique el *cociente* y el *divisor*. Debe obtener el *dividendo*.

EJEMPLOS

Divida: $\frac{-21}{-7}$

Encuentre los valores absolutos: $|-21| = 21$ y $|-7| = 7$.

$\frac{-21}{-7} = 3$ Divida los valores absolutos 21 entre 7 para obtener 3. La respuesta final es positiva.

Comprobación: $3(-7) = -21$ El resultado es correcto.

Divida: $-54 \div 9$

Encuentre los valores absolutos: $|-54| = 54$ y $|9| = 9$.

$-54 \div 9 = -6$ Divida los valores absolutos 54 entre 9 para obtener 6. Haga negativa la respuesta final.

Comprobación: $-6(9) = -54$ El resultado es correcto.

División con el 0

Si se divide el 0 *entre* cualquier entero diferente del 0, el cociente es 0.

La división *de cualquier* entero diferente del cero *entre* el 0 no está definida.

Divida, si es posible:

$\frac{0}{-8} = 0$ $0 \div (-20) = 0$

$\frac{-2}{0}$ no está definida. $-6 \div 0$ no está definida.

Los problemas que involucran la formación de **grupos de igual tamaño** pueden resolverse por medio de una división.

VENTAS DE AUTOMÓVILES USADOS El precio de un automóvil usado se redujo cada día en una cantidad igual debido a que no se vendía. Después de 7 días y una reducción de $1,050 en su precio, el automóvil fue por fin adquirido. ¿Cuánto se redujo el precio del automóvil cada día?

$\frac{-1,050}{7} = -150$ Divida el cambio en el precio del automóvil entre el número de días en que se redujo el precio.

El resultado negativo indica que el precio del automóvil se redujo en $150 cada día.

EJERCICIOS DE REPASO

79. Complete los espacios: Se sabe que $\frac{-15}{5} = -3$ debido a que ☐ (☐) = ☐.

80. Compruebe utilizando una multiplicación para determinar si $-152 \div (-8) = 18$.

Divida, si es posible.

81. $\frac{25}{-5}$

82. $\frac{-14}{7}$

83. $-64 \div (-8)$

84. $72 \div (-9)$

85. $\frac{-10}{-1}$

86. $\frac{-673}{-673}$

87. $-150{,}000 \div 3{,}000$

88. $-24{,}000 \div (-60)$

89. $\frac{-1,058}{-46}$

90. $-272 \div 16$

91. $\frac{0}{-5}$

92. $\frac{-4}{0}$

93. Divida el -96 entre el 3.

94. Encuentre el cociente del -125 y el -25.

95. TIEMPO DE PRODUCCIÓN Debido a los procedimientos de producción mejorados, el tiempo necesario para producir un componente electrónico disminuyó en 12 minutos en los pasados 6 meses. Si la disminución en el tiempo de producción fue uniforme, ¿en cuánto cambió cada mes en este periodo de tiempo?

96. EXPLORACIÓN DEL OCÉANO La fosa de Puerto Rico es la parte más profunda del Océano Atlántico. Tiene una profundidad máxima de 28,374 pies. Si se envía un submarino no tripulado controlado de manera remota al fondo de la fosa en una serie de 6 inmersiones iguales, ¿cuánto descenderá el navío en cada inmersión? (Fuente: marianatrench.com)

SECCIÓN 2.6 Orden de las operaciones y estimación

DEFINICIONES Y CONCEPTOS

Orden de las operaciones

1. Desarrolle todos los cálculos dentro de los paréntesis y otros símbolos de agrupación siguiendo el orden listado abajo en los Pasos 2–4, empezando desde el par más interno de símbolos de agrupación al par más externo.
2. Evalúe todas las expresiones exponenciales.
3. Desarrolle las multiplicaciones y divisiones a medida que aparezcan de izquierda a derecha.
4. Desarrolle las sumas y restas a medida que aparezcan de izquierda a derecha.

Cuando se hayan eliminado los símbolos de agrupación, repita los Pasos 2–4 para completar el cálculo.

Si está presente una barra de fracción, evalúe la expresión sobre la barra (llamada **numerador**) y la expresión debajo de la barra (llamada **denominador**) por separado. Después desarrolle la división indicada por la barra de fracción, si es posible.

EJEMPLOS

Evalúe: $-3(-5)^2 - (-40)$

$-3(\mathbf{-5})^{\mathbf{2}} - (-40) = -3(\mathbf{25}) - (-40)$ Evalúe la expresión exponencial.

$= -75 \mathbf{-(-40)}$ Realice la multiplicación.

$= -75 \mathbf{+ 40}$ Use la regla para la resta: Sume el opuesto del -40.

$= -35$ Realice la suma.

Evalúe: $\dfrac{-6 + 4(-2)}{16 - (-3)^2}$

$\dfrac{-6 + \mathbf{4(-2)}}{16 - \mathbf{(-3)^2}} = \dfrac{-6 + (\mathbf{-8})}{16 - \mathbf{9}}$ En el numerador, realice la multiplicación. En el denominador, evalúe la expresión exponencial.

$= \dfrac{-14}{7}$ En el numerador, realice la suma. En el denominador, realice la resta.

$= -2$ Realice la división.

Los **símbolos de valor absoluto** son símbolos de agrupación, y por la regla del orden de las operaciones, todos los cálculos dentro de los símbolos de agrupación deben desarrollarse primero.

Evalúe: $10 - 2|-8 + 1|$

$10 - 2|\mathbf{-8 + 1}| = 10 - 2|\mathbf{-7}|$ Realice la suma dentro del símbolo de valor absoluto.

$= 10 - 2(7)$ Encuentre el valor absoluto del -7.

$= 10 - 14$ Realice la multiplicación.

$= -4$ Realice la resta.

Cuando no es necesaria una respuesta exacta y se realizará una aproximación rápida, se puede utilizar una **estimación.**

Estime el valor de $-56 + (-67) + 89 + (-41) + 14$ redondeando cada número a la decena más cercana.

$\mathbf{-60} + (\mathbf{-70}) + \mathbf{90} + (\mathbf{-40}) + \mathbf{10}$

$= \mathbf{-170} + \mathbf{100}$ Sume por separado los positivos y los negativos.

$= -70$ Realice la suma.

EJERCICIOS DE REPASO

Evalúe cada expresión.

97. $2 + 4(-6)$

98. $7 - (-2)^2 + 1$

99. $65 - 8(9) - (-47)$

100. $-3(-2)^3 - 16$

101. $-2(5)(-4) + \dfrac{|-9|}{3^2}$

102. $-4^2 + (-4)^2$

103. $-12 - (8 - 9)^2$

104. $7|-8| - 2(3)(4)$

105. $-4\left(\dfrac{15}{-3}\right) - 2^3$

106. $-20 + 2(12 - 5 \cdot 2)$

107. $-20 + 2[12 - (-7 + 5)^2]$

108. $8 - 6|-3 \cdot 4 + 5|$

109. $\dfrac{2 \cdot 5 + (-6)}{-3 - 1^5}$

110. $\dfrac{3(-6) - 11 + 1}{4^2 - 3^2}$

111. $-\left[1 - \left(2^3 + \dfrac{100}{-50}\right)\right]$

112. $-\left[45 - \left(5^3 + \dfrac{100}{-4}\right)\right]$

113. Redondee cada número a la centena más cercana para estimar el valor de la siguiente expresión: $-4{,}471 + 7{,}935 + 2{,}094 + (-3{,}188)$.

114. Encuentre la media (promedio) de $-8, 4, 7, -11, 2, 0, -6$ y -4.

CAPÍTULO 2 EXAMEN

1. Complete los espacios.

a. Al $\{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ se le llama conjunto de los _____.

b. A los símbolos $>$ y $<$ se les llaman símbolos de _____.

c. El _____ _____ de un número es la distancia entre el número y el 0 en la recta numérica.

d. A dos números que están a la misma distancia del 0 en la recta numérica, pero en lados opuestos de ésta, se les llama _____.

e. En la expresión $(-3)^5$, la _____ es el -3 y el 5 es el _____.

2. Inserte uno de los símbolos $>$ o $<$ en el espacio para hacer verdadero al enunciado.

a. $-8 \square -9$ **b.** $-213 \square 123$ **c.** $-5 \square 0$

3. Indique si cada enunciado es verdadero o falso.

a. $19 \geq 19$ **b.** $-(-8) = 8$

c. $-|-2| > |6|$ **d.** $-7 + 0 = 0$

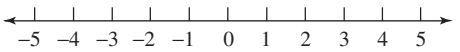
e. $-5(0) = 0$

4. MATRICULACIÓN ESCOLAR De acuerdo con las proyecciones en la tabla, ¿cuál preparatoria enfrentará la mayor reducción de lugares en las aulas en el año 2020?

Preparatorias con reducción de lugares en las aulas para el 2020

Lyons	−669
Tolbert	−1,630
Poly	−2,488
Cleveland	−350
Samuels	−586
South	−2,379
Van Owen	−1,690
Twin Park	−462
Heywood	−1,004
Hampton	−774

5. Grafique los siguientes números en una recta numérica: $-3, 4, -1$ y 3



6. Sume.

a. $-6 + 3$ **b.** $-72 + (-73)$

c. $8 + (-6) + (-9) + 5 + 1$

d. $(-31 + 12) + [3 + (-16)]$

e. $-24 + (-3) + 24 + (-5) + 5$

7. Reste.

a. $-7 - 6$ **b.** $-7 - (-6)$

c. $82 - (-109)$ **d.** $0 - 15$

e. $-60 - 50 - 40$

8. Multiplique.

a. $-10 \cdot 7$ **b.** $-4(-73)$

c. $-4(2)(-6)$ **d.** $-9(-3)(-1)(-2)$

e. $-20{,}000(1{,}300)$

9. Escriba el enunciado de multiplicación relacionado para

$$\frac{-20}{-4} = 5.$$

10. Divida y compruebe el resultado.

a. $\dfrac{-32}{4}$ **b.** $24 \div (-3)$

c. $-54 \div (-6)$ **d.** $\dfrac{408}{-12}$

e. $-560{,}000 \div 7{,}000$

11. **a.** ¿Cuánto es 15 más que -27?

b. Reste el -19 del -1.

c. Divida el -28 entre el -7.

d. Encuentre el producto del 10 y el opuesto del 8.

12. **a.** ¿Qué propiedad se muestra: $-3 + 5 = 5 + (-3)$

b. ¿Qué propiedad se muestra: $-4(-10) = -10(-4)$

c. Complete el espacio: Una resta es lo mismo que la _____ del opuesto.

13. Divida, si es posible.

a. $\frac{-21}{0}$ **b.** $\frac{-5}{1}$

c. $\frac{0}{-6}$ **d.** $\frac{-18}{-18}$

14. Evalúe cada expresión:

a. $(-4)^2$ **b.** -4^2

Evalúe cada expresión.

15. $4 - (-3)^2 - (-6)$ **16.** $-18 \div 2 \cdot 3$

17. $-3 + \left(\frac{-16}{4}\right) - 3^3$

18. $94 - 3[-7 + (5 - 8)^2]$

19. $\frac{4(-6) - 4^2 + (-2)}{-3 - 4 \cdot 1^5}$

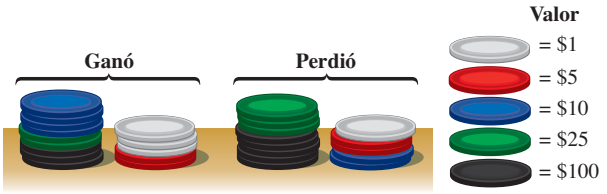
20. $6(-2 \cdot 6 + 5 \cdot 4)$

21. $21 - 9|-3 - 4 + 2|$

22. $-\left[2 - \left(4^3 + \frac{20}{-5}\right)\right]$

23. QUÍMICA En un laboratorio, la temperatura de un fluido se redujo 6 °F por hora en un lapso de 12 horas. ¿Qué número con signo representa el cambio en la temperatura?

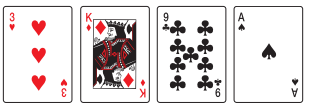
24. APUESTAS En la primera mano de un juego de póquer, un jugador ganó las fichas mostradas a la izquierda. En la segunda mano, perdió las fichas mostradas a la derecha. Determine su ganancia o pérdida neta para las primeras dos manos. Se muestra el valor en dólares de cada ficha de póquer de color.



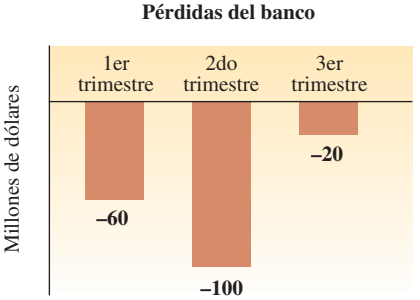
25. GEOGRAFÍA El punto más bajo en el continente africano es la Depresión de Qatar en el desierto del Sahara, 436 pies debajo del nivel del mar. El punto más bajo en América del Norte es el Valle de la Muerte, California, 282 pies debajo del nivel del mar. Encuentre la diferencia entre estas elevaciones.

26. TRANVÍAS Una línea de tranvía realiza un descenso de 5,250 pies desde la cima a la base de una montaña en 15 etapas iguales. ¿Cuánto desciende en cada etapa?

27. JUEGOS DE CARTAS Después de la primera ronda de un juego de cartas, Tommy tenía un marcador de 8. Cuando perdió la segunda ronda, tuvo que deducir el valor de las cartas que se quedaron en su mano a partir del marcador de la primera ronda. (Vea la ilustración.) ¿Cuál fue su marcador después de dos rondas del juego? Para sacar el marcador, las cartas con figura (reyes, reinas y sotas) se cuentan como 10 puntos y los ases como 1 punto.



28. ADQUISICIONES DE BANCOS Antes que tres inversionistas puedan adquirir un banco fallido, deben pagar las pérdidas que el banco tuvo en los pasados tres trimestres. Si los inversionistas planean una propiedad equitativa, ¿de cuánto de las pérdidas totales del banco es responsable cada inversionista?



CAPÍTULOS 1–2 REPASO ACUMULATIVO

1. Considere el número 7,326,549. [Sección 1.1]

a. ¿Cuál es el valor posicional del dígito 7?

b. ¿Cuál dígito está en la columna de las centenas de millares?

c. Redondee a la centena más cercana.

d. Redondee a la decena de millar más cercana.

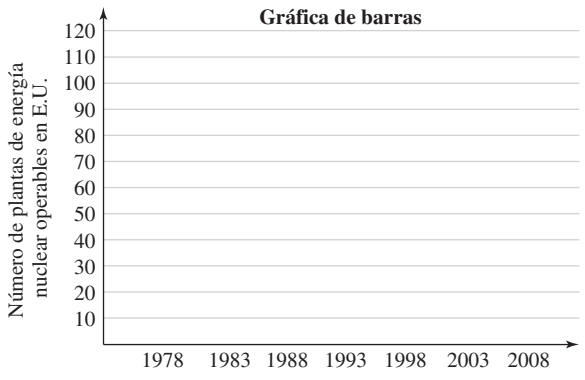
2. COTIZACIONES Un distrito escolar recibió las cotizaciones mostradas en la tabla para un trabajo eléctrico. Si gana la cotización más baja, ¿a cuál compañía debe otorgársele el contrato? [Sección 1.1]

Cotización 02-9899 para el Distrito escolar unificado Citrus Instalación de cableado y conductos

Datatel	$2,189,413
Walton Electric	$2,201,999
Advanced Telecorp	$2,175,081
CRF Cable	$2,174,999
Clark & Sons	$2,175,801

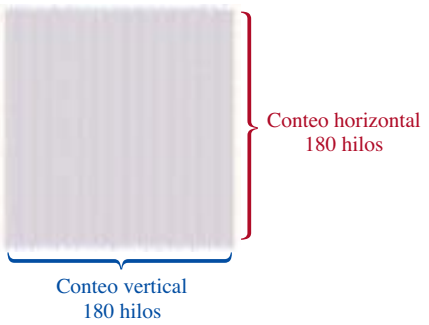
3. ENERGÍA NUCLEAR La tabla de abajo proporciona el número de plantas de energía nuclear operando en Estados Unidos para los años seleccionados. Complete la gráfica de barras utilizando la información proporcionada. [Sección 1.1]

Año	1978	1983	1988	1993	1998	2003	2008
Plantas	70	81	109	110	104	104	104



Fuente: *The World Almanac and Book of Facts*, 2009

4. CONTEO DE HILOS El conteo de hilos de una tela es la suma del número de hilos horizontales y verticales tejidos en una pulgada cuadrada de la tela. Abajo se muestra una pulgada cuadrada de una sábana. Encuentre el conteo de hilos. [Sección 1.2]



Sume. [Sección 1.2]

5. 1,237 + 68 + 549

6.
$$\begin{array}{r} 8{,}907 \\ 2{,}345 \\ 7{,}899 \\ +\ 5{,}237 \\ \hline \end{array}$$

Reste. [Sección 1.3]

7. 6,375 − 2,569

8.
$$\begin{array}{r} 5{,}369 \\ -\ 685 \\ \hline \end{array}$$

9.
$$\begin{array}{r} 39{,}506 \\ -\ 1{,}729 \\ \hline \end{array}$$

10. Reste 304 de 1,736. [Sección 1.3]

11. Compruebe la resta abajo utilizando una suma. ¿Es correcta? [Sección 1.3]

$$\begin{array}{r} 469 \\ -\ 237 \\ \hline 132 \end{array}$$

12. ENVÍO DE MUEBLES En un envío de 147 piezas de muebles, 27 piezas eran sofás, 55 eran sillas de piel y el resto eran sillas de madera. Encuentre el número de sillas de madera. [Sección 1.3]

Multiplique. [Sección 1.4]

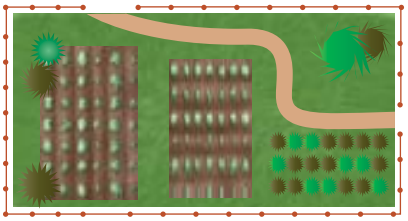
13. $435 \cdot 27$

14. $\begin{array}{r} 9{,}183 \\ \times\ 602 \\ \hline \end{array}$

15. $3{,}100 \cdot 7{,}000$

16. EMPACADO Hay 3 pelotas de tenis en una lata, 24 latas en un estuche y 12 estuches en una caja. ¿Cuántas pelotas de tenis hay en una caja? [Sección 1.4]

17. JARDINERÍA Encuentre el perímetro y el área del jardín rectangular mostrado abajo. [Sección 1.4]



18. FOTOGRAFÍA Las fotografías mostradas abajo son la misma excepto que se utilizan diferentes números de *pixeles* (cuadrados de color). Se proporciona el número de pixeles en cada renglón y en cada columna de las fotografías. Encuentre el número total de pixeles en cada fotografía. [Sección 1.4]

Divida. [Sección 1.5]

19. $\frac{701}{8}$

20. $1{,}261 \div 97$

21. $38\overline{)17{,}746}$

22. $350\overline{)9{,}800}$

23. Compruebe la división abajo utilizando una multiplicación. ¿Es correcta? [Sección 1.5]

$9\overline{)1{,}962} = 218$

24. JARDINERÍA Una lata de metal puede contener 320 onzas líquidas de gasolina. ¿Cuántas veces puede llenarse el tanque de 30 onzas de un cortacésped a partir de la lata? ¿Cuántas onzas de gasolina quedarán en la lata? [Sección 1.5]

25. PANIFICACIÓN Un panadero utiliza piezas de masa de pan de 4 onzas para preparar panecillos. ¿Cuántos panecillos puede preparar a partir de 15 libras de masa? (*Sugerencia:* Hay 16 onzas en una libra.) [Sección 1.6]

26. Liste los factores del 18, de menor a mayor. [Sección 1.7]

27. Identifique cada número como un número primo, un número compuesto o ninguno. Después identifíquelo como un número par o un número impar. [Sección 1.7]

a. 17 **b.** 18

c. 0 **d.** 1

28. Encuentre la factorización de primos del 504. Use exponentes para expresar su respuesta. [Sección 1.7]

29. Escriba la expresión $11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11$ utilizando un exponente. [Sección 1.7]

30. Evalúe: $5^2 \cdot 7$ [Sección 1.7]

31. Encuentre el mcm del 8 y el 12. [Sección 1.8]

32. Encuentre el mcm del 3, 6 y 15. [Sección 1.8]

33. Encuentre el mfc del 30 y el 48. [Sección 1.8]

34. Encuentre el mfc del 81, 108 y 162. [Sección 1.8]

Evalúe cada expresión. [Sección 1.9]

35. $16 + 2[14 - 3(5 - 4)^2]$

36. $264 \div 4 - 7(4)2$

37. $\dfrac{4^2 - 2 \cdot 3}{2 + (3^2 - 3 \cdot 2)}$

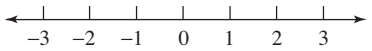
38. VERIFICACIÓN DE LA VELOCIDAD Un oficial de tránsito utilizó un radar y encontró que las velocidades de varios autos que transitaban en la calle principal eran de:

38 mph, 42 mph, 36 mph, 38 mph, 48 mph, 44 mph

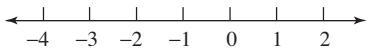
¿Cuál era la velocidad media (promedio) de los automóviles que transitaban en la calle principal? [Sección 1.9]

39. Grafique los siguientes enteros en una recta numérica. [Sección 2.1]

a. $-2, -1, 0, 2$



b. Los enteros mayores que el -4 pero menores que el 2



40. Encuentre la suma del $-11, 20, -13$ y 1. [Sección 2.2]

Use números con signo para resolver cada problema.

41. PRUEBAS DETECTORAS DE MENTIRAS Un ladrón sacó -18 en una prueba detectora de mentiras, lo cual indica engaño. Sin embargo, en una segunda prueba sacó $+3$, lo cual es poco concluyente. Encuentre el cambio en las calificaciones. [Sección 2.3]

42. BANCA Un estudiante tiene \$48 en su cuenta de cheques. Después expide un cheque por \$105 para adquirir libros. El banco cubre el cheque, pero le hace al estudiante un cobro administrativo adicional de \$22 por sobregiro. ¿Cuál es el nuevo saldo de la cuenta de cheques del estudiante? [Sección 2.3]

43. QUÍMICA El *punto de fusión* de un sólido es el intervalo de temperatura en el que cambia de estado de sólido a líquido. El punto de fusión del helio es siete veces más frío que el punto de fusión del mercurio. Si el punto de fusión del mercurio es de $-39°$ Celsius (una escala de temperatura empleada en la ciencia), ¿cuál es el punto de fusión del helio? (Fuente: chemicalelements.com) [Sección 2.4]

44. ADQUISICIÓN DE UN NEGOCIO Cuando 12 inversionistas decidieron adquirir una compañía en bancarrota, estuvieron de acuerdo en asumir cantidades iguales de la deuda de \$660,000 de la compañía. ¿De cuánto de la deuda era responsable cada inversionista? [Sección 2.5]

Evalúe cada expresión. [Sección 2.6]

45. $5 + (-3)(-7)(-2)$

46. $-2[-6(5 \cdot 1^3) - 5]$

47. $\dfrac{10 - (-5)}{1 - 2 \cdot 3}$

48. $\dfrac{3(-6) - 10}{3^2 - 4^2}$

49. $3^4 + 6(-12 + 5 \cdot 4)$

50. $15 - 2|-3 - 4|$

51. $2\left(\dfrac{-12}{3}\right) + 3(-5)$

52. $-9^2 + (-9)^2$

53. $-\left|\dfrac{45}{-9} - (-9)\right|$

54. $\dfrac{-4(-5) - 2}{3 - 3^2}$

Para los Ejercicios 55 y 56, determine de manera rápida un estimado razonable de la respuesta exacta. [Sección 2.6]

55. ACAMPAR Los excursionistas realizan un descenso de 1,150 pies en un cañón en 12 etapas. ¿Cuántos pies descienden en cada etapa?

56. LLAMADOS Un fabricante de automóviles debe llamar 19,250 automóviles debido a que tienen un soporte de motor defectuoso. Si cuesta \$195 reparar cada automóvil, ¿cuánta pérdida sufrirá la compañía por el llamado?

3

Fracciones y números mixtos

iStockphoto.com/Monkeybusinessimages

3.1 Introducción a las fracciones
3.2 Multiplicación de fracciones
3.3 División de fracciones
3.4 Suma y resta de fracciones
3.5 Multiplicación y división de números mixtos
3.6 Suma y resta de números mixtos
3.7 Orden de las operaciones y fracciones complejas
Resumen y repaso
Examen
Repaso acumulativo

Carreras del campus

Orientador vocacional

Los orientadores vocacionales planean programas académicos y ayudan a los estudiantes a elegir los mejores cursos a tomar para lograr sus objetivos educativos. Los orientadores se reúnen con frecuencia con los alumnos para debatir las habilidades en la vida necesarias para el crecimiento personal y social. Para prepararse para esta carrera, los orientadores toman clases en un área de las matemáticas llamada *estadística,* donde aprenden a recopilar, analizar, explicar y presentar información.

En el **Problema 109** del **Espacios para el estudio 3.4,** verá cómo un orientador debe ser capaz de sumar fracciones para comprender mejor una gráfica que muestra los hábitos de estudio de los estudiantes.

CARGO LABORAL:
Orientador vocacional

EDUCACIÓN: Por lo regular se requiere una maestría para obtener una licencia como orientador. Sin embargo, algunas escuelas aceptan una licenciatura con los cursos de orientación apropiados.

PERSPECTIVA LABORAL: Excelente.

INGRESOS ANUALES: El salario promedio (medio) en el 2006 era de $53,750.

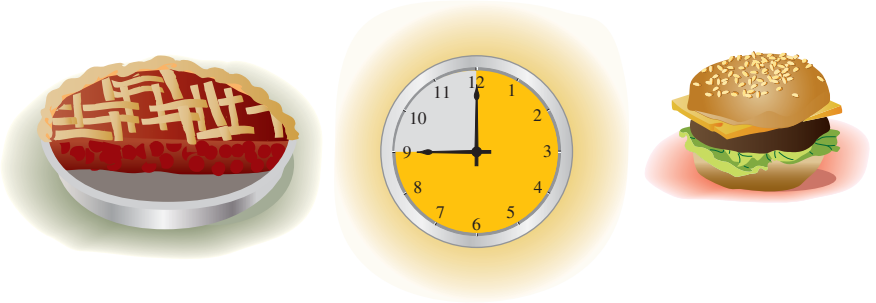
PARA MÁS INFORMACIÓN:
www.bls.gov/oco/ocos067.htm

Objetivos

1. Identificar el numerador y el denominador de una fracción.
2. Simplificar formas especiales de las fracciones.
3. Definir fracciones equivalentes.
4. Construir fracciones equivalentes.
5. Simplificar fracciones.

SECCIÓN 3.1
Introducción a las fracciones

Los números naturales se utilizan para contar objetos, como CD, estampillas, huevos y revistas. Cuando se necesita describir una parte de un todo, como la mitad de un pay, tres cuartos de hora o una hamburguesa de un tercio de libra, se pueden utilizar *fracciones*.



La mitad de un pay de cereza $\frac{1}{2}$

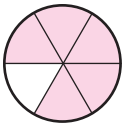
Tres cuartos de hora $\frac{3}{4}$

Una hamburguesa de un tercio de libra $\frac{1}{3}$

1 Identificar el numerador y el denominador de una fracción

Una **fracción** describe el número de partes iguales de un todo. Por ejemplo, considere la figura siguiente con 5 de las 6 partes iguales coloreadas en rojo. Se dice que están sombreados $\frac{5}{6}$ (cinco sextos) de la figura.

En una fracción, al número sobre la **barra de fracción** se le llama **numerador** y al número debajo se le llama **denominador.**



Barra de fracción → $\frac{5}{6}$ ← numerador, ← denominador

El lenguaje de las matemáticas La palabra *fracción* proviene del latín *fractio*, que significa "romper en piezas".

Auto-revisión 1

Identifique el numerador y el denominador de cada fracción:

a. $\frac{7}{9}$

b. $\frac{21}{20}$

Ahora intente Problema 21

EJEMPLO 1 Identifique el numerador y el denominador de cada fracción:

a. $\frac{11}{12}$ **b.** $\frac{8}{3}$

Estrategia Se encontrará el número sobre la barra de fracción y el número debajo de ella.

POR QUÉ El número sobre la barra de fracción es el numerador y el número debajo es el denominador.

Solución

a. $\frac{11}{12}$ ← numerador, ← denominador

b. $\frac{8}{3}$ ← numerador, ← denominador

Si el numerador de una fracción es menor que su denominador, a la fracción se le llama **fracción propia.** Una fracción propia es menor que 1. Si el numerador de una fracción es mayor que o igual a su denominador, a la fracción se le llama **fracción impropia.** Una fracción impropia es mayor que o igual a 1.

Fracciones propias

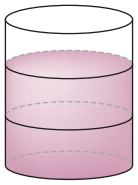
$\frac{1}{4}, \frac{2}{3}$, y $\frac{98}{99}$

Fracciones impropias

$\frac{7}{2}, \frac{98}{97}, \frac{16}{16}$ y $\frac{5}{1}$

El lenguaje de las matemáticas La frase *fracción impropia* es un tanto engañosa. En álgebra y otros cursos matemáticos, con frecuencia se emplean tales fracciones "de manera apropiada" para resolver varios tipos de problemas.

EJEMPLO 2 Escriba fracciones que representen las porciones sombreada y no sombreada de la figura de abajo.



Estrategia Se determinará el número de partes iguales en las que se divide la figura. Después se determinará cuántas de esas partes están sombreadas.

POR QUÉ El denominador de una fracción muestra el número de partes iguales en el todo o la unidad. El numerador muestra cuántas de estas partes se están considerando.

Solución

Dado que la figura está dividida en 3 partes iguales, el denominador de la fracción es el 3. Dado que 2 de esas partes están sombreadas, el numerador es el 2 y se dice que

$\frac{2}{3}$ de la figura están sombreados. Escriba: $\frac{\text{números de partes sombreadas}}{\text{número de partes iguales}}$

Dado que 1 de las partes iguales de la figura no está sombreada, el numerador es el 1 y se dice que

$\frac{1}{3}$ de la figura no está sombreado. Escriba: $\frac{\text{números de partes no sombreadas}}{\text{número de partes iguales}}$

Auto-revisión 2

Escriba fracciones que representen la porción del mes que ha trascurrido y la porción que resta.

DICIEMBRE

X	X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

Ahora intente **Problemas 25 y 101**

Hay ocasiones en las que se necesita una fracción negativa para describir una cantidad. Por ejemplo, si un terremoto ocasiona que una carretera se hunda siete octavos de una pulgada, la cantidad del movimiento hacia abajo puede representarse por medio de $-\frac{7}{8}$. Las fracciones negativas pueden escribirse de tres maneras. El signo negativo puede aparecer en el numerador, en el denominador o enfrente de la fracción.

$$\frac{-7}{8} = \frac{7}{-8} = -\frac{7}{8} \qquad \frac{-15}{4} = \frac{15}{-4} = -\frac{15}{4}$$

Observe que los ejemplos arriba concuerdan con la regla del Capítulo 2 para la división de enteros con signos diferentes (no similares: *el cociente de un entero negativo y un entero positivo es negativo*).

iStockphoto.com/Jamie VanBuskirk

2 Simplificar formas especiales de las fracciones

Recuerde a partir de la Sección 1.5 que una barra de fracción indica una división. Este hecho ayuda a simplificar cuatro formas especiales de las fracciones.

- ***Fracciones que tienen el mismo numerador y denominador:*** En este caso, se tiene un número dividido entre sí mismo. El resultado es 1 (siempre que el numerador y el denominador no sean 0). A cada una de las siguientes fracciones se les llama **forma de 1.**

$$1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = \frac{6}{6} = \frac{7}{7} = \frac{8}{8} = \frac{9}{9} = \ldots$$

- ***Fracciones que tienen un denominador de 1:*** En este caso, se tiene un número dividido entre 1. El resultado es simplemente el numerador.

$$\frac{5}{1} = 5 \qquad \frac{24}{1} = 24 \qquad \frac{-7}{1} = -7$$

- ***Fracciones que tienen un numerador de 0:*** En este caso, se tiene una división del 0. El resultado es 0 (siempre que el denominador no sea 0).

$$\frac{0}{8} = 0 \qquad \frac{0}{56} = 0 \qquad \frac{0}{-11} = 0$$

- ***Fracciones que tienen un denominador de 0:*** En este caso, se tiene una división entre cero. La división no está definida.

$$\frac{7}{0} \text{ no está definida} \qquad \frac{-18}{0} \text{ no está definida}$$

El lenguaje de las matemáticas Quizá se esté preguntando acerca de la forma de fracción $\frac{0}{0}$. Se dice que está *no determinada*. Esta forma es importante en cursos avanzados de matemáticas.

Auto-revisión 3

Simplifique, si es posible:

a. $\frac{4}{4}$ **b.** $\frac{51}{1}$ **c.** $\frac{45}{0}$ **d.** $\frac{0}{6}$

Ahora intente **Problema 33**

EJEMPLO 3 Simplifique, si es posible: **a.** $\frac{12}{12}$ **b.** $\frac{0}{24}$ **c.** $\frac{18}{0}$ **d.** $\frac{9}{1}$

Estrategia Para simplificar cada fracción, se dividirá el numerador entre el denominador, si es posible.

POR QUÉ Una barra de fracción indica una división.

Solución

a. $\frac{12}{12} = 1$ Esta corresponde a la división de una cantidad en 12 partes iguales y se están considerando las 12. Se obtendría 1 todo.

b. $\frac{0}{24} = 0$ Esta corresponde a la división de una cantidad en 24 partes iguales y se están considerando 0 (ninguna) de ellas. Se obtendría 0.

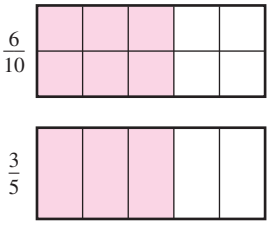
c. $\frac{18}{0}$ no está definida Esta corresponde a la división de una cantidad en 0 partes iguales y se están considerando 18 de ellas. Esto no es posible.

d. $\frac{9}{1} = 9$ Esta corresponde a la "división" de una cantidad en 1 parte igual y se están considerando 9 de ellas. Se obtendrían 9 de esas cantidades.

El lenguaje de las matemáticas A las fracciones se les refiere con frecuencia como **números racionales.** Todos los enteros son números racionales, debido a que todo entero puede escribirse como una fracción con un denominador de 1. Por ejemplo,

$$2 = \frac{2}{1}, \quad -5 = \frac{-5}{1} \quad \text{y} \quad 0 = \frac{0}{1}$$

3 Definir fracciones equivalentes



Las fracciones pueden parecer diferentes pero siguen representando la misma parte de un todo. Para ilustrar esto considere las regiones rectangulares idénticas a la derecha. La primera está dividida en 10 partes iguales. Dado que 6 de esas partes son rojas, $\frac{6}{10}$ de la figura están sombreados.

La segunda figura está dividida en 5 partes iguales. Dado que 3 de esas partes son rojas, $\frac{3}{5}$ de la figura están sombreados. Se puede concluir que $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ debido a que $\frac{6}{10}$ y $\frac{3}{5}$ representan la misma porción sombreada de la figura. Se puede decir que $\frac{6}{10}$ y $\frac{3}{5}$ son *fracciones equivalentes*.

Fracciones equivalentes

Dos fracciones son **equivalentes** si representan el mismo número. Las **fracciones equivalentes** representan la misma porción de un todo o unidad.

4 Construir fracciones equivalentes

Escribir una fracción como una fracción equivalente con un denominador *más grande* se le llama **construcción** de la fracción. Para construir una fracción, se utiliza una propiedad familiar del Capítulo 1 que también es verdadera para las fracciones:

Propiedad de la multiplicación del 1

El producto de cualquier fracción y el 1 es esa fracción.

También se utiliza la siguiente regla para la multiplicación de fracciones. (Se explicará a mayor detalle en la siguiente sección.)

Multiplicación de fracciones

Para multiplicar dos fracciones, multiplique los numeradores y multiplique los denominadores.

Para construir una fracción equivalente para $\frac{1}{2}$ con un denominador de 8, primero se pregunta, "Qué número por 2 es igual a 8" Para responder a esa pregunta se *divide* el 8 entre el 2 para obtener 4. Dado que se necesita multiplicar el denominador del $\frac{1}{2}$ por 4 para obtener un denominador de 8, se tiene que $\frac{4}{4}$ es la forma de 1 que se utiliza para construir una fracción equivalente para el $\frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{4}}$$

Multiplique $\frac{1}{2}$ por 1 en la forma de $\frac{4}{4}$. Observe la forma de 1 remarcada en rojo.

$$= \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 4}$$

Use la regla para la multiplicación de dos fracciones. Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$$= \frac{4}{8}$$

Se ha encontrado que $\frac{4}{8}$ es equivalente a $\frac{1}{2}$. Para construir una fracción equivalente para $\frac{1}{2}$ con un denominador de 8, se *multiplicó por un factor igual a 1* en la forma de $\frac{4}{4}$. El multiplicar $\frac{1}{2}$ por $\frac{4}{4}$ cambia su apariencia pero no cambia su valor, debido a que se está multiplicando por 1.

Construcción de fracciones

Para construir una fracción, *multiplíquela por un factor de 1* en la forma $\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \frac{5}{5}$, etc.

El lenguaje de las matemáticas A la construcción de una fracción equivalente con un denominador mayor también se le llama *expresar una fracción en términos mayores*.

Auto-revisión 4

Escriba $\frac{5}{8}$ como una fracción equivalente con un denominador de 24.

Ahora intente **Problemas 37 y 49**

EJEMPLO 4 Escriba $\frac{3}{5}$ como una fracción equivalente con un denominador de 35.

Estrategia Se comparará el denominador dado con el denominador requerido y se preguntará, "¿Qué número por 5 es igual a 35?".

POR QUÉ La respuesta a esa pregunta ayuda a determinar la forma de 1 a utilizar para construir una fracción equivalente.

Solución

Para responder a la pregunta "¿Qué número por 5 es igual a 35?" se *divide* 35 entre 5 para obtener 7. Dado que se necesita multiplicar el denominador de $\frac{3}{5}$ por 7 para obtener un denominador de 35, se tiene que $\frac{7}{7}$ debe ser la forma de 1 que se utiliza para construir una fracción equivalente para $\frac{3}{5}$.

$$\frac{3}{5} = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{7}$$ Multiplique $\frac{3}{5}$ por una forma de 1: $\frac{7}{7} = 1$.

$$= \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 7}$$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$$= \frac{21}{35}$$

Se ha encontrado que $\frac{21}{35}$ es equivalente a $\frac{3}{5}$.

Consejo útil Para formar una fracción equivalente en el Ejemplo 4, se multiplicó $\frac{3}{5}$ por 1 en la forma de $\frac{7}{7}$. Como resultado de ese paso, el numerador y el denominador de $\frac{3}{5}$ se multiplicaron por 7:

$\frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 7}$ ← El numerador se multiplica por 7.
← El denominador se multiplica por 7.

Este proceso ilustra la siguiente propiedad de las fracciones.

Propiedad fundamental de las fracciones

Si el numerador y el denominador de una fracción se multiplican por el mismo número diferente de cero, la fracción resultante es equivalente a la fracción original.

Dado que la multiplicación del numerador y el denominador de una fracción por el mismo número diferente del cero produce una fracción equivalente, su profesor puede permitirle comenzar su solución para los problemas parecidos al del Ejemplo 4 como se muestra en el Consejo de éxito arriba.

EJEMPLO 5 Escriba el 4 como una fracción equivalente con un denominador de 6.

Estrategia Se expresará el 4 como la fracción $\frac{4}{1}$ y se construirá una fracción equivalente multiplicándola por $\frac{6}{6}$.

POR QUÉ Dado que se necesita multiplicar el denominador de $\frac{4}{1}$ por 6 para obtener un denominador de 6, se tiene que $\frac{6}{6}$ debe ser la forma de 1 que se utiliza para construir una fracción equivalente para $\frac{4}{1}$.

Solución

$$4 = \frac{4}{1}$$ Escriba el 4 como una fracción: $4 = \frac{4}{1}$.

$$= \frac{4}{1} \cdot \frac{6}{6}$$ Construya una fracción equivalente multiplicando $\frac{4}{1}$ por una forma de 1: $\frac{6}{6} = 1$.

$$= \frac{4 \cdot 6}{1 \cdot 6}$$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$$= \frac{24}{6}$$

Auto-revisión 5

Escriba el 10 como una fracción equivalente con un denominador de 3.

Ahora intente **Problema 57**

5 Simplificar fracciones

Toda fracción puede escribirse en infinitamente muchas formas equivalentes. Por ejemplo, algunas formas equivalentes del $\frac{10}{15}$ son:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{15}} = \frac{12}{18} = \frac{14}{21} = \frac{16}{24} = \frac{18}{27} = \frac{20}{30} = \cdots$$

De todas las formas equivalentes en las que puede escribirse una fracción, con frecuencia se necesita determinar la que está en la *forma más simple.*

Forma más simple de una fracción

Una fracción está en la **forma más simple,** o en los **términos más bajos,** cuando el numerador y el denominador no tienen factores comunes diferentes del 1.

EJEMPLO 6 ¿Las siguientes fracciones están en la forma más simple?

a. $\frac{12}{27}$ **b.** $\frac{5}{8}$

Estrategia Se determinará si el numerador y el denominador tienen algún factor común diferente del 1.

POR QUÉ Si el numerador y el denominador no tienen factores comunes diferentes del 1, la fracción está en la forma más simple.

Solución

a. Los factores del numerador, 12, son: **1**, 2, **3**, 4, 6, 12
Los factores del denominador, 27, son: **1**, **3**, 9, 27

Dado que el numerador y el denominador tienen un factor común de 3, la fracción $\frac{12}{27}$ *no* está en la forma más simple.

b. Los factores del numerador, 5, son: **1**, 5
Los factores del denominador, 8, son: **1**, 2, 4, 8

Dado que el único factor común del numerador y el denominador es el 1, la fracción $\frac{5}{8}$ está en la forma más simple.

Auto-revisión 6

¿Las siguientes fracciones están en la forma más simple?

a. $\frac{4}{21}$

b. $\frac{6}{20}$

Ahora intente **Problema 61**

Para **simplificar una fracción,** se escribe en la forma más simple *eliminando un factor igual a 1.* Por ejemplo, para simplificar $\frac{10}{15}$, se observa que el máximo factor común para el numerador y el denominador es el 5 y se procede como a continuación:

$$\frac{10}{15} = \frac{2 \cdot \mathbf{5}}{3 \cdot \mathbf{5}}$$ Factorice el 10 y el 15. Observe la forma de 1 remarcada en rojo.

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{5}}$$ Use la regla para la multiplicación hacia atrás de fracciones: escriba: $\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5}$ como el producto de dos fracciones, $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{5}$.

$$= \frac{2}{3} \cdot \mathbf{1}$$ Un número dividido entre sí mismo es igual a 1: $\frac{5}{5} = 1$.

$$= \frac{2}{3}$$ Use la propiedad de la multiplicación del 1: el producto de cualquier fracción y el 1 es esa fracción.

Se ha encontrado que la forma simplificada de $\frac{10}{15}$ es $\frac{2}{3}$. Para simplificar $\frac{10}{15}$, se *eliminó un factor igual a 1* en la forma de $\frac{5}{5}$. El resultado $\frac{2}{3}$, es equivalente a $\frac{10}{15}$.

Para racionalizar el proceso de simplificación, se pueden reemplazar los pares de factores comunes para el numerador y el denominador con la fracción equivalente $\frac{1}{1}$.

Auto-revisión 7

Simplifique cada fracción:

a. $\frac{10}{25}$

b. $\frac{3}{9}$

Ahora intente **Problemas 65 y 69**

EJEMPLO 7

Simplifique cada fracción: **a.** $\frac{6}{10}$ **b.** $\frac{7}{21}$

Estrategia Se factorizará el numerador y el denominador. Después se buscará cualquier factor común para el numerador y el denominador y se eliminará.

POR QUÉ Se necesita asegurarse de que el numerador y el denominador no tienen factores comunes diferentes del 1. Si ese es el caso, entonces la fracción está en la *forma más simple.*

Solución

a. $\frac{6}{10} = \frac{\mathbf{2} \cdot 3}{\mathbf{2} \cdot 5}$ Para preparar la simplificación, factorice el 6 y el 10. Observe la forma de 1 remarcada en rojo.

$$= \frac{\overset{1}{\mathbf{2}} \cdot 3}{\underset{1}{\mathbf{2}} \cdot 5}$$ Simplifique eliminando el factor común de 2 del numerador y el denominador. Se utiliza una diagonal / y los 1 para mostrar que se reemplaza $\frac{2}{2}$ por la fracción equivalente $\frac{1}{1}$. Se eliminó un factor igual a 1 en la forma de $\frac{2}{2}$.

$$= \frac{3}{5}$$ Multiplique los factores restantes en el denominador: $1 \cdot 3 = 3$. Multiplique los factores restantes en el denominador: $1 \cdot 5 = 5$.

Dado que el 3 y el 5 no tienen factores comunes (diferentes del 1), $\frac{3}{5}$ está en la forma más simple.

b. $\frac{7}{21} = \frac{7}{3 \cdot 7}$ Para preparar la simplificación, factorice el 21.

$$= \frac{\overset{1}{\mathbf{7}}}{3 \cdot \underset{1}{\mathbf{7}}}$$ Simplemente elimine el factor común de 7 del numerador y el denominador.

$$= \frac{1}{3}$$ Multiplique los factores restantes en el denominador: $1 \cdot 3 = 3$.

¡Cuidado! No olvide escribir los 1 cuando se eliminan los factores comunes del numerador y el denominador. El fallo al hacer esto conduce al error común mostrado abajo.

$$\frac{7}{21} = \frac{\mathbf{7}}{3 \cdot \mathbf{7}} = \frac{0}{3}$$

Se pueden identificar de manera sencilla los factores comunes del numerador y el denominador de una fracción si se escriben en forma de factorización de primos.

EJEMPLO 8

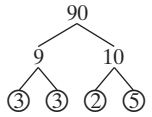
Simplifique cada fracción, si es posible: **a.** $\frac{90}{105}$ **b.** $\frac{25}{27}$

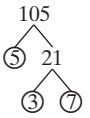
Estrategia Se comienza realizando la factorización de primos del numerador, 90, y del denominador, 105. Después se busca cualquier factor común para el numerador y el denominador y se elimina.

POR QUÉ Cuando el numerador y/o el denominador de una fracción son números grandes, como el 90 y el 105, el escribir su factorización de primos es de utilidad en la identificación de cualquier factor común.

Solución

a. $\frac{90}{105} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 5 \cdot 7}$ Para preparar la simplificación, escriba el 90 y el 105 en la forma de factorización de primos



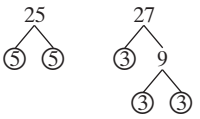


$= \frac{2 \cdot \overset{1}{\cancel{3}} \cdot 3 \cdot \overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{1}{\cancel{3}} \cdot \underset{1}{\cancel{5}} \cdot 7}$ Elimine los factores comunes de 3 y 5 del numerador y el denominador. Se utilizan diagonales y 1 para mostrar que se reemplaza $\frac{3}{3}$ y $\frac{5}{5}$ por la fracción equivalente $\frac{1}{1}$. Se eliminó un factor igual a 1 en la forma de $\frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{15}{15}$.

$= \frac{6}{7}$ Multiplique los factores restantes en el numerador: $2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 = 6$.
Multiplique los factores restantes en el denominador: $1 \cdot 1 \cdot 7 = 7$.

Dado que el 6 y el 7 no tienen factores comunes (diferentes del 1), $\frac{6}{7}$ está en la forma más simple.

b. $\frac{25}{27} = \frac{5 \cdot 5}{3 \cdot 3 \cdot 3}$ Escriba el 25 y el 27 en la forma de factorización de primos



Dado que el 25 y el 27 no tienen factores comunes, diferentes del 1, la fracción, $\frac{25}{27}$ está en la forma más simple.

Auto-revisión 8

Simplifique cada fracción, si es posible:

a. $\frac{70}{126}$

b. $\frac{16}{81}$

Ahora intente **Problemas 77 y 81**

EJEMPLO 9

Simplifique: $\frac{63}{36}$

Estrategia Se realizará la factorización de primos del numerador y el denominador. Después se buscará cualquier factor común para el numerador y el denominador y se eliminará.

POR QUÉ Se necesita asegurarse que el numerador y el denominador no tienen factores comunes diferentes del 1. Si ese es el caso, entonces la fracción está en la *forma más simple.*

Solución

$\frac{63}{36} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3}$ Para preparar la simplificación, escriba el 63 y el 36 en la forma de factorización de primos.

3|63	2|36
3|21	2|18
7	3|9
	3

$= \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot \overset{1}{\cancel{3}} \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot \underset{1}{\cancel{3}} \cdot \underset{1}{\cancel{3}}}$ Simplifique eliminando los factores comunes de 3 del numerador y el denominador.

$= \frac{7}{4}$ Multiplique los factores restantes en el numerador: $1 \cdot 1 \cdot 7 = 7$.
Multiplique los factores restantes en el denominador: $2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 4$.

Consejo útil Si reconoce que el 63 y el 36 tienen un factor común de 9, puede eliminar ese factor común del numerador y el denominador sin escribir la factorización de primos. Sin embargo, asegúrese que el numerador y el denominador de la fracción resultante no tienen algún otro factor común. Si lo tiene, continúe simplificando.

$\frac{63}{36} = \frac{7 \cdot \overset{1}{\cancel{9}}}{4 \cdot \underset{1}{\cancel{9}}} = \frac{7}{4}$ Factorice el 63 como $7 \cdot 9$ y el 36 como $4 \cdot 9$ y después elimine el factor común de 9 del numerador y el denominador.

Auto-revisión 9

Simplifique: $\frac{162}{72}$

Ahora intente **Problema 89**

Use los siguientes pasos para simplificar una fracción.

Simplificación de fracciones

Para simplificar una fracción, *elimine los factores iguales a 1* de la forma $\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \frac{5}{5}$, etc., utilizando el siguiente procedimiento:

1. Factorice (o realice una factorización de primos) el numerador y el denominador para determinar sus factores comunes.
2. Elimine los factores iguales a 1 reemplazando cada par de factores comunes para el numerador y el denominador con la fracción equivalente $\frac{1}{1}$.
3. Multiplique los factores restantes en el numerador y el denominador.

Las fracciones negativas se simplifican de la misma manera que las fracciones positivas. Sólo recuerde escribir el signo negativo $-$ enfrente de cada paso de la solución. Por ejemplo, para simplificar $-\frac{15}{33}$ se procede como a continuación:

$$-\frac{15}{33} = -\frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot 5}{\underset{1}{\cancel{3}} \cdot 11}$$

$$= -\frac{5}{11}$$

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. a. numerador: 7; denominador: 9 **b.** numerador: 21; denominador: 20 **2. a.** $\frac{11}{31}$ **b.** $\frac{20}{31}$ **3. a.** 1 **b.** 51 **c.** no definida **d.** 0 **4.** $\frac{15}{24}$ **5.** $\frac{30}{3}$ **6. a.** sí **b.** no **7. a.** $\frac{2}{5}$ **b.** $\frac{1}{3}$ **8. a.** $\frac{5}{9}$ **b.** en la forma más simple **9.** $\frac{9}{4}$

SECCIÓN 3.1 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

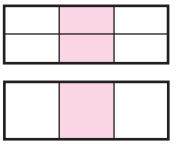
Complete los espacios.

1. Una _____ describe el número de partes iguales de un todo.
2. Para la fracción $\frac{7}{8}$, el _____ es el 7 y el _____ es el 8.
3. Si el numerador de una fracción es menor que su denominador, a la fracción se le llama fracción _____. Si el numerador de una fracción es mayor que o igual a su denominador se le llama fracción _____.
4. Cada una de las siguientes fracciones es una forma de _____.

   $\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = \frac{6}{6} = \frac{7}{7} = \frac{8}{8} = \frac{9}{9} = \ldots$
5. Dos fracciones son _____ si representan al mismo número.
6. Las fracciones _____ representan la misma porción de un todo.
7. El escribir una fracción como una fracción equivalente con un denominador más grande se le llama _____ de la fracción.
8. Una fracción está en la forma _____, o en términos más bajos, cuando el numerador y el denominador no tienen factores comunes diferentes del 1.

CONCEPTOS

9. ¿Qué concepto estudiado en esta sección se muestra a la derecha?



10. ¿Qué concepto estudiado en esta sección ilustra el siguiente enunciado?

    $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \ldots$

11. Clasifique cada fracción como fracción propia o fracción impropia.

a. $\frac{37}{24}$ **b.** $\frac{1}{3}$

c. $\frac{71}{100}$ **d.** $\frac{9}{9}$

12. Elimine los factores comunes del numerador y el denominador para simplificar la fracción:

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}$$

13. ¿Qué factor común (diferente del 1) tienen el numerador y el denominador de la fracción $\frac{10}{15}$?

Complete los espacios.

14. Propiedad de la multiplicación del 1: El producto de cualquier fracción y el 1 es esa _____.

15. Multiplicación de fracciones: Para multiplicar dos fracciones, multiplique los _____ y multiplique los denominadores.

16. a. Considere la siguiente solución: $\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot \square$

$$= \frac{8}{12}$$

Para construir una fracción equivalente para $\frac{2}{3}$ con un denominador de 12, _____ por un factor igual a 1 en la forma de $\square$.

b. Considere la siguiente solución: $\frac{15}{27} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot 5}{\underset{1}{\cancel{3}} \cdot 9}$

$$= \frac{5}{9}$$

Para simplificar la fracción $\frac{15}{27}$, _____ un factor igual a 1 de la forma $\square$.

NOTACIÓN

17. Escriba la fracción $\frac{7}{-8}$ de dos maneras.

18. Escriba cada entero como una fracción.

a. 8 **b.** –25

Complete cada solución.

19. Forme una fracción equivalente para $\frac{1}{6}$ con un denominador de 18.

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{\square}$$

$$= \frac{\square \cdot 3}{6 \cdot \square}$$

$$= \frac{3}{\square}$$

20. Simplifique: $\frac{18}{24}$

$$\frac{18}{24} = \frac{2 \cdot \square \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \square}$$

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{\square}} \cdot 3 \cdot \overset{1}{\cancel{\square}}}{\underset{1}{\cancel{2}} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \underset{1}{\cancel{\square}}}$$

$$= \frac{3}{\square}$$

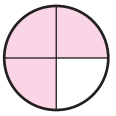
PRÁCTICA GUIADA

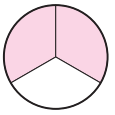
Identifique el numerador y el denominador de cada fracción. Vea el Ejemplo 1.

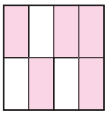
21. $\frac{4}{5}$ **22.** $\frac{7}{8}$

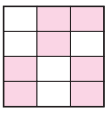
23. $\frac{17}{10}$ **24.** $\frac{29}{21}$

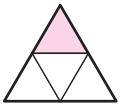
Escriba una fracción para describir qué parte de la figura está sombreada. Escriba una fracción para describir qué parte de la figura no está sombreada. Vea el Ejemplo 2.

25. 

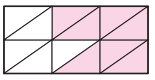
26. 

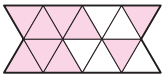
27. 

28. 

29. 

30.

31. 

32. 

Simplifique, si es posible. Vea el Ejemplo 3.

33. a. $\frac{4}{1}$ **b.** $\frac{8}{8}$

c. $\frac{0}{12}$ **d.** $\frac{1}{0}$

34. a. $\frac{25}{1}$ **b.** $\frac{14}{14}$

c. $\frac{0}{1}$ **d.** $\frac{83}{0}$

35. a. $\frac{5}{0}$ **b.** $\frac{0}{50}$

c. $\frac{33}{33}$ **d.** $\frac{75}{1}$

36. **a.** $\frac{0}{64}$ **b.** $\frac{27}{0}$ **c.** $\frac{125}{125}$ **d.** $\frac{98}{1}$

Escriba cada fracción como una fracción equivalente con el denominador indicado. Vea el Ejemplo 4.

37. $\frac{7}{8}$, denominador de 40 **38.** $\frac{3}{4}$, denominador de 24

39. $\frac{4}{9}$, denominador de 27 **40.** $\frac{5}{7}$, denominador de 49

41. $\frac{5}{6}$, denominador de 54 **42.** $\frac{2}{3}$, denominador de 27

43. $\frac{2}{7}$, denominador de 14 **44.** $\frac{3}{10}$, denominador de 50

45. $\frac{1}{2}$, denominador de 30 **46.** $\frac{1}{3}$, denominador de 60

47. $\frac{11}{16}$, denominador de 32 **48.** $\frac{9}{10}$, denominador de 60

49. $\frac{5}{4}$, denominador de 28 **50.** $\frac{9}{4}$, denominador de 44

51. $\frac{16}{15}$, denominador de 45 **52.** $\frac{13}{12}$, denominador de 36

Escriba cada número natural como una fracción equivalente con el denominador indicado. Vea el Ejemplo 5.

53. 4, denominador de 9 **54.** 4, denominador de 3

55. 6, denominador de 8 **56.** 3, denominador de 6

57. 3, denominador de 5 **58.** 7, denominador de 4

59. 14, denominador de 2 **60.** 10, denominador de 9

¿Las siguientes fracciones están en la forma más simple? Vea el Ejemplo 6.

61. **a.** $\frac{12}{16}$ **b.** $\frac{3}{25}$

62. **a.** $\frac{9}{24}$ **b.** $\frac{7}{36}$

63. **a.** $\frac{35}{36}$ **b.** $\frac{18}{21}$

64. **a.** $\frac{22}{45}$ **b.** $\frac{21}{56}$

Simplifique cada fracción, si es posible. Vea el Ejemplo 7.

65. $\frac{6}{9}$ **66.** $\frac{15}{20}$

67. $\frac{16}{20}$ **68.** $\frac{25}{35}$

69. $\frac{5}{15}$ **70.** $\frac{6}{30}$

71. $\frac{2}{48}$ **72.** $\frac{2}{42}$

Simplifique cada fracción, si es posible. Vea el Ejemplo 8.

73. $\frac{36}{96}$ **74.** $\frac{48}{120}$

75. $\frac{16}{17}$ **76.** $\frac{14}{25}$

77. $\frac{55}{62}$ **78.** $\frac{41}{51}$

79. $\frac{50}{55}$ **80.** $\frac{22}{88}$

81. $\frac{60}{108}$ **82.** $\frac{75}{275}$

83. $\frac{180}{210}$ **84.** $\frac{90}{120}$

Simplifique cada fracción. Vea el Ejemplo 9.

85. $\frac{306}{234}$ **86.** $\frac{208}{117}$

87. $\frac{15}{6}$ **88.** $\frac{24}{16}$

89. $\frac{420}{144}$ **90.** $\frac{216}{189}$

91. $-\frac{4}{68}$ **92.** $-\frac{3}{42}$

93. $-\frac{90}{105}$ **94.** $-\frac{98}{126}$

95. $-\frac{16}{26}$ **96.** $-\frac{81}{132}$

INTÉNTELO

Indique si cada par de fracciones son equivalente simplificando cada fracción.

97. $\frac{2}{14}$ y $\frac{6}{36}$ **98.** $\frac{3}{12}$ y $\frac{4}{24}$

99. $\frac{22}{34}$ y $\frac{33}{51}$ **100.** $\frac{4}{30}$ y $\frac{12}{90}$

APLICACIONES

101. ODONTOLOGÍA Refiérase al gráfico dental.

a. ¿Cuántos dientes se muestran en el gráfico?

b. ¿Qué fracción de este conjunto de dientes tiene empastes?

102. RELOJES Para cada reloj, ¿qué fracción de hora ha transcurrido? Escriba sus respuestas en forma simplificada. (*Sugerencia:* Hay 60 minutos en una hora.)

a.

b.

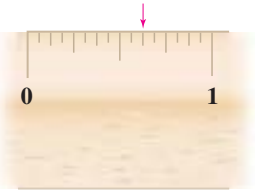
c.

d.

103. REGLAS La ilustración de abajo muestra una regla.

a. ¿Cuántos espacios hay entre los números 0 y 1?

b. ¿A qué fracción está apuntando la flecha? Escriba su respuesta en forma simplificada.



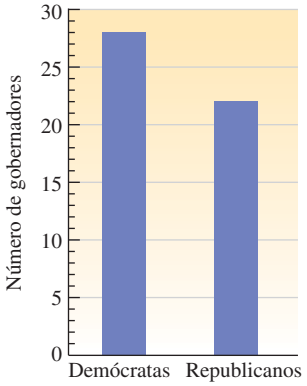
104. SUMIDEROS La ilustración de abajo muestra una vista lateral de un descenso en la acera cerca de un sumidero. Describa el movimiento de la acera utilizando una fracción con signo.

105. PARTIDOS POLÍTICOS La gráfica muestra el número de gobernadores demócratas y republicanos de los 50 estados, desde el 1 de febrero del 2009.

a. ¿Cuántos gobernadores demócratas hay? ¿Cuántos gobernadores republicanos hay?

b. ¿Qué fracción de los gobernadores son demócratas? Escriba su respuesta en forma simplificada.

c. ¿Qué fracción de los gobernadores son republicanos? Escriba su respuesta en forma simplificada.



Fuente: thegreenpapers.com

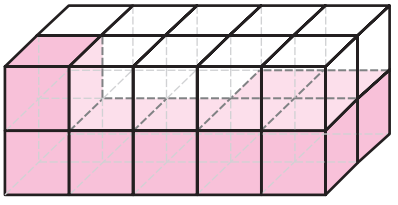
106. TANQUES DE GASOLINA Escriba fracciones para describir la cantidad de combustible que queda en el tanque y la cantidad que se ha utilizado.

Use gasolina sin plomo

107. VENTA DE CONDOMINIOS El modelo de abajo muestra un nuevo desarrollo de condominios. Los condominios que se han vendido están sombreados.

a. ¿Cuántas unidades hay en el desarrollo?

b. ¿Qué fracción de las unidades en el desarrollo se han vendido? ¿Qué fracción no se ha vendido? Escriba sus respuestas en forma simplificada.

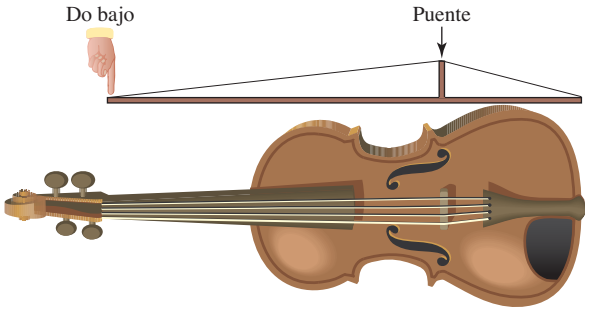


108. MÚSICA La ilustración muestra una vista lateral de la posición de los dedos necesaria para producir una longitud de la cuerda (del puente a la punta del dedo) que produce un Do bajo en un violín. Para tocar otras notas, se utilizan fracciones de esa longitud. Localice estas posiciones de los dedos en la ilustración.

a. $\frac{1}{2}$ de la longitud da Do medio.

b. $\frac{3}{4}$ de la longitud da Fa sobre Do bajo.

c. $\frac{2}{3}$ de la longitud da Sol.



109. CENTROS MÉDICOS Los diseñadores de un hospital han localizado una estación de enfermeras en el centro de un edificio circular. Muestre cómo dividir el espacio para oficinas que la rodea (sombreada en gris) para que cada departamento médico tenga la cantidad fraccional asignada a él. Etiquete cada departamento.

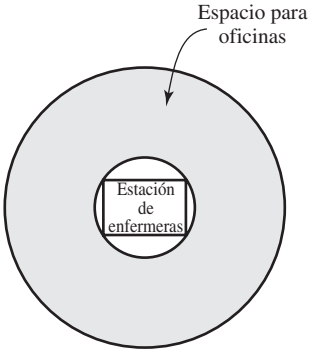
$\frac{2}{12}$: Radiología

$\frac{5}{12}$: Pediatría

$\frac{1}{12}$: Laboratorio

$\frac{3}{12}$: Ortopedia

$\frac{1}{12}$: Farmacia



Centro médico

110. PIB El producto interno bruto (PIB) es la medición oficial del tamaño de la economía de un país. Representa el valor de mercado de todos los bienes y servicios que se han adquirido durante un periodo dado de tiempo. Abajo se lista el PIB para el segundo trimestre del 2008. ¿A qué se refiere con la frase *segundo trimestre del 2008*?

Segundo trimestre del 2008 $14,294,500,000,000

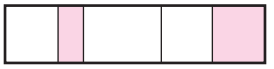
Fuente: *The World Almanac and Book of Facts*, 2009

REDACCIÓN

111. Explique el concepto de fracciones equivalentes. Dé un ejemplo.

112. ¿A qué se refiere con que una fracción esté en la forma más simple? Dé un ejemplo.

113. ¿Por qué no se puede decir que está sombreada $\frac{2}{5}$ de la figura abajo?



114. Quizás ha escuchado la siguiente broma:

Una camarera en una pizzería le pregunta a un cliente si desea la pizza cortada en cuatro, seis u ocho piezas. El cliente entonces declara que desea cuatro o seis piezas de pizza "debido a que no puede comer ocho".

Explique qué hay de incorrecto en el modo de pensar del cliente.

115. **a.** ¿Qué tipo de problema se muestra abajo? Explique la solución.

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{4} = \frac{4}{8}$$

b. ¿Qué tipo de problema se muestra abajo? Explique la solución.

$$\frac{15}{35} = \frac{3 \cdot \overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{1}{\cancel{5}} \cdot 7} = \frac{3}{7}$$

116. Explique la diferencia en los dos métodos utilizados para simplificar $\frac{20}{28}$. ¿Los resultados son iguales?

$$\frac{\overset{1}{\cancel{4}} \cdot 5}{\underset{1}{\cancel{4}} \cdot 7} \quad \text{y} \quad \frac{\overset{1}{2} \cdot \overset{1}{2} \cdot 5}{\underset{1}{2} \cdot \underset{1}{2} \cdot 7}$$

REPASO

117. RECIBOS DE NÓMINA El *sueldo bruto* es lo que gana el trabajador antes de deducciones y el *sueldo neto* es lo que queda después de impuestos, beneficios para la salud, cuotas sindicales y otras deducciones. Suponga que el sueldo bruto de un trabajador es de $3,575. Si se deducen de su cheque de $235, $782, $148 y $103, ¿cuál es su sueldo neto mensual?

118. CARRERAS DE CABALLOS Un día, un hombre apostó en las ocho carreras de caballos en el hipódromo Santa Anita. Ganó $168 en la primera carrera y ganó $105 en la cuarta carrera. Perdió apuestas de $50 en cada una de las otras carreras. En total, ¿ganó o perdió dinero apostando en los caballos? ¿Cuánto?

SECCIÓN 3.2

Multiplicación de fracciones

Objetivos

1. Multiplicar fracciones.
2. Simplificar respuestas cuando se multiplican fracciones.
3. Evaluar expresiones exponenciales que tienen bases fraccionales.
4. Resolver problemas de aplicación multiplicando fracciones.
5. Encontrar el área de un triángulo.

En las siguientes tres secciones se explica cómo sumar, restar, multiplicar y dividir fracciones. Se comienza con la operación de multiplicación.

1 Multiplicar fracciones

Para desarrollar una regla para la multiplicación de fracciones, se considera una aplicación en el mundo real.

Suponga que $\frac{3}{5}$ de la última página de un diario escolar está dedicada a la cobertura deportiva en el campus. Para mostrar esto, se puede dividir la página en quintos y sombrear tres de ellos de rojo.

Cobertura deportiva: $\frac{3}{5}$ de la página

Además, suponga que $\frac{1}{2}$ de la cobertura deportiva es acerca de los equipos femeniles. Se puede mostrar esa porción de la página dividiendo la región ya coloreada en dos mitades y sombreando una de ellas en púrpura.

Cobertura deportiva femenil: $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{5}$ de la página

Para encontrar la fracción representada por la región sombreada púrpura, se necesita dividir la página en partes de igual tamaño. Si se extiende la línea punteada hacia abajo, se ve que hay 10 partes de igual tamaño. Las partes sombreadas púrpuras son 3 de 10, ó $\frac{3}{10}$, de la página. Por tanto, $\frac{3}{10}$ de la última página del diario escolar está dedicada a los deportes femeniles.

Cobertura deportiva femenil: $\frac{3}{10}$ de la página

En este ejemplo, se ha encontrado que

$$\frac{1}{2} \text{ de } \frac{3}{5} \text{ es } \frac{3}{10}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

Dado que la palabra clave *de* indica multiplicación y la palabra clave *es* significa igual, se puede traducir este enunciado a símbolos

Se pueden hacer dos observaciones a partir de este resultado.

- El numerador de la respuesta es el producto de los numeradores de las fracciones originales.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

$1 \cdot 3 = 3$ (numeradores) — Respuesta — $2 \cdot 5 = 10$ (denominadores)

- El denominador de la respuesta es producto de los denominadores de las fracciones originales.

Estas observaciones ilustran la siguiente regla para la multiplicación de dos fracciones.

Multiplicación de fracciones

Para multiplicar dos fracciones, multiplique los numeradores y multiplique los denominadores. Simplifique el resultado, si es posible.

Consejo útil En el ejemplo del diario, se encontró una *parte de una parte* de una página. La multiplicación de fracciones propias puede pensarse de esta manera. Cuando se toma una *parte de una parte* de algo, el resultado siempre es menor que la parte original con la que se comienza.

Auto-revisión 1

Multiplique:

a. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}$

b. $\frac{5}{9} \cdot \frac{2}{3}$

Ahora intente **Problemas 17 y 21**

EJEMPLO 1

Multiplique: **a.** $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4}$ **b.** $\frac{7}{8} \cdot \frac{3}{5}$

Estrategia Se multiplicarán los numeradores y los denominadores y se asegurará que el resultado esté en la forma más simple.

POR QUÉ Esta es la regla para la multiplicación de dos fracciones.

a. $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 1}{6 \cdot 4}$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$= \frac{1}{24}$ Dado que el 1 y el 24 no tienen factores comunes diferentes del 1, el resultado está en la forma más simple.

Solución

b. $\frac{7}{8} \cdot \frac{3}{5} = \frac{7 \cdot 3}{8 \cdot 5}$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$= \frac{21}{40}$ Dado que el 21 y el 40 no tienen factores comunes diferentes del 1, el resultado está en la forma más simple.

Las reglas de los signos para la multiplicación de enteros también se mantienen para la multiplicación de fracciones. Cuando se multiplican dos fracciones con signos *similares*, el producto es positivo. Cuando se multiplican dos fracciones con signos *no similares*, el producto es negativo.

EJEMPLO 2 Multiplique: $-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{8}\right)$

Estrategia Se utilizará la regla para la multiplicación de dos fracciones que tienen signos diferentes (no similares).

POR QUÉ Una fracción es positiva y una es negativa.

Solución

$$-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{8}\right) = -\frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 8}$$

Multiplique los numeradores.
Multiplique los denominadores.
Dado que las fracciones tienen signos no similares, haga negativa la respuesta

$$= -\frac{3}{32}$$

Dado que el 3 y el 32 no tienen factores comunes diferentes del 1, el resultado está en la forma más simple.

Auto-revisión 2

Multiplique: $\frac{5}{6}\left(-\frac{1}{3}\right)$

Ahora intente **Problema 25**

EJEMPLO 3 Multiplique: $\frac{1}{2} \cdot 3$

Estrategia Se comenzará escribiendo el entero 3 como una fracción.

POR QUÉ Después se puede utilizar la regla para la multiplicación de dos fracciones para encontrar el producto.

Solución

$$\frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{1}$$

Escriba el 3 como una fracción: $3 = \frac{3}{1}$.

$$= \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 1}$$

Multiplique los numeradores.
Multiplique los denominadores.

$$= \frac{3}{2}$$

Dado que el 3 y el 2 no tienen factores comunes diferentes del 1, el resultado está en la forma más simple.

Auto-revisión 3

Multiplique: $\frac{1}{3} \cdot 7$

Ahora intente **Problema 29**

2 Simplificar respuestas cuando se multiplican fracciones

Después de la multiplicación de dos fracciones, se necesita simplificar el resultado, si es posible. Para hacer esto, se puede utilizar el procedimiento explicado en la Sección 3.1 removiendo pares de factores comunes del numerador y el denominador.

EJEMPLO 4 Multiplique y simplifique: $\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{5}$

Estrategia Se multiplicarán los numeradores y los denominadores y se asegurará que el resultado está en la forma más simple.

POR QUÉ Esta es la regla para la multiplicación de dos fracciones.

Solución

$$\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{5} = \frac{5 \cdot 4}{8 \cdot 5}$$

Multiplique los numeradores.
Multiplique los denominadores.

$$= \frac{5 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5}$$

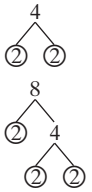
Para preparar la simplificación, escriba el 4 y el 8 en forma de factorización de primos.

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{5}} \cdot \overset{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{1}{\cancel{2}} \cdot \underset{1}{\cancel{2}} \cdot 2 \cdot \underset{1}{\cancel{5}}}$$

Para simplificar, elimine los factores comunes de 2 y 5 del numerador y el denominador.

$$= \frac{1}{2}$$

Multiplique los factores restantes en el numerador: $1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$.
Multiplique los factores restantes en el denominador: $1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$.



Auto-revisión 4

Multiplique y simplifique: $\frac{11}{25} \cdot \frac{10}{11}$

Ahora intente **Problema 33**

Consejo útil Si reconoce que el 4 y el 8 tienen un factor común de 4, puede eliminar ese factor común del numerador y el denominador sin escribir la factorización de primos. Sin embargo, asegúrese que el numerador y el denominador de la fracción resultante no tienen algún otro factor común. Si lo tienen, continúe simplificando.

$$\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{5}=\frac{5\cdot 4}{8\cdot 5}=\frac{\overset{1}{\cancel{5}}\cdot\overset{1}{\cancel{4}}}{2\cdot\underset{1}{\cancel{4}}\cdot\underset{1}{\cancel{5}}}=\frac{1}{2}$$

Factorice el 8 como 2 · 4, y después elimine los factores comunes de 4 y 5 en el numerador y el denominador.

La regla para la multiplicación de dos fracciones puede extenderse para encontrar el producto de tres o más fracciones.

Auto-revisión 5

Multiplique y simplifique:

$$\frac{2}{5}\left(-\frac{15}{22}\right)\left(-\frac{11}{26}\right)$$

Ahora intente **Problema 37**

EJEMPLO 5

Multiplique y simplifique: $\frac{2}{3}\left(-\frac{9}{14}\right)\left(-\frac{7}{10}\right)$

Estrategia Se multiplicarán los numeradores y los denominadores y se asegurará que el resultado está en la forma más simple.

POR QUÉ Esta es la regla para la multiplicación de tres (o más) fracciones.

Solución Recuerde a partir de la Sección 2.4 que un producto es positivo cuando hay un número par de factores negativos. Dado que $\frac{2}{3}\left(-\frac{9}{14}\right)\left(-\frac{7}{10}\right)$ tiene *dos* factores negativos, el producto es positivo.

$$\frac{2}{3}\left(-\frac{9}{14}\right)\left(-\frac{7}{10}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{9}{14}\right)\left(\frac{7}{10}\right)$$

Dado que la respuesta es positiva, deseche ambos signos − y continúe.

$$=\frac{2\cdot 9\cdot 7}{3\cdot 14\cdot 10}$$

Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$$=\frac{2\cdot 3\cdot 3\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 7\cdot 2\cdot 5}$$

Para preparar la simplificación, escriba el 9, el 14 y el 10 en forma de factorización de primos.

$$=\frac{\overset{1}{\cancel{2}}\cdot\overset{1}{\cancel{3}}\cdot 3\cdot\overset{1}{\cancel{7}}}{\underset{1}{\cancel{3}}\cdot 2\cdot\underset{1}{\cancel{7}}\cdot\underset{1}{\cancel{2}}\cdot 5}$$

Para simplificar, elimine los factores comunes de 2, 3 y 7 del numerador y el denominador.

$$=\frac{3}{10}$$

Multiplique los factores restantes en el numerador. Multiplique los factores restantes en el denominador.

¡Cuidado! En el Ejemplo 5 fue de mucha utilidad realizar la factorización de primos y la simplificación cuando se hizo (el tercer paso de la solución). Si, en vez de esto, encuentra el producto de los numeradores y el producto de los denominadores, la fracción resultante es difícil de simplificar debido a que el numerador, 126, y el denominador, 420, son grandes.

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{14}\cdot\frac{7}{10}=\frac{2\cdot 9\cdot 7}{3\cdot 14\cdot 10}=\frac{126}{420}$$

Factorice y simplifique en esta etapa, antes de la multiplicación en el numerador y el denominador.

No multiplique en el numerador y el denominador y después trate de simplificar el resultado. Obtendrá la misma respuesta, pero requerirá mucho más trabajo

3 Evaluar expresiones exponenciales que tienen bases fraccionales

Se han evaluado expresiones exponenciales que tienen bases de números naturales y bases de enteros. Si la base de una expresión exponencial es una fracción, el exponente indica cuántas veces escribir la fracción como un factor. Por ejemplo,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 2}{3\cdot 3}=\frac{4}{9}$$

Dado que el exponente es el 2, escriba la base, $\frac{2}{3}$, como un factor 2 veces.

EJEMPLO 6 Evalúe cada expresión: **a.** $\left(\frac{1}{4}\right)^3$ **b.** $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$ **c.** $-\left(\frac{2}{3}\right)^2$

Estrategia Se escribirá cada expresión exponencial como un producto de factores repetitivos y después se desarrollará la multiplicación. Esto requiere que se identifique la base y el exponente.

POR QUÉ El exponente indica el número de veces que se escribe la base como un factor.

Solución

Recuerde que los exponentes se utilizan para representar una multiplicación repetitiva.

a. Se lee $\left(\frac{1}{4}\right)^3$ como "un cuarto elevado a la tercera potencia" o como "un cuarto al cubo".

$$\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$$ Dado que el exponente es el 3, escriba la base, $\frac{1}{4}$, como un factor 3 veces.

$$= \frac{1\cdot 1\cdot 1}{4\cdot 4\cdot 4}$$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$$= \frac{1}{64}$$

b. Se lee $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$ como "dos tercios elevados a la segunda potencia" o como "dos tercios al cuadrado".

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)$$ Dado que el exponente es el 2, escriba la base, $-\frac{2}{3}$, como un factor 2 veces.

$$= \frac{2\cdot 2}{3\cdot 3}$$ El producto de dos factores con signos similares es positivo. Deseche los signos −. Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$$= \frac{4}{9}$$

c. Se lee $-\left(\frac{2}{3}\right)^2$ como "el opuesto de dos tercios al cuadrado". Recuerde que si el símbolo -2 no está dentro de los paréntesis, no es parte de la base.

$$-\left(\frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}$$ Dado que el exponentes es el 2, escriba la base, $\frac{2}{3}$, como un factor 2 veces.

$$= -\frac{2\cdot 2}{3\cdot 3}$$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$$= -\frac{4}{9}$$

Auto-revisión 6

Evalúe cada expresión:

a. $\left(\frac{2}{5}\right)^3$

b. $\left(-\frac{3}{4}\right)^2$

c. $-\left(\frac{3}{4}\right)^2$

Ahora intente **Problema 43**

4 Resolver problemas de aplicación multiplicando fracciones

La palabra clave *de* aparece con frecuencia en los problemas de aplicación que involucran fracciones. Cuando una fracción está seguida por la palabra *de,* como $\frac{1}{2}$ *de* ó $\frac{3}{4}$ *de,* indica que se va a encontrar una parte de alguna cantidad utilizando una multiplicación.

EJEMPLO 7 ***Cómo un proyecto de ley se convierte en una ley*** Si el presidente veta (se niega a firmar) un proyecto de ley, se requieren $\frac{2}{3}$ de aquellos que votan en la Cámara de Representantes (y el Senado) para anular el veto y convertirlo en una ley. Si los 435 miembros de la Cámara emiten un voto, ¿cuántos de sus votos se requieren para anular un veto presidencial?

ANALIZAR

- Se requieren $\frac{2}{3}$ *de* aquellos que votan. Proporcionado
- Los 435 miembros de la Cámara emiten un voto. Proporcionado
- ¿Cuántos votos se requieren para anular un veto presidencial? A encontrar

Auto-revisión 7

CÓMO UN PROYECTO DE LEY SE CONVIERTE EN UNA LEY

Si sólo están presentes 96 senadores y emiten un voto, ¿cuántos de sus votos se requieren para anular un veto presidencial?

Ahora intente **Problemas 45 y 87**

FORMAR La frase clave $\frac{2}{3}$ *de* sugiere que se va a encontrar una parte de los 435 votos posibles utilizando una multiplicación.

Se traducen las palabras del problema a números y símbolos.

El número de votos necesarios en la Cámara para anular un veto	es igual a	$\frac{2}{3}$	del	número de miembros de la Cámara que votan
El número de votos necesarios en la Cámara para anular un veto	=	$\frac{2}{3}$	·	435

Resolver Para encontrar el producto, se expresará el 435 como una fracción y después se utilizará la regla para la multiplicación de dos fracciones.

$$\frac{2}{3} \cdot 435 = \frac{2}{3} \cdot \frac{435}{1}$$ Escriba el 435 como una fracción: $435 = \frac{435}{1}$.

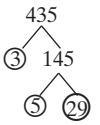
$$= \frac{2 \cdot 435}{3 \cdot 1}$$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$$= \frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 29}{3 \cdot 1}$$ Para preparar la simplificación, escriba el 435 en la forma de factorización de primos: $3 \cdot 5 \cdot 29$.

$$= \frac{2 \cdot \overset{1}{\cancel{3}} \cdot 5 \cdot 29}{\underset{1}{\cancel{3}} \cdot 1}$$ Elimine el factor común de 3 del numerador y el denominador.

$$= \frac{290}{1}$$ Multiplique los factores restantes en el numerador: $2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 29 = 290$. Multiplique los factores restantes en el denominador: $1 \cdot 1 = 1$.

$$= 290$$ Cualquier número natural dividido entre el 1 es igual a ese número.

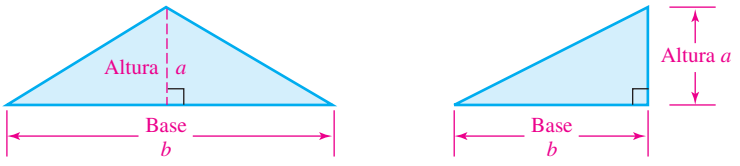


Enunciar Se requerirían 290 votos en la Cámara para anular el veto.

Comprobar Se puede estimar para comprobar el resultado. Se utilizará el 440 para aproximar el número de miembros de la Cámara que votan. Dado que $\frac{1}{2}$ de 440 es 220 y dado que $\frac{2}{3}$ es una parte mayor que $\frac{1}{2}$, se esperaría que el número de votos necesarios sea *mayor que* 220. El resultado de 290 parece razonable.

5 Encontrar el área de un triángulo

Como las figuras mostradas abajo, un triángulo tiene tres lados. La longitud de la base del triángulo puede representarse por medio de la letra b y la altura por la letra a. La altura de un triángulo siempre es perpendicular (forma una esquina cuadrada) a la base. Esto se muestra utilizando el símbolo ⌝.



Recuerde que el área de una figura es la cantidad de superficie que delimita. El área de un triángulo puede encontrarse utilizando la siguiente fórmula.

Área de un triángulo

El área A de un triángulo es la mitad del producto de su base b y su altura a.

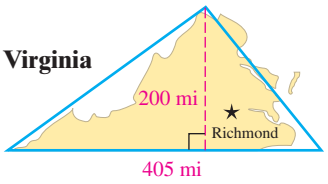
$$\text{Área} = \frac{1}{2}(\text{base})(\text{altura}) \qquad \text{o} \qquad A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot a$$

El lenguaje de las matemáticas La fórmula $A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot a$ puede escribirse de manera más sencilla como $A = \frac{1}{2}ba$. La fórmula para el área de un triángulo también puede escribirse como $A = \frac{ba}{2}$.

EJEMPLO 8 ***Geografía*** Aproxime el área del estado de Virginia (en millas cuadradas) utilizando el triángulo mostrado abajo.

Estrategia Se encontrará el producto de $\frac{1}{2}$, 405 y 200.

POR QUÉ La fórmula para el área de un triángulo es $A = \frac{1}{2}(\text{base})(\text{altura})$.



Solución

$$A = \frac{1}{2}ba$$ Esta es la fórmula para el área de un triángulo.

$$= \frac{1}{2} \cdot 405 \cdot 200$$ $\frac{1}{2}ba$ significa $\frac{1}{2} \cdot b \cdot a$. Sustituya 405 para b y 200 para a.

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{405}{1} \cdot \frac{200}{1}$$ Escriba el 405 y el 200 como fracciones.

$$= \frac{1 \cdot 405 \cdot 200}{2 \cdot 1 \cdot 1}$$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

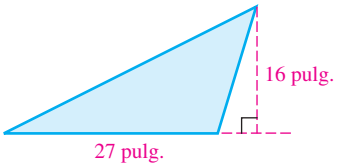
$$= \frac{1 \cdot 405 \cdot \overset{1}{\cancel{2}} \cdot 100}{\underset{1}{\cancel{2}} \cdot 1 \cdot 1}$$ Factorice el 200 como $2 \cdot 100$. Después elimine el factor común de 2 del numerador y el denominador.

$$= 40{,}500$$ En el numerador, multiplique: $405 \cdot 100 = 40{,}500$.

El área del estado de Virginia es de aproximadamente 40,500 millas cuadradas. Esta puede escribirse como 40,500 mi^2.

Auto-revisión 8

Encuentre el área del triángulo mostrado abajo.



Ahora intente **Problemas 49 y 99**

¡Cuidado! Recuerde que el área se mide en unidades cuadradas, como pulg.^{2}, pies^2 y cm^2. No olvide escribir las unidades en su respuesta cuando encuentre el área de una figura.

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

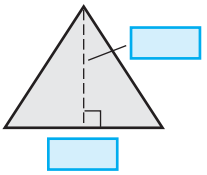
1. a. $\frac{1}{16}$ **b.** $\frac{10}{27}$ **2.** $-\frac{5}{18}$ **3.** $\frac{7}{3}$ **4.** $\frac{2}{5}$ **5.** $\frac{3}{26}$ **6. a.** $\frac{8}{125}$ **b.** $\frac{9}{16}$ **c.** $-\frac{9}{16}$
7. 64 votos **8.** 216 pulg.^{2}

SECCIÓN 3.2 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Complete los espacios.

1. Cuando una fracción está seguida por la palabra *de*, como $\frac{1}{3}$ *de*, indica que se va a encontrar una parte de alguna cantidad utilizando una _____.
2. La respuesta para una multiplicación se le llama _____.
3. Para _____ una fracción, se eliminan los factores comunes del numerador y el denominador.
4. En la expresión $\left(\frac{1}{4}\right)^3$, la _____ es $\frac{1}{4}$ y el _____ es el 3.
5. El _____ de un triángulo es la cantidad de superficie que delimita.
6. Etiquete la *base* y la *altura* del triángulo mostrado abajo.



CONCEPTOS

7. Complete los espacios: Para multiplicar dos fracciones, multiplique los _____ y multiplique los _____. Después _____, si es posible.
8. Use el siguiente rectángulo para encontrar $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$.

   a. Trace tres rectas verticales que dividan el rectángulo dado en cuatro partes iguales y sombree ligeramente una de ellas. ¿Qué parte fraccional del rectángulo sombreó?

   b. Para encontrar $\frac{1}{3}$ de la porción sombreada, trace dos rectas horizontales para dividir el rectángulo dado en tres partes iguales y sombree ligeramente una. ¿En cuántas partes está dividido ahora el rectángulo? ¿Cuántas partes se han sombreado dos veces?

   c. ¿Qué es $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$?

9. Determine si cada producto es positivo o negativo. (*No tiene que encontrar la respuesta.*)

   a. $-\frac{1}{8} \cdot \frac{3}{5}$ **b.** $-\frac{7}{16}\left(-\frac{2}{21}\right)$

   c. $-\frac{4}{5}\left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{8}\right)$ **d.** $-\frac{3}{4}\left(-\frac{8}{9}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$

10. Traduzca cada frase a símbolos. (*No tiene que encontrar la respuesta.*)

    a. $\frac{7}{10}$ de $\frac{4}{9}$ **b.** $\frac{1}{5}$ de 40

11. Complete los espacios: Área de un triángulo = $\frac{1}{2}$(_____)(_____) o A = _____
12. Complete el espacio: El área se mide en unidades _____ como pulg.^{2} y pies^2.

NOTACIÓN

13. Escriba cada uno de los siguientes enteros como una fracción.

    a. 4 **b.** –3

14. Complete los espacios: $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ representa la multiplicación repetitiva $\square \cdot \square$.

Escriba en los espacios para completar cada solución.

15. $$\frac{5}{8} \cdot \frac{7}{15} = \frac{5 \cdot \square}{8 \cdot \square}$$
$$= \frac{5 \cdot 7}{\square \cdot 2 \cdot 2 \cdot \square \cdot 5}$$
$$= \frac{\overset{1}{\cancel{\square}} \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \underset{1}{\cancel{\square}}}$$
$$= \frac{7}{\square}$$

16. $$\frac{7}{12} \cdot \frac{4}{21} = \frac{7 \cdot 4}{\square \cdot \square}$$
$$= \frac{7 \cdot 4}{\square \cdot 4 \cdot 3 \cdot \square}$$
$$= \frac{\overset{1}{\cancel{\square}} \cdot \overset{1}{\cancel{4}}}{3 \cdot \underset{1}{\cancel{4}} \cdot 3 \cdot \underset{1}{\cancel{\square}}}$$
$$= \frac{\square}{9}$$

PRÁCTICA GUIADA

Multiplique. Escriba el producto en la forma más simple. Vea el Ejemplo 1.

17. $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$ 18. $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}$
19. $\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{5}$ 20. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}$

21. $\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{9}$

22. $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7}$

23. $\frac{8}{11} \cdot \frac{3}{7}$

24. $\frac{11}{13} \cdot \frac{2}{3}$

Multiplique. **Vea el Ejemplo 2.**

25. $-\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3}$

26. $-\frac{7}{9} \cdot \frac{1}{4}$

27. $\frac{5}{6}\left(-\frac{7}{12}\right)$

28. $\frac{2}{15}\left(-\frac{4}{3}\right)$

Multiplique. **Vea el Ejemplo 3.**

29. $\frac{1}{8} \cdot 9$

30. $\frac{1}{6} \cdot 11$

31. $\frac{1}{2} \cdot 5$

32. $\frac{1}{2} \cdot 21$

Multiplique. Escriba el producto en la forma más simple. **Vea el Ejemplo 4.**

33. $\frac{11}{10} \cdot \frac{5}{11}$

34. $\frac{5}{4} \cdot \frac{2}{5}$

35. $\frac{6}{49} \cdot \frac{7}{6}$

36. $\frac{13}{4} \cdot \frac{4}{39}$

Multiplique. Escriba el producto en la forma más simple. **Vea el Ejemplo 5.**

37. $\frac{3}{4}\left(-\frac{8}{35}\right)\left(-\frac{7}{12}\right)$

38. $\frac{9}{10}\left(-\frac{4}{15}\right)\left(-\frac{5}{18}\right)$

39. $-\frac{5}{8}\left(\frac{16}{27}\right)\left(-\frac{9}{25}\right)$

40. $-\frac{15}{28}\left(\frac{7}{9}\right)\left(-\frac{18}{35}\right)$

Evalúe cada expresión. **Vea el Ejemplo 6.**

41. **a.** $\left(\frac{3}{5}\right)^2$ **b.** $\left(-\frac{3}{5}\right)^2$

42. **a.** $\left(\frac{4}{9}\right)^2$ **b.** $\left(-\frac{4}{9}\right)^2$

43. **a.** $-\left(-\frac{1}{6}\right)^2$ **b.** $\left(-\frac{1}{6}\right)^3$

44. **a.** $-\left(-\frac{2}{5}\right)^2$ **b.** $\left(-\frac{2}{5}\right)^3$

Encuentre cada producto. Escriba su respuesta en la forma más simple. **Vea el Ejemplo 7.**

45. $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{8}$

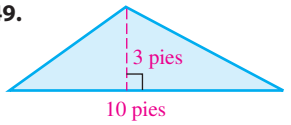
46. $\frac{4}{5}$ de $\frac{3}{7}$

47. $\frac{1}{6}$ de 54

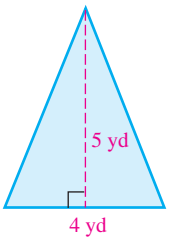
48. $\frac{1}{9}$ de 36

Encuentre el área de cada triángulo. **Vea el Ejemplo 8.**

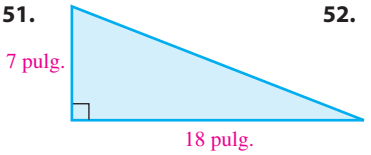
49.



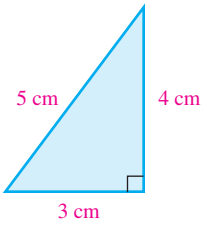
50.



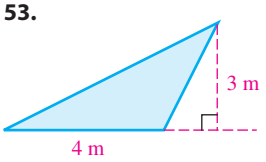
51.



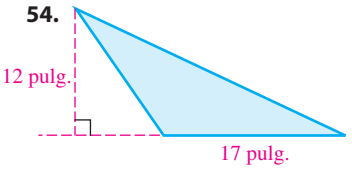
52.



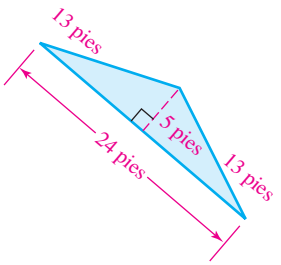
53.



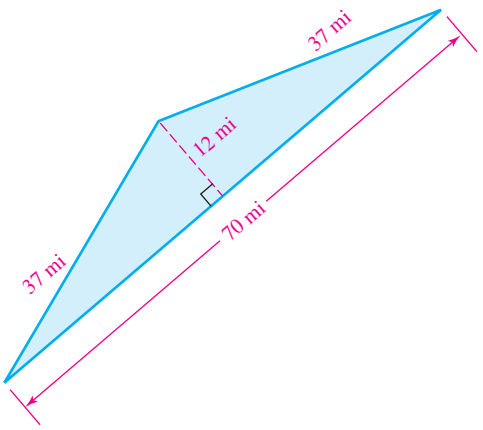
54.



55.



56.



INTÉNTELO

57. Complete la tabla de multiplicaciones de fracciones.

·	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{2}$					
$\frac{1}{3}$					
$\frac{1}{4}$					
$\frac{1}{5}$					
$\frac{1}{6}$					

58. Complete la tabla encontrando la fracción original, dado su cuadrado.

Fracción original al cuadrado	Fracción original
$\frac{1}{9}$	
$\frac{1}{100}$	
$\frac{4}{25}$	
$\frac{16}{49}$	
$\frac{81}{36}$	
$\frac{9}{121}$	

Multiplique. Escriba el producto en la forma más simple.

59. $-\frac{15}{24}\cdot\frac{8}{25}$

60. $-\frac{20}{21}\cdot\frac{7}{16}$

61. $\frac{3}{8}\cdot\frac{7}{16}$

62. $\frac{5}{9}\cdot\frac{2}{7}$

63. $\left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{16}\right)\left(-\frac{4}{5}\right)$

64. $\left(\frac{3}{8}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{12}{27}\right)$

65. $-\frac{5}{6}\cdot 18$

66. $6\left(-\frac{2}{3}\right)$

67. $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$

68. $\left(-\frac{2}{5}\right)^3$

69. $\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}$

70. $\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{4}$

71. $\frac{5}{3}\left(-\frac{6}{15}\right)(-4)$

72. $\frac{5}{6}\left(-\frac{2}{3}\right)(-12)$

73. $-\frac{11}{12}\cdot\frac{18}{55}\cdot 5$

74. $-\frac{24}{5}\cdot\frac{7}{12}\cdot\frac{1}{14}$

75. $\left(-\frac{11}{21}\right)\left(-\frac{14}{33}\right)$

76. $\left(-\frac{16}{35}\right)\left(-\frac{25}{48}\right)$

77. $-\left(-\frac{5}{9}\right)^2$

78. $-\left(-\frac{5}{6}\right)^2$

79. $\frac{7}{10}\left(\frac{20}{21}\right)$

80. $\left(\frac{7}{6}\right)\frac{9}{49}$

81. $\frac{3}{4}\left(\frac{5}{7}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{7}{3}\right)$

82. $-\frac{5}{4}\left(\frac{8}{15}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{7}{2}\right)$

83. $-\frac{14}{15}\left(-\frac{11}{8}\right)$

84. $-\frac{5}{16}\left(-\frac{8}{3}\right)$

85. $\frac{3}{16}\cdot 4\cdot\frac{2}{3}$

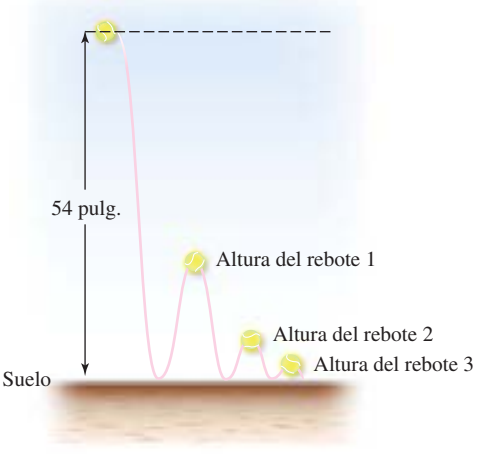
86. $5\cdot\frac{7}{5}\cdot\frac{3}{14}$

APLICACIONES

87. REGLAS DEL SENADO Un *obstruccionismo* es un método que en ocasiones emplean los senadores de E.U. para evitar que pase un proyecto de ley o una convocatoria que consiste en hablar de manera interminable. Se requiere de $\frac{3}{5}$ de aquellos que votan en el Senado para deshacer un obstruccionismo. Si los 100 senadores emiten un voto, ¿cuántos de sus votos se requieren para deshacer un obstruccionismo?

88. GENÉTICA A Gregor Mendel (1822-1884), un monje agustino, se le acredita el desarrollo de un modelo que se convirtió en la base de la genética moderna. En sus experimentos, cruzó plantas con flores púrpuras con plantas con flores blancas y encontró que $\frac{3}{4}$ de las plantas descendientes tenían flores púrpuras y $\frac{1}{4}$ de ellas tenían flores blancas. Refiérase a la ilustración abajo, la cual muestra un grupo de plantas descendientes. De acuerdo con este concepto, cuando las plantas comiencen a florecer, ¿cuántas tendrán flores púrpuras?

89. REBOTE DE PELOTAS Se deja caer una pelota de tenis desde una altura de 54 pulgadas. Cada vez que golpea el suelo, rebota un tercio de la altura anterior a la que cayó. Encuentre las tres alturas de rebote restantes en la ilustración.



90. ELECCIONES Abajo se muestran los resultados finales de la elección para una emisión de bonos de la ciudad.

a. Encuentre el número total de votos emitidos.

b. Encuentre dos tercios del número total de votos emitidos.

c. ¿La emisión de bonos fue aprobada?

EMISIÓN 1
Reporta el 100% de los precintos

Bonos de obligación general para Bomberos-Policías-Paramédicos (Requiere dos tercios de los votos)

Sí	No
125,599	62,801

91. COCINA Use la receta de abajo, junto con el concepto de la multiplicación de fracciones, para encontrar cuánta azúcar y cuánta melaza se necesita para preparar *una docena* de galletas. (*Sugerencia:* esta receta es para *dos decenas* de galletas.)

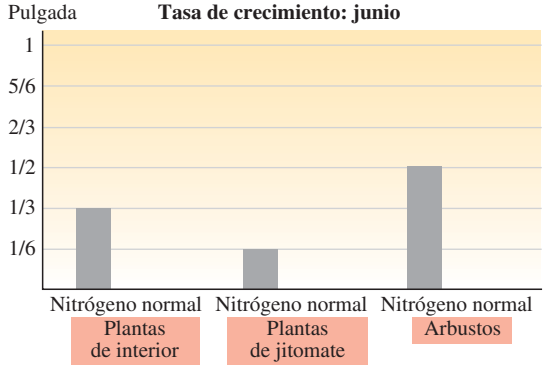
Galletas de jengibre

- $\frac{3}{4}$ taza de azúcar
- 2 tazas de harina
- $\frac{1}{8}$ cucharadita de pimienta de Jamaica
- $\frac{1}{3}$ taza de melaza oscura
- $\frac{1}{2}$ taza de agua
- $\frac{2}{3}$ taza de manteca
- $\frac{1}{4}$ cucharadita de sal
- $\frac{3}{4}$ cucharadita de jengibre

Prepare dos docenas de galletas de jengibre

92. SUPERFICIE TERRESTRE La superficie de la Tierra cubre un área de aproximadamente 196,800,000 millas cuadradas. Alrededor de $\frac{3}{4}$ de esa área está cubierta por agua. Encuentre el número de millas cuadradas de la superficie cubiertas por agua.

93. BOTÁNICA En un experimento se duplicaron las tasas de crecimiento mensual de tres tipos de plantas cuando se añadió nitrógeno a la tierra. Complete la gráfica dibujando la barra de la tasa de crecimiento mejorada al lado de cada barra de la tasa de crecimiento normal.



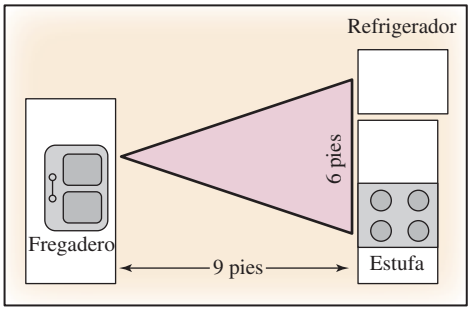
94. ICEBERGS Alrededor de $\frac{9}{10}$ del volumen de un iceberg está debajo de la línea del agua.

a. ¿Qué fracción del volumen de un iceberg está *sobre* la línea del agua?

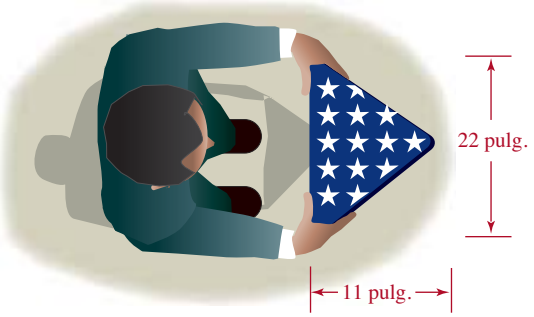
b. Suponga que un iceberg tiene un volumen total de 18,700 metros cúbicos. ¿Cuál es el volumen de la parte del iceberg que está sobre la línea del agua?

© Ralph A. Clevenger/Corbis

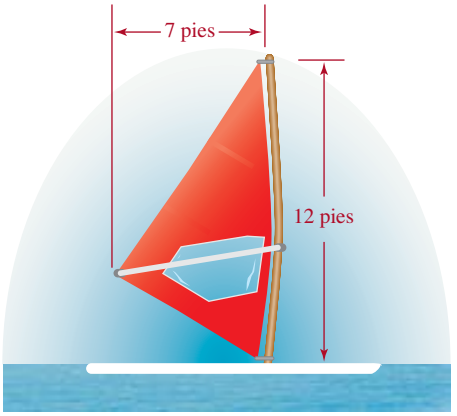
95. DISEÑO DE COCINAS Encuentre el área del *triángulo de trabajo de una cocina* formado por las trayectorias entre el refrigerador, la estufa y el fregadero mostrados abajo.



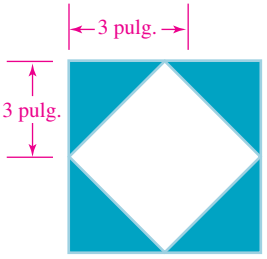
96. BARRAS Y ESTRELLAS La ilustración muestra una bandera doblada de E.U. Cuando se coloca sobre una mesa como parte de una exhibición, ¿cuánta área ocupará?



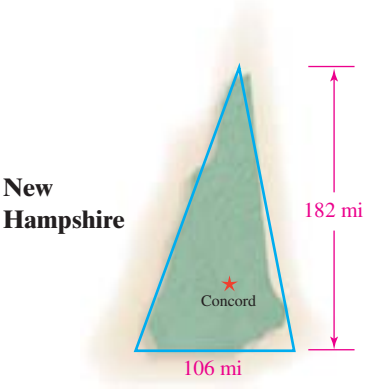
97. SURF VELA Estime el área de la vela en una tabla de surf vela.



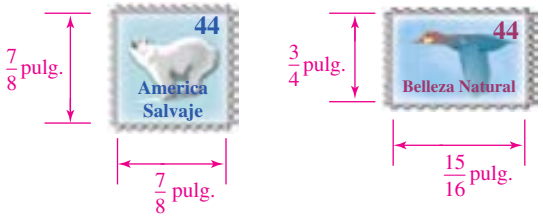
98. DISEÑO DE BALDOSAS Se muestra un diseño para una baldosa para baño. Encuentre la cantidad del área en una baldosa que es azul.



99. GEOGRAFÍA Estime el área del estado de New Hampshire, utilizando el triángulo en la ilustración.



100. ESTAMPILLAS Se muestran los mejores diseños en un concurso para crear una estampilla de la vida salvaje. Para ahorrar en costos de papel, el servicio postal ha decidido elegir la estampilla que tiene la menor área. ¿Cuál escogió el servicio postal? (*Sugerencia:* use la fórmula para el área de un rectángulo.)



101. TORNILLOS DE BANCO Cada vuelta completa de la manija del tornillo de banco mostrado abajo aprieta su carrillera $\frac{1}{16}$ de pulgada. ¿Qué tanto apretará la carrillera del tornillo si la agarradera se gira 12 veces?

102. CARPINTERÍA Cada vez que se pasa una tabla a través de una lijadora, la máquina elimina $\frac{1}{64}$ de una pulgada de grosor. Si se pasa a través de la lija una tabla de pino en bruto en 6 ocasiones, ¿en cuánto cambiará su grosor?

REDACCIÓN

103. En un problema en palabras, cuando una fracción está seguida por la palabra *de,* por lo regular se indica una multiplicación. Dé tres ejemplos en el mundo real de este tipo de uso de la palabra *de.*

104. ¿Puede multiplicarse el número 5 y otro número para obtener una respuesta que sea menor que 5? Explique por qué o por qué no.

105. MAYORÍA La definición de la palabra *mayoría* es la siguiente: "un número mayor que la *mitad del* total". Explique a qué se refiere cuando un profesor dice, "La mayoría de la clase votó por posponer el examen hasta el lunes". Dé un ejemplo.

106. ¿Qué mide el área? Dé un ejemplo.

107. En la siguiente solución, ¿qué paso olvidó realizar el estudiante que ocasionó que tuviera que trabajar con tales números grandes?

Multiplique. Simplifique el producto, si es posible.

$$\frac{44}{63} \cdot \frac{27}{55} = \frac{44 \cdot 27}{63 \cdot 55}$$

$$= \frac{1{,}188}{3{,}465}$$

108. ¿El producto de dos fracciones propias siempre es menor que cualquiera de esas fracciones? Explique por qué o por qué no.

REPASO

Divida y compruebe cada resultado.

109. $\frac{-8}{4}$

110. $21 \div (-3)$

111. $-736 \div (-32)$

112. $\frac{-400}{-25}$

SECCIÓN 3.3
División de fracciones

Objetivos

1. Encontrar el recíproco de una fracción.
2. Dividir fracciones.
3. Resolver problemas de aplicación utilizando la división de fracciones.

Ahora se explicará cómo dividir fracciones. Las habilidades para la multiplicación de fracciones que ha aprendido en la Sección 3.2 también serán de utilidad en esta sección.

1 Encontrar el recíproco de una fracción

La división con fracciones involucra trabajar con *recíprocos*. Para presentar el concepto del recíproco, se considera el problema $\frac{7}{8} \cdot \frac{8}{7}$.

$$\frac{7}{8} \cdot \frac{8}{7} = \frac{7 \cdot 8}{8 \cdot 7}$$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{7}} \cdot \overset{1}{\cancel{8}}}{\underset{1}{\cancel{8}} \cdot \underset{1}{\cancel{7}}}$$ Para simplificar, elimine los factores comunes de 7 y 8 del numerador y el denominador.

$$= \frac{1}{1}$$ Multiplique los factores restantes en el numerador. Multiplique los factores restantes en el denominador.

$$= 1$$ Cualquier número natural dividido entre 1 es igual a ese número.

El producto de $\frac{7}{8}$ y $\frac{8}{7}$ es 1.

Siempre que el producto de dos números es 1, se dice que esos números son *recíprocos*. Por tanto, $\frac{7}{8}$ y $\frac{8}{7}$ son recíprocos. Para encontrar el recíproco de una fracción, *se invierte el numerador y el denominador.*

Recíprocos

A dos números se les llama **recíprocos** si su producto es 1.

¡Cuidado! El cero no tiene recíproco, debido a que el producto del 0 y un número nunca puede ser 1.

EJEMPLO 1 Para cada número, encuentre su recíproco y muestre que su producto es 1: **a.** $\frac{2}{3}$ **b.** $-\frac{3}{4}$ **c.** 5

Estrategia Para encontrar el recíproco, se invertirá el numerador y el denominador.

POR QUÉ Este procedimiento producirá una nueva fracción que, cuando se multiplique por la fracción original, dará un resultado de 1.

Solución

a. **Fracción** **Recíproco**

$\frac{2}{3} \rightarrow \frac{3}{2}$ Invierta

El recíproco de $\frac{2}{3}$ es $\frac{3}{2}$.

Comprobación: $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{3}} \cdot \underset{1}{\cancel{2}}} = 1$

Auto-revisión 1

Para cada número, encuentre su recíproco y muestre que su producto es 1.

a. $\frac{3}{5}$ **b.** $-\frac{5}{6}$ **c.** 8

Ahora intente **Problema 13**

b. Fracción Recíproco

$$-\frac{3}{4} \qquad -\frac{4}{3}$$

Invierta

El recíproco de $-\frac{3}{4}$ es $-\frac{4}{3}$.

Comprobación: $-\frac{3}{4}\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot \overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{4}} \cdot \underset{1}{\cancel{3}}} = 1$

El producto de dos fracciones con signos similares es positivo.

c. Dado que $5 = \frac{5}{1}$, el recíproco de 5 es $\frac{1}{5}$.

Comprobación: $5 \cdot \frac{1}{5} = \frac{5}{1} \cdot \frac{1}{5} = \frac{\overset{1}{\cancel{5}} \cdot 1}{1 \cdot \underset{1}{\cancel{5}}} = 1$

¡Cuidado! No confunda los conceptos del *opuesto* de un número negativo y del *recíproco* de un número negativo. Por ejemplo:

El recíproco de $-\frac{9}{16}$ es $-\frac{16}{9}$.

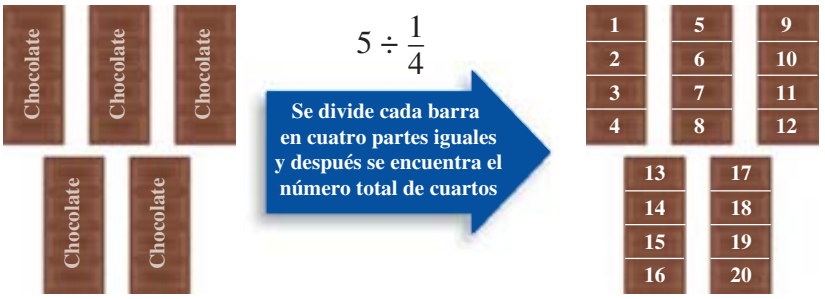
El opuesto de $-\frac{9}{16}$ es $\frac{9}{16}$.

2 Dividir fracciones

Para desarrollar una regla para la división de fracciones, se considera una aplicación en el mundo real.

Suponga que el gerente de una tienda de dulces compra barras grandes de chocolate y las divide en cuatro partes iguales para su venta. ¿Cuántos cuartos pueden obtenerse a partir de 5 barras?

Se está preguntando: "¿Cuántos $\frac{1}{4}$ hay en 5?" Para responder esta pregunta, se necesita utilizar la operación de división. Se puede representar esta división como $5 \div \frac{1}{4}$.



5 barras de chocolate

Número total de cuartos = 5 • 4 = 20

Hay 20 cuartos en 5 barras de chocolate. Pueden hacerse dos observaciones a partir de este resultado.

- Este problema de división involucra una fracción: $5 \div \frac{1}{4}$.
- Aunque se le pidió encontrar $5 \div \frac{1}{4}$, se resolvió el problema utilizando una *multiplicación* en vez de una *división:* $5 \cdot 4 = 20$. Es decir, la división entre $\frac{1}{4}$ (una fracción) es lo mismo que la multiplicación por 4 (su recíproco).

$$5 \div \frac{1}{4} = 5 \cdot 4$$

Estas observaciones sugieren la siguiente regla para la división de dos fracciones.

División de fracciones

Para dividir dos fracciones, multiplique la primera fracción por el recíproco de la segunda fracción. Simplifique el resultado, si es posible.

Por ejemplo, para encontrar $\frac{5}{7} \div \frac{3}{4}$, se multiplica $\frac{5}{7}$ por el recíproco de $\frac{3}{4}$.

Cambie la división a una multiplicación.

$$\frac{5}{7} \div \frac{3}{4} = \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{3}$$

El recíproco de $\frac{3}{4}$ es $\frac{4}{3}$.

$$= \frac{5 \cdot 4}{7 \cdot 3}$$

Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$$= \frac{20}{21}$$

Por tanto, $\frac{5}{7} \div \frac{3}{4} = \frac{20}{21}$. Se dice que el *cociente* de $\frac{5}{7}$ y $\frac{3}{4}$ es $\frac{20}{21}$.

EJEMPLO 2 Divida: $\frac{1}{3} \div \frac{4}{5}$

Estrategia Se multiplicará la primera fracción, $\frac{1}{3}$, por el recíproco de la segunda fracción, $\frac{4}{5}$. Después, si es posible, se simplificará el resultado.

POR QUÉ Esta es la regla para la división de dos fracciones.

Solución

$$\frac{1}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{4}$$

Multiplique $\frac{1}{3}$ por el recíproco de $\frac{4}{5}$, el cual es $\frac{5}{4}$.

$$= \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 4}$$

Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$$= \frac{5}{12}$$

Dado que el 5 y el 12 no tienen factores comunes diferentes de 1, el resultado está en la forma más simple.

Auto-revisión 2

Divida: $\frac{2}{3} \div \frac{7}{8}$

Ahora intente **Problema 17**

EJEMPLO 3 Divida y simplifique: $\frac{9}{16} \div \frac{3}{20}$

Estrategia Se multiplicará la primera fracción, $\frac{9}{16}$, por el recíproco de la segunda fracción, $\frac{3}{20}$. Después, si es posible, se simplificará el resultado.

POR QUÉ Esta es la regla para la división de dos fracciones.

Auto-revisión 3

Divida y simplifique: $\frac{4}{5} \div \frac{8}{25}$

Ahora intente **Problema 21**

Solución

$$\frac{9}{16} \div \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{20}} = \frac{9}{16} \cdot \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{3}}$$ Multiplique $\frac{9}{16}$ por el recíproco de $\frac{3}{20}$, el cual es $\frac{20}{3}$.

$$= \frac{9 \cdot 20}{16 \cdot 3}$$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot 3 \cdot \overset{1}{\cancel{4}} \cdot 5}{\underset{1}{\cancel{4}} \cdot 4 \cdot \underset{1}{\cancel{3}}}$$ Para simplificar, factorice el 9 como $3 \cdot 3$, factorice el 20 como $4 \cdot 5$ y factorice el 16 como $4 \cdot 4$. Después elimine los factores comunes de 3 y 4 del numerador y el denominador.

$$= \frac{15}{4}$$ Multiplique los factores restantes en el numerador: $1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 5 = 15$. Multiplique los factores restantes en el denominador: $1 \cdot 4 \cdot 1 = 4$.

Auto-revisión 4

Divida y simplifique:

$$80 \div \frac{20}{11}$$

Ahora intente **Problema 27**

EJEMPLO 4

Divida y simplifique: $120 \div \frac{10}{7}$

Estrategia Se escribirá el 120 como una fracción y después se multiplicará la primera fracción por el recíproco de la segunda fracción.

POR QUÉ Esta es la regla para la división de dos fracciones.

Solución

$$120 \div \frac{10}{7} = \frac{120}{1} \div \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{7}}$$ Escriba el 120 como una fracción: $120 = \frac{120}{1}$.

$$= \frac{120}{1} \cdot \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{10}}$$ Multiplique $\frac{120}{1}$ por el recíproco de $\frac{10}{7}$, el cual es $\frac{7}{10}$.

$$= \frac{120 \cdot 7}{1 \cdot 10}$$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{10}} \cdot 12 \cdot 7}{1 \cdot \underset{1}{\cancel{10}}}$$ Para simplificar, factorice el 120 como $10 \cdot 12$, después elimine el factor común de 10 del numerador y el denominador.

$$= \frac{84}{1}$$ Multiplique los factores restantes en el numerador: $1 \cdot 12 \cdot 7 = 84$. Multiplique los factores restantes en el denominador: $1 \cdot 1 = 1$.

$$= 84$$ Cualquier número natural dividido entre 1 es el mismo número.

Debido a la relación entre la multiplicación y la división, las reglas de los signos para la *división* de fracciones son las mismas que las de la *multiplicación* de fracciones.

Auto-revisión 5

Divida y simplifique:

$$\frac{2}{3} \div \left(-\frac{7}{6}\right)$$

Ahora intente **Problema 29**

EJEMPLO 5

Divida y simplifique: $\frac{1}{6} \div \left(-\frac{1}{18}\right)$

Estrategia Se multiplicará la primera fracción, $\frac{1}{6}$, por el recíproco de la segunda fracción, $-\frac{1}{18}$. Para determinar el signo del resultado, se utilizará la regla para la multiplicación de dos fracciones que tienen signos diferentes (no similares).

POR QUÉ Una fracción es positiva y una es negativa.

Solución

$$\frac{1}{6} \div \left(-\frac{1}{18}\right) = \frac{1}{6}\left(-\frac{18}{1}\right)$$ Multiplique $\frac{1}{6}$ por el recíproco de $-\frac{1}{18}$, el cual es $-\frac{18}{1}$.

$$= -\frac{1 \cdot 18}{6 \cdot 1}$$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores. Dado que las fracciones tienen signos no similares, haga negativa la respuesta.

$$= -\frac{1 \cdot 3 \cdot \overset{1}{\cancel{6}}}{\underset{1}{\cancel{6}} \cdot 1}$$ Para simplificar, factorice el 18 como $3 \cdot 6$. Después elimine el factor común de 6 del numerador y el denominador.

$$= -\frac{3}{1}$$ Multiplique los factores restantes en el numerador. Multiplique los factores restantes en el denominador.

$$= -3$$

EJEMPLO 6

Divida y simplifique: $-\frac{21}{36} \div (-3)$

Estrategia Se multiplicará la primera fracción, $-\frac{21}{36}$, por el recíproco de -3. Para determinar el signo del resultado, se utilizará la regla para la multiplicación de dos fracciones que tienen signos iguales (similares).

POR QUÉ Ambas fracciones son negativas.

Solución

$$-\frac{21}{36} \div (-3) = -\frac{21}{36}\left(-\frac{1}{3}\right)$$ Multiplique $-\frac{21}{36}$ por el recíproco de -3, el cual es $-\frac{1}{3}$.

$$= \frac{21}{36}\left(\frac{1}{3}\right)$$ Dado que el producto de dos fracciones negativas es positivo, deseche los signos − y continúe.

$$= \frac{21 \cdot 1}{36 \cdot 3}$$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot 7 \cdot 1}{36 \cdot \underset{1}{\cancel{3}}}$$ Para simplificar, factorice el 21 como $3 \cdot 7$. Después elimine el factor común de 3 del numerador y el denominador.

$$= \frac{7}{36}$$ Multiplique los factores restantes en el numerador: $1 \cdot 7 \cdot 1 = 7$. Multiplique los factores restantes en el denominador: $36 \cdot 1 = 36$.

Auto-revisión 6

Divida y simplifique:

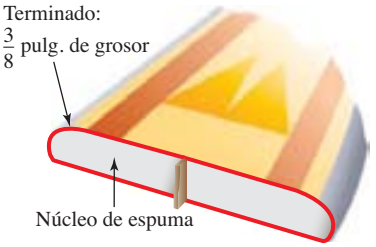
$$-\frac{35}{16} \div (-7)$$

Ahora intente **Problema 33**

3 Resolver problemas de aplicación utilizando la división de fracciones

Los problemas que involucran la formación de grupos de igual tamaño pueden resolverse por medio de una división.

EJEMPLO 7 ***Diseños de tablas de surf*** La mayoría de los tablas de surf están hechas de un núcleo de espuma cubierta con varias capas de fibra de vidrio para mantenerlas impermeables. ¿Cuántas capas se necesitan para conseguir un terminado de $\frac{3}{8}$ de pulgada de grosor si cada capa de fibra de vidrio tiene un grosor de $\frac{1}{16}$ de pulgada?



Auto-revisión 7

COCINA Una receta requiere 4 tazas de azúcar y el único recipiente de medición que tiene mantiene $\frac{1}{3}$ de taza. ¿Cuántas $\frac{1}{3}$ tazas de azúcar necesitaría adicionar para continuar con la receta?

Ahora intente **Problema 77**

Analizar

- La tabla de surf tiene un terminado de fibra de vidrio de $\frac{3}{8}$ de pulgada de grosor. — Proporcionado
- Cada capa de fibra de vidrio es de $\frac{1}{16}$ de pulgada de grosor. — Proporcionado
- ¿Cuántas capas de fibra de vidrio se necesitan aplicar? — A encontrar

Formar Piense en el terminado de $\frac{3}{8}$ de pulgada de grosor como separado en un número desconocido de capas de fibra de vidrio de igual grosor. Esto indica una división.

Se traducen las palabras del problema a números y símbolos.

El número de capas de fibra de vidrio que se necesitan	es igual al	grosor del terminado	dividido entre	el grosor de 1 capa de fibra de vidrio
El número de capas de fibra de vidrio que se necesitan	$=$	$\frac{3}{8}$	$\div$	$\frac{1}{16}$

Resolver Para encontrar el cociente, se utilizará la regla para la división de dos fracciones.

$$\frac{3}{8} \div \frac{1}{16} = \frac{3}{8} \cdot \frac{16}{1}$$ Multiplique $\frac{3}{8}$ por el recíproco de $\frac{1}{16}$, el cual es $\frac{16}{1}$.

$$= \frac{3 \cdot 16}{8 \cdot 1}$$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$$= \frac{3 \cdot 2 \cdot \overset{1}{\cancel{8}}}{\underset{1}{\cancel{8}} \cdot 1}$$ Para simplificar, factorice el 16 como $2 \cdot 8$. después elimine el factor común de 8 del numerador y el denominador.

$$= \frac{6}{1}$$ Multiplique los factores restantes en el numerador. Multiplique los factores restantes en el denominador.

$$= 6$$ Cualquier número natural dividido entre 1 es el mismo número.

Enunciar El número de capas de fibra de vidrio necesarias es 6.

Comprobar Si se utilizan 6 capas de fibra de vidrio, cada una de $\frac{1}{16}$ de pulgada de grosor, el grosor del terminado será de $\frac{6}{16}$ de pulgada. Si se simplifica $\frac{6}{16}$, se observa que es equivalente al grosor del terminado deseado:

$$\frac{6}{16} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot 3}{\underset{1}{\cancel{2}} \cdot 8} = \frac{3}{8}$$

El resultado es correcto.

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. a. $\frac{5}{3}$ **b.** $-\frac{6}{5}$ **c.** $\frac{1}{8}$ **2.** $\frac{16}{21}$ **3.** $\frac{5}{2}$ **4.** 44 **5.** $-\frac{4}{7}$ **6.** $\frac{5}{16}$ **7.** 12

SECCIÓN 3.3 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Complete los espacios.

1. El _____ de $\frac{5}{12}$ es $\frac{12}{5}$.
2. Para encontrar el recíproco de una fracción, _____ el numerador y el denominador.
3. A la respuesta para una división se le llama _____.
4. Para simplificar $\frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}$, se _____ los factores comunes del numerador y el denominador.

CONCEPTOS

5. Complete los espacios.
   a. Para dividir dos fracciones, _____ la primera fracción por el _____ de la segunda fracción.
   b. $\frac{1}{2} \div \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \square \square$

6. **a.** ¿Qué problema de división se ilustra abajo?
   b. ¿Cuál es la respuesta?

7. Determine si cada cociente es positivo o negativo. (*No tiene que encontrar la respuesta.*)
   a. $-\frac{1}{4} \div \frac{3}{4}$ **b.** $-\frac{7}{8} \div \left(-\frac{21}{32}\right)$

8. Complete la tabla.

Número	Opuesto	Recíproco
$\frac{3}{10}$		
$-\frac{7}{11}$		
6		

9. **a.** Multiplique $\frac{4}{5}$ y su recíproco. ¿Cuál es el resultado?
   b. Multiplique $-\frac{3}{5}$ y su recíproco. ¿Cuál es el resultado?

10. **a.** Encuentre: $15 \div 3$
    b. Reescriba $15 \div 3$ como una multiplicación por el recíproco del 3 y encuentre el resultado.
    c. Complete este enunciado: La división entre 3 es lo mismo que la multiplicación por $\square$.

NOTACIÓN

Llene los espacios para completar cada solución.

11. $\frac{4}{9} \div \frac{8}{27} = \frac{4}{9} \cdot \frac{\square}{8}$
$= \frac{4 \cdot \square}{9 \cdot \square}$
$= \frac{4 \cdot 3 \cdot \square}{9 \cdot \square \cdot \square}$
$= \frac{\overset{1}{\cancel{}} \cdot 3 \cdot \overset{1}{\cancel{9}}}{\overset{1}{\cancel{}} \cdot 2 \cdot \overset{1}{\cancel{4}}}$
$= \frac{\square}{2}$

12. $\frac{25}{31} \div 10 = \frac{25}{31} \div \frac{10}{\square}$
$= \frac{25}{31} \cdot \frac{1}{\square}$
$= \frac{25 \cdot \square}{31 \cdot \square}$
$= \frac{5 \cdot \square \cdot 1}{31 \cdot 2 \cdot 5}$
$= \frac{\overset{1}{\cancel{5}} \cdot 5 \cdot 1}{31 \cdot 2 \cdot \overset{1}{\cancel{}}}$
$= \frac{5}{\square}$

PRÁCTICA GUIADA

Encuentre el recíproco de cada número. Vea el Ejemplo 1.

13. **a.** $\frac{6}{7}$ **b.** $-\frac{15}{8}$ **c.** 10
14. **a.** $\frac{2}{9}$ **b.** $-\frac{9}{4}$ **c.** 7
15. **a.** $\frac{11}{8}$ **b.** $-\frac{1}{14}$ **c.** -63
16. **a.** $\frac{13}{2}$ **b.** $-\frac{1}{5}$ **c.** -21

Divida. Simplifique cada cociente, si es posible. Vea el Ejemplo 2.

17. $\frac{1}{8} \div \frac{2}{3}$
18. $\frac{1}{2} \div \frac{8}{9}$
19. $\frac{2}{23} \div \frac{1}{7}$
20. $\frac{4}{21} \div \frac{1}{5}$

Divida. Simplifique cada cociente, si es posible. Vea el Ejemplo 3.

21. $\frac{25}{32} \div \frac{5}{28}$

22. $\frac{4}{25} \div \frac{2}{35}$

23. $\frac{27}{32} \div \frac{9}{8}$

24. $\frac{16}{27} \div \frac{20}{21}$

Divida. Simplifique cada cociente, si es posible. Vea el Ejemplo 4.

25. $50 \div \frac{10}{9}$

26. $60 \div \frac{10}{3}$

27. $150 \div \frac{15}{32}$

28. $170 \div \frac{17}{6}$

Divida. Simplifique cada cociente, si es posible. Vea el Ejemplo 5.

29. $\frac{1}{8} \div \left(-\frac{1}{32}\right)$

30. $\frac{1}{9} \div \left(-\frac{1}{27}\right)$

31. $\frac{2}{5} \div \left(-\frac{4}{35}\right)$

32. $\frac{4}{9} \div \left(-\frac{16}{27}\right)$

Divida. Simplifique cada cociente, si es posible. Vea el Ejemplo 6.

33. $-\frac{28}{55} \div (-7)$

34. $-\frac{32}{45} \div (-8)$

35. $-\frac{33}{23} \div (-11)$

36. $-\frac{21}{31} \div (-7)$

INTÉNTELO

Divida. Simplifique cada cociente, si es posible.

37. $120 \div \frac{12}{5}$

38. $360 \div \frac{36}{5}$

39. $\frac{1}{2} \div \frac{3}{5}$

40. $\frac{1}{7} \div \frac{5}{6}$

41. $\left(-\frac{7}{4}\right) \div \left(-\frac{21}{8}\right)$

42. $\left(-\frac{15}{16}\right) \div \left(-\frac{5}{8}\right)$

43. $\frac{4}{5} \div \frac{4}{5}$

44. $\frac{2}{3} \div \frac{2}{3}$

45. Divida $-\frac{15}{32}$ entre $\frac{3}{4}$

46. Divida $-\frac{7}{10}$ entre $\frac{4}{5}$

47. $3 \div \frac{1}{12}$

48. $9 \div \frac{3}{4}$

49. $-\frac{4}{5} \div (-6)$

50. $-\frac{7}{8} \div (-14)$

51. $\frac{15}{16} \div 180$

52. $\frac{7}{8} \div 210$

53. $-\frac{9}{10} \div \frac{4}{15}$

54. $-\frac{3}{4} \div \frac{3}{2}$

55. $\frac{9}{10} \div \left(-\frac{3}{25}\right)$

56. $\frac{11}{16} \div \left(-\frac{9}{16}\right)$

57. $\frac{3}{16} \div \frac{1}{9}$

58. $\frac{5}{8} \div \frac{2}{9}$

59. $-\frac{1}{8} \div 8$

60. $-\frac{1}{15} \div 15$

Los siguientes problemas involucran multiplicación y división. Desarrolle cada operación. Simplifique el resultado, si es posible.

61. $\frac{7}{6} \cdot \frac{9}{49}$

62. $\frac{7}{10} \cdot \frac{20}{21}$

63. $-\frac{4}{5} \div \left(-\frac{3}{2}\right)$

64. $-\frac{2}{3} \div \left(-\frac{3}{2}\right)$

65. $\frac{13}{16} \div 2$

66. $\frac{7}{8} \div 6$

67. $\left(-\frac{11}{21}\right)\left(-\frac{14}{33}\right)$

68. $\left(-\frac{16}{35}\right)\left(-\frac{25}{48}\right)$

69. $-\frac{15}{32} \div \frac{5}{64}$

70. $-\frac{28}{15} \div \frac{21}{10}$

71. $11 \cdot \frac{1}{6}$

72. $9 \cdot \frac{1}{8}$

73. $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7}$

74. $\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{9}$

75. $\frac{25}{7} \div \left(-\frac{30}{21}\right)$

76. $\frac{39}{25} \div \left(-\frac{13}{10}\right)$

APLICACIONES

77. MUEBLES PARA PATIO Un proceso de producción aplica varias capas de un recubrimiento plástico transparente a muebles para exteriores para ayudar a protegerlos del clima. Si cada capa protectora es de $\frac{3}{32}$ de pulgada de grosor, ¿cuántas aplicaciones se necesitarán para conseguir un terminado transparente de $\frac{3}{8}$ de pulgada?

78. MARATONES Cada vuelta alrededor de la pista de un estadio es de $\frac{1}{4}$ de milla. ¿Cuántas vueltas tendría que completar un corredor para realizar una rutina de 26 millas?

79. COCINA Una receta pide $\frac{3}{4}$ taza de harina y el único recipiente de medición que es de harina $\frac{1}{8}$ de taza. ¿Cuántas $\frac{1}{8}$ tazas de harina necesitaría adicionar para continuar con la receta?

80. LÁSERES Un técnico utiliza un láser para rebanar piezas delgadas de aluminio al extremo de una barra que es de $\frac{7}{8}$ de pulgada de largo. ¿Cuántas rebanadas de $\frac{1}{64}$ de pulgada de ancho pueden cortarse a partir de esta barra? (Asuma que no hay desperdicio en el proceso.)

81. CABLES SUBTERRÁNEOS Refiérase a la ilustración y a la tabla en la siguiente página.

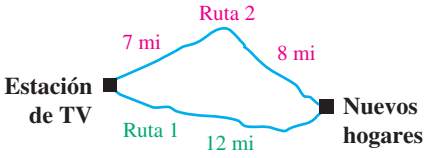
a. ¿Cuántos días se requerirán para instalar un cable de TV subterráneo desde la estación de transmisión a los nuevos hogares utilizando la ruta 1?

b. ¿Qué tan larga es la ruta 2?

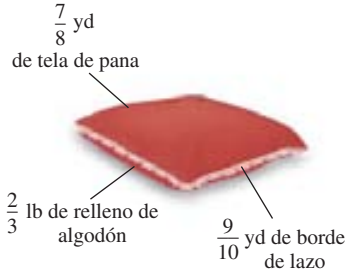
c. ¿Cuántos días se requerirán para instalar el cable utilizando la ruta 2?

d. ¿Cuál ruta requerirá el menor número de días para instalar el cable?

Propuesta	Cantidad de cable instalada por día	Comentarios
Ruta 1	$\frac{2}{5}$ de milla	Suelo muy rocoso
Ruta 2	$\frac{3}{5}$ de milla	Más larga que la Ruta 1



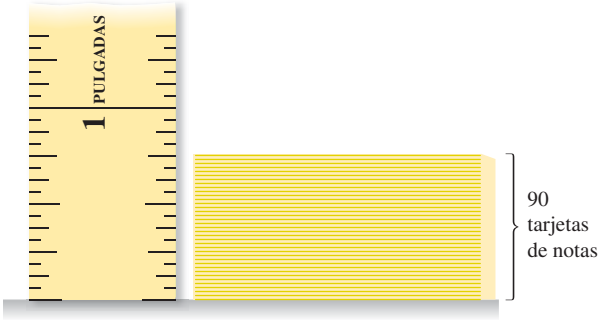
82. PLANEACIÓN DE LA PRODUCCIÓN Se muestran los materiales empleados para fabricar una almohada. Examine la lista de inventario para decidir cuántas almohadas pueden fabricarse en una corrida de producción con los materiales en existencia.



Lista de inventario de la fábrica

Materiales	Cantidad en existencia
Borde de lazo	135 yd
Tela de pana	154 yd
Relleno de algodón	98 lb

83. TARJETAS DE NOTAS Se apilan noventa tarjetas de 3×5 al lado de una regla como se muestra.

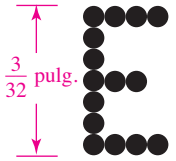


a. ¿En cuántas partes está dividida 1 pulgada en la regla?

b. ¿Cuál es el grosor de la pila de tarjetas?

c. ¿Cuál es el grosor de una tarjeta de 3×5?

84. IMPRESORAS DE COMPUTADORA La ilustración muestra cómo es formada la letra E por una impresora de matriz de puntos. ¿Cuál es la altura de un punto?



85. SILVICULTURA Un conjunto de mapas forestales divide los 6,284 acres de un bosque viejo en secciones de $\frac{4}{5}$ de acre. ¿Cuántas secciones contienen los mapas?

86. FERRETERÍA Una cadena de ferreterías adquiere grandes cantidades de clavos y los empaqueta en bolsas de $\frac{9}{16}$ de libra para su venta. ¿Cuántas de estas bolsas de clavos pueden obtenerse a partir de 2,871 libras de clavos?

REDACCIÓN

87. Explique cómo dividir dos fracciones.

88. ¿Por qué necesita saber cómo multiplicar fracciones para ser capaz de dividir fracciones?

89. Explique por qué el 0 no tiene recíproco.

90. ¿Qué número es su propio recíproco? Explique por qué es así.

91. Escriba un problema de aplicación que pudiera resolverse encontrando $10 \div \frac{1}{5}$.

92. Explique por qué la división de una fracción entre 2 es lo mismo que encontrar $\frac{1}{2}$ de ella. Dé un ejemplo.

REPASO

Complete los espacios.

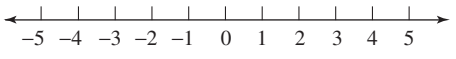
93. El símbolo $<$ significa _____ _____ _____.

94. El enunciado $9 \cdot 8 = 8 \cdot 9$ ilustra la propiedad _____ de la multiplicación.

95. El _____ no es positivo ni negativo.

96. La suma de dos números negativos es _____.

97. Grafique cada uno de estos números en una línea de números: $-2, 0, |-4|$, y el opuesto del 1.



98. Evalúe cada expresión.

a. 3^5 **b.** $(-2)^5$

Objetivos

1. Sumar y restar fracciones que tienen el mismo denominador.
2. Sumar y restar fracciones que tienen denominadores diferentes.
3. Encontrar el mcd para sumar y restar fracciones.
4. Identificar la mayor de dos fracciones.
5. Resolver problemas de aplicación sumando y restando fracciones.

SECCIÓN 3.4
Suma y resta de fracciones

En las matemáticas y la vida diaria, sólo se pueden sumar (o restar) objetos que son similares. Por ejemplo, se pueden sumar dólares a dólares, pero no se pueden sumar dólares a naranjas. Este concepto es importante cuando se suma o resta fracciones.

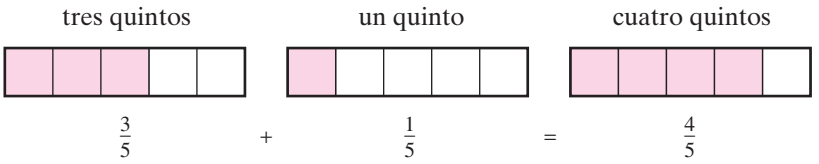
1 Sumar y restar fracciones que tienen el mismo denominador

Considere el problema $\frac{3}{5} + \frac{1}{5}$. Cuando se escribe en palabras, es aparente que se están sumando objetos similares.

tres **quintos** + un **quinto**

Objetos similares

Debido a que los denominadores de $\frac{3}{5}$ y $\frac{1}{5}$ son iguales, se dice que tienen un **denominador común.** Dado que las fracciones tienen un denominador común, se pueden sumar. La siguiente figura explica el proceso de suma.



Se pueden hacer algunas observaciones acerca de la suma mostrada en la figura.

La suma de los numeradores es el numerador de la respuesta.

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

La respuesta es una fracción que tiene el mismo denominador que las dos fracciones que se sumaron.

Estas observaciones ilustran la siguiente regla.

Suma y resta de fracciones que tienen el mismo denominador

Para sumar (o restar) fracciones que tienen el mismo denominador, sume (o reste) sus numeradores y escriba la suma (o diferencia) sobre el denominador común. Simplifique el resultado, si es posible.

¡Cuidado! ¡Las fracciones **no** se suman sumando los numeradores y sumando los denominadores!

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3+1}{5+5} = \frac{4}{10}$$

La misma precaución se aplica cuando se restan fracciones.

EJEMPLO 1

Desarrolle cada operación y simplifique el resultado, si es posible.

a. Sume: $\frac{1}{8}+\frac{5}{8}$ **b.** Reste: $\frac{11}{15}-\frac{4}{15}$

Estrategia Se utilizará la regla para la suma y resta de fracciones que tienen *el mismo* denominador.

POR QUÉ En el inciso a, las fracciones tienen el mismo denominador, 8. En el inciso b, las fracciones tienen el mismo denominador, 15.

Solución

a. $\frac{1}{8}+\frac{5}{8}=\frac{1+5}{8}$ Sume los numeradores y escriba la suma sobre el denominador común 8.

$=\frac{6}{8}$ Esta fracción puede simplificarse.

$=\frac{\overset{1}{\cancel{2}}\cdot 3}{\underset{1}{\cancel{2}}\cdot 4}$ Para simplificar, factorice el 6 como $2\cdot 3$ y el 8 como $2\cdot 4$. Después elimine el factor común de 2 del numerador y el denominador.

$=\frac{3}{4}$ Multiplique los factores restantes en el numerador: $1\cdot 3=3$. Multiplique los factores restantes en el denominador: $1\cdot 4=4$.

b. $\frac{11}{15}-\frac{4}{15}=\frac{11-4}{15}$ Reste los numeradores y escriba la diferencia sobre el denominador común de 15.

$=\frac{7}{15}$

Dado que el 7 y el 15 no tienen factores comunes diferentes del 1, el resultado está en la forma más simple.

Auto-revisión 1

Desarrolle cada operación y simplifique el resultado, si es posible.

a. Sume: $\frac{5}{12}+\frac{1}{12}$

b. Reste: $\frac{8}{9}-\frac{1}{9}$

Ahora intente **Problemas 17 y 21**

La regla para la resta de la Sección 2.3 puede extenderse a la resta que involucra fracciones con signo:

Para restar dos fracciones, sume la primera al opuesto de la fracción a restarse.

EJEMPLO 2

Reste: $-\frac{7}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)$

Estrategia Para encontrar la diferencia, se aplica la regla para la resta.

POR QUÉ Es más fácil cometer un error cuando se restan fracciones con signo. Probablemente será más acertado si se escribe la resta como una suma del opuesto.

Solución

Se lee $-\frac{7}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)$ como "siete tercios negativos *menos* dos tercios negativos". Por tanto, el número a restar es $-\frac{2}{3}$. El restar $-\frac{2}{3}$ es lo mismo que sumar su opuesto, $\frac{2}{3}$.

Sume

$-\frac{7}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{7}{3}+\frac{2}{3}$ Sume el opuesto de $-\frac{2}{3}$, el cual es $\frac{2}{3}$.

el opuesto

$=\frac{-7}{3}+\frac{2}{3}$ Escriba $-\frac{7}{3}$ como $\frac{-7}{3}$.

$=\frac{-7+2}{3}$ Sume los numeradores y escriba la suma sobre el denominador común de 3.

$=\frac{-5}{3}$ Use la regla para la suma de dos enteros que tienen signos diferentes: $-7+2=-5$.

$=-\frac{5}{3}$ Rescriba el resultado con el signo $-$ al frente: $\frac{-5}{3}=-\frac{5}{3}$. Esta fracción está en la forma más simple.

Auto-revisión 2

Reste: $-\frac{9}{11}-\left(-\frac{3}{11}\right)$

Ahora intente **Problema 25**

Auto-revisión 3

Desarrolle las operaciones y simplifique:

$$\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}$$

Ahora intente **Problema 29**

EJEMPLO 3 Desarrolle las operaciones y simplifique: $\frac{18}{25}-\frac{2}{25}-\frac{1}{25}$.

Estrategia Se utilizará la regla para la resta de fracciones que tienen *el mismo* denominador.

POR QUÉ Las tres fracciones tienen el mismo denominador, 25.

Solución

$$\frac{18}{25}-\frac{2}{25}-\frac{1}{25}=\frac{18-2-1}{25}$$

Reste los numeradores y escriba la diferencia sobre el denominador común de 25.

$$=\frac{15}{25}$$

Esta fracción puede simplificarse.

$$=\frac{3\cdot\overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{1}{\cancel{5}}\cdot 5}$$

Para simplificar, factorice el 15 como $3\cdot 5$ y el 25 como $5\cdot 5$. Después elimine el factor común de 5 del numerador y el denominador.

$$=\frac{3}{5}$$

Multiplique los factores restantes en el numerador: $3\cdot 1=3$.
Multiplique los factores restantes en el denominador: $1\cdot 5=5$.

2 Sumar y restar fracciones que tienen denominadores diferentes

Ahora se considere el problema $\frac{3}{5}+\frac{1}{3}$. Dado que los denominadores son diferentes, no se pueden sumar estas fracciones en su forma actual.

tres **quintos** + un **tercio**

No son objetos similares

Para sumar (o restar) fracciones con denominadores diferentes, se expresan como fracciones equivalentes que tienen un denominador común. El denominador común más **pequeño** llamado **mínimo común denominador,** por lo regular es el denominador común más sencillo a utilizar.

Mínimo común denominador

El **mínimo común denominador (mcd)** para un conjunto de fracciones es el número más pequeño que cada denominador dividirá de manera exacta (dividir sin residuo).

Los denominadores de $\frac{3}{5}$ y $\frac{1}{3}$ son el 5 y el 3. Los números 5 y 3 dividen muchos números de manera exacta (30, 45 y 60, por nombrar algunos), pero el número más pequeño que divide de manera exacta es el 15. Por tanto, el 15 es el mcd para $\frac{3}{5}$ y $\frac{1}{3}$.

Para encontrar $\frac{3}{5}+\frac{1}{3}$, se *construyen* fracciones equivalentes que tengan denominadores de 15. (Este procedimiento se introdujo en la Sección 3.1.) Después se utiliza la regla para la suma de fracciones que tienen el mismo denominador.

$$\frac{3}{5}+\frac{1}{3}=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{5}$$

Se necesita multiplicar este denominador por 5 para obtener 15. Se tiene que $\frac{5}{5}$ debe ser la forma de 1 que se utiliza para construir $\frac{1}{3}$.

Se necesita multiplicar este denominador por 3 para obtener 15. Se tiene que $\frac{3}{3}$ debe ser la forma de 1 que se utiliza para construir $\frac{3}{5}$.

$$=\frac{9}{15}+\frac{5}{15}$$

Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores. Observe que los denominadores ahora son iguales.

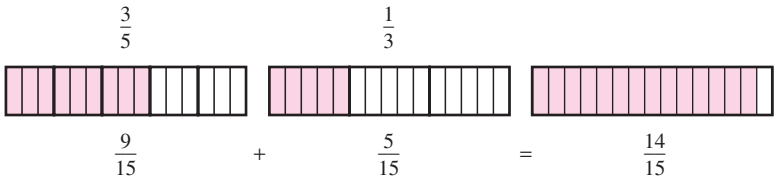
$$=\frac{9+5}{15}$$

Sume los numeradores y escriba la suma sobre el denominador común de 15.

$$=\frac{14}{15}$$

Dado que el 14 y el 15 no tienen factores comunes diferentes del 1, esta fracción está en la forma más simple.

La figura abajo muestra $\frac{3}{5}$ y $\frac{1}{3}$ expresados como fracciones equivalentes con un denominador de 15. Una vez que los denominadores son iguales, las fracciones son objetos similares que pueden sumarse con facilidad.



Se pueden utilizar los siguientes pasos para sumar o restar fracciones con denominadores diferentes.

Suma y resta de fracciones que tienen denominadores diferentes

1. Encuentre el mcd.
2. Rescriba cada fracción como una fracción equivalente con el mcd como el denominador. Para hacer esto, construya cada fracción utilizando una forma de 1 que involucre cualquier factor necesario para obtener el mcd.
3. Sume o reste los numeradores y escriba la suma o diferencia sobre el mcd.
4. Simplifique el resultado, si es posible.

EJEMPLO 4

Sume: $\frac{1}{7} + \frac{2}{3}$.

Estrategia Se expresará cada fracción como una fracción equivalente que tenga el mcd como su denominador. Después se utilizará la regla para la suma de fracciones que tienen el mismo denominador.

POR QUÉ Para sumar (o restar) fracciones, las fracciones deben tener denominadores *similares*.

Solución

Dado que el número más pequeño que los denominadores 7 y 3 dividen de manera exacta es el 21, el mcd es el 21.

$$\frac{1}{7} + \frac{2}{3} = \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{7}$$

Para construir $\frac{1}{7}$ y $\frac{2}{3}$ para que sus denominadores sean 21, multiplique cada uno por una forma de 1.

$$= \frac{3}{21} + \frac{14}{21}$$

Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores. Ahora los denominadores son iguales.

$$= \frac{3 + 14}{21}$$

Sume los numeradores y escriba la suma sobre el denominador común de 21.

$$= \frac{17}{21}$$

Dado que el 17 y el 21 no tienen factores comunes diferentes del 1, esta fracción está en la forma más simple.

Auto-revisión 4

Sume: $\frac{1}{2} + \frac{2}{5}$

Ahora intente **Problema 35**

EJEMPLO 5

Reste: $\frac{5}{2} - \frac{7}{3}$.

Estrategia Se expresará cada fracción como una fracción equivalente que tenga el mcd como su denominador. Después se utilizará la regla para la resta de fracciones que tienen el mismo denominador.

Auto-revisión 5

Reste: $\frac{6}{7} - \frac{3}{5}$

Ahora intente **Problema 37**

POR QUÉ Para sumar (o restar) fracciones, las fracciones deben tener denominadores *similares*.

Solución

Dado que el número más pequeño que los denominadores 2 y 3 dividen de manera exacta es el 6, el mcd es el 6.

$$\frac{5}{2}-\frac{7}{3}=\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{3}-\frac{7}{3}\cdot\frac{2}{2}$$

Para construir $\frac{5}{2}$ y $\frac{7}{3}$ para que sus denominadores sean 6, multiplique cada uno por una forma de 1.

$$=\frac{15}{6}-\frac{14}{6}$$

Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores. Ahora los denominadores son iguales.

$$=\frac{15-14}{6}$$

Reste los numeradores y escriba la diferencia sobre el denominador común de 6.

$$=\frac{1}{6}$$

Esta fracción está en la forma más simple.

Auto-revisión 6

Reste: $\frac{2}{3}-\frac{13}{6}$

Ahora intente **Problema 41**

EJEMPLO 6

Reste: $\frac{2}{5}-\frac{11}{15}$.

Estrategia Dado que el número más pequeño que los denominadores 5 y 15 dividen de manera exacta es el 15, el mcd es el 15. Sólo se necesita construir una fracción equivalente para $\frac{2}{5}$.

POR QUÉ No se tiene que construir la fracción $\frac{11}{15}$ debido a que ya tiene un denominador de 15.

Solución

$$\frac{2}{5}-\frac{11}{15}=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{3}-\frac{11}{15}$$

Para construir $\frac{2}{5}$ y que su denominador sea 15, multiplíquelo por una forma de 1.

$$=\frac{6}{15}-\frac{11}{15}$$

Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores. Ahora los denominadores son iguales.

$$=\frac{6-11}{15}$$

Reste los numeradores y escriba la diferencia sobre el denominador común de 15.

$$=-\frac{5}{15}$$

Si es de utilidad, use la regla para la resta y sume el opuesto en el numerador: $6+(-11)=-5$. Escriba el signo $-$ al frente de la fracción.

$$=-\frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{3\cdot\underset{1}{\cancel{5}}}$$

Para simplificar, factorice el 15 como $3\cdot5$. Después elimine el factor común de 5 del numerador y el denominador.

$$=-\frac{1}{3}$$

Multiplique los factores restantes en el denominador: $3\cdot1=3$.

Consejo útil En el Ejemplo 6 observó que el denominador de 5 es un factor del denominador de 15 y que el mcd es el 15. En general, cuando se suman (o restan) dos fracciones con diferentes denominadores, *si el denominador más pequeño es un factor del denominador más grande, el denominador más grande es el mcd.*

¡Cuidado! Tal vez no sea necesario construir cada fracción cuando se suman o restan fracciones con diferentes denominadores. Por ejemplo, el paso en azul mostrado abajo es innecesario cuando se resuelve el Ejemplo 6.

$$\frac{2}{5}-\frac{11}{15}=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{3}-\frac{11}{15}\cdot\frac{1}{1}$$

EJEMPLO 7 Sume: $-5 + \frac{3}{4}$.

Estrategia Se escribirá el -5 como la fracción $\frac{-5}{1}$. Después se seguirán los pasos para la suma de fracciones que tienen denominadores diferentes.

POR QUÉ Las fracciones $\frac{-5}{1}$ y $\frac{3}{4}$ tienen denominadores diferentes.

Solución

Dado que el número más pequeño que los denominadores 1 y 4 dividen de manera exacta es 4, el mcd es 4.

$$-5 + \frac{3}{4} = \frac{-5}{1} + \frac{3}{4}$$ Escriba el -5 como $\frac{-5}{1}$.

$$= \frac{-5}{1} \cdot \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{4}} + \frac{3}{4}$$ Para construir $\frac{-5}{1}$ y que su denominador sea 4, multiplíquela por una forma de 1.

$$= \frac{-20}{4} + \frac{3}{4}$$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores. Ahora los denominadores son iguales.

$$= \frac{-20 + 3}{4}$$ Sume los numeradores y escriba la suma sobre el denominador común de 4.

$$= \frac{-17}{4}$$ Use la regla para la suma de dos enteros con diferentes signos: $-20 + 3 = -17$.

$$= -\frac{17}{4}$$ Escriba el resultado con el signo $-$ al frente: $\frac{-17}{4} = -\frac{17}{4}$. Esta fracción está en la forma más simple.

Auto-revisión 7

Sume: $-6 + \frac{3}{8}$

Ahora intente **Problema 45**

3 Encontrar el mcd para sumar y restar fracciones

Cuando se suman o restan fracciones que tienen denominadores diferentes, el mínimo común denominador no siempre es obvio. Se puede utilizar el concepto estudiado anteriormente para determinar el mcd para problemas más difíciles que involucran denominadores más grandes. Para ilustrar esto se encontrará el mínimo común denominador de $\frac{3}{8}$ y $\frac{1}{10}$. (Nota, el mcd *no es* el 80.)

Se ha aprendido que el 8 y el 10 deben dividir el mcd de manera exacta. Este requerimiento de divisibilidad debe sonarle familiar. Recuerde el siguiente hecho de la Sección 1.8.

Mínimo común múltiplo (mcm)

El **mínimo común múltiplo (mcm)** de dos números naturales es el número natural más pequeño que es divisible entre esos números.

Por tanto, el mínimo común denominador de $\frac{3}{8}$ y $\frac{1}{10}$ es simplemente el *mínimo común múltiplo* del 8 y el 10.

Se puede encontrar el mcm del 8 y el 10 listando los múltiplos del número más grande, 10, hasta que se encuentre uno que sea divisible entre el número más pequeño, 8. (Este método se explica en el Ejemplo 2 de la Sección 1.8.)

Múltiplos del 10: 10, 20, 30, **40**, 50, 60, . . .

Este es el primer múltiplo del 10 que es divisible entre el 8 (sin residuo).

Dado que el mcm del 8 y el 10 es el 40, se tiene que el mcd de $\frac{3}{8}$ y $\frac{1}{10}$ es el 40.

También se puede encontrar el mcm del 8 y el 10 utilizando la factorización de primos. Se comienza realizando la factorización de primos del 8 y el 10. (Este método se explica en el Ejemplo 4 de la Sección 1.8.)

$8 = (2 \cdot 2 \cdot 2)$

$10 = 2 \cdot (5)$

El mcm del 8 y el 10 es el producto de los factores primos, donde cada factor se utiliza el mayor número de veces que aparece en cualquier factorización.

- Se utilizará el factor de 2 tres veces, debido a que el 2 aparece tres veces en la factorización del 8. Encierre en un círculo $2 \cdot 2 \cdot 2$, como se muestra en la página anterior.
- Se utilizará el factor de 5 una vez, debido a que aparece una vez en la factorización del 10. Encierre en un círculo el 5 como se muestra en la página anterior.

Dado que no hay otros factores primos en cualquiera de las factorizaciones de primos, se tiene

Use el 2 tres veces.
Use el 5 una vez.

$$\text{mcm } (8, 10) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 40$$

Encontrar el mcd

El mínimo común denominador (mcd) de un conjunto de fracciones es el mínimo común múltiplo (mcm) de los denominadores de las fracciones. Las siguientes son dos maneras de encontrar el mcm de los denominadores:

- Escriba los múltiplos del denominador más grande en orden creciente, hasta que se encuentre uno que sea divisible entre los otros denominadores.
- Realice la factorización de primos de cada denominador. El mcm es un producto de los factores primos, donde cada factor se utiliza el mayor número de veces que aparece en cualquier factorización.

Auto-revisión 8

Sume: $\frac{1}{8} + \frac{5}{6}$

Ahora intente **Problema 49**

EJEMPLO 8

Sume: $\frac{7}{15} + \frac{3}{10}$

Estrategia Se comienza expresando cada fracción como una fracción equivalente que tenga al mcd como su denominador. Después se utiliza la regla para la suma de fracciones que tienen el mismo denominador.

POR QUÉ Para sumar (o restar) fracciones, las fracciones deben tener denominadores *similares*.

Solución

Para encontrar el mcd se encuentra la factorización de primos de ambos denominadores y se utiliza cada factor primo el *mayor* número de veces que aparece en cualquier factorización:

$$\left.\begin{aligned} 15 &= \textcircled{3} \cdot \textcircled{5} \\ 10 &= \textcircled{2} \cdot 5 \end{aligned}\right\} \text{mcd} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

El 2 aparece una vez en la factorización del 10.
El 3 aparece una vez en la factorización del 15.
El 5 aparece una vez en la factorización del 15 y el 10.

El mcd para $\frac{7}{15}$ y $\frac{3}{10}$ es 30.

$$\frac{7}{15} + \frac{3}{10} = \frac{7}{15} \cdot \frac{2}{2} + \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{3}$$

Para construir $\frac{7}{15}$ y $\frac{3}{10}$ y que sus denominadores sean 30, multiplique cada una por una forma de 1.

$$= \frac{14}{30} + \frac{9}{30}$$

Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores. Ahora los denominadores son iguales.

$$= \frac{14 + 9}{30}$$

Sume los numeradores y escriba la suma sobre el denominador común de 30.

$$= \frac{23}{30}$$

Dado que el 23 y el 30 no tienen factores comunes diferentes del 1, esta fracción está en la forma más simple.

EJEMPLO 9 Reste y simplifique: $\frac{13}{28} - \frac{1}{21}$.

Estrategia Se comienza expresando cada fracción como una fracción equivalente que tenga al mcd como su denominador. Después se utiliza la regla para la suma de fracciones que tienen el *mismo* denominador.

POR QUÉ Para sumar (o restar) fracciones, las fracciones deben tener denominadores *similares*.

Solución

Para encontrar el mcd, se encuentra la factorización de primos de ambos denominadores y se utiliza cada factor primo el *mayor* número de veces que aparece en cualquier factorización:

$$\left.\begin{aligned} 28 &= (2 \cdot 2) \cdot 7 \\ 21 &= 3 \cdot 7 \end{aligned}\right\} \text{mcd} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$$

El 2 aparece dos veces en la factorización del 28.
El 3 aparece una vez en la factorización del 21.
El 7 aparece una vez en la factorización del 28 y el 21.

El mcd para $\frac{13}{28}$ y $\frac{1}{21}$ es el 84.

Se compararán las factorizaciones de primos del 28 y el 21 y la factorización de primos del mcd, 84, para determinar qué formas de 1 se van a utilizar para construir fracciones equivalentes para $\frac{13}{28}$ y $\frac{1}{21}$ con un denominador de 84.

$\text{mcd} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$

Cubra la factorización de primos del 28. Dado que el 3 se deja sin cubrir, use $\frac{3}{3}$ para construir $\frac{13}{28}$.

$\text{mcd} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$

Cubra la factorización de primos del 21. Dado que el $2 \cdot 2 = 4$ se deja sin cubrir, use $\frac{4}{4}$ para construir $\frac{1}{21}$.

$$\frac{13}{28} - \frac{1}{21} = \frac{13}{28} \cdot \frac{3}{3} - \frac{1}{21} \cdot \frac{4}{4}$$

Para construir $\frac{13}{28}$ y $\frac{1}{21}$ y que sus denominadores sean 84, multiplíquelas por una forma de 1.

$$= \frac{39}{84} - \frac{4}{84}$$

Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores. Ahora los denominadores son iguales.

$$= \frac{39 - 4}{84}$$

Reste los numeradores y escriba la diferencia sobre el denominador común.

$$= \frac{35}{84}$$

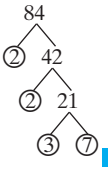
Esta fracción no está en la forma más simple.

$$= \frac{5 \cdot \overset{1}{\cancel{7}}}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \underset{1}{\cancel{7}}}$$

Para simplificar, factorice el 35 y el 84. Después elimine el factor común de 7 del numerador y el denominador.

$$= \frac{5}{12}$$

Multiplique los factores restantes en el numerador: $5 \cdot 1 = 5$. Multiplique los factores restantes en el denominador: $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 = 12$.



Auto-revisión 9

Reste y simplifique: $\frac{21}{56} - \frac{9}{40}$

Ahora intente **Problema 53**

4 Identificar la mayor de dos fracciones

Si dos fracciones tienen el mismo denominador, la fracción con el mayor numerador es la fracción más grande.

Por ejemplo,

$\frac{7}{8} > \frac{3}{8}$ debido a que $7 > 3$ $\qquad -\frac{1}{3} > -\frac{2}{3}$ debido a que $-1 > -2$

Si los denominadores de las dos fracciones son diferentes, se necesita escribir las fracciones con un denominador común (de preferencia el mcd) antes de que se pueda hacer una comparación.

Auto-revisión 10

¿Cuál fracción es mayor?:

$\frac{7}{12}$ ó $\frac{3}{5}$

Ahora intente **Problema 61**

EJEMPLO 10

¿Cuál fracción es mayor: $\frac{5}{6}$ o $\frac{7}{8}$?

Estrategia Se expresará cada fracción como una fracción equivalente que tenga al mcd como su denominador. Después se compararán sus numeradores.

POR QUÉ No se pueden comparar las fracciones como se proporcionan. No son objetos similares.

cinco **sextos** siete **octavos**

Solución

Dado que el número más pequeño que los denominadores dividirán de manera exacta es el 24, el mcd para $\frac{5}{6}$ y $\frac{7}{8}$ es el 24.

$$\frac{5}{6} = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{4} = \frac{20}{24} \qquad \frac{7}{8} = \frac{7}{8} \cdot \frac{3}{3} = \frac{21}{24}$$

Para construir $\frac{5}{6}$ y $\frac{7}{8}$ y que sus denominadores sean 24, multiplíquelas por una forma de 1.

Multiplique los numeradores.
Multiplique los denominadores.

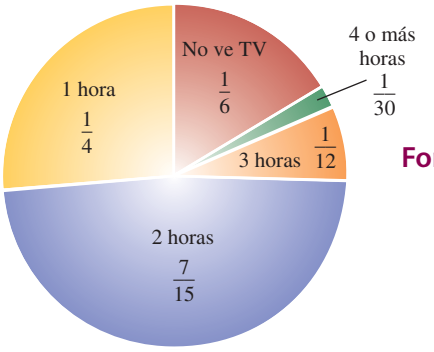
Después, se comparan los numeradores. Dado que $21 > 20$, se tiene que $\frac{21}{24}$ es mayor que $\frac{20}{24}$. Por tanto, $\frac{7}{8} > \frac{5}{6}$.

5 Resolver problemas de aplicación sumando y restando fracciones

Auto-revisión 11

Refiérase a la gráfica circular para el Ejemplo 11. Encuentre la fracción del grupo estudiantil que ve la televisión 2 o más horas diarias.

Ahora intente **Problemas 65 y 109**



EJEMPLO 11 *Hábitos de la audiencia televisiva*

A los estudiantes en un campus universitario se les pide que estimen de acuerdo con cuánta televisión ven cada día. Los resultados se proporcionan en la **gráfica circular** (también llamada **gráfica de pastel**) de abajo. Por ejemplo, la gráfica indica que $\frac{1}{4}$ de ellos responde que ven 1 hora por día. ¿Qué fracción del grupo estudiantil ve de 0 a 2 horas diarias de TV?

Analizar

- $\frac{1}{6}$ del grupo estudiantil no ve TV. — Proporcionado
- $\frac{1}{4}$ del grupo estudiantil ve 1 hora diaria de TV. — Proporcionado
- $\frac{7}{15}$ del grupo estudiantil ve 2 horas diarias de TV. — Proporcionado
- ¿Qué fracción del cuerpo estudiantil ve de 0 a 2 horas diarias de TV? — A encontrar

Formar Se traducen las palabras del problema a números y símbolos.

La fracción del grupo estudiantil que ve de 0 a 2 horas diarias de TV	es igual a	la fracción que no ve la TV	más	la fracción que ve 1 hora diaria de TV	más	la fracción que ve 2 horas diarias de TV

La fracción del grupo estudiantil que ve de 0 a 2 horas diarias de TV	=	$\frac{1}{6}$	+	$\frac{1}{4}$	+	$\frac{7}{15}$

Resolver Se debe encontrar la suma de las tres fracciones con diferentes denominadores. Para encontrar el mcd, se realiza la factorización de primos de los denominadores y se utiliza cada factor primo el *mayor* número de veces que aparece en cualquier factorización:

$$\left.\begin{aligned} 6 &= 2 \cdot 3 \\ 4 &= 2 \cdot 2 \\ 15 &= 3 \cdot 5 \end{aligned}\right\} \text{mcd} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

El 2 aparece dos veces en la factorización del 4.
El 3 aparece una vez en la factorización del 6 y el 15.
El 5 aparece una vez en la factorización del 15.

El mcd para $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{7}{15}$ es 60.

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{7}{15} = \frac{1}{6} \cdot \frac{10}{10} + \frac{1}{4} \cdot \frac{15}{15} + \frac{7}{15} \cdot \frac{4}{4}$$

Construya cada fracción para que su denominador sea de 60.

$$= \frac{10}{60} + \frac{15}{60} + \frac{28}{60}$$

Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores. Ahora los denominadores son iguales.

$$= \frac{10 + 15 + 28}{60}$$

Sume los numeradores y escriba la suma sobre el denominador común de 60.

$$= \frac{53}{60}$$

Esta fracción está en la forma más simple.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1}\,10 \\ 15 \\ +\ 28 \\ \hline 53 \end{array}$$

Enunciar La fracción del cuerpo estudiantil que ve de 0 a 2 horas diarias la TV es $\frac{53}{60}$.

Comprobar Se puede comprobar por medio de una estimación. El resultado, $\frac{53}{60}$, es aproximadamente $\frac{50}{60}$, la cual se simplifica a $\frac{5}{6}$. Las áreas sombreadas roja, amarilla y azul parecen sombrear alrededor del $\frac{5}{6}$ de la gráfica circular. El resultado parece razonable.

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

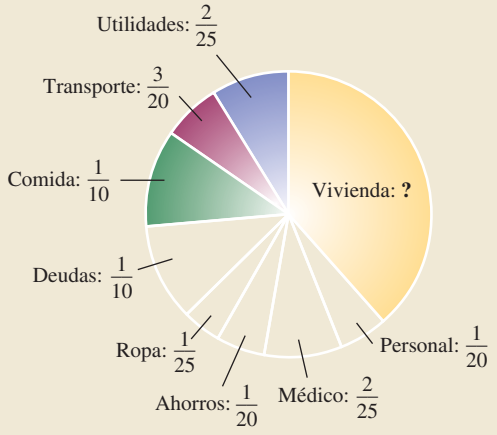
1. a. $\frac{1}{2}$ **b.** $\frac{7}{9}$ **2.** $-\frac{6}{11}$ **3.** $\frac{2}{3}$ **4.** $\frac{9}{10}$ **5.** $\frac{9}{35}$ **6.** $-\frac{3}{2}$ **7.** $-\frac{45}{8}$ **8.** $\frac{23}{24}$ **9.** $\frac{3}{20}$ **10.** $\frac{3}{5}$ **11.** $\frac{7}{12}$

PIENSE DETENIDAMENTE *Presupuestos*

"El elaborar un presupuesto es crucial si no desea meterse en serios problemas. También está desarrollando un hábito que puede servirle bien a lo largo de su vida".

Liz Pulliam Weston, MSN Money

La gráfica circular abajo muestra un presupuesto sugerido para los graduados universitarios tal como lo recomienda Springboard, un servicio de consejo de crédito para los consumidores sin fines de lucro. ¿Qué fracción del salario neto debe gastarse en la vivienda?



SECCIÓN 3.4 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Complete los espacios.

1. Debido a que los denominadores de $\frac{3}{8}$ y $\frac{7}{8}$ son el mismo número, se dice que tienen un denominador _____.

2. El _____ común denominador para un conjunto de fracciones es el número más pequeño que cada denominador puede dividir de manera exacta (sin residuo).

3. Considere la solución abajo. Para _____ una fracción equivalente con un denominador de 18, se multiplica $\frac{4}{9}$ por 1 en la forma de ☐.

$$\frac{4}{9} = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{2}$$
$$= \frac{8}{18}$$

4. Considere la solución abajo. Para _____ la fracción $\frac{15}{27}$, se factoriza el 15 y el 27 y después se elimina el factor común de 3 de los _____ y los _____.

$$\frac{15}{27} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot 5}{\underset{1}{\cancel{3}} \cdot 3 \cdot 3}$$
$$= \frac{5}{9}$$

CONCEPTOS

Complete los espacios.

5. Para sumar (o restar) fracciones que tienen el mismo denominador, sume (o reste) sus _____ y escriba la suma (o diferencia) sobre el denominador _____. _____ el resultado, si es posible.

6. Para sumar (o restar) fracciones que tienen denominadores diferentes, se expresa cada fracción como una fracción equivalente que tenga al _____ como su denominador. Después se utiliza la regla para la suma (resta) de fracciones que tienen el _____ denominador.

7. Cuando se suma (o resta) dos fracciones con denominadores diferentes, si el denominador más pequeño es un factor del denominador más grande, el denominador _____ es el mcd.

8. Escriba la resta como una adición del opuesto:

$$-\frac{1}{8} - \left(-\frac{5}{8}\right) = \square \square \square$$

9. Considere $\frac{3}{4}$. ¿Por qué forma de 1 se debe multiplicar el numerador y el denominador para expresarla como una fracción equivalente con un denominador de 36?

10. Se proporcionan los *denominadores* de dos fracciones. Encuentre el mínimo común denominador.

a. 2 y 3 **b.** 3 y 5

c. 4 y 8 **d.** 6 y 36

11. Considere las siguientes factorizaciones de primos:

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$
$$90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

Para cualquier factorización, ¿cuál es el mayor número de veces que

a. aparece un 5?

b. aparece un 3?

c. aparece un 2?

12. Los *denominadores* de dos fracciones tienen las formas de factorización de primos mostradas abajo. Complete los espacios para encontrar el mcd para las fracciones.

$$\left.\begin{aligned} 20 &= 2 \cdot 2 \cdot 5 \\ 30 &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \end{aligned}\right\} \text{mcd} = \square \cdot \square \cdot \square \cdot \square = \square$$

13. Los *denominadores* de tres fracciones tienen las formas de factorización de primos mostradas abajo. Complete los espacios para encontrar el mcd para las fracciones.

$$\left.\begin{aligned} 20 &= 2 \cdot 2 \cdot 5 \\ 30 &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 90 &= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \end{aligned}\right\} \text{mcd} = \square \cdot \square \cdot \square \cdot \square \cdot \square = \square$$

14. Coloque un símbolo $>$ o $<$ en el espacio para formar un enunciado verdadero.

a. $\frac{32}{35} \square \frac{31}{35}$

b. $-\frac{13}{17} \square -\frac{11}{17}$

NOTACIÓN

Llene los espacios para completar cada solución.

15. $\frac{2}{5}+\frac{1}{7}=\frac{2}{5}\cdot\frac{\square}{\square}+\frac{1}{7}\cdot\frac{5}{5}$

$=\frac{\square}{35}+\frac{5}{\square}$

$=\frac{\square+\square}{35}$

$=\frac{\square}{35}$

16. $\frac{7}{8}-\frac{2}{3}=\frac{7}{8}\cdot\frac{3}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{\square}{\square}$

$=\frac{21}{\square}-\frac{16}{\square}$

$=\frac{21-16}{\square}$

$=\frac{\square}{24}$

PRÁCTICA GUIADA

Desarrolle cada operación y simplifique, si es posible. Vea el Ejemplo 1.

17. $\frac{4}{9}+\frac{1}{9}$

18. $\frac{3}{7}+\frac{1}{7}$

19. $\frac{3}{8}+\frac{1}{8}$

20. $\frac{7}{12}+\frac{1}{12}$

21. $\frac{11}{15}-\frac{7}{15}$

22. $\frac{10}{21}-\frac{5}{21}$

23. $\frac{11}{20}-\frac{3}{20}$

24. $\frac{7}{18}-\frac{5}{18}$

Reste y simplifique, si es posible. Vea el Ejemplo 2.

25. $-\frac{11}{5}-\left(-\frac{8}{5}\right)$

26. $-\frac{15}{9}-\left(-\frac{11}{9}\right)$

27. $-\frac{7}{21}-\left(-\frac{2}{21}\right)$

28. $-\frac{21}{25}-\left(-\frac{9}{25}\right)$

Desarrolle las operaciones y simplifique, si es posible. Vea el Ejemplo 3.

29. $\frac{19}{40}-\frac{3}{40}-\frac{1}{40}$

30. $\frac{11}{24}-\frac{1}{24}-\frac{7}{24}$

31. $\frac{13}{33}+\frac{1}{33}+\frac{7}{33}$

32. $\frac{21}{50}+\frac{1}{50}+\frac{13}{50}$

Sume y simplifique, si es posible. Vea el Ejemplo 4.

33. $\frac{1}{3}+\frac{1}{7}$

34. $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$

35. $\frac{2}{5}+\frac{1}{2}$

36. $\frac{2}{7}+\frac{1}{2}$

Reste y simplifique, si es posible. Vea el Ejemplo 5.

37. $\frac{4}{5}-\frac{3}{4}$

38. $\frac{2}{3}-\frac{3}{5}$

39. $\frac{3}{4}-\frac{2}{7}$

40. $\frac{6}{7}-\frac{2}{3}$

Reste y simplifique, si es posible. Vea el Ejemplo 6.

41. $\frac{11}{12}-\frac{2}{3}$

42. $\frac{11}{18}-\frac{1}{6}$

43. $\frac{9}{14}-\frac{1}{7}$

44. $\frac{13}{15}-\frac{2}{3}$

Sume y simplifique, si es posible. Vea el Ejemplo 7.

45. $-2+\frac{5}{9}$

46. $-3+\frac{5}{8}$

47. $-3+\frac{9}{4}$

48. $-1+\frac{7}{10}$

Sume y simplifique, si es posible. Vea el Ejemplo 8.

49. $\frac{1}{6}+\frac{5}{8}$

50. $\frac{7}{12}+\frac{3}{8}$

51. $\frac{4}{9}+\frac{5}{12}$

52. $\frac{1}{9}+\frac{5}{6}$

Reste y simplifique, si es posible. Vea el Ejemplo 9.

53. $\frac{9}{10}-\frac{3}{14}$

54. $\frac{11}{12}-\frac{11}{30}$

55. $\frac{11}{12}-\frac{7}{15}$

56. $\frac{7}{15}-\frac{5}{12}$

Determine cuál fracción es mayor. Vea el Ejemplo 10.

57. $\frac{3}{8}$ o $\frac{5}{16}$

58. $\frac{5}{6}$ o $\frac{7}{12}$

59. $\frac{4}{5}$ o $\frac{2}{3}$

60. $\frac{7}{9}$ o $\frac{4}{5}$

61. $\frac{7}{9}$ o $\frac{11}{12}$

62. $\frac{3}{8}$ o $\frac{5}{12}$

63. $\frac{23}{20}$ o $\frac{7}{6}$

64. $\frac{19}{15}$ o $\frac{5}{4}$

Sume y simplifique, si es posible. Vea el Ejemplo 11.

65. $\frac{1}{6}+\frac{5}{18}+\frac{2}{9}$

66. $\frac{1}{10}+\frac{1}{8}+\frac{1}{5}$

67. $\frac{4}{15}+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}$

68. $\frac{1}{2}+\frac{3}{5}+\frac{3}{20}$

INTÉNTELO

Desarrolle cada operación.

69. $-\frac{1}{12}-\left(-\frac{5}{12}\right)$

70. $-\frac{1}{16}-\left(-\frac{15}{16}\right)$

71. $\frac{4}{5}+\frac{2}{3}$

72. $\frac{1}{4}+\frac{2}{3}$

73. $\frac{12}{25}-\frac{1}{25}-\frac{1}{25}$

74. $\frac{7}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}$

75. $-\frac{7}{20}-\frac{1}{5}$

76. $-\frac{5}{8}-\frac{1}{3}$

77. $-\frac{7}{16}+\frac{1}{4}$

78. $-\frac{17}{20}+\frac{4}{5}$

79. $\frac{11}{12}-\frac{2}{3}$

80. $\frac{2}{3}-\frac{1}{6}$

81. $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}$

82. $\frac{3}{4}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}$

83. $\frac{9}{20}-\frac{1}{30}$

84. $\frac{5}{6}-\frac{3}{10}$

85. $\frac{27}{50}+\frac{5}{16}$

86. $\frac{49}{50}-\frac{15}{16}$

87. $\frac{13}{20}-\frac{1}{5}$

88. $\frac{71}{100}-\frac{1}{10}$

89. $\frac{37}{103}-\frac{17}{103}$

90. $\frac{54}{53}-\frac{52}{53}$

91. $-\frac{3}{4}-5$

92. $-2-\frac{7}{8}$

93. $\frac{4}{27}+\frac{1}{6}$

94. $\frac{8}{9}-\frac{7}{12}$

95. $\frac{7}{30}-\frac{19}{75}$

96. $\frac{73}{75}-\frac{31}{30}$

97. Encuentre la diferencia de $\frac{11}{60}$ y $\frac{2}{45}$.

98. Encuentre la suma de $\frac{9}{48}$ y $\frac{7}{40}$.

99. Reste $\frac{5}{12}$ de $\frac{2}{15}$.

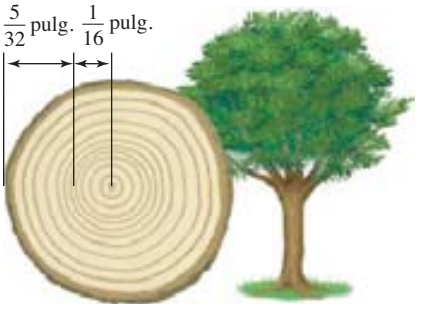
100. ¿Cuál es la suma de $\frac{11}{24}$ y $\frac{7}{36}$ incrementada en $\frac{5}{48}$?

APLICACIONES

101. BOTÁNICA Para determinar los efectos del humo sobre el desarrollo de los árboles, un científico cortó un árbol de pino y midió el ancho de los anillos de crecimiento para los últimos dos años.

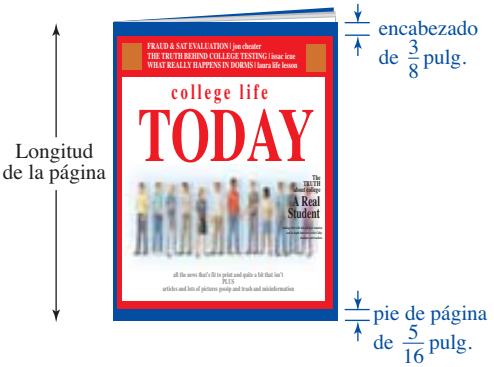
a. ¿Cuál fue el crecimiento en este periodo de dos años?

b. ¿Cuál es la diferencia en los anchos de los dos anillos?



102. ABRIDORES DE PUERTAS DE COCHERA ¿Cuál es la diferencia en potencia entre un abridor de puertas de cochera de $\frac{1}{3}$ hp y otro de $\frac{1}{2}$ hp?

103. PORTADAS DE REVISTAS El diseño de página para la portada de la revista mostrada abajo incluye un espacio vacío en la parte superior, llamado *encabezado*, y un espacio vacío en la parte inferior de la página, llamado *pie de página*. ¿Cuánto de la longitud de la página se pierde debido al encabezado y al pie de página?



104. CAMIONES REPARTIDORES Un camión puede transportar de manera segura una carga de una tonelada. ¿Debe utilizarse para enviar media tonelada de arena, un tercio de tonelada de grava y un quinto de tonelada de cemento en un viaje al sitio de trabajo?

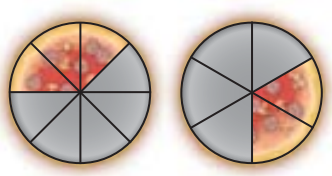
105. CENAS Una familia compró dos pizzas grandes para la cena. Algunas piezas de cada pizza no se comieron, como se muestra.

a. ¿Qué fracción de la primera pizza no se comió?

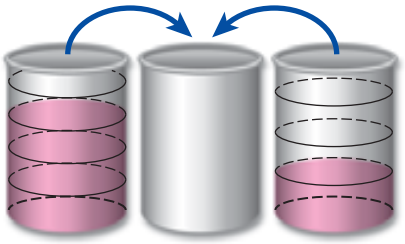
b. ¿Qué fracción de la segunda pizza no se comió?

c. ¿Qué fracción de una pizza se dejó?

d. ¿Pudo la familia haberse alimentado con una sola pizza?

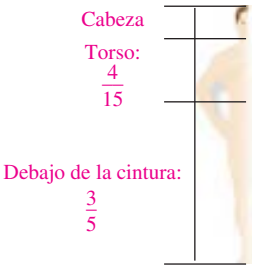


106. BARRILES DE GASOLINA Abajo se muestran tres barriles de tamaño idéntico. Si el contenido de dos de los barriles se vierte en el tercer barril vacío, ¿qué fracción del tercer barril se llenará?



107. PESOS Y MEDIDAS Una agencia de protección al consumidor determina la precisión de las básculas de carnicerías colocando un peso conocido de tres cuartos de libra sobre la báscula y después compara lo que aparece en la lectura de la báscula. De acuerdo con la ilustración, ¿por cuánto está mal calibrada la báscula? ¿Resulta en un cobro menor o mayor para los consumidores en sus compras de carne?

108. TRAZADO DE FIGURAS Como una ayuda al dibujar el cuerpo humano, los artistas dividen el cuerpo en tres partes. Cada parte se expresa como una fracción de la altura total del cuerpo. Por ejemplo, el torso es $\frac{4}{15}$ de la altura del cuerpo. ¿Qué fracción de la altura del cuerpo es la cabeza?

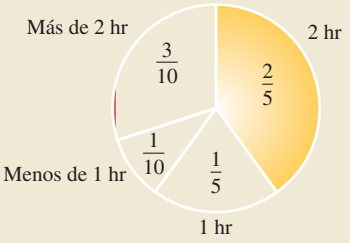


109. Suponga que trabaja como un orientador vocacional en una universidad comunitaria y su departamento ha conducido una encuesta de los estudiantes de tiempo completo para aprender más acerca de sus hábitos de estudio. Como parte de una presentación en PowerPoint de los resultados de la encuesta para la junta escolar, muestra la siguiente gráfica circular. En ese momento, se le pregunta, "¿Qué fracción de los estudiantes de tiempo completo estudian 2 o más horas diarias?" ¿Qué respondería?

Carreras del campus

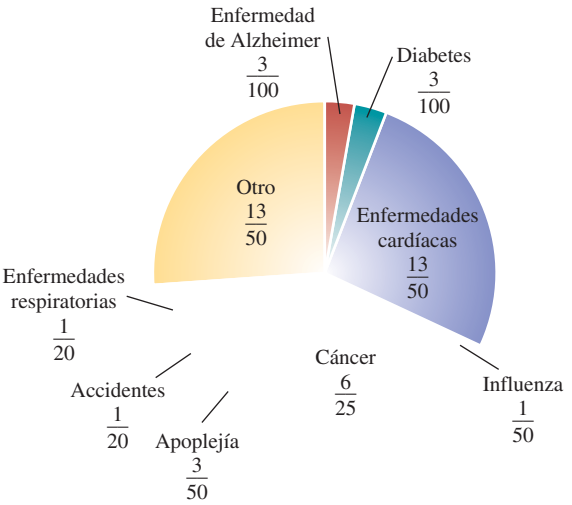
Orientador vocacional

iStockphoto.com/Monkeybusinessimages



110. ESTADÍSTICAS MÉDICAS La gráfica circular en la página siguiente muestra las causas principales de defunción en Estados Unidos para el año 2006. Por ejemplo, $\frac{13}{50}$ del total de las defunciones ese año fueron ocasionadas por enfermedades cardíacas. ¿Qué fracción del total de defunciones fueron ocasionadas por las

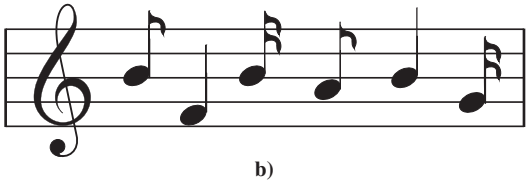
enfermedades cardíacas, cáncer o apoplejía combinados?



Fuente: Centro Nacional de Estadísticas de la Salud

111. NOTAS MUSICALES Las notas empleadas en la música tienen valores fraccionales. En la ilustración a) se muestran sus nombres y los símbolos utilizados para representarlas. En tiempo ordinario, los valores de las notas en cada compás deben sumar 1. ¿El compás en la ilustración b) está completo?

a)



b)

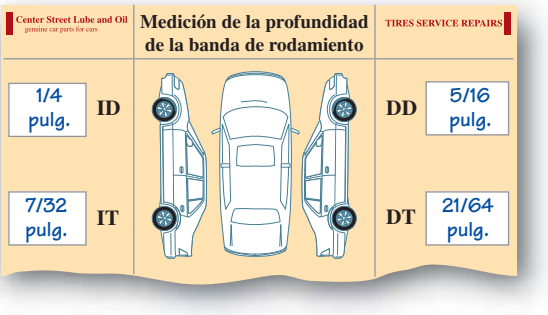
112. HERRAMIENTAS Un mecánico desea colgar sus llaves inglesas sobre su banco de herramientas en orden de la más estrecha a la más ancha. ¿Cuál es el orden apropiado de las llaves inglesas en la ilustración?

$\frac{1}{4}$ pulg. $\frac{3}{8}$ pulg. $\frac{3}{16}$ pulg. $\frac{5}{32}$ pulg.

113. BANDA DE RODAMIENTO Un mecánico midió la profundidad de la banda de rodamiento de cada uno de los neumáticos de un automóvil y las registró en la forma mostrada abajo. (ID: *izquierda delantera*; DT: *derecha trasera*; IT: izquierda trasera; DD: derecha delantera.)

a. ¿Cuál neumático tiene la mayor banda de rodamiento?

b. ¿Cuál neumático tiene la menor banda de rodamiento?



114. EXCURSIONISMO La ilustración abajo muestra la longitud de cada parte de una excursión en tres partes. Clasifique las longitudes de las partes de la más larga a la más corta.

REDACCIÓN

115. Explique por qué no se pueden sumar o restar las fracciones $\frac{2}{9}$ y $\frac{2}{5}$ como están escritas.

116. Para multiplicar fracciones, ¿deben tener el mismo denominador? Explique por qué o por qué no. Dé un ejemplo.

REPASO

Desarrolle cada operación y simplifique, si es posible.

117. **a.** $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ **b.** $\frac{1}{4}-\frac{1}{8}$ **c.** $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}$ **d.** $\frac{1}{4}\div\frac{1}{8}$

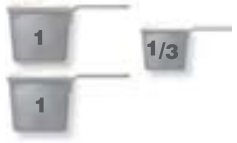
118. **a.** $\frac{5}{21}+\frac{3}{14}$ **b.** $\frac{5}{21}-\frac{3}{14}$ **c.** $\frac{5}{21}\cdot\frac{3}{14}$ **d.** $\frac{5}{21}\div\frac{3}{14}$

SECCIÓN 3.5
Multiplicación y división de números mixtos

Objetivos

1. Identificar las partes de número natural y fraccional de un número mixto.
2. Escribir números mixtos como fracciones impropias.
3. Escribir fracciones impropias como números mixtos.
4. Graficar fracciones y números mixtos en una recta numérica.
5. Multiplicar y dividir números mixtos.
6. Resolver problemas de aplicación multiplicando y dividiendo números mixtos.

En las siguientes dos secciones se muestra cómo sumar, restar, multiplicar y dividir *números mixtos*. Estos números se utilizan de manera amplia en la vida diaria.



La receta solicita $2\frac{1}{3}$ tazas de harina.
(Se lee como "dos y un tercio".)

Se requiere $3\frac{3}{4}$ horas para pintar la estancia.
(Se lee como "tres y tres cuartos".)

La entrada al parque está a $1\frac{1}{2}$ millas.
(Se lee como "uno y un medio".)

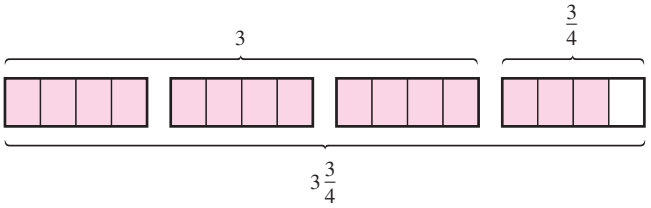
1 Identificar las partes de número natural y fraccional de un número mixto

Un **número mixto** es la *suma* de un número natural y una fracción propia. Por ejemplo, $3\frac{3}{4}$ es un número mixto.

$$3\frac{3}{4} = 3 + \frac{3}{4}$$

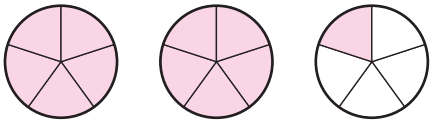
Número mixto — Parte de número natural — Parte fraccional

Los números mixtos pueden representarse sombreando regiones. En la ilustración de abajo, cada región rectangular delineada en negro representa un entero. Para representar $3\frac{3}{4}$ se deben sombrear 3 regiones rectangulares *enteras* y 3 de las 4 *partes* de otra.



¡Cuidado! Observe que $3\frac{3}{4}$ significa $3 + \frac{3}{4}$, aun cuando el símbolo + no está escrito. No confunda $3\frac{3}{4}$ con $3 \cdot \frac{3}{4}$ ó $3\left(\frac{3}{4}\right)$, los cuales indican la multiplicación del 3 por $\frac{3}{4}$.

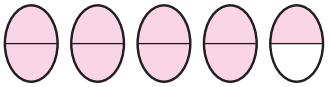
EJEMPLO 1 En la ilustración abajo, cada disco representa un entero. Escriba una fracción impropia y un número mixto para representar la porción sombreada.



Estrategia Se determinará el número de partes iguales en las que está dividido un disco. Después se determinará cuántas de estas *partes* están sombreadas y cuántos de los discos *enteros* están sombreados.

Auto-revisión 1

En la ilustración de abajo, cada región ovalada representa un entero. Escriba una fracción impropia y un número mixto para representar la porción sombreada.



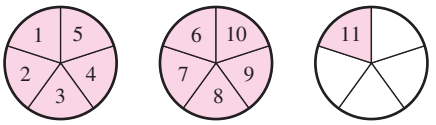
Ahora intente **Problema 19**

POR QUÉ Para escribir una fracción impropia se necesita encontrar su numerador y su denominador. Para escribir un número mixto se necesita encontrar su parte de número natural y su parte fraccional.

Solución

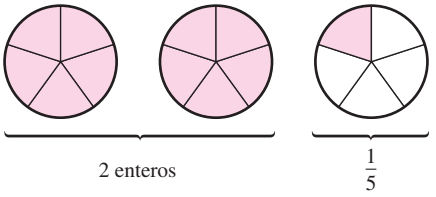
Dado que cada disco está dividido en 5 partes iguales, el denominador de la fracción impropia es el 5. Dado que un total de 11 de esas partes están sombreadas, el numerador es el 11 y se dice que

$\frac{11}{5}$ están sombreados. Escriba: $\frac{\text{el número total de partes sombreadas}}{\text{el número de partes iguales en un disco}}$



Dado que están sombreados 2 discos enteros, la parte de número natural del número mixto es el 2. Dado que 1 de 5 de las partes del último disco está sombreada, la parte fraccional del número mixto es $\frac{1}{5}$, y se dice que

$2\frac{1}{5}$ están sombreados.



En esta sección se trabajará con números mixtos negativos al igual que con positivos. Por ejemplo, el número mixto negativo $-3\frac{3}{4}$ pudiera representar $3\frac{3}{4}$ pies debajo del nivel del mar. Piense en $-3\frac{3}{4}$ como $-3 - \frac{3}{4}$ o como $-3 + \left(-\frac{3}{4}\right)$.

2 Escribir números mixtos como fracciones impropias

En el Ejemplo 1 se vio que la porción sombreada de la ilustración puede representarse por medio del número mixto $2\frac{1}{5}$ y por medio de la fracción impropia $\frac{11}{5}$. Para desarrollar un procedimiento para escribir cualquier número mixto como una fracción impropia, considere los siguientes pasos que muestran cómo hacer esto para $2\frac{1}{5}$. El objetivo es encontrar cuántos *quintos* representa el número mixto $2\frac{1}{5}$.

$$2\frac{1}{5} = 2 + \frac{1}{5}$$ Escriba el número mixto $2\frac{1}{5}$ como una suma.

$$= \frac{2}{1} + \frac{1}{5}$$ Escriba el 2 como una fracción: $2 = \frac{2}{1}$.

$$= \frac{2}{1} \cdot \frac{5}{5} + \frac{1}{5}$$ Para construir $\frac{2}{1}$ y que su denominador sea 5, se multiplica por una forma de 1

$$= \frac{10}{5} + \frac{1}{5}$$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$$= \frac{11}{5}$$ Sume los numeradores y escriba la suma sobre el denominador común de 5.

Por tanto, $2\frac{1}{5} = \frac{11}{5}$.

Se puede obtener el mismo resultado con mucho menos trabajo. Para cambiar $2\frac{1}{5}$ a una fracción impropia, simplemente se multiplica 5 por 2 y se suma 1 para obtener el numerador y se mantiene el denominador de 5.

$$2\frac{1}{5} = \frac{5 \cdot 2 + 1}{5} = \frac{10 + 1}{5} = \frac{11}{5}$$

Este ejemplo ilustra el siguiente procedimiento.

Escritura de un número mixto como una fracción impropia

Para escribir un número mixto como una fracción impropia:

1. Multiplique el denominador de la fracción por la parte de número natural.
2. Sume el numerador de la fracción al resultado del Paso 1.
3. Escriba la suma del Paso 2 sobre el denominador original.

EJEMPLO 2 Escriba el número mixto $7\frac{5}{6}$ como una fracción impropia.

Estrategia Se utilizará el procedimiento de tres pasos para encontrar la fracción impropia.

POR QUÉ Es más rápido que escribir $7\frac{5}{6}$ como $7 + \frac{5}{6}$, construir para obtener un mcd y sumar.

Solución

Para encontrar el numerador de la fracción impropia, multiplique 6 por 7 y sume 5 a ese resultado. El denominador de la fracción impropia es el mismo que el denominador de la parte fraccional del número mixto.

Paso 2: sume

$$7\frac{5}{6} = \frac{6 \cdot 7 + 5}{6} = \frac{42 + 5}{6} = \frac{47}{6}$$

Por la regla del orden de las operaciones, multiplique primero y después sume el numerador.

Paso 1: multiplique

Paso 3: use el mismo denominador

Auto-revisión 2

Escriba el número mixto $3\frac{3}{8}$ como una fracción impropia.

Ahora intente **Problemas 23 y 27**

Para escribir un *número mixto negativo* en forma fraccional, ignore el signo − y use el método mostrado en el Ejemplo 2 en el número mixto positivo. Una vez que se completa ese procedimiento, escriba un signo − enfrente del resultado. Por ejemplo,

$$-6\frac{1}{4} = -\frac{25}{4} \qquad -1\frac{9}{10} = -\frac{19}{10} \qquad -12\frac{3}{8} = -\frac{99}{8}$$

3 Escribir fracciones impropias como números mixtos

Para escribir una fracción impropia como un número mixto se deben encontrar dos cosas: la *parte de número natural* y la *parte fraccional* del número mixto. Para desarrollar un procedimiento para hacer esto, se considera la fracción impropia $\frac{7}{3}$. Para encontrar el número de grupos de 3 en 7, se puede dividir 7 entre 3. Esto encontrará la parte de número natural del número mixto. El residuo es el numerador de la parte fraccional del número mixto.

Parte de número natural

$$\begin{array}{r} 2 \\ 3\overline{)7} \\ \underline{-6} \\ 1 \end{array} \qquad 2\frac{1}{3}$$

El divisor es el denominador de la parte fraccional.

El residuo es el numerador de la parte fraccional

Este ejemplo sugiere el siguiente procedimiento.

Escritura de una fracción impropia como un número mixto

Para escribir una fracción impropia como un número mixto:

1. Divida el numerador entre el denominador para obtener la parte de número natural.
2. El residuo sobre el divisor es la parte fraccional.

Auto-revisión 3

Escriba cada fracción impropia como un número mixto o como un número natural:

a. $\frac{31}{7}$ **b.** $\frac{50}{26}$

c. $\frac{51}{3}$ **d.** $-\frac{10}{3}$

Ahora intente **Problemas 31, 35, 39 y 43**

EJEMPLO 3 Escriba cada fracción impropia como un número mixto o como un número natural: **a.** $\frac{29}{6}$ **b.** $\frac{40}{16}$ **c.** $\frac{84}{3}$ **d.** $-\frac{9}{5}$

Estrategia Se dividirá el numerador entre el denominador y se escribirá el residuo sobre el divisor.

POR QUÉ Una barra de fracción indica una división.

Solución

a. Para escribir $\frac{29}{6}$ como un número mixto, divida 29 entre 6:

$$\begin{array}{r} 4 \\ 6\overline{)29} \\ -24 \\ \hline 5 \end{array}$$

← La parte de número natural es el 4.

← Escriba el residuo de 5 sobre el divisor de 6 para obtener la parte fraccional.

Por tanto, $\frac{29}{6} = 4\frac{5}{6}$.

b. Para escribir $\frac{40}{16}$ como un número mixto, divida 40 entre 16:

$$\begin{array}{r} 2 \\ 16\overline{)40} \\ -32 \\ \hline 8 \end{array}$$

Por tanto, $\frac{40}{16} = 2\frac{8}{16} = 2\frac{1}{2}$. Simplifique la parte fraccional: $\frac{8}{16} = \frac{\overset{1}{\cancel{8}}}{2 \cdot \underset{1}{\cancel{8}}} = \frac{1}{2}$.

c. Para $\frac{84}{3}$, divida 84 entre 3:

$$\begin{array}{r} 28 \\ 3\overline{)84} \\ -6 \\ \hline 24 \\ -24 \\ \hline 0 \end{array}$$

Por tanto, $\frac{84}{3} = 28$.

← Dado que el residuo es de 0, la fracción impropia representa un número natural.

d. Para escribir $-\frac{9}{5}$ como un número mixto, ignore el signo – y utilice el método para la fracción impropia positiva $\frac{9}{5}$. Una vez que se complete el procedimiento, escriba un signo – enfrente del resultado.

$$\begin{array}{r} 1 \\ 5\overline{)9} \\ -5 \\ \hline 4 \end{array}$$

Por tanto, $-\frac{9}{5} = -1\frac{4}{5}$.

4 Graficar fracciones y números mixtos en una recta numérica

En los Capítulos 1 y 2 se graficaron números naturales y enteros en una recta numérica. Las fracciones y los números mixtos también pueden graficarse en una recta numérica.

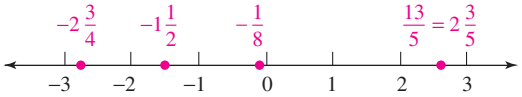
EJEMPLO 4 Grafique $-2\frac{3}{4}, -1\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}$ y $\frac{13}{5}$ en una recta numérica.

Estrategia Se localizará la posición de cada fracción y número mixto en la recta numérica y se trazará un punto en negritas.

POR QUÉ *Graficar un número* significa realizar una ilustración que represente el número.

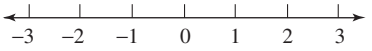
Solución

- Dado que $-2\frac{3}{4} < -2$, la gráfica de $-2\frac{3}{4}$ está a la izquierda del -2 en la recta numérica.
- El número $-1\frac{1}{2}$ está entre el -1 y el -2.
- El número $-\frac{1}{8}$ es menor que el 0.
- Expresado como un número mixto, $\frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$.



Auto-revisión 4

Grafique $-1\frac{7}{8}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{5}$ y $\frac{9}{4}$ en una recta numérica.



Ahora intente **Problema 47**

5 Multiplicar y dividir números mixtos

Se utilizarán los mismos procedimientos para la multiplicación y división de números mixtos que los utilizados en las Secciones 3.2 y 3.3 para multiplicar y dividir fracciones. Sin embargo, se deben escribir los números mixtos como fracciones impropias antes de multiplicar o dividir.

Multiplicación y división de números mixtos

Para multiplicar o dividir número mixtos, primero cambie los números mixtos a fracciones impropias. Después desarrolle la multiplicación o la división de las fracciones. Escriba el resultado como un número mixto o como un número natural en la forma más simple.

Las reglas de los signos para la multiplicación y división de enteros también se mantienen para la multiplicación y división de números mixtos.

EJEMPLO 5 Multiplique y simplifique, si es posible.

a. $1\frac{3}{4} \cdot 2\frac{1}{3}$ **b.** $5\frac{1}{5} \cdot \left(1\frac{2}{13}\right)$ **c.** $-4\frac{1}{9}(3)$

Estrategia Se escribirán los números mixtos y los números naturales como fracciones impropias.

POR QUÉ Después se puede utilizar la regla para la multiplicación de dos fracciones de la Sección 3.2.

Solución

a. $1\frac{3}{4} \cdot 2\frac{1}{3} = \frac{7}{4} \cdot \frac{7}{3}$ Escriba $1\frac{3}{4}$ y $2\frac{1}{3}$ como fracciones impropias.

$= \frac{7 \cdot 7}{4 \cdot 3}$ Use la regla para la multiplicación de dos fracciones. Multiplique los numeradores y los denominadores.

$= \frac{49}{12}$ Dado que no hay factores comunes a eliminar, desarrolle la multiplicación en el numerador y en el denominador. El resultado es una fracción impropia.

$= 4\frac{1}{12}$ Escriba la fracción impropia $\frac{49}{12}$ como un número mixto.

$$\begin{array}{r} 4 \\ 12\overline{)49} \\ \underline{-48} \\ 1 \end{array}$$

Auto-revisión 5

Multiplique y simplifique, si es posible.

a. $3\frac{1}{3} \cdot 2\frac{1}{3}$ **b.** $9\frac{3}{5} \cdot \left(3\frac{3}{4}\right)$

c. $-4\frac{5}{6}(2)$

Ahora intente **Problemas 51, 55 y 57**

b. $5\frac{1}{5}\left(1\frac{2}{13}\right) = \frac{26}{5} \cdot \frac{15}{13}$ Escriba $5\frac{1}{5}$ y $1\frac{2}{13}$ como fracciones impropias.

$= \frac{26 \cdot 15}{5 \cdot 13}$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$= \frac{2 \cdot 13 \cdot 3 \cdot 5}{5 \cdot 13}$ Para preparar la simplificación, factorice el 26 como $2 \cdot 13$ y el 15 como $3 \cdot 5$.

$= \frac{2 \cdot \overset{1}{\cancel{13}} \cdot 3 \cdot \overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{1}{\cancel{5}} \cdot \underset{1}{\cancel{13}}}$ Elimine los factores comunes de 13 y 5 del numerador y el denominador.

$= \frac{6}{1}$ Multiplique los factores restantes en el numerador: $2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 = 6$. Multiplique los factores restantes en el denominador: $1 \cdot 1 = 1$.

$= 6$ Cualquier número natural dividido entre 1 sigue siendo el mismo.

c. $-4\frac{1}{9} \cdot 3 = -\frac{37}{9} \cdot \frac{3}{1}$ Escriba $-4\frac{1}{9}$ como una fracción impropia y escriba el 3 como una fracción.

$= -\frac{37 \cdot 3}{9 \cdot 1}$ Multiplique los numeradores y multiplique los denominadores. Dado que las fracciones tienen signos no similares, haga negativa la respuesta

$= -\frac{37 \cdot \overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{3}} \cdot 3 \cdot 1}$ Para simplificar, factorice el 9 como $3 \cdot 3$, y después elimine el factor común de 3 del numerador y el denominador.

$= -\frac{37}{3}$ Multiplique los factores restantes en el numerador y en el denominador. El resultado es una fracción impropia.

$= -12\frac{1}{3}$ Escriba la fracción impropia negativa $-\frac{37}{3}$ como un número mixto negativo.

$$3\overline{)37}\quad 12,\ -3,\ 7,\ -6,\ 1$$

Consejo útil Se puede utilizar el redondeo para comprobar los resultados cuando se multiplican números mixtos. Si la parte fraccional del número mixto es $\frac{1}{2}$ *o mayor,* redondee hacia arriba sumando 1 a la parte de número natural y deseche la fracción. Si la parte fraccional del número mixto es menor que $\frac{1}{2}$, redondee hacia abajo desechando la fracción y utilizando sólo la parte de número natural. Para comprobar la respuesta $4\frac{1}{12}$ del Ejemplo 5, inciso a, se procede como a continuación:

$1\frac{3}{4} \cdot 2\frac{1}{3} \approx 2 \cdot 2 = 4$ Dado que $\frac{3}{4}$ es mayor que $\frac{1}{2}$, redondee $1\frac{3}{4}$ hacia arriba a 2. Dado que $\frac{1}{3}$ es menor que $\frac{1}{2}$, redondee $2\frac{1}{3}$ hacia abajo a 2.

Dado que $4\frac{1}{12}$ es cercano a 4, es una respuesta razonable.

Auto-revisión 6

Divida y simplifique, si es posible:

a. $-3\frac{4}{15} \div \left(-2\frac{1}{10}\right)$

b. $5\frac{3}{5} \div \frac{7}{8}$

Ahora intente **Problemas 59 y 65**

EJEMPLO 6 Divida y simplifique, si es posible:

a. $-3\frac{3}{8} \div \left(-2\frac{1}{4}\right)$ **b.** $1\frac{11}{16} \div \frac{3}{4}$

Estrategia Se escribirán los números mixtos como fracciones impropias.

POR QUÉ Después se puede utilizar la regla para la división de dos fracciones de la Sección 3.3.

Solución

a. $-3\frac{3}{8} \div \left(-2\frac{1}{4}\right) = -\frac{27}{8} \div \left(-\frac{9}{4}\right)$ Escriba $-3\frac{3}{8}$ y $-2\frac{1}{4}$ como fracciones impropias.

$= -\frac{27}{8}\left(-\frac{4}{9}\right)$ Use la regla para la división de dos fracciones: Multiplique $-\frac{27}{8}$ por el recíproco de $-\frac{9}{4}$, el cual es $-\frac{4}{9}$.

$= \frac{27}{8}\left(\frac{4}{9}\right)$ Dado que el producto de dos fracciones negativas es positivo, deseche ambos signos $-$ y continúe.

$= \frac{27 \cdot 4}{8 \cdot 9}$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$= \frac{3 \cdot \overset{1}{\cancel{9}} \cdot \overset{1}{\cancel{4}}}{2 \cdot \underset{1}{\cancel{4}} \cdot \underset{1}{\cancel{9}}}$ Para simplificar, factorice el 27 como $3 \cdot 9$ y el 8 como $2 \cdot 4$. Después elimine los factores comunes de 9 y 4 del numerador y el denominador.

$= \frac{3}{2}$ Multiplique los factores restantes en el numerador: $3 \cdot 1 \cdot 1 = 3$. Multiplique los factores restantes en el denominador: $2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$.

$= 1\frac{1}{2}$ Escriba la fracción impropia $\frac{3}{2}$ como un número mixto dividiendo 3 entre 2.

b. $1\frac{11}{16} \div \frac{3}{4} = \frac{27}{16} \div \frac{3}{4}$ Escriba $1\frac{11}{16}$ como una fracción impropia.

$= \frac{27}{16} \cdot \frac{4}{3}$ Multiplique $\frac{27}{16}$ por el recíproco de $\frac{3}{4}$, el cual es $\frac{4}{3}$.

$= \frac{27 \cdot 4}{16 \cdot 3}$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

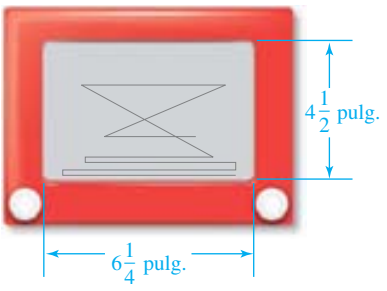
$= \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot 9 \cdot \overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{4}} \cdot 4 \cdot \underset{1}{\cancel{3}}}$ Para simplificar, factorice el 27 como $3 \cdot 9$ y el 16 como $4 \cdot 4$. Después elimine los factores comunes de 3 y 4 del numerador y el denominador.

$= \frac{9}{4}$ Multiplique los factores restantes en el numerador y en el denominador. El resultado es una fracción impropia.

$= 2\frac{1}{4}$ Escriba la fracción impropia $\frac{9}{4}$ como un número mixto dividiendo 9 entre 4.

6 Resolver problemas de aplicación multiplicando y dividiendo números mixtos

EJEMPLO 7 ***Juguetes*** En la ilustración de abajo se muestran las dimensiones de la pantalla de forma rectangular de un Etch-a-Sketch. Encuentre el área de la pantalla.



Estrategia Para encontrar el área, se multiplicará $6\frac{1}{4}$ por $4\frac{1}{2}$.

POR QUÉ La fórmula para el área de un rectángulo es Área = longitud · ancho.

Auto-revisión 7

PEGATINAS Una etiqueta de forma rectangular es de $8\frac{1}{4}$ pulgadas de largo por $3\frac{1}{4}$ pulgadas de ancho. Encuentre su área.

Ahora intente **Problema 99**

Solución

$A = la$ Esta es la fórmula para el área de un rectángulo.

$= 6\frac{1}{4} \cdot 4\frac{1}{2}$ Sustituya $6\frac{1}{4}$ por l y $4\frac{1}{2}$ por a.

$= \frac{25}{4} \cdot \frac{9}{2}$ Escriba $6\frac{1}{4}$ y $4\frac{1}{2}$ como fracciones impropias.

$= \frac{25 \cdot 9}{4 \cdot 2}$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$= \frac{225}{8}$ Dado que no hay factores comunes a eliminar, desarrolle la multiplicación en el numerador y en el denominador. El resultado es una fracción impropia.

$= 28\frac{1}{8}$ Escriba la fracción impropia $\frac{225}{8}$ como un número mixto.

$$\begin{array}{r} 28 \\ 8\overline{)225} \\ -16 \\ \hline 65 \\ -64 \\ \hline 1 \end{array}$$

El área de la pantalla de un Etch-a-Sketch es de $28\frac{1}{8}$ pulg.^{2}.

Auto-revisión 8

ENTREVISTAS EN TV Una entrevista grabada de $18\frac{3}{4}$ minutos con un actor fue reproducida en segmentos de igual longitud en 5 noches consecutivas en un programa de noticias sobre celebridades. ¿Cuánto duró cada segmento de la entrevista?

Ahora intente **Problema 107**

EJEMPLO 8 ***Subvenciones gubernamentales*** Si $\$12\frac{1}{2}$ millones se van a dividir de manera equitativa entre cinco ciudades para financiar programas recreativos, ¿cuánto recibirá cada ciudad?

Analizar

- Hay $\$12\frac{1}{2}$ millones en subvención. Proporcionado
- 5 ciudades se dividirán el dinero de manera equitativa. Proporcionado
- ¿Cuánto dinero recibirá cada ciudad? A encontrar

Formar La frase *separar de manera equitativa* sugiere una división. Se traducen las palabras del problema a números y símbolos.

La cantidad de dinero que recibirá cada ciudad (en millones de dólares)	es igual a	la cantidad total de la subvención (en millones de dólares)	dividida entre	el número de ciudades que reciben el dinero
La cantidad de dinero que recibirá cada ciudad (en millones de dólares)	=	$12\frac{1}{2}$	÷	5

Resolver Para encontrar el cociente, se expresará $12\frac{1}{2}$ y 5 como fracciones y después se utilizará la regla para la división de dos fracciones.

$12\frac{1}{2} \div 5 = \frac{25}{2} \div \frac{5}{1}$ Escriba $12\frac{1}{2}$ como una fracción impropia y escriba el 5 como una fracción.

$= \frac{25}{2} \cdot \frac{1}{5}$ Multiplique por el recíproco de $\frac{5}{1}$, el cual es $\frac{1}{5}$.

$= \frac{25 \cdot 1}{2 \cdot 5}$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$= \frac{\overset{1}{\cancel{5}} \cdot 5 \cdot 1}{2 \cdot \underset{1}{\cancel{5}}}$ Para simplificar, factorice el 25 como $5 \cdot 5$. Después elimine el factor común de 5 del numerador y el denominador.

$= \frac{5}{2}$ Multiplique los factores restantes en el numerador. Multiplique los factores restantes en el denominador.

$= 2\frac{1}{2}$ Escriba la fracción impropia $\frac{5}{2}$ como un número mixto dividiendo 5 entre 2. Las unidades están en millones de dólares.

Enunciar Cada ciudad recibirá $\$2\frac{1}{2}$ millones en subvención.

Comprobar Se puede estimar para comprobar el resultado. Si hubieran \$10 millones en subvención, cada ciudad recibiría $\frac{\$10 \text{ millones}}{5}$, o \$2 millones. Dado que en realidad hay $\$12\frac{1}{2}$ millones en subvención, la respuesta de que cada ciudad recibiría $\$2\frac{1}{2}$ millones parece razonable.

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. $\frac{9}{2}$, $4\frac{1}{2}$ **2.** $\frac{27}{8}$ **3. a.** $4\frac{3}{7}$ **b.** $1\frac{12}{13}$ **c.** 17 **d.** $-3\frac{1}{3}$ **4.** ver arriba **5. a.** $7\frac{7}{9}$ **b.** 36 **c.** $-9\frac{2}{3}$ **6. a.** $1\frac{5}{9}$ **b.** $6\frac{2}{5}$ **7.** $26\frac{13}{16}$ in.^{2} **8.** $3\frac{3}{4}$ min

SECCIÓN 3.5 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Complete los espacios.

1. Un número _____ como $8\frac{4}{5}$, es la suma de un número natural y una fracción propia.

2. En el número mixto $8\frac{4}{5}$, la parte de número _____ es el 8 y la parte _____ es $\frac{4}{5}$.

3. El numerador de una fracción _____ es mayor o igual a su denominador.

4. El _____ un número significa localizar su posición en la recta numérica y remarcarlo utilizando un punto.

CONCEPTOS

5. ¿Qué número mixto con signo pudiera utilizarse para describir cada situación?

a. Una temperatura de cinco y un tercio grados sobre cero.

b. La profundidad de la tubería de un rociador que está seis y siete octavos de pulgada debajo de la acera.

6. ¿Qué número mixto con signo pudiera utilizarse para describir cada situación?

a. Una lluvia totaliza dos y tres décimas de pulgada debajo del promedio.

b. Tres y medio minutos después del despegue de un cohete.

Complete los espacios.

7. Para escribir un número mixto como una fracción impropia:

1. _____ el denominador de la fracción por la parte de número natural.

2. _____ el numerador de la fracción al resultado del Paso 1.

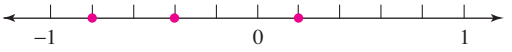
3. Escriba la suma del Paso 2 sobre el _____ original.

8. Para escribir una fracción impropia como un número mixto:

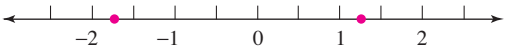
1. _____ el numerador entre el denominador para obtener la parte de número natural.

2. El _____ sobre el divisor es la parte fraccional.

9. ¿Qué fracciones se han graficado en la recta numérica?



10. ¿Qué números mixtos se han graficado en la recta numérica?



11. Complete el espacio: Para multiplicar o dividir números mixtos, primero cambie los números mixtos a fracciones _____. Después desarrolle la multiplicación o división de las fracciones como siempre.

12. Simplifique la parte fraccional de cada número mixto.

a. $11\frac{2}{4}$

b. $1\frac{3}{9}$

c. $7\frac{15}{27}$

13. Use una *estimación* para determinar si la siguiente respuesta parece razonable:

$$4\frac{1}{5} \cdot 2\frac{5}{7} = 7\frac{2}{35}$$

14. ¿Cuál es la fórmula para el

a. área de un rectángulo?

b. área de un triángulo?

NOTACIÓN

15. Complete los espacios.

a. Se lee $5\frac{11}{16}$ como "cinco _____ once _____".

b. Se lee $-4\frac{2}{3}$ como "cuatro_____ y _____ tercios"

16. Determine el signo del resultado. (*No tiene que encontrar la respuesta.*)

a. $1\frac{1}{9}\left(-7\frac{3}{14}\right)$

b. $-3\frac{4}{15} \div \left(-1\frac{5}{6}\right)$

Llene los espacios para completar cada solución.

17. Multiplique: $5\frac{1}{4} \cdot 1\frac{1}{7}$

$$5\frac{1}{4} \cdot 1\frac{1}{7} = \frac{21}{\square} \cdot \frac{\square}{7}$$

$$= \frac{21 \cdot \square}{\square \cdot 7}$$

$$= \frac{3 \cdot \overset{1}{\cancel{7}} \cdot 2 \cdot \overset{1}{\cancel{\square}}}{\underset{1}{\cancel{\square}} \cdot \underset{1}{\cancel{7}}}$$

$$= \frac{\square}{1}$$

$$= \square$$

18. Divida: $-5\frac{5}{6} \div 2\frac{1}{12}$

$$-5\frac{5}{6} \div 2\frac{1}{12} = -\frac{\square}{6} \div \frac{25}{\square}$$

$$= -\frac{\square}{6} \cdot \frac{12}{\square}$$

$$= -\frac{35 \cdot 12}{6 \cdot \square}$$

$$= -\frac{\overset{1}{\cancel{5}} \cdot \square \cdot 2 \cdot \overset{1}{\cancel{6}}}{\underset{1}{\cancel{6}} \cdot \underset{1}{\cancel{5}} \cdot \square}$$

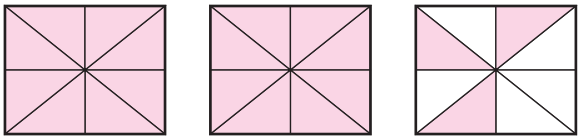
$$= -\frac{\square}{5}$$

$$= -2\frac{\square}{5}$$

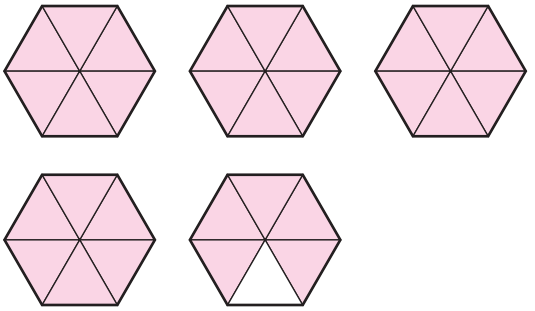
PRÁCTICA GUIADA

Cada región delineada en negro representa un entero. Escriba una fracción impropia y un número mixto para representar la porción sombreada. Vea el Ejemplo 1.

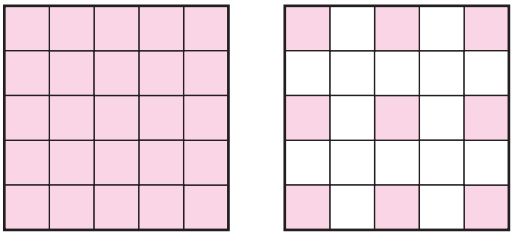
19.



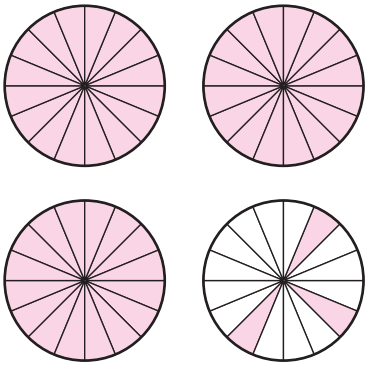
20.



21.



22.



Escriba cada número mixto como una fracción impropia. Vea el Ejemplo 2.

23. $6\frac{1}{2}$

24. $8\frac{2}{3}$

25. $20\frac{4}{5}$

26. $15\frac{3}{8}$

27. $-7\frac{5}{9}$

28. $-7\frac{1}{12}$

29. $-8\frac{2}{3}$

30. $-9\frac{3}{4}$

Escriba cada fracción impropia como un número mixto o como un número natural. Simplifique el resultado, si es posible. Vea el Ejemplo 3.

31. $\frac{13}{4}$

32. $\frac{41}{6}$

33. $\frac{28}{5}$

34. $\frac{28}{3}$

35. $\frac{42}{9}$

36. $\frac{62}{8}$

37. $\frac{84}{8}$

38. $\frac{93}{9}$

39. $\frac{52}{13}$

40. $\frac{80}{16}$

41. $\frac{34}{17}$

42. $\frac{38}{19}$

43. $-\frac{58}{7}$

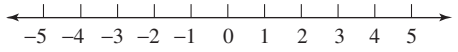
44. $-\frac{33}{7}$

45. $-\frac{20}{6}$

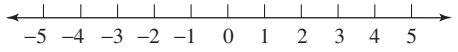
46. $-\frac{28}{8}$

Grafique los números proporcionados en una recta numérica. Vea el Ejemplo 4.

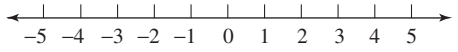
47. $-2\frac{8}{9}, 1\frac{2}{3}, \frac{16}{5}, -\frac{1}{2}$



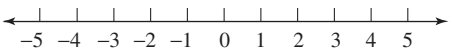
48. $-\frac{3}{4}, -3\frac{1}{4}, \frac{5}{2}, 4\frac{3}{4}$



49. $3\frac{1}{7}, -\frac{98}{99}, -\frac{10}{3}, \frac{3}{2}$



50. $-2\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{11}{3}, \frac{17}{4}$



Multiplique y simplifique, si es posible. Vea el Ejemplo 5.

51. $3\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{3}$

52. $1\frac{5}{6} \cdot 1\frac{1}{2}$

53. $2\frac{2}{5}\left(3\frac{1}{12}\right)$

54. $\frac{40}{16}\left(\frac{26}{5}\right)$

55. $6\frac{1}{2} \cdot 1\frac{3}{13}$

56. $12\frac{3}{5} \cdot 1\frac{3}{7}$

57. $-2\frac{1}{2}(4)$

58. $-3\frac{3}{4}(8)$

Divida y simplifique, si es posible. Vea el Ejemplo 6.

59. $-1\frac{13}{15} \div \left(-4\frac{1}{5}\right)$

60. $-2\frac{5}{6} \div \left(-8\frac{1}{2}\right)$

61. $15\frac{1}{3} \div 2\frac{2}{9}$

62. $6\frac{1}{4} \div 3\frac{3}{4}$

63. $1\frac{3}{4} \div \frac{3}{4}$

64. $5\frac{3}{5} \div \frac{9}{10}$

65. $1\frac{7}{24} \div \frac{7}{8}$

66. $4\frac{1}{2} \div \frac{3}{17}$

INTÉNTELO

Desarrolle cada operación y simplifique, si es posible.

67. $-6 \cdot 2\frac{7}{24}$

68. $-7 \cdot 1\frac{3}{28}$

69. $-6\frac{3}{5} \div 7\frac{1}{3}$

70. $-4\frac{1}{4} \div 4\frac{1}{2}$

71. $\left(1\frac{2}{3}\right)^2$

72. $\left(3\frac{1}{2}\right)^2$

73. $8 \div 3\frac{1}{5}$

74. $15 \div 3\frac{1}{3}$

75. $-20\frac{1}{4} \div \left(-1\frac{11}{16}\right)$

76. $-2\frac{7}{10} \div \left(-1\frac{1}{14}\right)$

77. $3\frac{1}{16} \cdot 4\frac{4}{7}$

78. $5\frac{3}{5} \cdot 1\frac{11}{14}$

79. Encuentre el cociente de $-4\frac{1}{2}$ y $2\frac{1}{4}$.

80. Encuentre el cociente de $-10\frac{5}{7}$.

81. $2\frac{1}{2}\left(-3\frac{1}{3}\right)$

82. $\left(-3\frac{1}{4}\right)\left(1\frac{1}{5}\right)$

83. $2\frac{5}{8}\cdot\frac{5}{27}$

84. $3\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{32}$

85. $6\frac{1}{4}\div 20$

86. $4\frac{2}{5}\div 11$

87. Encuentre el producto de $1\frac{2}{3}$, 6 y $-\frac{1}{8}$.

88. Encuentre el producto de $-\frac{5}{6}$, -8 y $-2\frac{1}{10}$.

89. $\left(-1\frac{1}{3}\right)^3$

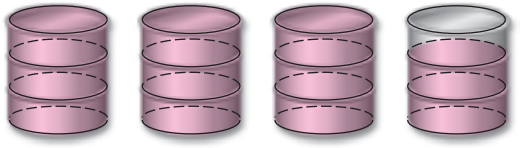
90. $\left(-1\frac{1}{5}\right)^3$

APLICACIONES

91. En la ilustración abajo, cada barril representa un entero.

a. Escriba un número mixto para representar la porción sombreada.

b. Escriba una fracción impropia para representar la porción sombreada.



92. Dibuje $\frac{17}{8}$ pizzas.

93. CLAVADOS Complete el espacio con un número mixto para describir el clavado mostrado abajo: ____ saltos mortales hacia adelante

94. ETIQUETADO DE PRODUCTOS En la etiqueta mostrada abajo aparecen varios números mixtos. Escriba cada número mixto como una fracción impropia.

95. LECTURA DE MEDIDORES

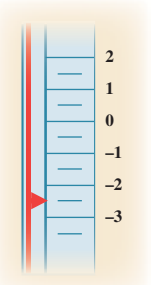
a. Use un número mixto para describir el valor al que la flecha está apuntando actualmente.

b. Si la flecha se mueve doce marcas de graduación a la izquierda, ¿a qué valor estará apuntando?

96. LECTURA DE MEDIDORES

a. Use un número mixto para describir el valor al que la flecha está apuntando actualmente.

b. Si la flecha se mueve hacia arriba seis marcas de graduación, ¿a qué valor estará apuntando?



97. COMPRAS EN LÍNEA Una madre está ordenando un par de jeans para su hija desde la pantalla mostrada abajo. Si la estatura de la hija es de $60\frac{3}{4}$ pulg. y su cintura es de $24\frac{1}{2}$ pulg., ¿en qué talla y en qué corte (regular o fino) debe darle clic la madre?

Jeans de corte regular para mujer

Talla	7	8	10	12	14	16
Estatura	50-52	52-54	54-56	56¼-58½	59-61	61-62
Cintura	22¼-22¾	22¾-23¼	23¾-24¼	24¾-25¼	25¾-26¼	26¼-28

Jeans de corte fino para mujer

Talla	7	8	10	12	14	16
Estatura	50-52	52-54	54-56	56½-58½	59-61	61-62
Cintura	20¾-21¼	21¼-21¾	22¼-22¾	23¼-23¾	24¼-24¾	25-26½

Para ordenar: Apunte el cursor al tamaño/corte apropiado y haga clic.

98. COSTURA Use la siguiente tabla para determinar el número de yardas de tela necesarias.

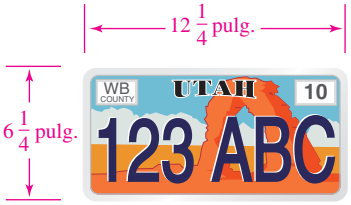
a. para fabricar 16 tops si la tela a utilizarse es de 60 pulgadas de ancho.

b. para fabricar 18 pantalones si la tela a utilizarse es de 45 pulgadas de ancho.

8767 Patrón
stitch'n save

TALLAS	8	10	12	14	16	18	20	
Top								
45"	2¼	2⅜	2⅜	2⅜	2½	2⅝	2¾	yd
60"	2	2	2⅛	2⅛	2⅛	2⅛	2⅛	
Pantalones								
45"	2⅝	2⅝	2⅝	2⅝	2⅝	2⅝	2⅝	yd
60"	1¾	2	2¼	2¼	2¼	2¼	2½	

99. PLACAS PARA AUTOMÓVILES Encuentre el área de la placa para automóvil mostrada abajo.

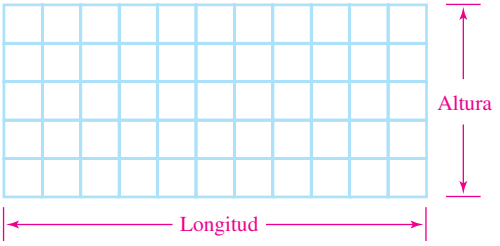


100. PAPEL CUADRICULADO Los matemáticos utilizan un papel marcado de manera especial, llamado papel cuadriculado, cuando dibujan figuras. Está conformado por cuadrados de $\frac{1}{4}$ de pulgada de largo por $\frac{1}{4}$ de pulgada de alto.

a. Encuentre la longitud de la pieza de papel cuadriculado mostrado abajo.

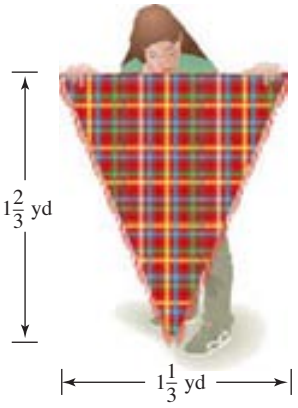
b. Encuentre su altura.

c. ¿Cuál es el área de la pieza de papel cuadriculado?



101. SALIDAS DE EMERGENCIA El siguiente letrero indica la salida de emergencia en un autobús escolar. Encuentre el área del letrero.

102. DISEÑO DE ROPA Encuentre el número de yardas cuadradas de material necesarias para fabricar el chal con forma triangular mostrado en la ilustración.

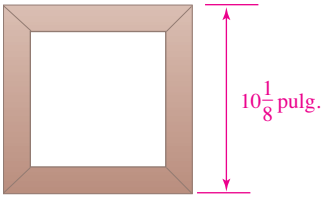


103. CALORÍAS Una compañía anuncia que sus mentas sólo contienen $3\frac{1}{5}$ calorías por pieza. ¿Cuál es la ingesta de calorías si come un paquete completo de 20 mentas?

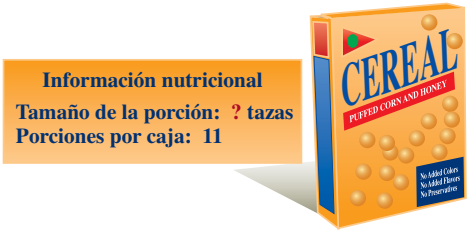
104. MEZCLADORAS DE CEMENTO Una mezcladora de cemento puede transportar $9\frac{1}{2}$ yardas cúbicas de concreto. Si se realizan 8 viajes a un sitio de trabajo, ¿cuánto concreto transportará al sitio?

105. COMPRAS En la ilustración, ¿cuál es el costo de compra de la fruta en la báscula? Dé su respuesta en centavos y en dólares.

106. MARCOS PARA FOTOGRAFÍAS ¿Cuántas pulgadas de moldura se necesitan para fabricar el marco para fotografías cuadrado mostrado abajo?



107. CEREAL PARA EL DESAYUNO Una caja de cereal contiene alrededor de $13\frac{3}{4}$ tazas. Refiérase a la etiqueta de nutrición mostrada abajo y determine el tamaño recomendado de una porción.



108. CEREAL PARA EL DESAYUNO Una caja de cereal contiene alrededor de $14\frac{1}{4}$ tazas. Refiérase a la etiqueta de nutrición mostrada abajo. Determine cuántas porciones hay para niños menores de 4 años en una caja.

109. ABASTECIMIENTO ¿A cuántas personas se les pueden servir hamburguesas de $\frac{1}{3}$ libra si un proveedor adquiere 200 libras de carne molida?

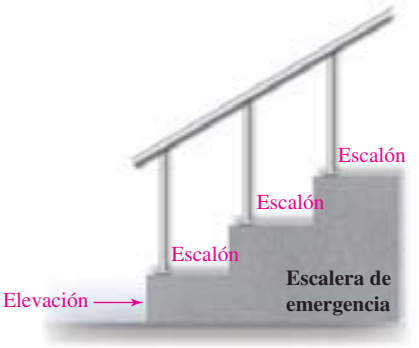
110. SUBDIVISIONES Una desarrolladora donó al condado 100 de los 1,000 acres de tierra que poseía. Dividió los acres restantes en lotes de $1\frac{1}{3}$ acres. ¿Cuántos lotes creó?

111. CARRERAS DE CABALLOS La pista de carreras en la que corren los caballos purasangre está dividida en segmentos de $\frac{1}{8}$ de milla de largo llamadas *furlongs*. ¿Cuántos furlongs hay en una carrera de $1\frac{1}{16}$ millas?

112. ESCALERAS DE EMERGENCIA Abajo se muestra parte de la escalera de emergencia para un piso en un edificio de oficinas. Cada elevación es de $7\frac{1}{2}$ pulgadas de alto y cada piso del edificio de oficinas es de 105 pulgadas de alto.

a. ¿Cuántas escalones hay en un piso de la escalera de emergencia?

b. Si el edificio tiene 43 pisos, ¿cuántos escalones hay en toda la escalera de emergencia?



REDACCIÓN

113. Explique la diferencia entre $2\frac{3}{4}$ y $2\left(\frac{3}{4}\right)$.

114. Dé tres ejemplos de cómo utilizar números mixtos en la vida diaria.

REPASO

Encuentre el mcm de los números proporcionados.

115. 5, 12, 15

116. 8, 12, 16

Encuentre el mfc de los números proporcionados.

117. 12, 68, 92

118. 24, 36, 40

SECCIÓN 3.6

Suma y resta de números mixtos

Objetivos

1. Sumar números mixtos.
2. Sumar números mixtos en forma vertical.
3. Restar números mixtos.
4. Resolver problemas de aplicación sumando y restando números mixtos.

En esta sección se explican varios métodos para sumar y restar números mixtos.

1 Sumar números mixtos

Los números mixtos se pueden sumar escribiéndolos como fracciones impropias. Para hacer esto, se siguen los siguientes pasos.

Suma de números mixtos: Método 1

1. Escriba cada número mixto como una fracción impropia.
2. Escriba cada fracción impropia como una fracción equivalente con un denominador que sea el mcd.
3. Sume las fracciones.
4. Escriba el resultado como un número mixto, si se desea.

El método 1 funciona bien cuando las partes de número entero de los números mixtos son pequeñas.

EJEMPLO 1 Sume: $4\frac{1}{6} + 2\frac{3}{4}$

Estrategia Se escribirá cada número mixto como una fracción impropia y después se utilizará la regla para la suma de dos fracciones que tienen denominadores diferentes.

POR QUÉ No se pueden sumar los números mixtos como están: sus partes fraccionales no son objetos similares.

$$4\frac{1}{\mathbf{6}} + 2\frac{3}{\mathbf{4}}$$

Cuatro y un sexto — Dos y tres cuartos

Solución

$$4\frac{1}{6} + 2\frac{3}{4} = \frac{25}{6} + \frac{11}{4}$$ Escriba $4\frac{1}{6}$ y $2\frac{3}{4}$ como fracciones impropias.

Por inspección, se observa que el mínimo común denominador es el 12.

$$= \frac{25 \cdot \mathbf{2}}{6 \cdot \mathbf{2}} + \frac{11 \cdot \mathbf{3}}{4 \cdot \mathbf{3}}$$ Construya $\frac{25}{6}$ y $\frac{11}{4}$ para que sus denominadores sean 12, multiplique cada uno por una forma de 1.

$$= \frac{50}{12} + \frac{33}{12}$$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$$= \frac{83}{12}$$ Sume los numeradores y escriba la suma sobre el denominador común de 12. El resultado es una fracción impropia.

$$= 6\frac{11}{12}$$ Escriba la fracción impropia $\frac{83}{12}$ como un número mixto.

$$12\overline{)83}\quad 6,\ -72,\ 11$$

Auto-revisión 1

Sume: $3\frac{2}{3} + 1\frac{1}{5}$

Ahora intente **Problema 13**

Consejo útil Se puede utilizar el redondeo para comprobar los resultados cuando se suman (o restan) números mixtos. Para comprobar la respuesta $6\frac{11}{12}$ del Ejemplo 1, se procede como a continuación:

$$4\frac{1}{6} + 2\frac{3}{4} \approx 4 + 3 = 7$$

Dado que $\frac{1}{6}$ es menor que $\frac{1}{2}$, redondee $4\frac{1}{6}$ hacia abajo a 4.
Dado que $\frac{3}{4}$ es mayor que $\frac{1}{2}$, redondee $2\frac{3}{4}$ hacia arriba a 3.

Dado que $6\frac{11}{12}$ es cercano a 7, es una respuesta razonable.

Auto-revisión 2

Sume: $-4\frac{1}{12} + 2\frac{1}{4}$

Ahora intente **Problema 17**

EJEMPLO 2

Sume: $-3\frac{1}{8} + 1\frac{1}{2}$.

Estrategia Se escribirá cada número mixto como una fracción impropia y después se utilizará la regla para la suma de dos fracciones que tienen denominadores diferentes.

POR QUÉ No se pueden sumar los números mixtos como están: sus partes fraccionales no son objetos similares.

$$-3\frac{1}{8} + 1\frac{1}{2}$$

Tres negativo y un octavo — Uno y un medio

Solución

$$-3\frac{1}{8} + 1\frac{1}{2} = -\frac{25}{8} + \frac{3}{2}$$

Escriba $-3\frac{1}{8}$ y $1\frac{1}{2}$ como fracciones impropias.

Dado que el número más pequeño que los denominadores 8 y 2 dividen de manera exacta es el 8, el mcd es el 8. Sólo se necesitará construir una fracción equivalente para $\frac{3}{2}$.

$$= -\frac{25}{8} + \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{4}$$

Para construir $\frac{3}{2}$ para que su denominador sea de 8, multiplíquela por una forma de 1.

$$= -\frac{25}{8} + \frac{12}{8}$$

Multiplique los numeradores.
Multiplique los denominadores.

$$= \frac{-25 + 12}{8}$$

Sume los numeradores y escriba la suma sobre el denominador común de 8.

$$= \frac{-13}{8}$$

Use la regla para la suma de enteros que tienen signos diferentes: $-25 + 12 = -13$.

$$= -1\frac{5}{8}$$

Escriba $\frac{-13}{8}$ como un número mixto negativo dividiendo 13 entre 8.

También se pueden sumar números mixtos sumando sus partes de número natural y sus partes fraccionales; para hacerlo, se siguen estos pasos.

Suma de números mixtos: Método 2

1. Escriba cada número mixto como la suma de un número natural y una fracción.
2. Use la propiedad conmutativa de la suma para escribir los números naturales juntos y las fracciones juntas.
3. Sume por separado los números naturales y las fracciones.
4. Escriba el resultado como un número mixto, si es necesario.

El método 2 funciona bien cuando las partes de número natural de los números mixtos son grandes.

EJEMPLO 3 Sume: $168\frac{3}{7} + 85\frac{2}{9}$.

Estrategia Se escribirá cada número mixto como la suma de un número natural y una fracción. Después se sumarán por separado los números naturales y las fracciones.

POR QUÉ Si se cambia cada número mixto a una fracción impropia, se forman fracciones equivalentes y se suman, los numeradores resultantes serán muy grandes y difíciles de trabajar.

Solución

Se escriba la solución en forma *horizontal*.

$$168\frac{3}{7} + 85\frac{2}{9} = 168 + \frac{3}{7} + 85 + \frac{2}{9}$$ Escriba cada número como la suma de un número natural y una fracción.

$$= 168 + 85 + \frac{3}{7} + \frac{2}{9}$$ Use la propiedad conmutativa de la suma para cambiar el orden de la suma para que los números naturales estén juntos y las fracciones estén juntas.

$$= 253 + \frac{3}{7} + \frac{2}{9}$$ Sume los números naturales.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1} \\ 168 \\ +\ 85 \\ \hline 253 \end{array}$$

$$= 253 + \frac{3}{7}\cdot\frac{9}{9} + \frac{2}{9}\cdot\frac{7}{7}$$ Prepare la suma de las fracciones. Para construir $\frac{3}{7}$ y $\frac{2}{9}$ y que sus denominadores sean 63, multiplique cada una por una forma de 1.

$$= 253 + \frac{27}{63} + \frac{14}{63}$$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$$= 253 + \frac{41}{63}$$ Sume los numeradores y escriba la suma sobre el denominador común 63.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 27 \\ +\ 14 \\ \hline 41 \end{array}$$

$$= 253\frac{41}{63}$$ Escriba la suma como un número mixto.

¡Cuidado! Si se emplea el método 1 para sumar los números mixtos en el Ejemplo 3, se encuentra que los números son muy grandes. Como se espera, el resultado es el mismo: $253\frac{41}{63}$.

$$168\frac{3}{7} + 85\frac{2}{9} = \frac{1{,}179}{7} + \frac{767}{9}$$ Escriba $168\frac{3}{7}$ y $85\frac{2}{9}$ como fracciones impropias.

$$= \frac{1{,}179}{7}\cdot\frac{9}{9} + \frac{767}{9}\cdot\frac{7}{7}$$ El mcd es el 63.

$$= \frac{10{,}611}{63} + \frac{5{,}369}{63}$$ Observe qué tan grandes son los numeradores.

$$= \frac{15{,}980}{63}$$ Sume los numeradores y escriba la suma sobre el denominador común de 63.

$$= 253\frac{41}{63}$$ Para escribir la fracción impropia como un número mixto, divida 15,980 entre 63.

Hablando de manera general, mientras más grandes sean las partes de número natural de los números mixtos, se vuelve más difícil sumar esos números mixtos empleando el Método 1.

Auto-revisión 3

Sume: $275\frac{1}{6} + 81\frac{3}{5}$

Ahora intente **Problema 21**

2 Sumar números mixtos en forma vertical

Se pueden sumar números mixtos de manera rápida cuando se escriben en **forma vertical** trabajando en columnas. La estrategia es la misma que en el Ejemplo 2: se suman los números naturales a los números naturales y las fracciones a las fracciones.

Auto-revisión 4

Sume: $71\frac{5}{8} + 23\frac{1}{3}$

Ahora intente **Problema 25**

EJEMPLO 4

Sume: $25\frac{3}{4} + 31\frac{1}{5}$.

Estrategia Se desarrollará la suma en forma vertical con las fracciones en una columna y los números naturales alineados en columnas. Después se sumarán por separado las partes fraccionales y las partes de número natural.

POR QUÉ Con frecuencia es más sencillo sumar las partes fraccionales y las partes de número natural de los números mixtos de manera vertical, especialmente si las partes de número natural contienen dos o más dígitos, como 25 y 31.

Solución

Escriba los números mixtos en forma vertical.
Construya $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{5}$ para que sus denominadores sean de 20.
Sume las fracciones por separado.
Sume los números naturales por separado.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 25\frac{3}{4} & = & 25\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{5} & = & 25\frac{15}{20} & = & 25\frac{15}{20} \\ +\ 31\frac{1}{5} & = & +\ 31\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{4} & = & +\ 31\frac{4}{20} & = & +\ 31\frac{4}{20} \\ \hline & & & & \frac{19}{20} & & 56\frac{19}{20} \end{array}$$

La suma es $56\frac{19}{20}$.

Auto-revisión 5

Sume y simplifique, si es posible:

$68\frac{1}{6} + 37\frac{5}{18} + 52\frac{1}{9}$

Ahora intente **Problema 29**

EJEMPLO 5

Sume y simplifique, si es posible: $75\frac{1}{12} + 43\frac{1}{4} + 54\frac{1}{6}$

Estrategia Se escribirá el problema en *forma vertical*. Asegúrese de que la parte fraccional de la respuesta esté en la forma más simple.

POR QUÉ Cuando se suman, restan, multiplican o dividen fracciones o números mixtos, la respuesta siempre debe escribirse en la forma más simple.

Solución

El mcd para $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{6}$ es 12.

Escriba los números mixtos en forma vertical.
Construya $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{6}$ para que sus denominadores sean de 12.
Sume las fracciones por separado.
Sume los números naturales por separado.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 75\frac{1}{12} & = & 75\frac{1}{12} & = & 75\frac{1}{12} & = & {\scriptstyle 11}\ 75\frac{1}{12} \\ 43\frac{1}{4} & = & 43\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3} & = & 43\frac{3}{12} & = & 43\frac{3}{12} \\ +\ 54\frac{1}{6} & = & +\ 54\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{2} & = & +\ 54\frac{2}{12} & = & +\ 54\frac{2}{12} \\ \hline & & & & \frac{6}{12} & & 172\frac{6}{12} = 172\frac{1}{2} \end{array}$$

Simplifique. $\frac{6}{12} = \frac{\overset{1}{\cancel{6}}}{2\cdot\underset{1}{\cancel{6}}} = \frac{1}{2}$.

La suma es $172\frac{1}{2}$.

Cuando se suman números mixtos, en ocasiones la suma de las fracciones es una fracción impropia.

EJEMPLO 6

Sume: $45\frac{2}{3} + 96\frac{4}{5}$.

Estrategia Se escribirá el problema en *forma vertical*. Se asegurará que la parte fraccional de la respuesta esté en la forma más simple.

POR QUÉ Cuando se suman, restan, multiplican o dividen fracciones o números mixtos, la respuesta siempre debe escribirse en la forma más simple.

Solución

El mcd para $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{5}$ es 15.

Escriba los números mixtos en forma vertical.
Construya $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{5}$ para que sus denominadores sean de 15.
Sume las fracciones por separado.
Sume los números naturales por separado.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 45\frac{2}{3} & = & 45\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{5} & = & 45\frac{10}{15} & = & 45\frac{10}{15} \\ +\ 96\frac{4}{5} & = & +\ 96\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{3} & = & +\ 96\frac{12}{15} & = & +\ 96\frac{12}{15} \\ \hline & & & & \frac{22}{15} & & 141\frac{22}{15} \end{array}$$

La parte fraccional de la respuesta es mayor que 1.

Dado que no se desea una fracción impropia en la respuesta, se escribe $\frac{22}{15}$ como un número mixto. Después se *acarrea* el 1 de la columna de las fracciones a la columna de los números naturales.

$$141\frac{22}{15} = 141 + \frac{22}{15}$$

Escriba el número mixto como la suma de un número natural y una fracción.

$$= 141 + 1\frac{7}{15}$$

Para escribir la fracción impropia como un número mixto divida 22 entre 15.

$$= 142\frac{7}{15}$$

Acarree el 1 y súmelo al 141 para obtener 142.

$$15\overline{)22}\quad \begin{array}{r} 1 \\ -\ 15 \\ \hline 7 \end{array}$$

Auto-revisión 6

Sume: $76\frac{11}{12} + 49\frac{5}{8}$

Ahora intente **Problema 33**

3 Restar números mixtos

La resta de números mixtos es similar a la suma de números mixtos.

EJEMPLO 7

Reste y simplifique, si es posible: $16\frac{7}{10} - 9\frac{8}{15}$.

Estrategia Se desarrollará la resta en *forma vertical* con las fracciones en una columna y los números naturales alineados en columnas. Después se restarán por separado las partes fraccionales y las partes de número natural.

POR QUÉ Con frecuencia es más sencillo restar las partes fraccionales y las partes de número natural de los números mixtos de manera vertical.

Auto-revisión 7

Reste y simplifique, si es posible:

$12\frac{9}{20} - 8\frac{1}{30}$

Ahora intente **Problema 37**

Solución

El mcd para $\frac{7}{10}$ y $\frac{8}{15}$ es 30.

Escriba los números mixtos en forma vertical.
Construya $\frac{7}{10}$ y $\frac{8}{15}$ para que sus denominadores sean de 30.
Reste las fracciones por separado.
Reste los números naturales por separado.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 16\frac{7}{10} & = & 16\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{3} & = & 16 & = & 16\frac{21}{30} \\ -\,9\frac{8}{15} & = & -\,9\frac{8}{15}\cdot\frac{2}{2} & = & -\,9 & = & -\,9\frac{16}{30} \\ & & & & & & 7\frac{5}{30} = 7\frac{1}{6} \end{array}$$

Simplifique. $\frac{5}{30} = \frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{5}_{1}\cdot 6} = \frac{1}{6}$.

La diferencia es $7\frac{1}{6}$.

La resta de números mixtos (como la resta de números naturales) en ocasiones involucra acarreo negativo. Cuando la fracción que se está restando es mayor que la fracción de la que se está restando, es necesario realizar un acarreo negativo.

Auto-revisión 8

Reste: $258\frac{3}{4} - 175\frac{15}{16}$

Ahora intente **Problema 41**

EJEMPLO 8

Reste: $34\frac{1}{8} - 11\frac{2}{3}$

Estrategia Se desarrollará la resta en *forma vertical* con las fracciones en una columna y los números naturales alineados en columnas. Después se restarán por separado las partes fraccionales y las partes de número natural.

POR QUÉ Con frecuencia es más sencillo restar las partes fraccionales y las partes de número natural de los números mixtos de manera vertical.

Solución

El mcd para $\frac{1}{8}$ y $\frac{2}{3}$ es 24.

Escriba los números mixtos en forma vertical.
Construya $\frac{1}{8}$ y $\frac{2}{3}$ para que sus denominadores sean de 24.

$$\begin{array}{rcrcr} 34\frac{1}{8} & = & 34\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{3} & = & 34\frac{3}{24} \\ -\,11\frac{2}{3} & = & -\,11\frac{2}{3}\cdot\frac{8}{8} & = & -\,11\frac{16}{24} \end{array}$$

Observe que $\frac{16}{24}$ es mayor que $\frac{3}{24}$.

Dado que $\frac{16}{24}$ es mayor que $\frac{3}{24}$, realice un acarreo negativo de 1 (en la forma de $\frac{24}{24}$) del 34 y súmelo al $\frac{3}{24}$ para obtener $\frac{27}{24}$.
Reste las fracciones por separado.
Reste los números naturales por separado.

$$\begin{array}{rcrcr} 34\frac{3}{24} + \frac{24}{24} & = & 33\frac{27}{24} & = & 33\frac{27}{24} \\ -\,11\frac{16}{24} & = & -\,11\frac{16}{24} & = & -\,11\frac{16}{24} \\ & & \frac{11}{24} & & 22\frac{11}{24} \end{array}$$

La diferencia es $22\frac{11}{24}$.

Consejo útil Se puede utilizar el redondeo para comprobar los resultados cuando se restan números mixtos. Para comprobar la respuesta $22\frac{11}{24}$ del Ejemplo 8, se procede como a continuación:

$34\frac{1}{8} - 11\frac{2}{3} \approx 34 - 12 = 22$

Dado que $\frac{1}{8}$ es menor que $\frac{1}{2}$, redondee $34\frac{1}{8}$ hacia abajo a 34.
Dado que $\frac{2}{3}$ es mayor que $\frac{1}{2}$, redondee $11\frac{2}{3}$ hacia arriba a 12.

Dado que $22\frac{11}{24}$ es cercano a 22, es una respuesta razonable.

EJEMPLO 9

Reste: $419 - 53\frac{11}{16}$

Estrategia Se escribirán los números en forma vertical y realizará un acarreo negativo de 1 $\left(\text{en la forma de } \frac{16}{16}\right)$ del 419.

POR QUÉ En la columna de las fracciones, se necesita tener una fracción de la cual restar $\frac{11}{16}$.

Solución

Escriba el número en forma vertical.
Realice un acarreo negativo de 1 (en la forma de $\frac{16}{16}$) del 419. Después reste por separado las fracciones.
Reste por separado los números naturales. Esto también requiere un acarreo negativo.

$$\begin{array}{rcrcr} 419 & = & 418\frac{16}{16} & = & 418\frac{16}{16} \\ -\ 53\frac{11}{16} & = & -\ 53\frac{11}{16} & = & -\ 53\frac{11}{16} \\ \hline & & 365\frac{5}{16} & & 365\frac{5}{16} \end{array}$$

La diferencia es $365\frac{5}{16}$.

Auto-revisión 9

Reste: $2{,}300 - 129\frac{31}{32}$

Ahora intente **Problema 45**

4 Resolver problemas de aplicación sumando y restando números mixtos

EJEMPLO 10 *Carreras de caballos*

Para ser el *campeón de la triple corona,* un caballo purasangre debe ganar tres carreras: el Derby de Kentucky ($1\frac{1}{4}$ millas de largo), el Preakness Stakes ($1\frac{3}{16}$ millas de largo) y el Belmont Stakes ($1\frac{1}{2}$ millas de largo). ¿Cuál es la longitud combinada de las tres carreras de la triple corona?

Analizar

- El Derby de Kentucky es de $1\frac{1}{4}$ millas de largo.
- El Preakness Stakes es de $1\frac{3}{16}$ millas de largo.
- El Belmont Stakes es de $1\frac{1}{2}$ millas de largo.
- ¿Cuál es la longitud combinada de las tres carreras?

Focus on Sport/Getty Images

En 1978, *Affirmed* fue el último de los 11 caballos en la historia en ganar la triple corona.

Auto-revisión 10

ENSALADAS Una ensalada de tres frijoles necesita una lata de ejotes ($14\frac{1}{2}$ onzas), una lata de garbanzos ($10\frac{3}{4}$ onzas) y una lata de judías enanas ($15\frac{7}{8}$ onzas). ¿Cuántas onzas de frijoles se solicitan en la receta?

Ahora intente **Problema 89**

Formar La frase clave *longitud combinada* indica una suma.
Se traducen las palabras del problema a números y símbolos.

La longitud combinada de las tres carreras	es igual a	la longitud del Derby de Kentucky	más	la longitud del Preakness Stakes	más	la longitud del Belmont Stakes
La longitud combinada de las tres carreras	=	$1\frac{1}{4}$	+	$1\frac{3}{16}$	+	$1\frac{1}{2}$

Resolver Para encontrar la suma se escribirán los números mixtos en forma vertical. Para sumar en la columna de las fracciones, el mcd para $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{16}$ y $\frac{1}{2}$ es 16.

Construya $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{2}$ para que sus denominadores sean de 16.
Sume las fracciones por separado.
Sume los números naturales por separado.

$$\begin{array}{rcccccc} 1\frac{1}{4} & = & 1\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{4} & = & 1\frac{4}{16} & = & 1\frac{4}{16} \\ 1\frac{3}{16} & = & 1\frac{3}{16} & = & 1\frac{3}{16} & = & 1\frac{3}{16} \\ +\,1\frac{1}{2} & = & +\,1\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{8} & = & +\,1\frac{8}{16} & = & +\,1\frac{8}{16} \\ \hline & & & & \frac{15}{16} & & 3\frac{15}{16} \end{array}$$

Enunciar La longitud combinada de las tres carreras de la triple corona es de $3\frac{15}{16}$ millas.

Comprobar Se puede estimar para comprobar el resultado. Si se redondea $1\frac{1}{4}$ hacia abajo a 1, se redondea $1\frac{3}{16}$ hacia abajo a 1 y se redondea $1\frac{1}{2}$ hacia arriba a 2, la longitud combinada aproximada de las tres carreras es $1 + 1 + 2 = 4$ millas. Dado que $3\frac{15}{16}$ es cercano a 4, el resultado parece razonable.

PIENSE DETENIDAMENTE

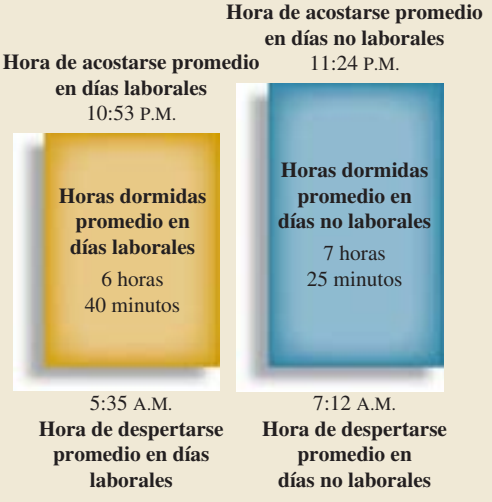
"Los estadounidenses no están durmiendo lo necesario, lo cual puede afectar su capacidad para desempeñarse bien durante la jornada laboral".

Informe de la National Sleep Foundation, 2008

A las 1,000 personas que tomaron parte en la encuesta *Sueño en Estados Unidos* en el 2008 se les preguntó cuándo despertaban por lo regular, cuándo iban a la cama y qué tanto dormían en días laborales y no laborales. Los resultados se muestran a la derecha. Escriba las horas promedio que dormían en un día laboral y en uno no laboral como números mixtos.

¿Cuánto más dormía en promedio una persona en un día no laboral?

Horarios de sueño regulares en días laborales y no laborales



(Fuente: National Sleep Foundation, 2008)

EJEMPLO 11 ***Repostería*** ¿Cuánta mantequilla queda en un tubo de 10 libras si se utilizaron $2\frac{2}{3}$ libras para un pastel de boda?

Copyright de la imagen Eric Limon, 2009. Utilizada bajo licencia de Shutterstock.com

Analizar

- El tubo contenía 10 libras de mantequilla.
- Se utilizaron $2\frac{2}{3}$ libras de mantequilla para un pastel.
- ¿Cuánta mantequilla queda en el tubo?

Formar La frase clave *cuánta mantequilla queda* indica una resta. Se traducen las palabras del problema a números y símbolos.

La cantidad de mantequilla que queda en el tubo	es igual a	la cantidad de mantequilla en un tubo	menos	la cantidad de mantequilla utilizada en el pastel
La cantidad de mantequilla que queda en el tubo	=	10	−	$2\frac{2}{3}$

Resolver Para encontrar la diferencia, se escribirán los números en forma vertical y se realizará un acarreo negativo de 1 (en la forma de $\frac{3}{3}$) del 10.

En la columna de las fracciones, se necesita tener una fracción a partir de la cual restar $\frac{2}{3}$.
Reste las fracciones por separado.
Reste los números naturales por separado.

$$\begin{array}{rcrcr} 10 & = & {}^{9}\cancel{10}\tfrac{3}{3} & = & {}^{9}\cancel{10}\tfrac{3}{3} \\ -\ 2\frac{2}{3} & = & -\ 2\frac{2}{3} & = & -\ 2\frac{2}{3} \\ \hline & & \frac{1}{3} & & 7\frac{1}{3} \end{array}$$

Enunciar Quedan $7\frac{1}{3}$ libras de mantequilla en el tubo.

Comprobar Se puede comprobar utilizando una suma. Si se utilizaron $2\frac{2}{3}$ libras de mantequilla y quedan $7\frac{1}{3}$ libras de mantequilla en el tubo, entonces el tubo contenía originalmente $2\frac{2}{3} + 7\frac{1}{3} = 9\frac{3}{3} = 10$ libras de mantequilla. El resultado es correcto.

Auto-revisión 11

TRANSPORTE El barril de mezcla de un camión de cemento contiene 9 yardas cúbicas de concreto. ¿Cuánto concreto queda si ya se han descargado $6\frac{3}{4}$ yardas cúbicas?

Ahora intente **Problema 95**

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. $4\frac{13}{15}$ **2.** $-1\frac{5}{6}$ **3.** $356\frac{23}{30}$ **4.** $94\frac{23}{24}$ **5.** $157\frac{5}{9}$ **6.** $126\frac{13}{24}$ **7.** $4\frac{5}{12}$ **8.** $82\frac{13}{16}$
9. $2{,}170\frac{1}{32}$ **10.** $41\frac{1}{8}$ oz **11.** $2\frac{1}{4}$ yd^3

SECCIÓN 3.6 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Complete los espacios.

1. Un número _____ como $1\frac{7}{8}$, contiene una parte de número natural y una parte fraccional.
2. Se pueden sumar (o restar) números mixtos de manera rápida cuando se escriben en forma _____ trabajando en columnas.
3. Para sumar (o restar) números mixtos escritos en forma vertical, se suman (o restan) por separado las _____ y los números _____.
4. Las fracciones como $\frac{11}{8}$, que son mayores que o iguales a 1, se les llama fracciones _____.

5. Considere el siguiente problema:

$$\begin{array}{r} 36\frac{5}{7} \\ +\ 42\frac{4}{7} \\ \hline 78\frac{9}{7} = 78 + 1\frac{2}{7} = 79\frac{2}{7} \end{array}$$

Dado que no se desea una fracción impropia en la respuesta, se escribe $\frac{9}{7}$ como $1\frac{2}{7}$, se _____ el 1 y se suma al 78 para obtener 79.

6. Considere el siguiente problema:

$$\begin{array}{rl} 86\frac{1}{3} = & 86\frac{1}{3} + \frac{3}{3} \\ -\ 24\frac{2}{3} = & -24\frac{2}{3} \end{array}$$

Para restar en la columna de las fracciones, se realiza un _____ de 1 del 86 en la forma de $\frac{3}{3}$.

CONCEPTOS

7. a. Para $76\frac{3}{4}$, liste la parte de número natural y la parte fraccional.

b. Escriba $76\frac{3}{4}$ como una suma.

8. Use la propiedad conmutativa de la suma para rescribir la siguiente expresión con los números naturales juntos y las fracciones juntas. *No tiene que encontrar la respuesta.*

$$14 + \frac{5}{8} + 53 + \frac{1}{6}$$

9. Se proporcionan los *denominadores* de dos fracciones. Encuentre el mínimo común denominador.

a. 3 y 4 **b.** 5 y 6

c. 6 y 9 **d.** 8 y 12

10. Simplifique.

a. $9\frac{17}{16}$ **b.** $1{,}288\frac{7}{3}$

c. $16\frac{12}{8}$ **d.** $45\frac{24}{20}$

NOTACIÓN

Llene los espacios para completar cada solución.

11.

$$\begin{array}{rl} 6\frac{3}{5} = & 6\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{7} = 6\frac{\square}{35} \\ +\ 3\frac{2}{7} = & +\ 3\frac{2}{7}\cdot\frac{\square}{\square} = +\ 3\frac{10}{\square\square} \\ & 9\frac{\square}{\square\square} \end{array}$$

12.

$$\begin{array}{rl} 67\frac{3}{8} = & 67\frac{3}{8}\cdot\frac{\square}{\square} = 67\frac{9}{24} = 67\frac{9}{24} + \frac{\square}{\square} = 66\frac{\square\square}{24} \\ -\ 23\frac{2}{3} = & -\ 23\frac{2}{3}\cdot\frac{8}{8} = -\ 23\frac{\square\square}{24} = -\ 23\frac{16}{24} \quad = -\ 23\frac{16}{24} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \frac{\square\square}{24} \end{array}$$

PRÁCTICA GUIADA

Sume. Vea el Ejemplo 1.

13. $1\frac{1}{4} + 2\frac{1}{3}$ **14.** $2\frac{2}{5} + 3\frac{1}{4}$

15. $2\frac{1}{3} + 4\frac{2}{5}$ **16.** $4\frac{1}{3} + 1\frac{1}{7}$

Sume. Vea el Ejemplo 2.

17. $-4\frac{1}{8} + 1\frac{3}{4}$ **18.** $-3\frac{11}{15} + 2\frac{1}{5}$

19. $-6\frac{5}{6} + 3\frac{2}{3}$ **20.** $-6\frac{3}{14} + 1\frac{2}{7}$

Sume. Vea el Ejemplo 3.

21. $334\frac{1}{7} + 42\frac{2}{3}$ **22.** $259\frac{3}{8} + 40\frac{1}{3}$

23. $667\frac{1}{5} + 47\frac{3}{4}$ **24.** $568\frac{1}{6} + 52\frac{3}{4}$

Sume. Vea el Ejemplo 4.

25. $41\frac{2}{9} + 18\frac{2}{5}$ **26.** $60\frac{3}{11} + 24\frac{2}{3}$

27. $89\frac{6}{11} + 43\frac{1}{3}$ **28.** $77\frac{5}{8} + 55\frac{1}{7}$

Sume y simplifique, si es posible. Vea el Ejemplo 5.

29. $14\frac{1}{4} + 29\frac{1}{20} + 78\frac{3}{5}$ **30.** $11\frac{1}{12} + 59\frac{1}{4} + 82\frac{1}{6}$

31. $106\frac{5}{18} + 22\frac{1}{2} + 19\frac{1}{9}$ **32.** $75\frac{2}{5} + 43\frac{7}{30} + 54\frac{1}{3}$

Sume y simplifique, si es posible. Vea el Ejemplo 6.

33. $39\frac{5}{8} + 62\frac{11}{12}$ **34.** $53\frac{5}{6} + 47\frac{3}{8}$

35. $82\frac{8}{9} + 46\frac{11}{15}$ **36.** $44\frac{2}{9} + 76\frac{20}{21}$

Reste y simplifique, si es posible. **Vea el Ejemplo 7.**

37. $19\frac{11}{12} - 9\frac{2}{3}$

38. $32\frac{2}{3} - 7\frac{1}{6}$

39. $21\frac{5}{6} - 8\frac{3}{10}$

40. $41\frac{2}{5} - 6\frac{3}{20}$

Reste. **Vea el Ejemplo 8.**

41. $47\frac{1}{11} - 15\frac{2}{3}$

42. $58\frac{4}{11} - 15\frac{1}{2}$

43. $84\frac{5}{8} - 12\frac{6}{7}$

44. $95\frac{4}{7} - 23\frac{5}{6}$

Reste. **Vea el Ejemplo 9.**

45. $674 - 94\frac{11}{15}$

46. $437 - 63\frac{6}{23}$

47. $112 - 49\frac{9}{32}$

48. $221 - 88\frac{35}{64}$

INTÉNTELO

Sume o reste y simplifique, si es posible.

49. $140\frac{5}{6} - 129\frac{4}{5}$

50. $291\frac{1}{4} - 289\frac{1}{12}$

51. $4\frac{1}{6} + 1\frac{1}{5}$

52. $2\frac{2}{5} + 3\frac{1}{4}$

53. $5\frac{1}{2} + 3\frac{4}{5}$

54. $6\frac{1}{2} + 2\frac{2}{3}$

55. $2 + 1\frac{7}{8}$

56. $3\frac{3}{4} + 5$

57. $8\frac{7}{9} - 3\frac{1}{9}$

58. $9\frac{9}{10} - 6\frac{3}{10}$

59. $140\frac{3}{16} - 129\frac{3}{4}$

60. $442\frac{1}{8} - 429\frac{2}{3}$

61. $380\frac{1}{6} + 17\frac{1}{4}$

62. $103\frac{1}{2} + 210\frac{2}{5}$

63. $-2\frac{5}{6} + 1\frac{3}{8}$

64. $-4\frac{5}{9} + 2\frac{1}{6}$

65. $3\frac{1}{4} + 4\frac{1}{4}$

66. $2\frac{1}{8} + 3\frac{3}{8}$

67. $-3\frac{3}{4} + \left(-1\frac{1}{2}\right)$

68. $-3\frac{2}{3} + \left(-1\frac{4}{5}\right)$

69. $7 - \frac{2}{3}$

70. $6 - \frac{1}{8}$

71. $12\frac{1}{2} + 5\frac{3}{4} + 35\frac{1}{6}$

72. $31\frac{1}{3} + 20\frac{2}{5} + 10\frac{1}{15}$

73. $16\frac{1}{4} - 13\frac{3}{4}$

74. $40\frac{1}{7} - 19\frac{6}{7}$

75. $-4\frac{5}{8} - 1\frac{1}{4}$

76. $-2\frac{1}{16} - 3\frac{7}{8}$

77. $6\frac{5}{8} - 3$

78. $10\frac{1}{2} - 6$

79. $\frac{7}{3} + 2$

80. $\frac{9}{7} + 3$

81. $58\frac{7}{8} + 340\frac{1}{2} + 61\frac{3}{4}$

82. $191\frac{1}{2} + 233\frac{1}{16} + 16\frac{5}{8}$

83. $9 - 8\frac{3}{4}$

84. $11 - 10\frac{4}{5}$

APLICACIONES

85. VIAJE EN AVIÓN El vuelo de una mujer de negocios salió de Los Ángeles y en $3\frac{3}{4}$ horas aterrizó en Minneapolis. Después abordó un vuelo en Minneapolis y llegó a su destino en $1\frac{1}{2}$ horas. Encuentre el tiempo total que pasó en los vuelos.

86. ENVÍO Un barco de pasajeros y un barco de carga salieron del puerto de San Diego a la media noche. Después de la primera hora, el barco de pasajeros viajó hacia el sur a $16\frac{1}{2}$ millas por hora, mientras que el barco de carga viajó al norte a una velocidad de $5\frac{1}{5}$ millas por hora. ¿Qué tan apartados estaban a la 1:00 A.M.?

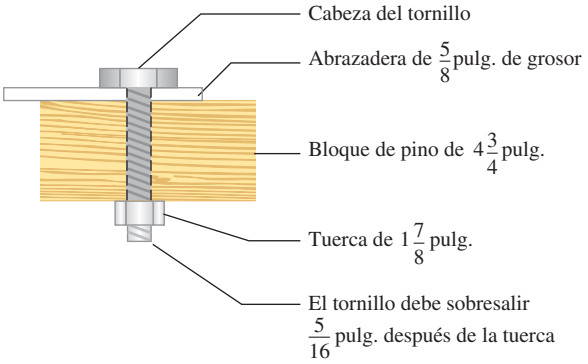
87. APERITIVO DE ALTO CONTENIDO ENERGÉTICO ¿Cuántas tazas de aperitivo preparará la receta mostrada abajo?

Aperitivo de alto contenido energético

Un grandioso aperitivo saludable para viajes de campamento

- $2\frac{3}{4}$ tazas de cacahuate
- $\frac{1}{3}$ taza de coco
- $\frac{1}{2}$ taza de semillas de girasol
- $2\frac{2}{3}$ tazas de hojuelas de avena
- $\frac{2}{3}$ taza de pasas
- $\frac{1}{4}$ taza de pretzeles

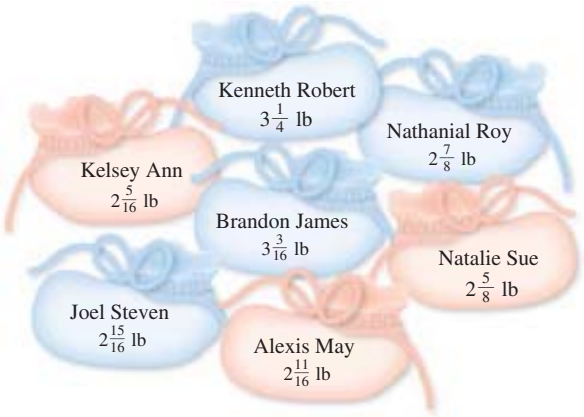
88. FERRETERÍA Refiérase a la ilustración abajo. ¿Qué tan larga debe ser la parte enroscada del tornillo?



89. OCTILLIZOS El 26 de enero del 2009, en el Permanente Bellflower Medical Center en California, Nadya Suleman dio a luz a ocho bebés. (Los primeros octillizos vivos en Estados Unidos nacieron en Houston en 1998 por parte de Nkem Chukwu e Iyke Louis Udobi.) Encuentre los pesos de nacimiento combinados de los bebés a partir de la información mostrada abajo. (Fuente: El sitio web de la familia de Nadya Suleman)

Núm. 1: Noah, masculino, $2\frac{11}{16}$ libras
Núm. 2: Maliah, femenino, $2\frac{3}{4}$ libras
Núm. 3: Isaiah, masculino, $3\frac{1}{4}$ libras
Núm. 4: Nariah, femenino, $2\frac{1}{2}$ libras
Núm. 5: Makai, masculino, $1\frac{1}{2}$ libras
Núm. 6: Josiah, masculino, $2\frac{3}{4}$ libras
Núm. 7: Jeremiah, masculino, $1\frac{15}{16}$ libras
Núm. 8: Jonah, masculino, $2\frac{11}{16}$ libras

90. SEPTILLIZOS El 19 de noviembre de 1997, en el Methodist Medical Center de Iowa, Bobbie McCaughey dio a luz a siete bebés. Encuentre los pesos de nacimiento combinados de los bebés a partir de la siguiente información. (Fuente: *Los Angeles Times*, noviembre 20 de 1997)



91. DOCUMENTOS HISTÓRICOS La Declaración de Independencia exhibida en los Archivos nacionales en Washington, D.C., es de $24\frac{1}{2}$ pulgadas de ancho por $29\frac{3}{4}$ pulgadas de alto. ¿Cuántas pulgadas de moldura se necesitarían para enmarcarla?

92. COLECCIÓN DE ESTAMPILLAS La Estampilla Pony Express, mostrada abajo, fue emitida en 1940. Es una favorita de los coleccionistas del mundo. Un documento del servicio postal describe su tamaño de manera inusual:

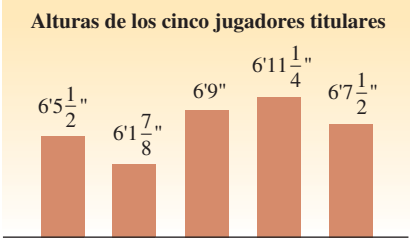
"Las dimensiones de la estampilla son de $\frac{84}{100}$ por $1\frac{44}{100}$ pulgadas acomodada de manera horizontal".

Para mostrar la estampilla, un coleccionista desea enmarcarla con un entorchado dorado. ¿Cuántas pulgadas de entorchado se necesitan?

Smithsonian National Postal Museum

93. SEÑALIZACIONES DE CARRETERA Se muestra un señalamiento de la salida de una carretera. ¿Qué tan apartadas están las salidas de la Av. Citrus y la Av. Grand?

94. BASQUETBOL Vea la gráfica de abajo. ¿Cuál es la diferencia en altura entre los jugadores titulares más alto y más bajo?



95. REPARACIÓN DE MANGUERAS Para reparar un conector descompuesto, un jardinero elimina $1\frac{1}{2}$ pies de un extremo de una manguera de 50 pies. ¿De qué largo es la manguera después de la reparación?

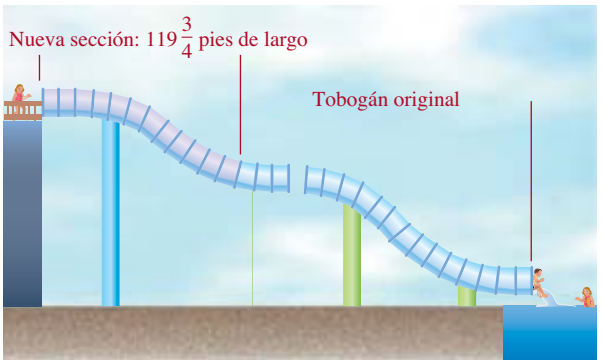
96. CORTES DE CABELLO Una madre hace que su hijo se realice un corte de cabello cuando éste mide 3 pulgadas de longitud. Su peluquero utiliza esquiladores con el adjunto #2 que deja $\frac{3}{8}$ de pulgada de cabello. ¿Cuántas pulgadas creció el cabello del niño entre cortes de cabello?

97. ESTACIONES DE SERVICIO Use la señalización de una estación de servicio mostrada abajo para responder las siguientes preguntas.

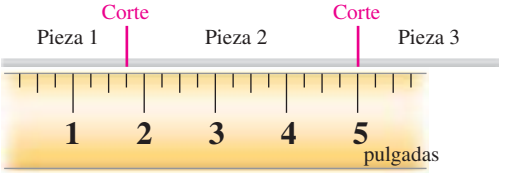
a. ¿Cuál es la diferencia en precio entre los tipos de gasolina más y menos caro en la bomba de autoservicio?

b. Para cada tipo de gasolina, ¿cuánto más es el costo por galón para el servicio completo en comparación con el autoservicio?

98. TOBOGANES Un parque de diversiones añadió una nueva sección a un tobogán para crear un deslizamiento de $311\frac{5}{12}$ pies de largo. ¿Qué tan largo era el tobogán antes de la adición?



99. JOYERÍA Un joyero cortó un alambre de plata de 7 pulgadas de largo en tres piezas. Para hacer esto, alineó una regla de 6 pulgadas de largo directamente debajo del alambre y realizó los cortes necesarios. Encuentre la longitud de la pieza 2 del alambre.



100. COSTURA Para hacer unas cortinas, un decorador de interiores necesita $12\frac{1}{4}$ yardas de material para el estudio y $8\frac{1}{2}$ yardas para la estancia. Si el material sólo viene en rollos de 21 yardas, ¿cuánto le sobrará después de completar ambos conjuntos de cortinas?

REDACCIÓN

101. De los métodos estudiados para sumar números mixtos, ¿cuál prefiere y por qué?

102. AÑO BISIESTO En realidad le toma a la Tierra $365\frac{1}{4}$ días, más menos unos cuantos minutos, en hacer una revolución alrededor del sol. Explique por qué cada cuatro años se suma un día al calendario para tomar en cuenta este hecho.

103. Explique el proceso de la simplificación de $12\frac{7}{5}$.

104. Considere el siguiente problema:

$$\begin{array}{r} 108\frac{1}{3} \\ -\,99\frac{2}{3} \\ \hline \end{array}$$

a. Explique por qué es necesario realizar un acarreo negativo.

b. Explique cómo se realiza el acarreo negativo.

REPASO

Desarrolle cada operación y simplifique, si es posible.

105. **a.** $3\frac{1}{2} + 1\frac{1}{4}$ **b.** $3\frac{1}{2} - 1\frac{1}{4}$

c. $3\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{4}$ **d.** $3\frac{1}{2} \div 1\frac{1}{4}$

106. **a.** $5\frac{1}{10} + \frac{4}{5}$ **b.** $5\frac{1}{10} - \frac{4}{5}$

c. $5\frac{1}{10} \cdot \frac{4}{5}$ **d.** $5\frac{1}{10} \div \frac{4}{5}$

Objetivos

1. Usar la regla del orden de las operaciones.
2. Resolver problemas de aplicación utilizando la regla del orden de las operaciones.
3. Evaluar fórmulas.
4. Simplificar fracciones complejas.

SECCIÓN 3.7
Orden de las operaciones y fracciones complejas

Se ha visto que la regla del orden de las operaciones se utiliza para evaluar expresiones que contienen más de una operación. En el Capítulo 1, se empleó para evaluar expresiones que involucraban números naturales y en el Capítulo 2, se empleó para evaluar expresiones que involucraban enteros. Ahora se utilizará para evaluar expresiones que involucran fracciones y números mixtos.

1 Usar la regla del orden de las operaciones

Recuerde a partir de la Sección 1.9 que si no se establece un orden uniforme de las operaciones, una expresión puede tener más de un valor. Para evitar esta posibilidad, siempre se debe seguir la siguiente regla.

Orden de las operaciones

1. Desarrolle todos los cálculos dentro de los paréntesis y otros símbolos de agrupación siguiendo el orden listado abajo en los Pasos 2–4 empezando desde el par más interno de símbolos de agrupación al par más externo.
2. Evalúe todas las expresiones exponenciales.
3. Desarrolle las multiplicaciones y divisiones a medida que aparezcan de izquierda a derecha.
4. Desarrolle las sumas y restas a medida que aparezcan de izquierda a derecha.

Cuando se hayan eliminado los símbolos de agrupación, repita los Pasos 2–4 para completar el cálculo.

Si está presente una barra de fracción, evalúe la expresión sobre la barra (llamada **numerador**) y la expresión debajo de la barra (llamada **denominador**) por separado. Después desarrolle la división indicada por la barra de fracción, si es posible.

Auto-revisión 1

Evalúe: $\frac{7}{8}+\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^2$

Ahora intente **Problema 15**

EJEMPLO 1 Evalúe: $\frac{3}{4}+\frac{5}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^3$

Estrategia Se examinará la expresión para determinar qué operaciones se necesitan desarrollar primero. Después se desarrollarán estas operaciones, una a la vez, siguiendo la regla del orden de las operaciones.

POR QUÉ Si no se sigue el orden correcto de las operaciones, la expresión puede tener más de un valor.

Solución

Aunque la expresión contiene paréntesis, no hay cálculos a desarrollar *dentro* de ellos. Se comenzará con el paso 2 de la regla: Evaluar todas las expresiones exponenciales. Se escribirán los pasos de la solución en forma horizontal.

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{4}+\frac{5}{3}\left(-\frac{1}{8}\right)$$

Evalúe: $\left(-\frac{1}{2}\right)^3=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}$.

$$=\frac{3}{4}+\left(-\frac{5}{24}\right)$$

Multiplique: $\frac{5}{3}\left(-\frac{1}{8}\right)=-\frac{5\cdot 1}{3\cdot 8}=-\frac{5}{24}$.

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{6}+\left(-\frac{5}{24}\right)$$

Prepare para sumar las fracciones: Su mcd es 24. Para construir la primera fracción para que su denominador sea 24, multiplíquela por una forma de 1.

$$= \frac{18}{24} + \left(-\frac{5}{24}\right)$$ Multiplique los numeradores: $3 \cdot 6 = 18$. Multiplique los denominadores: $4 \cdot 6 = 24$.

$$= \frac{13}{24}$$ Sume los numeradores: $18 + (-5) = 13$. Escriba la suma sobre el denominador común 24.

Si una expresión contiene símbolos de agrupación, se desarrollan primero las operaciones dentro de los símbolos de agrupación.

EJEMPLO 2

Evalúe: $\left(\frac{7}{8} - \frac{1}{4}\right) \div \left(-2\frac{3}{16}\right)$

Estrategia Se desarrollará primero cualquier operación dentro de los paréntesis.

POR QUÉ Este es el primer paso de la regla del orden de las operaciones.

Solución

Se comenzará desarrollando la resta dentro del primer conjunto de paréntesis. El segundo conjunto de paréntesis no contiene alguna operación a desarrollar.

$$\left(\frac{7}{8} - \frac{1}{4}\right) \div \left(-2\frac{3}{16}\right)$$

$$= \left(\frac{7}{8} - \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{2}\right) \div \left(-2\frac{3}{16}\right)$$ Dentro del primer conjunto de paréntesis, prepare para restar las fracciones: Su mcd es 8. Construya $\frac{1}{4}$ para que su denominador sea 8.

$$= \left(\frac{7}{8} - \frac{2}{8}\right) \div \left(-2\frac{3}{16}\right)$$ Multiplique los numeradores: $1 \cdot 2 = 2$. Multiplique los denominadores: $4 \cdot 2 = 8$.

$$= \frac{5}{8} \div \left(-2\frac{3}{16}\right)$$ Reste los numeradores: $7 - 2 = 5$. Escriba la diferencia sobre el denominador común de 8.

$$= \frac{5}{8} \div \left(-\frac{35}{16}\right)$$ Escriba el número mixto como una fracción impropia.

$$= \frac{5}{8}\left(-\frac{16}{35}\right)$$ Use la regla para la división de fracciones: Multiplique la primera fracción por el recíproco de $-\frac{35}{16}$.

$$= -\frac{5 \cdot 16}{8 \cdot 35}$$ Multiplique los numeradores y multiplique los denominadores. El producto de dos fracciones con signos no similares es negativo.

$$= -\frac{\overset{1}{\cancel{5}} \cdot 2 \cdot \overset{1}{\cancel{8}}}{\underset{1}{\cancel{8}} \cdot \underset{1}{\cancel{5}} \cdot 7}$$ Para simplificar, factorice el 16 como $2 \cdot 8$ y el 35 como $5 \cdot 7$. Elimine los factores comunes de 5 y 8 del numerador y el denominador.

$$= -\frac{2}{7}$$ Multiplique los factores restantes en el numerador. Multiplique los factores restantes en el denominador.

Auto-revisión 2

Evalúe:

$\left(\frac{19}{21} - \frac{2}{3}\right) \div \left(-2\frac{1}{7}\right)$

Ahora intente **Problema 19**

EJEMPLO 3

Sume $7\frac{1}{3}$ a la diferencia de $\frac{5}{6}$ y $\frac{1}{4}$.

Estrategia Se traducirán las palabras del problema a números y símbolos. Después se utilizará la regla del orden de las operaciones para evaluar la expresión resultante.

POR QUÉ Dado que la expresión involucra dos operaciones, suma y resta, se necesitan desarrollar en el orden apropiado.

Auto-revisión 3

Sume $2\frac{1}{4}$ a la diferencia de $\frac{7}{8}$ y $\frac{2}{3}$.

Ahora intente **Problema 23**

Solución

La palabra clave *diferencia* indica una resta. Dado que se tiene que sumar $7\frac{1}{3}$ a la diferencia, la diferencia debe escribirse dentro de paréntesis, seguida por la suma.

Sume $7\frac{1}{3}$ a la diferencia de $\frac{5}{6}$ y $\frac{1}{4}$.

$$\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{4}\right)+7\frac{1}{3}$$ Traduzca de palabras a números y símbolos matemáticos.

$$\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{4}\right)+7\frac{1}{3}=\left(\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3}\right)+7\frac{1}{3}$$ Prepare para restar las fracciones dentro de los paréntesis. Construya las fracciones para que sus denominadores sea el mcd 12.

$$=\left(\frac{10}{12}-\frac{3}{12}\right)+7\frac{1}{3}$$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$$=\frac{7}{12}+7\frac{1}{3}$$ Reste los numeradores: $10-3=7$. Escriba la diferencia sobre el denominador común 12.

$$=\frac{7}{12}+7\frac{4}{12}$$ Prepare para sumar las fracciones. Modifique $\frac{1}{3}$ para que su denominador sea 12: $\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{4}=\frac{4}{12}$.

$$=7\frac{11}{12}$$ Sume los numeradores de las fracciones: $7+4=11$. Escriba la suma sobre el denominador común 12.

2 Resolver problemas de aplicación utilizando la regla del orden de las operaciones

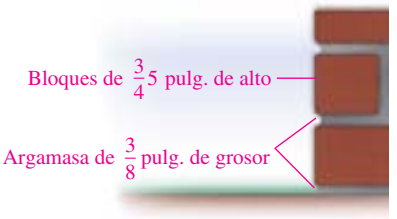
En ocasiones se necesita más de una operación para resolver un problema.

Auto-revisión 4

MAMPOSTERÍA Encuentre la altura de una pared si 8 capas (llamadas *tramos*) de bloques de $7\frac{3}{8}$ pulgadas de alto se pegan por medio de capas de argamasa de $\frac{1}{4}$ de pulgada de grosor.

Ahora intente **Problema 77**

EJEMPLO 4 ***Mampostería*** Para construir una pared, un albañil utilizará bloques que son de $5\frac{3}{4}$ pulgadas de alto, pegadas juntas con capas de argamasa de $\frac{3}{8}$ de pulgada de grosor. Si planea realizar 8 capas, llamadas *tramos,* de bloques, ¿cuál será la altura del muro cuando se complete?



Analizar

- Los bloque son de $5\frac{3}{4}$ pulgadas de alto. Proporcionado
- Una capa de argamasa es de $\frac{3}{8}$ de pulgada de grosor. Proporcionado
- Hay 8 capas (tramos) de bloques. Proporcionado
- ¿Cuál es la altura de la pared cuando se completa? A encontrar

Formar Para encontrar la altura de la pared cuando se complete, se pueden sumar las alturas de los 8 bloques y las 8 capas de argamasa. Sin embargo, será más sencillo si se encuentra la altura de un bloque y una capa de argamasa y después se multiplica el resultado por 8.

La altura de la pared cuando se complete es igual a 8 por (la altura de un bloque más el grosor de una capa de argamasa)

La altura de la pared cuando se complete $= 8 \left(5\frac{3}{4}+\frac{3}{8}\right)$

Resolver Para evaluar la expresión, se utiliza la regla del orden de las operaciones.

$$8\left(5\frac{3}{4}+\frac{3}{8}\right)=8\left(5\frac{6}{8}+\frac{3}{8}\right)$$ Preparese para sumar las fracciones dentro de los paréntesis. Su mcd es 8. Constuya $\frac{3}{4}$ para que su denominador sea 8: $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{2}=\frac{6}{8}$.

$$=8\left(5\frac{9}{8}\right)$$ Sume los numeradores de las fracciones: 6 + 3 = 9. Escriba la suma sobre el denominador común 8.

$$=\frac{8}{1}\left(\frac{49}{8}\right)$$ Prepare para multiplicar las fracciones. Escriba $5\frac{9}{8}$ como una fracción impropia.

$$=\frac{\overset{1}{\cancel{8}}\cdot 49}{1\cdot\underset{1}{\cancel{8}}}$$ Multiplique los numeradores y multiplique los denominadores. Para simplificar, elimine el factor común 8 del numerador y el denominador.

$$=49$$ Simplifique: $\frac{49}{1}=49$.

Enunciar La pared completa será de 49 pulgadas de alto.

Comprobar Se puede estimar para comprobar el resultado. Dado que un bloque y una capa de argamasa es de alrededor de 6 pulgadas de alto, ocho capas de bloques y argamasa serían de $8\cdot 6$ pulgadas, ó 48 pulgadas de alto. El resultado de 49 pulgadas parece razonable.

3 Evaluar fórmulas

Para evaluar una fórmula, se reemplazan sus letras, llamadas **variables**, con números específicos y se evalúa el lado derecho utilizando la regla del orden de las operaciones.

EJEMPLO 5 La fórmula para el área de un trapezoide es $A=\frac{1}{2}h(a+b)$, donde A es el área, h es la altura y a y b son las longitudes de sus bases. Encuentre A cuando $h=1\frac{2}{3}$ pulg., $a=2\frac{1}{2}$ pulg. y $b=5\frac{1}{2}$ pulg.

Estrategia En la fórmula, se reemplazará la letra h con $1\frac{2}{3}$, la letra a con $2\frac{1}{2}$, y la letra b con $5\frac{1}{2}$.

POR QUÉ Entonces se puede utilizar la regla del orden de las operaciones para encontrar el valor de la expresión en el lado derecho del símbolo =.

Solución

$$A=\frac{1}{2}h(a+b)$$ Esta es la fórmula para el área de un trapezoide.

$$=\frac{1}{2}\left(1\frac{2}{3}\right)\left(2\frac{1}{2}+5\frac{1}{2}\right)$$ Reemplace h, a y b con los valores dados.

$$=\frac{1}{2}\left(1\frac{2}{3}\right)(8)$$ Realice la suma dentro de los paréntesis: $2\frac{1}{2}+5\frac{1}{2}=8$.

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{8}{1}\right)$$ Para preparar la multiplicación de las fracciones, escriba $1\frac{2}{3}$ como una fracción impropia y el 8 como $\frac{8}{1}$.

$$=\frac{1\cdot 5\cdot 8}{2\cdot 3\cdot 1}$$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$$=\frac{1\cdot 5\cdot \overset{1}{\cancel{2}}\cdot 4}{\underset{1}{\cancel{2}}\cdot 3\cdot 1}$$ Para simplificar, factorice el 8 como $2\cdot 4$. Después elimine el factor común 2 del numerador y el denominador.

$$=\frac{20}{3}$$ Multiplique los factores restantes en el numerador. Multiplique los factores restantes en el denominador.

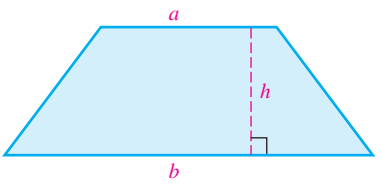
$$=6\frac{2}{3}$$ Escriba la fracción impropia $\frac{20}{3}$ como un número mixto dividiendo 20 entre 3.

El área del trapezoide es de $6\frac{2}{3}$ pulg.^{2}.

Auto-revisión 5

La fórmula para el área de un triángulo es $A=\frac{1}{2}bh$. Encuentre el área del triángulo cuya base es de $12\frac{1}{2}$ metros de largo y cuya altura es de $15\frac{1}{3}$ metros.

Ahora intente **Problemas 27 y 87**



Un trapezoide

4 Simplificar fracciones complejas

A las fracciones cuyos numeradores y/o denominadores contienen fracciones se les llama *fracciones complejas*. Aquí hay un ejemplo de una fracción compleja:

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{8}}$$

Una fracción en el numerador → $\frac{3}{4}$

← La barra de fracción principal

Una fracción en el denominador → $\frac{7}{8}$

Fracción compleja

Una **fracción compleja** es una fracción cuyo numerador o denominador, o ambos, contienen una o más fracciones o números mixtos.

Aquí algunos ejemplos más de fracciones complejas:

$$\frac{-\frac{1}{4}-\frac{4}{5}}{2\frac{4}{5}} \qquad \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}$$

← Numerador →

← Barra de fracción principal →

← Denominador →

El *simplificar* una fracción compleja significa expresarla como una fracción en forma simplificada.

El siguiente método para la simplificación de fracciones complejas se basa en el hecho de que la barra de fracción principal indica una división.

$$\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{5}} \longleftarrow \text{La barra de fracción principal significa "dividir la fracción en el numerador entre la fracción en el denominador".} \longrightarrow \frac{1}{4} \div \frac{2}{5}$$

Simplificación de una fracción compleja

Para simplificar una fracción compleja:

1. Sume o reste en el numerador y/o el denominador para que el numerador sea una sola fracción y el denominador sea una sola fracción.
2. Desarrolle la división indicada multiplicando el numerador de la fracción compleja por el recíproco del denominador.
3. Simplifique el resultado, si es posible.

Auto-revisión 6

Simplifique: $\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{8}}$

Ahora intente **Problema 31**

EJEMPLO 6

Simplifique: $\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{5}}$.

Estrategia Se desarrollará la división indicada por la barra de fracción principal utilizando la regla para la división de fracciones de la Sección 3.3.

POR QUÉ Se puede saltar el paso 1 e inmediatamente dividir debido a que el numerador y el denominador de la fracción compleja ya son fracciones solas.

Solución

$$\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{4} \div \frac{2}{5}$$ Escriba la división indicada por la barra de fracción principal utilizando un símbolo ÷.

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{2}$$ Use la regla para la división de fracciones: Multiplique la primera fracción por el recíproco de $\frac{2}{5}$, el cual es $\frac{5}{2}$.

$$= \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 2}$$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$$= \frac{5}{8}$$

EJEMPLO 7

Simplifique: $\dfrac{-\frac{1}{4} + \frac{2}{5}}{\frac{1}{2} - \frac{4}{5}}$.

Estrategia Recuerde que una barra de fracción es un tipo de símbolo de agrupación. Se resolverá por separado sobre y debajo de la barra de fracción para escribir $-\frac{1}{4} + \frac{2}{5}$ y $\frac{1}{2} - \frac{4}{5}$ como fracciones solas.

POR QUÉ El numerador y el denominador de la fracción compleja deben escribirse como fracciones solas antes de dividir.

Solución Para escribir el numerador como una sola fracción, se construye $-\frac{1}{4}$ y $\frac{2}{5}$ para que tengan un mcd de 20 y después se suma. Para escribir el denominador como una sola fracción, se construye $\frac{1}{2}$ y $\frac{4}{5}$ para que tengan un mcd de 10 y se resta.

$$\frac{-\frac{1}{4} + \frac{2}{5}}{\frac{1}{2} - \frac{4}{5}} = \frac{-\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{4}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{5} - \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{2}}$$ El mcd para el numerador es 20. Construya cada fracción para que cada una tenga un denominador 20.

El mcd para el denominador es 10. Modifique cada fracción para que cada una tenga un denominador 10.

$$= \frac{-\frac{5}{20} + \frac{8}{20}}{\frac{5}{10} - \frac{8}{10}}$$ Multiplique en el numerador. Multiplique en el denominador.

$$= \frac{\frac{3}{20}}{-\frac{3}{10}}$$ En el numerador de la fracción compleja, sume las fracciones. En el denominador, reste las fracciones.

$$= \frac{3}{20} \div \left(-\frac{3}{10}\right)$$ Escriba la división indicada por la barra de fracción principal utilizando el símbolo ÷.

$$= \frac{3}{20}\left(-\frac{10}{3}\right)$$ Multiplique la primera fracción por el recíproco de $-\frac{3}{10}$, el cual es $-\frac{10}{3}$.

$$= -\frac{3 \cdot 10}{20 \cdot 3}$$ El producto de dos fracciones con signos no similares es negativo. Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$$= -\frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot \overset{1}{\cancel{10}}}{2 \cdot \underset{1}{\cancel{10}} \cdot \underset{1}{\cancel{3}}}$$ Para simplificar, factorice el 20 como $2 \cdot 10$. Después elimine los factores comunes de 3 y 10 del numerador y el denominador.

$$= -\frac{1}{2}$$ Multiplique los factores restantes en el numerador. Multiplique los factores restantes en el denominador.

Auto-revisión 7

Simplifique: $\dfrac{-\frac{5}{8} + \frac{1}{3}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{3}}$

Ahora intente **Problema 35**

Auto-revisión 8

Simplifique: $\dfrac{5-\frac{3}{4}}{1\frac{7}{8}}$

Ahora intente **Problema 39**

EJEMPLO 8

Simplifique: $\dfrac{7-\frac{2}{3}}{4\frac{5}{6}}$.

Estrategia Recuerde que una barra de fracción es un tipo de símbolo de agrupación. Se resolverá por separado sobre y debajo de la barra de fracción para escribir $7-\frac{2}{3}$ como una sola fracción y $4\frac{5}{6}$ como una fracción impropia.

POR QUÉ El numerador y el denominador de la fracción compleja deben escribirse como fracciones solas antes de dividir.

Solución

$$\frac{7-\frac{2}{3}}{4\frac{5}{6}}=\frac{\frac{7}{1}\cdot\frac{3}{3}-\frac{2}{3}}{\frac{29}{6}}$$

En el numerador, escriba el 7 como $\frac{7}{1}$. El mcd para el numerador es 3. Construya $\frac{7}{1}$ para que su denominador sea 3. En el denominador, escriba $4\frac{5}{6}$ como la fracción impropia $\frac{29}{6}$.

$$=\frac{\frac{21}{3}-\frac{2}{3}}{\frac{29}{6}}$$

Multiplique en el numerador.

$$=\frac{\frac{19}{3}}{\frac{29}{6}}$$

En el numerador de la fracción compleja, reste los numeradores: $21-2=19$. Después escriba la diferencia sobre el denominador común 3.

$$=\frac{19}{3}\div\frac{29}{6}$$

Escriba la división indicada por la barra de fracción principal utilizando el símbolo $\div$.

$$=\frac{19}{3}\cdot\frac{6}{29}$$

Multiplique la primera fracción por el recíproco de $\frac{29}{6}$, el cual es $\frac{6}{29}$.

$$=\frac{19\cdot 6}{3\cdot 29}$$

Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$$=\frac{19\cdot 2\cdot \overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{3}}\cdot 29}$$

Para simplificar, factorice el 6 como $2\cdot 3$. Después elimine el factor común 3 del numerador y el denominador.

$$=\frac{38}{29}$$

Multiplique los factores restantes en el numerador. Multiplique los factores restantes en el denominador.

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. $\frac{31}{32}$ **2.** $-\frac{1}{9}$ **3.** $2\frac{11}{24}$ **4.** 61 in. **5.** $95\frac{5}{6}\text{ m}^2$ **6.** $\frac{4}{9}$ **7.** $-\frac{7}{10}$ **8.** $\frac{34}{15}$

SECCIÓN 3.7 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Complete los espacios.

1. Se utiliza el orden de la regla de las _____ para evaluar expresiones que contienen más de una operación.

2. Para evaluar una fórmula como $A=\frac{1}{2}h(a+b)$, se sustituyen números específicos por la letras, llamadas _____, en la fórmula y se encuentra el valor del lado derecho.

3. $\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}$ y $\dfrac{\frac{7}{8}+\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$ son ejemplos de fracciones _____.

4. En la fracción compleja $\dfrac{\frac{2}{5}+\frac{1}{4}}{\frac{2}{5}-\frac{1}{4}}$, el _____ es $\frac{2}{5}+\frac{1}{4}$ y el _____ es $\frac{2}{5}-\frac{1}{4}$.

CONCEPTOS

5. ¿Qué operaciones están involucradas en esta expresión?

$$5\left(6\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)^3$$

6. a. Para evaluar $\frac{7}{8}+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)$, ¿qué operación debe desarrollarse primero?

b. Para evaluar $\frac{7}{8}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)^2$, ¿qué operación debe desarrollarse primero?

7. Traduzca lo siguiente a números y símbolos. *No tiene que encontrar la respuesta.*

Sume $1\frac{2}{15}$ a la diferencia de $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{10}$.

8. Refiérase al trapezoide mostrado abajo. Etiquete la longitud de la base superior como de $3\frac{1}{2}$ pulgadas, la longitud de la base inferior como de $5\frac{1}{2}$ pulgadas y la altura como de $2\frac{2}{3}$ pulgadas.

9. ¿Qué división está representada por esta fracción compleja?

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{5}}$$

10. Considere: $\dfrac{\frac{2}{3}-\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}+\frac{4}{5}}$

a. ¿Cuál es el mcd para las fracciones en el numerador de esta fracción compleja?

b. ¿Cuál es el mcd para las fracciones en el denominador de esta fracción compleja?

11. Escriba el denominador de la siguiente fracción compleja como una fracción impropia.

$$\frac{\frac{1}{8}-\frac{3}{16}}{5\frac{3}{4}}$$

12. Cuando se simplifique esta fracción compleja, ¿el resultado será positivo o negativo?

$$\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}}$$

NOTACIÓN

Llene los espacios para completar cada solución.

13.
$$\frac{7}{12}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{7}{12}-\frac{1\cdot 1}{2\cdot\square}$$
$$=\frac{7}{12}-\frac{1}{\square}$$
$$=\frac{7}{12}-\frac{1}{6}\cdot\frac{\square}{\square}$$
$$=\frac{7}{12}-\frac{\square}{12}$$
$$=\frac{\square}{12}$$

14.
$$\frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{8}\div\frac{\square}{\square}$$
$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{\square}{\square}$$
$$=\frac{1\cdot\square}{8\cdot 3}$$
$$=\frac{1\cdot\cancel{\square}^{1}}{2\cdot\cancel{\square}_{1}\cdot 3}$$
$$=\frac{1}{\square}$$

PRÁCTICA GUIADA

Evalúe cada expresión. Vea el Ejemplo 1.

15. $\dfrac{3}{4}+\dfrac{2}{5}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2$

16. $\dfrac{1}{4}+\dfrac{8}{27}\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2$

17. $\dfrac{1}{6}+\dfrac{9}{8}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^3$

18. $\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{9}\left(-\dfrac{3}{2}\right)^3$

Evalúe cada expresión. **Vea el Ejemplo 2.**

19. $\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{6}\right)\div\left(-2\frac{1}{6}\right)$

20. $\left(\frac{7}{8}-\frac{3}{7}\right)\div\left(-1\frac{3}{7}\right)$

21. $\left(\frac{15}{16}-\frac{1}{8}\right)\div\left(-9\frac{3}{4}\right)$

22. $\left(\frac{19}{36}-\frac{1}{6}\right)\div\left(-8\frac{2}{3}\right)$

Evalúe cada expresión. **Vea el Ejemplo 3.**

23. Sume $5\frac{4}{15}$ a la diferencia de $\frac{5}{6}$ y $\frac{2}{3}$.

24. Sume $8\frac{5}{24}$ a la diferencia de $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{6}$.

25. Sume $2\frac{7}{18}$ a la diferencia de $\frac{7}{9}$ y $\frac{1}{2}$.

26. Sume $1\frac{19}{30}$ a la diferencia de $\frac{4}{5}$ y $\frac{1}{2}$.

Evalúe la fórmula $A=\frac{1}{2}h(a+b)$ ***para los valores proporcionados.*** **Vea el Ejemplo 5.**

27. $a=2\frac{1}{2}, b=7\frac{1}{2}, h=5\frac{1}{4}$

28. $a=4\frac{1}{2}, b=5\frac{1}{2}, h=2\frac{1}{8}$

29. $a=1\frac{1}{4}, b=6\frac{3}{4}, h=4\frac{1}{2}$

30. $a=1\frac{1}{3}, b=4\frac{2}{3}, h=2\frac{2}{5}$

Simplifique cada fracción compleja. **Vea el Ejemplo 6.**

31. $\dfrac{\frac{1}{16}}{\frac{2}{5}}$

32. $\dfrac{\frac{2}{11}}{\frac{3}{4}}$

33. $\dfrac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{4}}$

34. $\dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{8}{15}}$

Simplifique cada fracción compleja. **Vea el Ejemplo 7.**

35. $\dfrac{-\frac{1}{4}+\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}+\frac{2}{3}}$

36. $\dfrac{-\frac{1}{2}+\frac{7}{8}}{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}$

37. $\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{3}{4}}{\frac{1}{6}+\frac{2}{3}}$

38. $\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{3}{4}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}}$

Simplifique cada fracción compleja. **Vea el Ejemplo 8.**

39. $\dfrac{5-\frac{5}{6}}{1\frac{1}{12}}$

40. $\dfrac{4-\frac{3}{4}}{1\frac{7}{8}}$

41. $\dfrac{4-\frac{7}{8}}{3\frac{1}{4}}$

42. $\dfrac{6-\frac{2}{7}}{6\frac{2}{3}}$

INTÉNTELO

Evalúe cada expresión y simplifique cada fracción compleja.

43. $\frac{7}{8}-\left(\frac{4}{5}+1\frac{3}{4}\right)$

44. $\left(\frac{5}{4}\right)^2+\left(\frac{2}{3}-2\frac{1}{6}\right)$

45. $\dfrac{-\frac{14}{15}}{\frac{7}{10}}$

46. $\dfrac{\frac{5}{27}}{-\frac{5}{9}}$

47. $A=\frac{1}{2}bh$ para $b=10$ y $h=7\frac{1}{5}$

48. $V=lwh$ para $l=12, w=8\frac{1}{2}$ y $h=3\frac{1}{3}$

49. $\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}$

50. $-\frac{7}{8}-\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$

51. $\frac{4}{5}-\left(-\frac{1}{3}\right)^2$

52. $-\frac{3}{16}-\left(-\frac{1}{2}\right)^3$

53. $\dfrac{\frac{3}{8}+\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}-\frac{1}{4}}$

54. $\dfrac{\frac{2}{5}+\frac{1}{4}}{\frac{2}{5}-\frac{1}{4}}$

55. Sume $12\frac{11}{12}$ a la diferencia de $5\frac{1}{6}$ y $3\frac{7}{8}$.

56. Sume $18\frac{1}{3}$ a la diferencia de $11\frac{3}{5}$ y $9\frac{11}{15}$.

57. $\dfrac{5\frac{1}{2}}{-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}$

58. $\dfrac{4\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}+\left(-\frac{1}{6}\right)}$

59. $\left|\frac{2}{3}-\frac{9}{10}\right| \div \left(-\frac{1}{5}\right)$

60. $\left|-\frac{3}{16} \div 2\frac{1}{4}\right| + \left(-2\frac{1}{8}\right)$

61. $\dfrac{\frac{1}{5}-\left(-\frac{1}{4}\right)}{\frac{1}{4}+\frac{4}{5}}$

62. $\dfrac{\frac{1}{8}-\left(-\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{4}+\frac{3}{8}}$

63. $1\frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)$

64. $2\frac{3}{5}\left(-\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)$

65. $A = lw$, para $l = 5\frac{5}{6}$ y $w = 7\frac{3}{5}$.

66. $P = 2l + 2w$, para $l = \frac{7}{8}$ y $w = \frac{3}{5}$.

67. $\left(2-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(2+\frac{1}{2}\right)^2$

68. $\left(\frac{9}{20} \div 2\frac{2}{5}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)^2$

69. $\dfrac{-\frac{5}{6}}{-1\frac{7}{8}}$

70. $\dfrac{-\frac{4}{3}}{-2\frac{5}{6}}$

71. Reste $9\frac{1}{10}$ de la suma de $7\frac{3}{7}$ y $3\frac{1}{5}$.

72. Reste $3\frac{2}{3}$ de la suma de $2\frac{5}{12}$ y $1\frac{5}{8}$.

73. $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}$

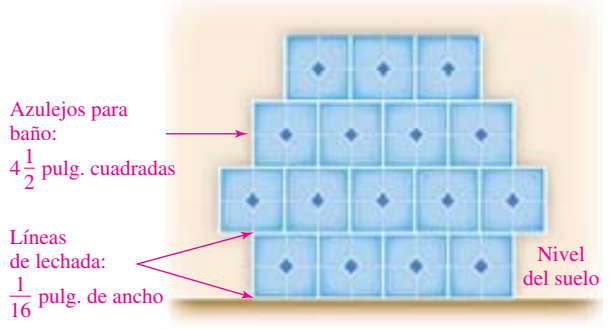
74. $\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}$

75. $\left(\frac{8}{5}-1\frac{1}{3}\right)-\left(-\frac{4}{5}\cdot 10\right)$

76. $\left(1-\frac{3}{4}\right)\left(1+\frac{3}{4}\right)$

APLICACIONES

77. REMODELACIÓN DE UN BAÑO Un hombre instaló 20 hileras de lechada y azulejo en la pared de un baño utilizando el patrón mostrado abajo. ¿Qué tan alto sobre el nivel del suelo llega el trabajo de azulejo? (*Sugerencia:* No hay una línea de lechada sobre la última hilera de azulejos.)



78. MADERA LAMINADA Para fabricar una hoja de madera laminada, se pegan entre sí varias capas delgadas de madera, como se muestra. Después se añade un terminado exterior a la parte superior e inferior, como se muestra abajo. ¿De qué grosor es el producto final?

79. TARIFAS DE CORREOS ¿El paquete de publicidad mostrado abajo puede enviarse por correo por la tarifa de 1 onza?

Sobre
(peso: $\frac{1}{16}$ oz)

Libro de cupones
(peso: $\frac{5}{8}$ oz)

Carta de 3 páginas
(cada hoja pesa $\frac{1}{16}$ oz)

80. TERAPIA FÍSICA Después de una cirugía de espalda, una paciente siguió el programa de caminata mostrado en la tabla abajo para fortalecer sus músculos. ¿Cuál fue la distancia total que caminó en este periodo de tres semanas?

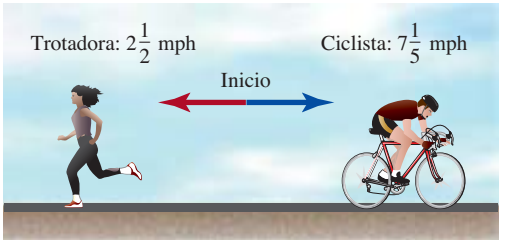
Semana	Distancia por día
#1	$\frac{1}{4}$ de milla
#2	$\frac{1}{2}$ de milla
#3	$\frac{3}{4}$ de milla

81. PROGRAMAS DE LECTURA Para mejorar las habilidades de lectura, los niños de primaria leyeron en silencio al final del día escolar por $\frac{1}{4}$ de hora los lunes y por $\frac{1}{2}$ de hora los viernes. Para el mes de enero, ¿cuántas horas en total leyeron en silencio en clases los niños?

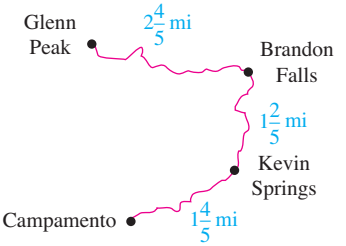
D	L	M	M	J	V	S
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

82. BUENA CONDICIÓN FÍSICA Dos personas comienzan sus rutinas desde el mismo punto en una ciclovía y viajan en direcciones opuestas, como se muestra abajo. ¿Qué tan separados están en $1\frac{1}{2}$ horas? Use la tabla para ayudarse a organizar su trabajo.

	Velocidad (mph)	· Tiempo (hr)	= Distancia (mi)
Trotadora			
Ciclista			



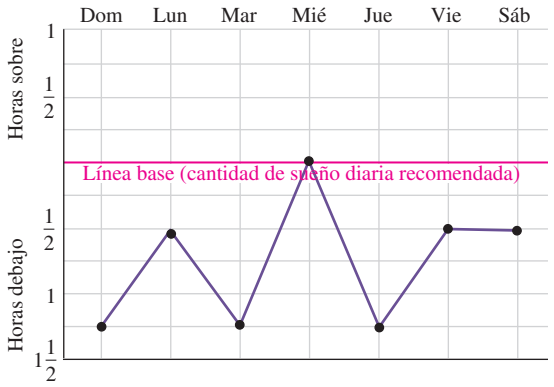
83. EXCURSIONISMO Una tropa de scouts planea realizar una excursión desde el campo base a Glenn Peak, como se muestra abajo. Dado que el terreno es empinado, planean detenerse y descansar después de cada $\frac{2}{3}$ de milla. Con este plan, ¿de cuántas partes consistirá esta excursión?



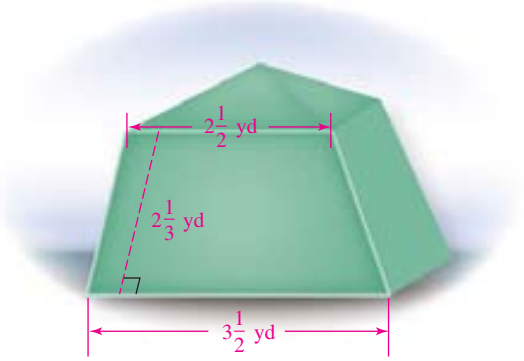
84. TIENDAS DE PLATOS PREPARADOS Una tienda de sándwiches vende un club sándwich de $\frac{1}{2}$ de libra de pavo y jamón. El dueño compra el pavo en paquetes de $1\frac{3}{4}$ libras y el jamón en paquetes de $2\frac{1}{2}$ libras. Si mezcla dos paquetes de pavo y un paquete de jamón, ¿cuántos sándwiches puede preparar a partir de esta mezcla?

85. CREMAS PARA LA PIEL Utilizando una fórmula de $\frac{1}{2}$ de onza de bloqueador solar, $\frac{2}{3}$ de onza de crema humectante y $\frac{3}{4}$ de onza de lanolina, una cosmetóloga mezcla su propia marca de crema para la piel. La envasa en tubos de $\frac{1}{4}$ de onza. ¿Cuántos tubos pueden producirse utilizando esta fórmula? ¿Cuánta crema para la piel sobra?

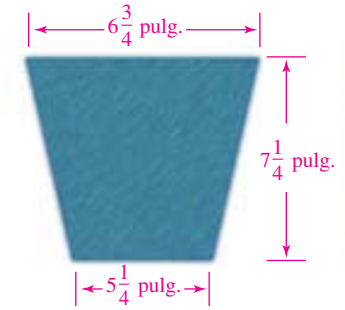
86. SUEÑO La gráfica mostrada abajo compara la cantidad de sueño de un bebé de un mes de nacido con el requerimiento diario de $15\frac{1}{2}$ horas recomendado por el hospital pediátrico de Orange County, California. Para la semana, ¿qué tan debajo de la línea base estaba el promedio diario del bebé?

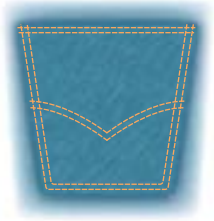


87. ACAMPAR Los cuatro lados de una tienda son de la misma forma trapezoidal. (Vea la ilustración abajo.) ¿Cuántas yardas cuadradas de lona se utilizan para formar uno de los lados de la tienda?



88. COSTURA Una costurera comienza con una pieza de forma trapezoidal de mezclilla para hacer el bolsillo trasero en un par de jeans. (Vea la ilustración de abajo.) ¿Cuántas pulgadas cuadradas de mezclilla se utilizan para hacer el bolsillo?




Bolsillo terminado

89. PARQUES DE DIVERSIONES Al final de un recorrido en un parque de diversiones, un bote esparce agua de una alberca . El tiempo (en segundos) que le toma a dos tuberías volver a llenar la alberca está dado por

$$\frac{1}{\frac{1}{10}+\frac{1}{15}}$$

Simplifique la fracción compleja para encontrar el tiempo.

90. ÁLGEBRA Las fracciones complejas, como la mostrada abajo, se ven en una clase de álgebra cuando se estudia el tema de la *pendiente de una recta*. Simplifique esta fracción compleja y, como se hace en el álgebra, escriba la respuesta como una fracción impropia.

$$\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}$$

REDACCIÓN

91. ¿Por qué es necesaria la regla del orden de las operaciones?

92. ¿A qué se refiere con evaluar una fórmula?

93. ¿Qué es una fracción compleja?

94. En la fracción compleja $\dfrac{\frac{3}{8}+\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}-\frac{1}{4}}$, la barra de fracción sirve como un símbolo de agrupación. Explique por qué es esto.

REPASO

95. Encuentre la suma: $8 + 19 + 124 + 2{,}097$

96. Reste 879 de 1,023.

97. Multiplique 879 por 23.

98. Divida 1,665 entre 45.

99. Liste los factores del 24.

100. Encuentre la factorización de primos del 24.

LISTA DE VERIFICACIÓN DE LAS HABILIDADES DE ESTUDIO

Trabajando con fracciones

Antes de tomar el examen en el Capítulo 3, asegúrese de que tiene una comprensión sólida de los siguientes métodos para la simplificación, multiplicación, división, suma y resta de fracciones. Coloque una marca de verificación en cada recuadro después de responder la pregunta.

☐ Sé cómo simplificar fracciones factorizando el numerador y el denominador y después eliminando los factores comunes.

$$\frac{42}{50} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 7}{2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot 3 \cdot 7}{\underset{1}{\cancel{2}} \cdot 5 \cdot 5} = \frac{21}{25}$$

☐ Cuando se multiplican fracciones, sé que es importante factorizar y simplificar primero, antes de multiplicar.

Factorice y simplifique primero

$$\frac{15}{16} \cdot \frac{24}{35} = \frac{15 \cdot 24}{16 \cdot 35} = \frac{3 \cdot \overset{1}{\cancel{5}} \cdot 3 \cdot \overset{1}{\cancel{8}}}{2 \cdot \underset{1}{\cancel{8}} \cdot \underset{1}{\cancel{5}} \cdot 7}$$

No multiplique primero

$$\frac{15}{16} \cdot \frac{24}{35} = \frac{15 \cdot 24}{16 \cdot 35} = \frac{360}{560}$$

☐ Para dividir fracciones, sé que hay que multiplicar la primera fracción por el recíproco de la segunda fracción.

$$\frac{7}{8} \div \frac{23}{24} = \frac{7}{8} \cdot \frac{24}{23}$$

☐ Sé que para sumar o restar fracciones, deben tener un denominador común. Para multiplicar o dividir fracciones **no** necesitan tener un denominador común.

Necesitan un mcd $\frac{2}{3} + \frac{1}{5}$ $\quad \frac{9}{20} - \frac{7}{12}$

No necesitan un mcd $\frac{4}{7} \cdot \frac{2}{9}$ $\quad \frac{11}{40} \div \frac{5}{8}$

☐ Sé como encontrar el mcd de un conjunto de fracciones utilizando uno de los siguientes métodos.

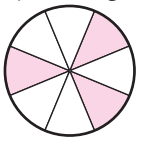
- Escribir los múltiplos del denominador más grande en orden creciente, hasta encontrar uno que sea divisible entre los demás denominadores.
- Realizar la factorización de primos de cada denominador. El mcm es un producto de los factores primos, donde cada factor se utiliza el mayor número de veces que aparece en cualquier factorización.

☐ Sé como construir fracciones equivalentes multiplicando la fracción proporcionada por una forma de 1.

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{5} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15}$$

CAPÍTULO 3 RESUMEN Y REPASO

SECCIÓN 3.1 Introducción a las fracciones

DEFINICIONES Y CONCEPTOS	EJEMPLOS
Una **fracción** describe el número de partes iguales de un todo. En una fracción, al número sobre la **barra de fracción** se le llama **numerador** y al número debajo se le llama **denominador.**	Dado que 3 de las 8 partes iguales están coloreadas de rojo, $\frac{3}{8}$ (tres octavos) de la figura están sombreados.  Barra de fracción → $\frac{3}{8}$ ← numerador, denominador

Si el numerador de una fracción es menor que su denominador, a la fracción se le llama **fracción propia.** Si el numerador de una fracción es mayor que o igual a su denominador, a la fracción se le llama **fracción impropia.**

Fracciones propias: $\frac{1}{5}, \frac{7}{8}$, y $\frac{999}{1{,}000}$ Las fracciones propias son menores que 1.

Fracciones impropias: $\frac{3}{2}, \frac{41}{16}$ y $\frac{15}{15}$ Las fracciones impropias son mayores que o iguales a 1.

Existen cuatro **formas especiales de las fracciones** que involucran al 0 y al 1.

Cada una de estas fracciones es una **forma de 1**:

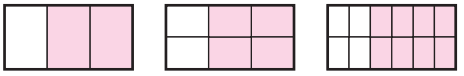
$$1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = \frac{6}{6} = \frac{7}{7} = \frac{8}{8} = \frac{9}{9} = \ldots$$

Simplifique cada fracción:

$\frac{\mathbf{0}}{8} = 0$ $\quad \frac{7}{\mathbf{0}}$ está indefinida $\quad \frac{5}{\mathbf{1}} = 5$ $\quad \frac{20}{20} = \mathbf{1}$

Dos fracciones son **equivalentes** si representan al mismo número. Las **fracciones equivalentes** representan la misma porción de un todo.

$\frac{2}{3}, \frac{4}{6}$ y $\frac{8}{12}$ son fracciones equivalentes. Representan la misma porción sombreada de la figura.



$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{12}$

Para **construir una fracción,** se multiplica por un factor de 1 en la forma $\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \frac{5}{5}$, etcétera.

Escriba $\frac{3}{4}$ como una fracción equivalente con un denominador de 36.

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{9}}$$

Se debe multiplicar el denominador de $\frac{3}{4}$ por 9 para obtener un denominador de 36. Se tiene que $\frac{9}{9}$ debe ser la forma de 1 que se utiliza para construir $\frac{3}{4}$.

$$= \frac{3 \cdot 9}{4 \cdot 9}$$

Multiplique los numeradores.
Multiplique los denominadores.

$$= \frac{27}{36}$$

$\frac{27}{36}$ es equivalente a $\frac{3}{4}$.

Una fracción está en la **forma más simple,** o en los **términos más bajos,** cuando el numerador y el denominador no tienen factores comunes diferentes del 1.

¿$\frac{6}{14}$ está en la forma más simple?

Los factores del numerador, 6, son: **1**, **2**, 3, 6.
Los factores del denominador, 14, son: **1**, **2**, 7, 14.

Dado que el numerador y el denominador tienen un factor común de 2, la fracción $\frac{6}{14}$ *no* está en la forma más simple.

Para **simplificar una fracción,** se escribe en la forma más simple eliminando un factor igual a 1:

1. Factorice (o realice una factorización de primos) el numerador y el denominador para determinar sus factores comunes.
2. Elimine los factores iguales a 1 reemplazando cada par de factores comunes para el numerador y el denominador con la fracción equivalente $\frac{1}{1}$.
3. Multiplique los factores restantes en el numerador y el denominador.

Simplifique: $\frac{12}{30}$

$$\frac{12}{30} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 5}$$

Realice la factorización de primos del 12 y el 30.

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot 2 \cdot \overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{2}} \cdot \underset{1}{\cancel{3}} \cdot 5}$$

Elimine los factores comunes de 2 y 3 del numerador y el denominador.

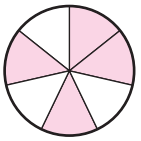
$$= \frac{2}{5}$$

Multiplique los factores restantes en el numerador: $1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$.
Multiplique los factores restantes en el denominador: $1 \cdot 1 \cdot 5 = 5$.

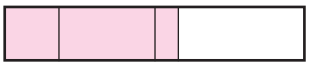
Dado que el 2 y el 5 no tienen factores comunes diferentes del 1, se dice que $\frac{2}{5}$ está en la forma más simple.

EJERCICIOS DE REPASO

1. Identifique el numerador y el denominador de la fracción $\frac{11}{16}$. ¿Es una fracción propia o impropia?
2. Escriba fracciones que representen las porciones sombreadas y no sombreadas de la figura a la derecha.



3. En la ilustración abajo, ¿por qué no se puede decir que $\frac{3}{4}$ de la figura está sombreada?

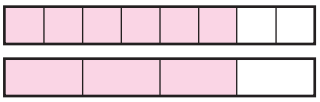


4. Escriba la fracción $\frac{2}{-3}$ de otras dos maneras.
5. Simplifique, si es posible:

   a. $\frac{5}{5}$ **b.** $\frac{0}{10}$

   c. $\frac{18}{1}$ **d.** $\frac{7}{0}$

6. ¿Qué concepto acerca de las fracciones se ilustra abajo?



Escriba cada fracción como una fracción equivalente con el denominador indicado.

7. $\frac{2}{3}$, denominador de 18
8. $\frac{3}{8}$, denominador de 16
9. $\frac{7}{15}$, denominador de 45
10. $\frac{13}{12}$, denominador de 60
11. Escriba el 5 como una fracción equivalente con un denominador de 9.
12. ¿Las siguientes fracciones están en la forma más simple?

    a. $\frac{6}{9}$ **b.** $\frac{10}{81}$

Simplifique cada fracción, si es posible.

13. $\frac{15}{45}$
14. $\frac{20}{48}$
15. $\frac{66}{108}$
16. $\frac{117}{208}$
17. $\frac{81}{64}$
18. Indique si $\frac{8}{12}$ y $\frac{176}{264}$ son equivalentes simplificando cada fracción.
19. SUEÑO Si una mujer duerme siete horas cada noche, escriba una fracción para describir la parte de un día completo que pasa durmiendo y otra para describir la parte de un día completo en la que no está durmiendo.
20. **a.** ¿Qué tipo de problema se muestra abajo? Explique la solución.

$$\frac{5}{8} = \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{2} = \frac{10}{16}$$

b. ¿Qué tipo de problema se muestra abajo? Explique la solución.

$$\frac{4}{6} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot 2}{\underset{1}{\cancel{2}} \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

SECCIÓN 3.2 Multiplicación de fracciones

DEFINICIONES Y CONCEPTOS

Para **multiplicar dos fracciones,** multiplique los numeradores y multiplique los denominadores. Simplifique el resultado, si es posible.

EJEMPLOS

Multiplique y simplifique, si es posible: $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3}$$

Multiplique los numeradores.
Multiplique los denominadores.

$$= \frac{8}{15}$$

Dado que el 8 y el 15 no tienen factores comunes diferentes del 1, el resultado está en la forma más simple.

Multiplicación de fracciones con signo

El producto de dos fracciones con signos iguales (similares) es positivo. El producto de dos fracciones con signos diferentes (no similares) es negativo.

Multiplique y simplifique, si es posible: $-\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{27}$

$$-\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{27} = -\frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 27}$$

Multiplique los numeradores.
Multiplique los denominadores.
Dado que las fracciones tienen signos no similares, haga negativa la respuesta.

$$= -\frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot \overset{1}{2}}{\underset{1}{2} \cdot 2 \cdot \underset{1}{\cancel{3}} \cdot 3 \cdot 3}$$

Realice la factorización de primos del 4 y el 27. Después simplifique, eliminando los factores comunes de 2 y 3 del numerador y el denominador.

$$= -\frac{1}{18}$$

Multiplique los factores restantes en el numerador: $1 \cdot 1 = 1$.
Multiplique los factores restantes en el numerador: $1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 = 18$.

La base de una **expresión exponencial** puede ser una fracción positiva o negativa.

La regla para la multiplicación de dos fracciones puede extenderse para encontrar el producto de tres o más fracciones.

Evalúe: $\left(\frac{2}{3}\right)^3$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$$

Escriba la base, $\frac{2}{3}$, como un factor 3 veces.

$$= \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3}$$

Multiplique los numeradores.
Multiplique los denominadores.

$$= \frac{8}{27}$$

Esta fracción está en la forma más simple.

Cuando una **fracción está seguida por la palabra *de*,** indica que se tiene que encontrar una parte de alguna cantidad utilizando una multiplicación.

Para encontrar $\frac{2}{5}$ de 35, se multiplica:

$$\frac{2}{5} \textit{ de } 35 = \frac{2}{5} \cdot 35$$

La palabra *de* indica una multiplicación.

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{35}{1}$$

Escriba el 35 como una fracción: $35 = \frac{35}{1}$.

$$= \frac{2 \cdot 35}{5 \cdot 1}$$

Multiplique los numeradores.
Multiplique los denominadores.

$$= \frac{2 \cdot \overset{1}{\cancel{5}} \cdot 7}{\underset{1}{\cancel{5}} \cdot 1}$$

Realice la factorización de primos del 35. Después simplifique eliminando el factor común de 5 del numerador y el denominador.

$$= \frac{14}{1}$$

Multiplique los factores restantes en el numerador y en el denominador.

$$= 14$$

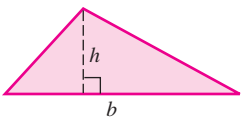
Cualquier número dividido entre 1 es igual a ese número.

Fórmula para el área de un triángulo

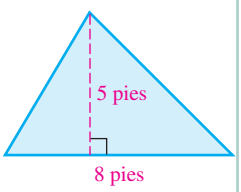
Área de un triángulo $= \frac{1}{2}$ (base)(altura)

o

$$a = \frac{1}{2}bh$$



Encuentre el área del triángulo mostrado a la derecha.



$$a = \frac{1}{2}(\textbf{base})(\textbf{altura})$$

$$= \frac{1}{2}(\textbf{8})(\textbf{5})$$

Sustituya 8 para la base y 5 para la altura.

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{5}{1}\right)\left(\frac{8}{1}\right)$$

Escriba el 5 y el 8 como fracciones.

$$= \frac{1 \cdot 5 \cdot 8}{2 \cdot 1 \cdot 1}$$

Multiplique los numeradores.
Multiplique los denominadores.

$$= \frac{1 \cdot 5 \cdot \overset{1}{\cancel{2}} \cdot 2 \cdot 2}{\underset{1}{\cancel{2}} \cdot 1 \cdot 1}$$

Realice la factorización de primos del 8. Después simplifique, eliminando el factor común de 2 del numerador y el denominador.

$$= 20$$

El área del triángulo es de 20 pies^2.

EJERCICIOS DE REPASO

21. Complete los espacios: Para multiplicar dos fracciones: multiplique los _____ y multiplique los _____. Después _____, si es posible.

22. Traduzca la siguiente frase a símbolos. (*No tiene que encontrar la respuesta.*)

$\frac{5}{6}$ de $\frac{2}{3}$

Multiplique. Simplifique el producto, si es posible.

23. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$

24. $\frac{2}{5}\left(-\frac{7}{9}\right)$

25. $\frac{9}{16} \cdot \frac{20}{27}$

26. $-\frac{5}{6}\left(-\frac{1}{15}\right)\left(-\frac{18}{25}\right)$

27. $\frac{3}{5} \cdot 7$

28. $-4\left(-\frac{9}{16}\right)$

29. $3\left(\frac{1}{3}\right)$

30. $-\frac{6}{7}\left(-\frac{7}{6}\right)$

Evalúe cada expresión.

31. $-\left(\frac{3}{4}\right)^2$

32. $\left(-\frac{5}{2}\right)^3$

33. $\left(-\frac{2}{5}\right)^3$

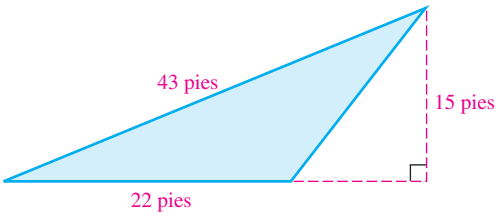
34. $\left(\frac{2}{3}\right)^2$

35. ARRANCONES Un dragster de combustible superior realizó 8 carreras de prueba en una pista de cuarto de milla antes que estuviera listo para la competencia. Encuentre la distancia que cubrió en las carreras de prueba.

36. GRAVEDAD Los objetos en la Luna sólo pesan un sexto de su peso en la Tierra. ¿Cuánto pesará un astronauta en la luna si pesa 180 libras en la Tierra?

37. Encuentre el área de la señalización triangular.

38. Encuentre el área del triángulo mostrado abajo.



SECCIÓN 3.3 División de fracciones

DEFINICIONES Y CONCEPTOS

Un número es el **recíproco** de otro si su producto es 1.

Para encontrar el **recíproco de una fracción,** invierta el numerador y el denominador.

EJEMPLOS

El recíproco de $\frac{4}{5}$ es $\frac{5}{4}$ debido a que $\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4} = 1$.

Fracción $\frac{4}{5}$ — Recíproco $\frac{5}{4}$ (Invertir)

Para **dividir dos fracciones,** multiplique la primera fracción por el recíproco de la segunda fracción. Simplifique, si es posible.

Divida y simplifique, si es posible: $\frac{4}{35} \div \frac{2}{21}$

$$\frac{4}{35} \div \frac{2}{21} = \frac{4}{35} \cdot \frac{21}{2}$$

Multiplique $\frac{4}{35}$ por el recíproco de $\frac{2}{21}$, el cual es $\frac{21}{2}$.

$$= \frac{4 \cdot 21}{35 \cdot 2}$$

Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$$= \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7}{5 \cdot 7 \cdot 2}$$

Para preparar la simplificación, escriba el 4, el 21 y el 35 en la forma de factorización de primos.

$$= \frac{\overset{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \overset{1}{7}}{5 \cdot \underset{1}{7} \cdot \underset{1}{2}}$$

Para simplificar, elimine los factores comunes de 2 y 7 del numerador y el denominador.

$$= \frac{6}{5}$$

Multiplique los factores restantes en el numerador: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 = 6$. Multiplique los factores restantes en el denominador: $5 \cdot 1 \cdot 1 = 5$.

Las **reglas de los signos para la división de fracciones** son las mismas que las de la multiplicación de fracciones.

Divida y simplifique: $\frac{9}{16} \div (-3)$

$$\frac{9}{16} \div \mathbf{(-3)} = \frac{9}{16} \cdot \left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)$$ Multiplique $\frac{9}{16}$ por el recíproco del -3, el cual es $-\frac{1}{3}$.

$$= -\frac{9 \cdot 1}{16 \cdot 3}$$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores. Dado que las fracciones tienen signos no similares, haga negativa la respuesta.

$$= -\frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot 3 \cdot 1}{16 \cdot \underset{1}{\cancel{3}}}$$ Para simplificar, factorice el 9 como $3 \cdot 3$. Después elimine el factor común de 3 del numerador y el denominador.

$$= -\frac{3}{16}$$ Multiplique los factores restantes en el numerador: $1 \cdot 3 \cdot 1 = 3$. Multiplique los factores restantes en el denominador: $16 \cdot 1 = 16$.

Los problemas que involucran la formación de **grupos de igual tamaño** pueden resolverse por medio de una división.

COSTURA ¿Cuántos disfraces de Halloween, los cuales requieren $\frac{3}{4}$ de yarda de tela, pueden hacerse a partir de 6 yardas de tela?

Dado que se van a cortar 6 yardas de tela para obtener un número desconocido de piezas de igual tamaño de $\frac{3}{4}$ de yarda, se indica una división.

$$6 \div \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} = \frac{6}{1} \cdot \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$$ Escriba el 6 como una fracción: $6 = \frac{6}{1}$. Multiplique $\frac{6}{1}$ por el recíproco de $\frac{3}{4}$, el cual es $\frac{4}{3}$.

$$= \frac{6 \cdot 4}{1 \cdot 3}$$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$$= \frac{2 \cdot \overset{1}{\cancel{3}} \cdot 4}{1 \cdot \underset{1}{\cancel{3}}}$$ Para simplificar, factorice el 6 como $2 \cdot 3$. Después elimine el factor común de 3 del numerador y el denominador.

$$= \frac{8}{1}$$ Multiplique los factores restantes en el numerador. Multiplique los factores restantes en el denominador.

$$= 8$$ Cualquier número dividido entre el 1 es el mismo número.

El número de disfraces de Halloween que pueden hacerse a partir de 6 yardas de tela es 8.

EJERCICIOS DE REPASO

39. Encuentre el recíproco de cada número.

a. $\frac{1}{8}$

b. $-\frac{11}{12}$

c. 5

d. $\frac{8}{7}$

40. Complete los espacios: Para dividir dos fracciones, _____ la primera fracción entre el _____ de la segunda fracción.

Divida. Simplifique el cociente, si es posible.

41. $\frac{1}{6} \div \frac{11}{25}$

42. $-\frac{7}{32} \div \frac{1}{4}$

43. $-\frac{39}{25} \div \left(-\frac{13}{10}\right)$

44. $54 \div \frac{63}{5}$

45. $-\frac{3}{8} \div \frac{1}{4}$

46. $\frac{4}{5} \div \frac{1}{2}$

47. $\frac{2}{3} \div (-120)$

48. $\frac{7}{15} \div \frac{7}{15}$

49. ELABORACIÓN DE JOYERÍA ¿Cuántos broches en forma de ángel de $\frac{1}{16}$ de onza de plata pueden fabricarse a partir de una barra de plata de $\frac{3}{4}$ de onza?

50. COSTURA ¿Cuántas fundas de almohada, las cuales requieren $\frac{2}{3}$ de yarda de tela, pueden hacerse a partir de 20 yardas de paño de algodón?

SECCIÓN 3.4 Suma y resta de fracciones

DEFINICIONES Y CONCEPTOS

Para **sumar (o restar) fracciones que tienen el mismo denominador,** sume (o reste) los numeradores y escriba la suma (o diferencia) sobre el denominador común. Simplifique el resultado, si es posible.

EJEMPLOS

Sume: $\frac{3}{16} + \frac{5}{16}$

$\frac{3}{16} + \frac{5}{16} = \frac{3+5}{16}$ Sume los numeradores y escriba la suma sobre el denominador común de 16.

$= \frac{8}{16}$ La fracción resultante puede simplificarse.

$= \frac{\overset{1}{\cancel{8}}}{2 \cdot \underset{1}{\cancel{8}}}$ Para simplificar, factorice el 16 como $2 \cdot 8$. Después elimine el factor común de 8 del numerador y el denominador.

$= \frac{1}{2}$ Multiplique los factores restantes en el denominador: $2 \cdot 1 = 2$.

Suma y resta de fracciones que tienen denominadores diferentes

1. Encuentre el mcd.
2. Rescriba cada fracción como una fracción equivalente con el mcd como el denominador. Para hacer esto, construya cada fracción utilizando una forma de 1 que involucre cualquier factor necesario para obtener el mcd.
3. Sume o reste los numeradores y escriba la suma o diferencia sobre el mcd.
4. Simplifique el resultado, si es posible.

Reste: $\frac{4}{7} - \frac{1}{3}$

Dado que el número más pequeño que los denominadores 7 y 3 dividen de manera exacta es el 21, el mcd es el 21.

$\frac{4}{7} - \frac{1}{3} = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{7}$ Para construir $\frac{4}{7}$ y $\frac{1}{3}$ y que sus denominadores sean 21, multiplique cada una por una forma de 1.

$= \frac{12}{21} - \frac{7}{21}$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores. Ahora los denominadores son iguales.

$= \frac{12-7}{21}$ Reste los numeradores y escriba la diferencia sobre el denominador común 21.

$= \frac{5}{21}$ Esta fracción está en la forma más simple.

El **mínimo común denominador (mcd)** de un conjunto de fracciones es el **mínimo común múltiplo (mcm)** de los denominadores de las fracciones. Las siguientes son dos maneras de encontrar el mcm de los denominadores:

- Escriba los múltiplos del denominador más grande en orden creciente, hasta que se encuentre uno que sea divisible entre los demás denominadores.
- Realice la factorización de primos de cada denominador. El mcm es un producto de los factores primos, donde cada factor se utiliza el mayor número de veces que aparece en cualquier factorización.

Sume y simplifique: $\frac{9}{20} + \frac{7}{15}$

Para encontrar el mcd, encuentre la factorización de primos de ambos denominadores y utilice cada factor primo el *mayor* número de veces que aparece en cualquier factorización:

$\left.\begin{aligned} 20 &= (2 \cdot 2) \cdot 5 \\ 15 &= 3 \cdot 5 \end{aligned}\right\}$ mcd $= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

$\frac{9}{20} + \frac{7}{15} = \frac{9}{20} \cdot \frac{3}{3} + \frac{7}{15} \cdot \frac{4}{4}$ Para construir $\frac{9}{20}$ y $\frac{7}{15}$ y que sus denominadores sean 60, multiplique cada uno por una forma de 1.

$= \frac{27}{60} + \frac{28}{60}$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores. Ahora los denominadores son iguales.

$= \frac{27+28}{60}$ Sume los numeradores y escriba la suma sobre el denominador común 60.

$= \frac{55}{60}$ Esta fracción no está en la forma más simple.

$= \frac{\overset{1}{\cancel{5}} \cdot 11}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \underset{1}{\cancel{5}}}$ Para simplificar, realice la factorización de primos del 55 y el 60. Después elimine el factor común de 5 del numerador y el denominador.

$= \frac{11}{12}$ Multiplique los factores restantes en el numerador y en el denominador.

Comparación de fracciones

Si dos fracciones tienen el **mismo denominador,** la fracción con el mayor numerador es la fracción más grande.

Si dos fracciones tienen **denominadores diferentes,** exprese cada una de ellas como una fracción equivalente que tenga al mcd como su denominador. Después compare los numeradores.

¿Cuál fracción es más grande: $\frac{11}{18}$ o $\frac{7}{18}$?

$\frac{11}{18} > \frac{7}{18}$ debido a que $11 > 7$

¿Cuál fracción es más grande: $\frac{2}{3}$ o $\frac{3}{4}$?

Construya cada fracción para que tenga un denominador que sea el mcd, 12.

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{4} = \frac{8}{12} \qquad \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{3} = \frac{9}{12}$$

Dado que $9 > 8$, se tiene que $\frac{9}{12} > \frac{8}{12}$ y por tanto, $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$.

EJERCICIOS DE REPASO

Sume o reste y simplifique, si es posible.

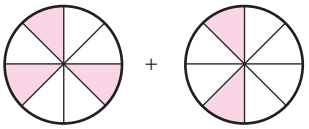
51. $\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$

52. $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}$

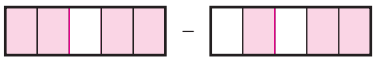
53. $\frac{7}{8} + \frac{3}{8}$

54. $-\frac{3}{5} - \frac{3}{5}$

55. a. Sume las fracciones representadas por las figuras abajo.



b. Reste las fracciones representadas por las figuras abajo.



56. Complete los espacios: Use las factorizaciones de primos abajo para encontrar el mínimo común denominador para las fracciones con denominadores de 45 y 30.

$45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$
$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$
} mcd = ☐ · ☐ · ☐ · ☐ = ☐

Sume o reste y simplifique, si es posible.

57. $\frac{1}{6} + \frac{2}{3}$

58. $-\frac{2}{5} - \frac{3}{8}$

59. $\frac{5}{24} + \frac{3}{16}$

60. $3 - \frac{1}{7}$

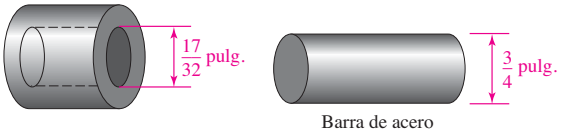
61. $-\frac{19}{18} + \frac{5}{12}$

62. $\frac{17}{20} - \frac{4}{15}$

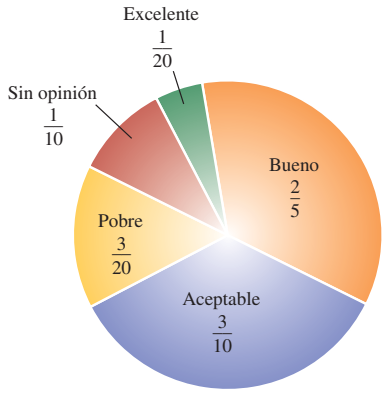
63. $-6 + \frac{13}{6}$

64. $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$

65. TORNERÍA ¿Cuánto debe fresarse la barra de acero de $\frac{3}{4}$ de pulgada de grosor para que el collarín se deslice sobre el extremo final de ésta?



66. ENCUESTAS A un grupo de adultos se le pidió que calificaran el sistema de transporte en su comunidad. Los resultados se muestran abajo en una gráfica circular. ¿Qué fracción del grupo respondió diciendo excelente, bueno o aceptable?



67. TELEMERCADEO En la primera hora de trabajo, una vendedora hace 2 ventas de 9 llamadas por teléfono. En la segunda hora, hace 3 ventas de 11 llamadas. ¿Durante cuál hora fue mejor porcentaje de ventas por llamadas?

68. CÁMARAS Cuando el obturador de una cámara permanece abierto más de $\frac{1}{125}$ de segundo, cualquier movimiento de la cámara probablemente hará borrosa la fotografía. Con esto en mente, si una fotógrafa está tomando una fotografía de un objeto en movimiento rápido, ¿debe seleccionar una velocidad de obturador de $\frac{1}{60}$ o $\frac{1}{250}$?

SECCIÓN 3.5 Multiplicación y división de números mixtos

DEFINICIONES Y CONCEPTOS

Un **número mixto** es la suma de un número natural y una fracción propia.

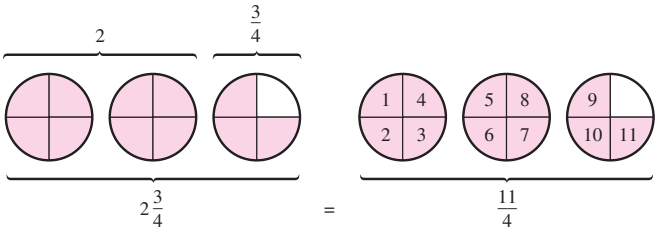
EJEMPLOS

$$2\frac{3}{4} = 2 + \frac{3}{4}$$

Número mixto — Parte de número natural — Parte fraccional

Existe una relación entre **los números mixtos y las fracciones impropias** que puede observarse utilizando regiones sombreadas.

Cada disco representa un entero.



Para escribir un número mixto como una fracción impropia:

1. Multiplique el denominador de la fracción por la parte de número natural.
2. Sume el numerador de la fracción al resultado del Paso 1.
3. Escriba la suma del Paso 2 sobre el denominador original.

Escriba $3\frac{4}{5}$ como una fracción impropia.

Paso 2: Sume

$$3\frac{4}{5} = \frac{5 \cdot 3 + 4}{5} = \frac{15 + 4}{5} = \frac{19}{5}$$

Paso 1: Multiplique — Paso 3: use el mismo denominador

A partir de este resultado, se tiene que $3\frac{4}{5} = \frac{19}{5}$.

Para escribir una fracción impropia como un número mixto:

1. Divida el numerador entre el denominador para obtener la parte de número natural.
2. El residuo sobre el divisor es la parte fraccional.

Escriba $\frac{47}{6}$ como un número mixto.

$$\begin{array}{r} 7 \\ 6\overline{)47} \\ -42 \\ \hline 5 \end{array}$$

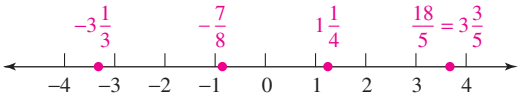
← La parte de número natural es el 7.

← Escriba el residuo de 5 sobre el divisor de 6 para obtener la parte fraccional.

Por tanto, $\frac{47}{6} = 7\frac{5}{6}$. A partir de este resultado, se tiene que $\frac{47}{6} = 7\frac{5}{6}$.

Las fracciones y los números mixtos pueden **graficarse** en una recta numérica.

Grafique $-3\frac{1}{3}, 1\frac{1}{4}, \frac{18}{5}$ y $-\frac{7}{8}$ en una recta numérica.



Para **multiplicar números mixtos,** primero cambie los números mixtos a fracciones impropias. Después desarrolle la multiplicación de las fracciones. Escriba el resultado como un número mixto o como un número natural en la forma más simple.

Multiplique y simplifique: $10\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{6}$

$$10\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{6} = \frac{21}{2} \cdot \frac{7}{6}$$ Escriba $10\frac{1}{2}$ y $1\frac{1}{6}$ como fracciones impropias.

$$= \frac{21 \cdot 7}{2 \cdot 6}$$ Use la regla para la multiplicación de dos fracciones. Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot 7 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot \underset{1}{\cancel{3}}}$$ Para simplificar, factorice el 21 como $3 \cdot 7$, y después elimine el factor común de 3 del numerador y el denominador.

$$= \frac{49}{4}$$ Multiplique los factores restantes en el numerador y el denominador. El resultado es una fracción impropia.

$$= 12\frac{1}{4}$$ Escriba la fracción impropia $\frac{49}{4}$ como un número mixto.

$$\begin{array}{r} 12 \\ 4\overline{)49} \\ \underline{-4} \\ 09 \\ \underline{-8} \\ 1 \end{array}$$

Para **dividir números mixtos,** primero cambie los números mixtos a fracciones impropias. Después desarrolle la división de las fracciones. Escriba el resultado como un número mixto o como un número natural en la forma más simple.

Divida y simplifique: $5\frac{2}{3} \div \left(-3\frac{7}{9}\right)$

$$5\frac{2}{3} \div \left(-3\frac{7}{9}\right) = \frac{17}{3} \div \left(-\frac{34}{9}\right)$$ Escriba $5\frac{2}{3}$ y $3\frac{7}{9}$ como fracciones impropias.

$$= \frac{17}{3}\left(-\frac{9}{34}\right)$$ Multiplique $\frac{17}{3}$ por el recíproco de $-\frac{34}{9}$, el cual es $-\frac{9}{34}$.

$$= -\frac{17 \cdot 9}{3 \cdot 34}$$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores. Dado que las fracciones tienen signos no similares, haga negativa la respuesta.

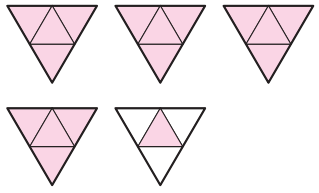
$$= -\frac{\overset{1}{\cancel{17}} \cdot \overset{1}{\cancel{3}} \cdot 3}{\underset{1}{\cancel{3}} \cdot 2 \cdot \underset{1}{\cancel{17}}}$$ Para simplificar, factorice el 9 como $3 \cdot 3$ y el 34 como $2 \cdot 17$. Después elimine los factores comunes de 3 y 17 del numerador y el denominador.

$$= -\frac{3}{2}$$ Multiplique los factores restantes en el numerador y el denominador. El resultado es una fracción impropia negativa.

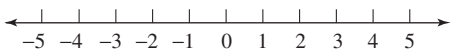
$$= -1\frac{1}{2}$$ Escriba la fracción impropia negativa $-\frac{3}{2}$ como un número mixto negativo.

EJERCICIOS DE REPASO

69. En la ilustración de abajo, cada región triangular delineada en negro representa un entero. Escriba un número mixto y una fracción impropia para representar lo que está sombreado.



70. Grafique $-2\frac{2}{3}, \frac{8}{9}, -\frac{3}{4}$ y $\frac{59}{24}$ en una recta numérica.



Escriba cada fracción impropia como un número mixto o como un número natural.

71. $\frac{16}{5}$

72. $-\frac{47}{12}$

73. $\frac{51}{3}$

74. $\frac{14}{6}$

Escriba cada número mixto como una fracción impropia.

75. $9\frac{3}{8}$

76. $-2\frac{1}{5}$

77. $3\frac{11}{14}$

78. $1\frac{99}{100}$

Multiplique o divida y simplifique, si es posible.

79. $1\frac{2}{5} \cdot 1\frac{1}{2}$

80. $-3\frac{1}{2} \div 3\frac{2}{3}$

81. $-6\left(-6\frac{2}{3}\right)$

82. $8 \div 3\frac{1}{5}$

83. $-11\frac{1}{5} \div \left(-\frac{7}{10}\right)$

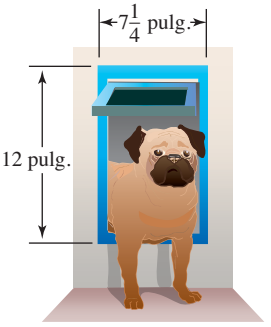
84. $5\frac{2}{3}\left(-7\frac{1}{5}\right)$

85. $\left(-2\frac{3}{4}\right)^2$

86. $1\frac{5}{16} \cdot 1\frac{7}{9} \cdot 2\frac{2}{3}$

87. FOTOGRAFÍA Cada pie de un trípode de una cámara puede extenderse $5\frac{1}{2}$ veces su longitud original. Si un pie es originalmente de $8\frac{3}{4}$ pulgadas de largo, ¿qué tan largo se volverá cuando se extienda por completo?

88. PUERTAS PARA MASCOTAS Encuentre el área de la abertura provista por la puerta para mascotas de forma rectangular mostrada abajo.



89. IMPRESIÓN A una copiadora a color le toma $2\frac{1}{4}$ minutos imprimir un póster para una película. ¿Cuántos pósters pueden imprimirse en 90 minutos?

90. DAÑO POR TORMENTA Un camión puede transportar $7\frac{1}{2}$ toneladas de basura en una carga. ¿Cuántas cargas le tomaría transportar $67\frac{1}{2}$ toneladas desde un sitio de limpieza de un huracán?

SECCIÓN 3.6 Suma y resta de números mixtos

DEFINICIONES Y CONCEPTOS

Para sumar (o restar) números mixtos, se puede cambiar cada uno a una fracción impropia y utilizar el método de la Sección 3.4.

EJEMPLOS

Sume: $3\frac{1}{2} + 1\frac{3}{5}$

$3\frac{1}{2} + 1\frac{3}{5} = \frac{7}{2} + \frac{8}{5}$ Escriba $3\frac{1}{2}$ y $1\frac{3}{5}$ como números mixtos.

$= \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{5} + \frac{8}{5} \cdot \frac{2}{2}$ Para construir $\frac{7}{2}$ y $\frac{8}{5}$ para que sus denominadores sean de 10, multiplique ambas por una forma de 1.

$= \frac{35}{10} + \frac{16}{10}$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$= \frac{51}{10}$ Sume los numeradores y escriba la suma sobre el denominador común de 10.

$= 5\frac{1}{10}$ Para escribir la fracción impropia $\frac{51}{10}$ como un número mixto, divida 51 entre 10.

Para sumar (o restar) números mixtos, también se pueden escribir en **forma vertical** y sumar (o restar) por separado las partes de número natural y las partes fraccionales.

Sume: $42\frac{1}{3} + 89\frac{6}{7}$

Construya para obtener el mcd, 21.
Sume las fracciones.
Sume los números naturales.

$$\begin{array}{rrrr} 42\frac{1}{3} = & 42\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{7} = & 42\frac{7}{21} = & {\scriptstyle 1}\,42\frac{7}{21} \\ +\,89\frac{6}{7} = & +\,89\frac{6}{7}\cdot\frac{3}{3} = & +\,89\frac{18}{21} = & +\,89\frac{18}{21} \\ \hline & & \frac{25}{21} & 131\frac{25}{21} \end{array}$$

No se desea una fracción impropia en la respuesta.

Cuando se suman números mixtos, en ocasiones la suma de las fracciones es una fracción impropia. Si ese es el caso, escriba la fracción impropia como un número mixto y **acarree** su parte de número natural a la columna de números naturales.

Escriba $\frac{25}{21}$ como $1\frac{4}{21}$, acarre el 1 a la columna de los números naturales y súmelo al 131 para obtener 132:

$$131\frac{\mathbf{25}}{\mathbf{21}} = 131 + \mathbf{1}\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{21}} = 132\frac{4}{21}$$

La resta de números mixtos en forma vertical en ocasiones involucra un **acarreo negativo.** Cuando la fracción que se está restando es mayor que la fracción de la que se está restando, es necesario el acarreo negativo.

Reste: $23\frac{1}{4} - 17\frac{5}{9}$

Construya para obtener el mcd, 36.
Dado que $\frac{20}{36}$ es mayor que $\frac{9}{36}$, se debe realizar un acarreo negativo del 28.

$$\begin{array}{rrrrr} 28\frac{1}{4} = & 28\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{9} = & 28\frac{9}{36} = & {\scriptstyle 7}\,28\frac{9}{36} + \frac{36}{36} = & {\scriptstyle 7}\,28\frac{45}{36} \\ -\,17\frac{5}{9} = & -\,17\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{4} = & -\,17\frac{20}{36} = & -\,17\frac{20}{36} = & -\,17\frac{20}{36} \\ \hline & & & & 10\frac{25}{36} \end{array}$$

EJERCICIOS DE REPASO

Sume o reste y simplifique, si es posible.

91. $1\frac{3}{8} + 2\frac{1}{5}$

92. $3\frac{1}{2} + 2\frac{2}{3}$

93. $2\frac{5}{6} - 1\frac{3}{4}$

94. $3\frac{7}{16} - 2\frac{1}{8}$

95. $157\frac{11}{30} + 98\frac{7}{12}$

96. $6\frac{3}{14} + 17\frac{7}{10}$

97. $33\frac{8}{9} + 49\frac{1}{6}$

98. $98\frac{11}{20} + 14\frac{4}{5}$

99. $50\frac{5}{8} - 19\frac{1}{6}$

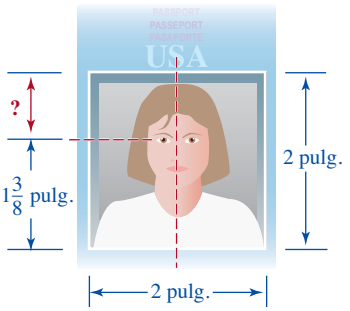
100. $375\frac{3}{4} - 59$

101. $23\frac{1}{3} - 2\frac{5}{6}$

102. $39 - 4\frac{5}{8}$

103. SUMINISTROS PARA PINTAR En un proyecto para restaurar una casa, los pintores utilizaron $10\frac{3}{4}$ galones de pintura base, $21\frac{1}{2}$ galones de pintura látex y $7\frac{2}{3}$ galones de esmalte. Encuentre el número total de galones de pintura utilizados.

104. PASAPORTES Abajo se muestran las dimensiones requeridas para la fotografía de un pasaporte. ¿Cuál es la distancia de los ojos del sujeto a la parte superior de la fotografía?



SECCIÓN 3.7 Orden de las operaciones y fracciones complejas

DEFINICIONES Y CONCEPTOS

Orden de las operaciones

1. Desarrolle todos los cálculos dentro de los paréntesis y otros símbolos de agrupación siguiendo el orden listado abajo en los Pasos 2–4, empezando desde el par más interno de símbolos de agrupación al par más externo.
2. Evalúe todas las expresiones exponenciales.
3. Desarrolle las multiplicaciones y divisiones a medida que aparezcan de izquierda a derecha.
4. Desarrolle las sumas y restas a medida que aparezcan de izquierda a derecha.

Cuando se hayan eliminado los símbolos de agrupación, repita los Pasos 2–4 para completar el cálculo.

Si está presente una barra de fracción, evalúe la expresión sobre la barra (llamada **numerador**) y la expresión debajo de la barra (llamada **denominador**) por separado. Después desarrolle la división indicada por la barra de fracción, si es posible.

EJEMPLOS

Evalúe: $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \div \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right)$

Primero, se desarrolla la resta dentro del segundo conjunto de paréntesis. (No hay alguna operación a desarrollar dentro del primer conjunto.)

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \div \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^2 \div \left(\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{4}\right)$$ Dentro de los paréntesis, modifique cada fracción para que su denominador sea el mcd de 12.

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^2 \div \left(\frac{9}{12} - \frac{4}{12}\right)$$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^2 \div \frac{5}{12}$$ Reste los numeradores: $9 - 4 = 5$. Escriba la diferencia sobre el denominador común de 12.

$$= \frac{1}{9} \div \frac{5}{12}$$ Evalúe la expresión exponencial: $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

$$= \frac{1}{9}\cdot\frac{12}{5}$$ Use la regla para la división de fracciones: Multiplique la primera fracción por el recíproco de $\frac{5}{12}$, el cual es $\frac{12}{5}$.

$$= \frac{1\cdot 12}{9\cdot 5}$$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$$= \frac{1\cdot \overset{1}{\cancel{3}}\cdot 4}{\underset{1}{\cancel{3}}\cdot 3\cdot 5}$$ Para simplificar, factorice el 12 como $3\cdot 4$ y el 9 como $3\cdot 3$. Después elimine el factor común de 3 del numerador y el denominador.

$$= \frac{4}{15}$$ Multiplique los factores restantes en el numerador. Multiplique los factores restantes en el denominador.

Para **evaluar una fórmula** se reemplazan sus variables (letras) con números específicos y se evalúa el lado derecho utilizando la regla del orden de las operaciones.

Evalúe: $A = \frac{1}{2}h(a + b)$ para $a = 1\frac{1}{3}$, $b = 2\frac{2}{3}$ y $h = 2\frac{4}{5}$.

$$A = \frac{1}{2}h(a + b)$$ Esta es la fórmula dada.

$$= \frac{1}{2}\left(2\frac{4}{5}\right)\left(1\frac{1}{3} + 2\frac{2}{3}\right)$$ Reemplace h, a y b con los valores proporcionados.

$$= \frac{1}{2}\left(2\frac{4}{5}\right)(4)$$ Realice la suma dentro de los paréntesis.

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{14}{5}\right)\left(\frac{4}{1}\right)$$ Para preparar la multiplicación de las fracciones, escriba $2\frac{4}{5}$ como una fracción impropia y el 4 como $\frac{4}{1}$.

$$= \frac{1\cdot 14\cdot 4}{2\cdot 5\cdot 1}$$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$$= \frac{1\cdot 14\cdot \overset{1}{\cancel{2}}\cdot 2}{\underset{1}{\cancel{2}}\cdot 5\cdot 1}$$ Para simplificar, factorice el 4 como $2\cdot 2$. Después elimine el factor común de 2 del numerador y el denominador.

$$= \frac{28}{5}$$ Multiplique los factores restantes en el numerador. Multiplique los factores restantes en el denominador.

$$= 5\frac{3}{5}$$ Escriba la fracción impropia $\frac{28}{5}$ como un número mixto dividiendo 28 entre 5.

Una **fracción compleja** es una fracción cuyo numerador o denominador, o ambos, contienen una o más fracciones o números mixtos.

Fracciones complejas:

$$\frac{\frac{9}{10}}{\frac{27}{5}} \qquad \frac{\frac{2}{5}-\frac{1}{3}}{\frac{3}{7}+\frac{1}{5}} \qquad \frac{-7\frac{1}{4}}{2-\frac{1}{9}}$$

El método para la **simplificación de fracciones complejas** se basa en el hecho de que la barra de fracción principal indica una división.

Simplifique: $\dfrac{\frac{9}{10}}{\frac{27}{5}}$

$$\frac{\frac{9}{10}}{\frac{27}{5}} = \frac{9}{10} \div \frac{27}{5}$$ Escriba la división indicada por la barra de fracción utilizando un símbolo ÷.

$$= \frac{9}{10} \cdot \frac{5}{27}$$ Use la regla para la división de fracciones. Multiplique la primera fracción por el recíproco de $\frac{27}{5}$, el cual es $\frac{5}{27}$.

$$= \frac{9 \cdot 5}{10 \cdot 27}$$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{9}} \cdot \overset{1}{\cancel{5}}}{2 \cdot \underset{1}{\cancel{5}} \cdot 3 \cdot \underset{1}{\cancel{9}}}$$ Para simplificar, factorice el 10 como $2 \cdot 5$, y el 27 como $3 \cdot 9$. Después elimine los factores comunes de 9 y 5 del numerador y el denominador.

$$= \frac{1}{6}$$ Multiplique los factores restantes en el numerador. Multiplique los factores restantes en el denominador.

Para **simplificar una fracción compleja:**

1. Sume o reste en el numerador y/o el denominador para que el numerador sea una sola fracción y el denominador sea una sola fracción.
2. Desarrolle la división indicada multiplicando el numerador de la fracción compleja por el recíproco del denominador.
3. Simplifique el resultado, si es posible.

Simplifique: $\dfrac{\frac{2}{5}-\frac{1}{3}}{\frac{3}{7}+\frac{1}{5}}$

$$\frac{\frac{2}{5}-\frac{1}{3}}{\frac{3}{7}+\frac{1}{5}} = \frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{5}}{\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{7}{7}}$$ En el numerador, construya cada fracción para que su denominador sea de 15. En el denominador, construya cada fracción para que su denominador sea de 35.

$$= \frac{\frac{6}{15}-\frac{5}{15}}{\frac{15}{35}+\frac{7}{35}}$$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$$= \frac{\frac{1}{15}}{\frac{22}{35}}$$ Reste los numeradores y escriba la diferencia sobre el denominador común de 15. Sume los numeradores y escriba la suma sobre el denominador común de 35.

$$= \frac{1}{15} \div \frac{22}{35}$$ Escriba la división indicada por la barra de fracción principal utilizando un símbolo ÷.

$$= \frac{1}{15} \cdot \frac{35}{22}$$ Use la regla para la división de fracciones: Multiplique la primera fracción por el recíproco de $\frac{22}{35}$, el cual es $\frac{35}{22}$.

$$= \frac{1 \cdot 35}{15 \cdot 22}$$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$$= \frac{1 \cdot \overset{1}{\cancel{35}} \cdot 7}{3 \cdot \underset{1}{\cancel{5}} \cdot 22}$$ Para simplificar, factorice el 35 como $5 \cdot 7$ y el 15 como $3 \cdot 5$. Después elimine el factor común de 5 del numerador y el denominador.

$$= \frac{7}{66}$$ Multiplique los factores restantes en el numerador. Multiplique los factores restantes en el denominador.

EJERCICIOS DE REPASO

Evalúe cada expresión.

105. $\frac{3}{4} + \left(-\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{5}{4}\right)$

106. $\left(\frac{2}{3} \div \frac{16}{9}\right) - \left(1\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{15}\right)$

107. $\left(\frac{11}{5} - 1\frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{4}{9} \cdot 18\right)$

108. $\left|-\frac{9}{16} \div 2\frac{1}{4}\right| + \left(-3\frac{7}{8}\right)$

Simplifique cada fracción compleja.

109. $\dfrac{\frac{3}{5}}{-\frac{17}{20}}$

110. $\dfrac{4 - \frac{2}{7}}{4\frac{1}{7}}$

111. $\dfrac{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}}{-\frac{3}{4} - \frac{1}{2}}$

112. $\dfrac{5\frac{1}{4}}{\frac{7}{4} + \left(-\frac{1}{3}\right)}$

113. Reste $4\frac{1}{8}$ de la suma de $5\frac{1}{5}$ y $1\frac{1}{2}$.

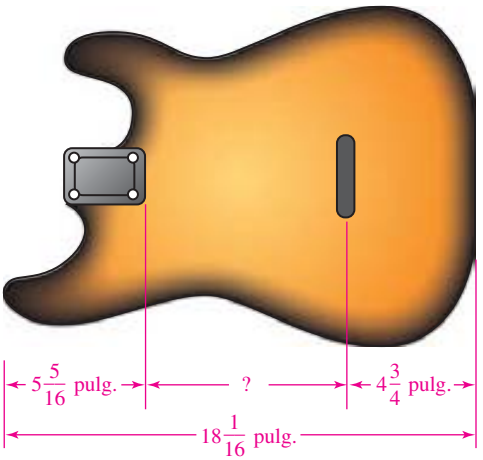
114. Sume $12\frac{11}{16}$ a la diferencia de $4\frac{5}{8}$ y $3\frac{1}{4}$.

115. Evalúe la fórmula $A = \frac{1}{2}h(a + b)$ para $a = 1\frac{1}{8}$, $b = 4\frac{7}{8}$ y $h = 2\frac{7}{9}$.

116. Evalúe la fórmula $P = 2\ell + 2w$ para $\ell = 2\frac{1}{3}$ y $w = 3\frac{1}{4}$.

117. DERMATOLOGÍA Un dermatólogo mezcla $1\frac{1}{2}$ onzas de extracto de pepino, $2\frac{2}{3}$ onzas de crema de aloe vera y $\frac{3}{4}$ onzas de glicerina vegetal para preparar su propia marca de crema antiarrugas. La envasa en tubos de $\frac{5}{6}$ de onza. ¿Cuántos tubos llenos pueden producirse utilizando esta fórmula? ¿Cuánta crema sobrará?

118. DISEÑO DE GUITARRAS Encuentre la dimensión faltante en el cuerpo de la Stratocaster 1962 clásica mostrada abajo.



CAPÍTULO 3 EXAMEN

1. Complete los espacios.

a. Para la fracción $\frac{6}{7}$, el _____ es el 6 y el _____ es el 7.

b. Dos fracciones son _____ si representan al mismo número.

c. Una fracción está en la forma _____ cuando el numerador y el denominador no tienen factores comunes diferentes del 1.

d. Para _____ una fracción, se eliminan los factores comunes del numerador y el denominador.

e. El _____ de $\frac{4}{5}$ es $\frac{5}{4}$.

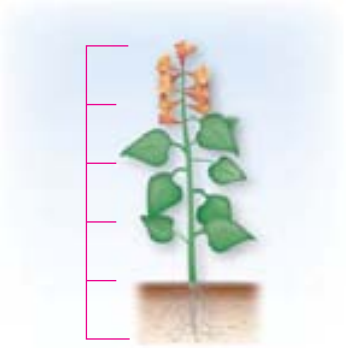
f. Un número _____, como $1\frac{9}{16}$, es la suma de un número natural y una fracción propia.

g. $\dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{7}{12}}$ y $\dfrac{\frac{3}{4}+\frac{1}{3}}{\frac{5}{12}-\frac{1}{4}}$ son ejemplos de fracciones _____.

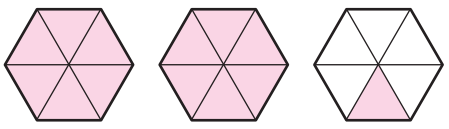
2. Vea la ilustración abajo.

a. ¿Qué parte fraccional de la planta está sobre el suelo?

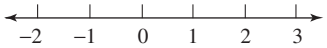
b. ¿Qué parte fraccional de la planta está debajo del suelo?



3. Cada región delineada en negro representa un entero. Escriba una fracción impropia y un número mixto para representar la porción sombreada.



4. Grafique $2\frac{4}{5}$, $-\frac{2}{5}$, $-1\frac{1}{7}$ y $\frac{7}{6}$ en una recta numérica.



5. ¿$\frac{1}{3}$ y $\frac{5}{15}$ son equivalentes?

6. Exprese $\frac{7}{8}$ como una fracción equivalente con denominador de 24.

7. Simplifique cada fracción, si es posible.

a. $\frac{0}{15}$ **b.** $\frac{9}{0}$

8. Simplifique cada fracción.

a. $\frac{27}{36}$ **b.** $\frac{72}{180}$

9. Sume y simplifique, si es posible: $\frac{3}{16}+\frac{7}{16}$

10. Multiplique y simplifique, si es posible: $-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}\right)$

11. Divida y simplifique, si es posible: $\frac{4}{3}\div\frac{2}{9}$

12. Reste y simplifique, si es posible: $\frac{11}{12}-\frac{11}{30}$

13. Sume y simplifique, si es posible: $-\frac{3}{7}+2$

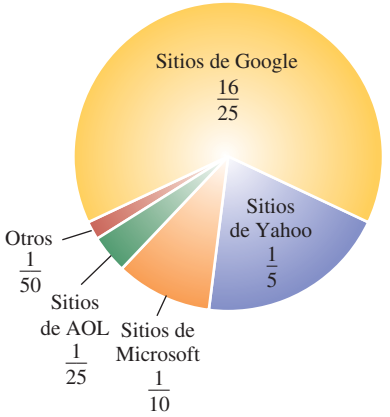
14. Multiplique y simplifique, si es posible: $\frac{9}{10}\left(-\frac{4}{15}\right)\left(-\frac{25}{18}\right)$

15. ¿Cuál fracción es más grande: $\frac{8}{9}$ o $\frac{9}{10}$?

16. BEBEDORES DE CAFÉ Dos quintos de 100 adultos encuestados dijeron que comenzaban su mañana con una taza de café. De los 100, ¿cuántos sería esto?

17. INTERNET La gráfica de abajo muestra la fracción del número total de búsquedas en internet que se realizaron utilizando varios sitios en enero del 2009. ¿Qué fracción del total de las búsquedas se realizaron utilizando los sitios de Google, Yahoo y Microsoft?

Porciones de búsquedas en línea en enero del 2009



Fuente: Marketingcharts.com

18. a. Escriba $\frac{55}{6}$ como un número mixto.

b. Escriba $1\frac{18}{21}$ como una fracción impropia.

19. Encuentre la suma de $157\frac{3}{10}$ y $103\frac{13}{15}$. Simplifique el resultado.

20. Reste y simplifique, si es posible: $67\frac{1}{4} - 29\frac{5}{6}$

21. Divida y simplifique, si es posible: $6\frac{1}{4} \div 3\frac{3}{4}$

22. BOXEO Dos de los más grandes boxeadores de peso pesado de todos los tiempos son Muhammad Ali y George Foreman. Refiérase a la comparación "Tabla de medidas" mostrada abajo.

a. ¿Cuál peleador pesaba más? ¿Cuánto más?

b. ¿Cuál peleador tenía la medida de cintura más grande? ¿Cuánto más?

c. ¿Cuál peleador tenía la medida de antebrazo más grande? ¿Cuánto más?

Tabla de medidas

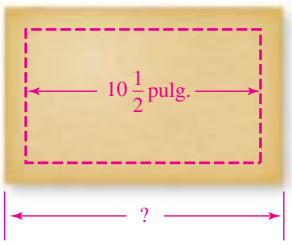
Muhammad Ali		George Foreman
6-3	Altura	6-4
210 1/2 lb	Peso	250 lb
82 pulg.	Alcance	79 pulg.
43 pulg.	Pecho (normal)	48 pulg.
45 1/2 pulg.	Pecho (extendido)	50 pulg.
34 pulg.	Cintura	39 1/2 pulg.
12 1/2 pulg.	Puño	13 1/2 pulg.
15 pulg.	Antebrazo	14 3/4 pulg.

Fuente: The International Boxing Hall of Fame.

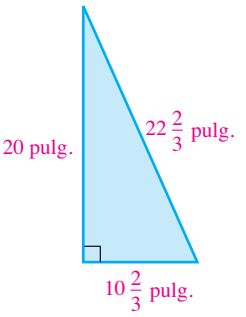
23. Evalúe la fórmula $P = 2l + 2w$ para $l = \frac{1}{3}$ y $w = \frac{1}{9}$.

24. CONTRATOS DEPORTIVOS Un jugador de basquetbol firmó un contrato por nueve años por $\$13\frac{1}{2}$ millones. ¿De cuánto es la paga por año?

25. COSTURA Cuando corta la tela para un mantel individual de $10\frac{1}{2}$ pulgadas de ancho, una costurera deja $\frac{5}{8}$ de pulgada en cada extremo para un dobladillo, como se muestra abajo. ¿Qué tan ancho debe cortarse la tela para hacer un mantel individual?



26. Encuentre el perímetro y el área del triángulo mostrado abajo.



27. NUTRICIÓN Una caja de Tic Tacs contiene 40 mentas para el aliento de $1\frac{1}{2}$ calorías. ¿Cuántas calorías hay en una caja de Tic Tacs?

28. COCINA ¿Cuántas porciones hay en un asado de 8 libras, si el tamaño de porción sugerido es de $\frac{2}{3}$ de libra?

29. Evalúe:

$$\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{16}\right) - \left(-1\frac{3}{5} \div 4\frac{4}{5}\right)$$

30. Evalúe: $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \div \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right)$

31. Simplifique:

$$\frac{\frac{5}{6}}{\frac{7}{8}}$$

32. Simplifique:

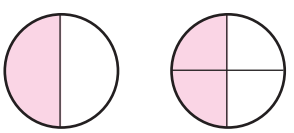
$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{-\frac{1}{6} - \frac{1}{3}}$$

33. Explique a qué se refiere cuando se dice, "El producto de cualquier número y su recíproco es 1". Dé un ejemplo.

34. Explique cada concepto matemático que se muestra abajo.

a. $\frac{6}{8} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot 3}{\underset{1}{\cancel{2}} \cdot 4} = \frac{3}{4}$

b.



$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$

c. $\frac{3}{5} = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{4} = \frac{12}{20}$

CAPÍTULOS 1–3 REPASO ACUMULATIVO

1. Considere el número 5,896,619. [Sección 1.1]

a. ¿Cuál dígito está en la columna de los millones?

b. ¿Cuál es el valor posicional del dígito 8?

c. Redondee a la centena más cercana.

d. Redondee a la decena de millar más cercana.

2. BANCOS En el 2008, el banco más grande del mundo, con un patrimonio neto de $277,514,000,000, era el Banco Industrial y Comercial de China. ¿En qué columna de valor posicional está el dígito 2? (Fuente: Skorcareer) [Sección 1.1]

3. POBLACIÓN Ordene los siguientes condados, de mayor a menor población. [Sección 1.1]

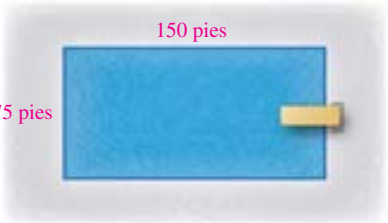
Condado	Población en el 2007
Dallas, TX	2,366,511
Kings, NY	2,528,050
Miami-Dade, FL	2,387,170
Orange, CA	2,997,033
Queens, NY	2,270,338
San Diego, CA	2,974,859

(Fuente: *The World Almanac and Book of Facts,* 2009)

4. Refiérase a la alberca de forma rectangular mostrada abajo.

a. Encuentre el perímetro de la alberca. [Sección 1.2]

b. Encuentre el área de la superficie de la alberca. [Sección 1.4]



5. Sume: $\begin{array}{r} 7{,}897 \\ 6{,}909 \\ 1{,}812 \\ +\ 14{,}378 \end{array}$ [Sección 1.2]

6. Reste 3,456 de 20,000. Compruebe el resultado. [Sección 1.3]

7. HOJAS DE PEGATINAS Hay 20 hileras de doce estrellas doradas en una hoja de pegatinas. Si un paquete contiene 10 hojas, ¿cuántas estrellas hay en un paquete? [Sección 1.4]

8. Multiplique: $\begin{array}{r} 5{,}345 \\ \times\ 56 \end{array}$ [Sección 1.4]

9. Divida: $35\overline{)34{,}685}$. Compruebe el resultado. [Sección 1.5]

10. DESCUENTO EN HOSPEDAJE Un hotel está ofreciendo por sólo $79 la noche habitaciones que por lo general cuestan $119 por noche. ¿Cuántos dólares ahorraría un turista si permanece en una habitación 4 noches? [Sección 1.6]

11. Liste los factores del 24, de menor a mayor. [Sección 1.7]

12. Encuentre la factorización de primos del 450. [Sección 1.7]

13. Encuentre el mcm del 16 y el 20. [Sección 1.8]

14. Encuentre el mfc del 63 y el 84. [Sección 1.8]

15. Evalúe: $15 + 5[12 - (2^2 + 4)]$ [Sección 1.9]

16. BIENES RAÍCES El propietario de una casa, deseando venderla, la avaluó con tres agentes de bienes raíces diferentes. Los avalúos fueron: $158,000, $163,000 y $147,000. Decidió utilizar el promedio de los avalúos como precio de lista. ¿En qué cantidad se tasó la casa? [Sección 1.9]

17. Escriba el conjunto de enteros. [Sección 2.1]

18. ¿El enunciado $-9 \leq -8$ es verdadero o falso? [Sección 2.1]

19. Encuentre la suma del -20, 6 y -1. [Sección 2.2]

20. Reste: $-50 - (-60)$ [Sección 2.3]

21. MINERÍA DE ORO Un elevador bajará a los mineros de la entrada al nivel del suelo a varias profundidades en la mina. El elevador se detiene cada 25 pies verticales para dejar a los mineros. ¿A qué profundidad trabajan los mineros cuando se bajan del elevador en la 8a parada? [Sección 2.4]

22. DESCENSO DE TEMPERATURA Durante un periodo de cinco horas, la temperatura disminuyó de manera constante 55°F. ¿En cuántos grados cambió la temperatura cada hora? [Sección 2.5]

Evalúe cada expresión. [Sección 2.6]

23. $6 + (-2)(-5)$

24. $(-2)^3 - 3^3$

25. $-5 + 3|-4 - (-6)|$

26. $\dfrac{2(3^2 - 4^2)}{-2(3) - 1}$

Simplifique cada fracción. [Sección 3.1]

27. $\dfrac{21}{28}$ **28.** $\dfrac{40}{16}$

Desarrolle cada operación. Simplifique, si es posible.

29. $\dfrac{6}{5}\left(-\dfrac{2}{3}\right)$ [Sección 3.2]

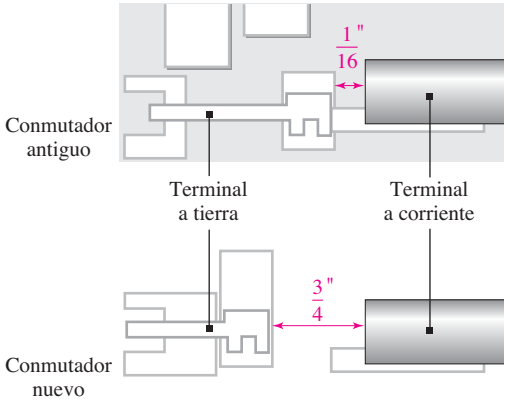
30. $\dfrac{8}{63} \div \dfrac{2}{7}$ [Sección 3.3]

31. $\dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4}$ [Sección 3.4]

32. $\dfrac{4}{7} - \dfrac{3}{5}$ [Sección 3.4]

33. AFEITADO Los anuncios para una rasuradora eléctrica aseveran que los hombres pueden afeitarse en un tercio del tiempo de lo que les toma utilizando un rastrillo. Si un hombre por lo general tarda 90 segundos rasurándose utilizando un rastrillo, ¿qué tanto le tomará si utiliza una rasuradora eléctrica? [Sección 3.3]

34. RIESGOS DE INCENDIO Dos terminales en un conmutador eléctrico estaban tan cercanas que la electricidad podía saltar el espacio e iniciar un incendio. La ilustración de abajo muestra un conmutador recién diseñado que evitará que suceda esto. ¿En cuánto se incrementó la distancia entre la terminal a tierra y la terminal a corriente? [Sección 3.4]



35. Escriba $\dfrac{75}{7}$ como un número mixto. [Sección 3.5]

36. Escriba $-6\dfrac{5}{8}$ como una fracción impropia. [Sección 3.5]

Desarrolle cada operación. Simplifique, si es posible.

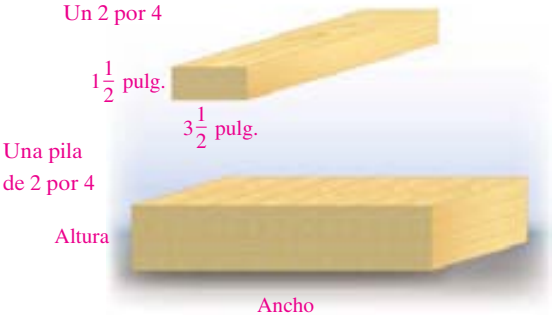
37. $2\dfrac{2}{5}\left(3\dfrac{1}{12}\right)$ [Sección 3.5]

38. $15\dfrac{1}{3} \div 2\dfrac{2}{9}$ [Sección 3.5]

39 $4\dfrac{2}{3} + 5\dfrac{1}{4}$ [Sección 3.6]

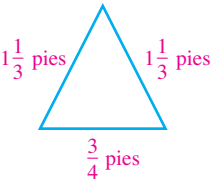
40. $14\dfrac{2}{5} - 8\dfrac{2}{3}$ [Sección 3.6]

41. MADERA Como se muestra abajo, los 2 por 4 del almacén de madera en realidad no tienen dimensiones de 2 pulgadas por 4 pulgadas. ¿Qué tan ancha y qué tan alta es la pila de los 2 por 4 en la ilustración? [Sección 3.5]



42. ESTACIONES DE GASOLINA ¿Cuánta gasolina queda en un tanque de almacenamiento de 500 galones si se han bombeado de él $225\frac{3}{4}$ galones? [Sección 3.5]

43. Encuentre el perímetro del triángulo mostrado abajo. [Sección 3.6]



44. Evalúe: $\left(-\dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{9}{16}\right) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{8}\right)$ [Sección 3.7]

45. Simplifique: $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}$ [Sección 3.7]

46. Simplifique: $\dfrac{\frac{3}{7} + \left(-\frac{1}{2}\right)}{1\frac{3}{4}}$ [Sección 3.7]

4

Decimales

Tetra Images/Getty Images

4.1 Introducción a los decimales
4.2 Suma y resta de decimales
4.3 Multiplicación de decimales
4.4 División de decimales
4.5 Fracciones y decimales
4.6 Raíces cuadradas
Resumen y repaso
Examen
Repaso acumulativo

Carreras del campus

Asistente de salud en el hogar

Los asistentes de salud en el hogar proveen cuidado personalizado a las personas mayores y discapacitadas en el propio hogar del paciente. Ayudan a sus pacientes a tomar medicamentos, comer, vestirse y bañarse. Los asistentes de salud en el hogar necesitan poseer un buen sentido numérico. Deben tomar de manera precisa la temperatura, el pulso y la presión sanguínea del paciente y monitorear la ingesta calórica y el horario de sueño del paciente.

En el **Problema 101** del **Espacio para el estudio 4.2,** verá cómo un asistente de salud en el hogar utiliza la suma y resta de decimales para graficar la temperatura de un paciente.

CARGO LABORAL: Asistente de salud en el hogar

EDUCACIÓN: Finalización exitosa de un programa de entrenamiento para asistente de salud en el hogar como lo estipulan la ley estatal o la regulación federal.

PERSPECTIVA LABORAL: Excelente debido al crecimiento rápido de empleos y a las altas necesidades de reemplazo.

INGRESOS ANUALES: El salario promedio (medio) en el 2008 era de $19,760.

PARA MÁS INFORMACIÓN: www.sbtinsurance.com/filemanager/download/11410/

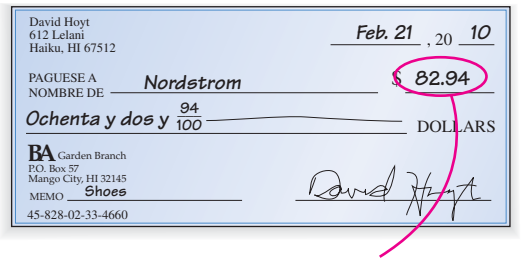
Objetivos

1. Identificar el valor posicional de un dígito en un número decimal.
2. Escribir decimales en forma expandida.
3. Leer decimales y escribirlos en forma estándar.
4. Comparar decimales utilizando símbolos de desigualdad.
5. Graficar decimales en una recta numérica.
6. Redondear decimales.
7. Leer tablas y gráficas que involucran decimales.

SECCIÓN 4.1
Introducción a los decimales

El sistema de valores posicionales para los números naturales que se introdujo en la Sección 1.1 puede extenderse para crear el **sistema para la numeración decimal.** A los números que se escriben utilizando la **notación decimal** con frecuencia se les llama simplemente **decimales.** Se utilizan en la medición, debido a que es fácil ordenarlos y compararlos. Y como probablemente sepa, el sistema monetario se basa en decimales.

El decimal 1,537.6 en el odómetro representa la distancia, en millas, que ha recorrido el automóvil.

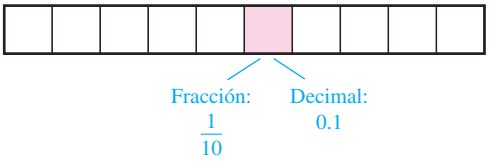


El decimal 82.94 representa la cantidad del cheque en dólares.

1 Identificar el valor posicional de un dígito en un número decimal

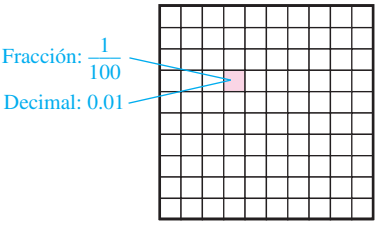
Como la notación fraccional, la notación decimal se utiliza para representar parte de un todo. Sin embargo, cuando se escribe un número en notación decimal, no se utiliza una barra de fracción, ni se muestra un denominador. Por ejemplo, considere la región rectangular de abajo que tiene 1 de 10 partes iguales coloreada de rojo. Se puede utilizar la fracción $\frac{1}{10}$ o el decimal 0.1 para describir la cantidad de la figura que está sombreada. Ambos se leen como "un décimo" y se puede escribir:

$$\frac{1}{10} = 0.1$$



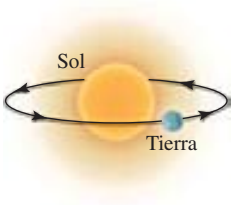
La región cuadrada a la derecha tiene 1 de 100 partes iguales coloreada de rojo. Se puede utilizar la fracción $\frac{1}{100}$ o el decimal 0.01 para describir la cantidad de la figura que está sombreada. Ambas se leen como "una centésima" y se puede escribir:

$$\frac{1}{100} = 0.01$$



Los decimales se escriben introduciendo los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 en las columnas de los valores posicionales que están separadas por un **punto decimal.** La siguiente **gráfica de valores posicionales** muestra los nombres de las columnas de los valores posicionales. Aquellas a la izquierda del punto decimal, forman la **parte número entero** del número decimal y tienen los nombres familiares de unidades, decenas, centenas, etc. Las columnas a la derecha del punto decimal forman la **parte fraccional.** Sus nombres de valor posicional son similares a aquellos en la parte de número natural, pero terminan en "ésimas". Observe que no hay posición de un*ésima* en la gráfica.

El decimal 365.24219, introducido en la gráfica de valores posicionales mostrada arriba, representa el número que le toma a la Tierra en realizar una órbita completa alrededor del sol. Se dice que el decimal está escrito en **forma estándar** (también llamada **notación estándar**). Cada uno de los 2 en 365.**2**42**2**19 tienen un valor posicional diferente debido a su posición. El valor posicional del 2 rojo es de dos décimas. El valor posicional del 2 azul es de 2 milésimas.



EJEMPLO 1

Considere el número decimal: 2,864.709531

a. ¿Cuál es el valor posicional del dígito 5?

b. ¿Cuál dígito indica el número de millonésimas?

Estrategia Se localizará el punto decimal en 2,864.709531. Después, moviéndose a la derecha, se nombrará cada columna (décimas, centésimas, etc.) hasta alcanzar el 5.

POR QUÉ Es más fácil recordar los nombres de las columnas si comienza en el punto decimal y se mueve a la derecha.

Solución

a. 2,864.709531 — Diga "Décimas, centésimas, milésimas, diezmilésimas" a medida que se mueve de columna a columna.

5 diezmilésimas es el valor posicional del dígito 5.

b. 2,864.709531 — Diga "Décimas, centésimas, milésimas, diezmilésimas, cienmilésimas, millonésimas" a medida que se mueve de columna a columna.

El dígito 1 está en la columna de las millonésimas.

¡Cuidado! *No* separe grupos de tres dígitos en el lado derecho del punto decimal con comas como lo hace con el lado izquierdo. Por ejemplo, sería incorrecto escribir:

2,864.709,531

Auto-revisión 1

Considere el número decimal: 56,081.639724

a. ¿Cuál es el valor posicional del dígito 9?

b. ¿Cuál dígito indica el número de cienmilésimas?

Ahora intente **Problema 17**

Se puede escribir un número entero en notación decimal colocando un punto decimal inmediatamente a su derecha y después introduciendo un cero, o ceros, a la derecha del punto decimal. Por ejemplo,

$$99 = 99.0 = 99.00$$

Debido a que $99 = 99\frac{0}{10} = 99\frac{00}{100}$.

99: Un número entero. 99.0 y 99.00: Coloque un punto decimal aquí e introduzca un cero, o ceros, a la derecha de él.

Cuando no existe la parte de número entero de un decimal, se puede mostrar introduciendo un cero directamente a la izquierda del punto decimal. Por ejemplo,

$$.83 = 0.83$$

Debido a que $\frac{83}{100} = 0\frac{83}{100}$.

.83: No hay número entero. 0.83: Introduzca un cero aquí, si se desea.

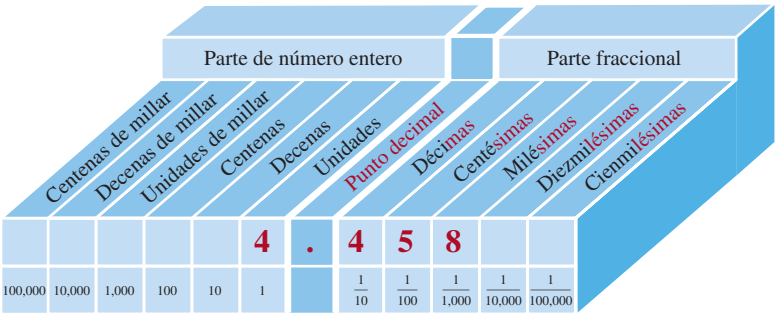
Los decimales negativos se utilizan para describir varias situaciones que surgen en la vida diaria, como las temperatura debajo de cero y el saldo en una cuenta de cheques que está sobregirada. Por ejemplo, la temperatura natural más fría registrada en la Tierra fue de −128.6°F en la estación rusa Vostok en la Antártida el 21 de julio de 1983.

©Topham/The Image Works. Reproducida con permiso.

© Les Welch/Icon SMI/Corbis

2 Escribir decimales en forma expandida

El decimal 4.458, introducido en la gráfica de valores posicionales mostrada abajo, representa el tiempo (en segundos) que le tomó a la poseedora del récord femenil Melanie Troxel en cubrir un cuarto de milla en su dragster con combustible de alto octanaje. Observe que los valores posicionales de las columnas para la parte de número entero son 1, 10, 100, 1,000, etc. En la Sección 1.1 se aprendió que el valor de cada una de estas columnas es 10 veces mayor que la columna directamente a su derecha.



Los valores posicionales de las columnas para la parte fraccional de un decimal son $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1{,}000}$, etc. Cada una de estas columnas tienen un valor que es $\frac{1}{10}$ del valor de la posición directamente a su izquierda. Por ejemplo,

- El valor de la columna de las décimas es $\frac{1}{10}$ del valor de la columna de las unidades: $1 \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$.
- El valor de la columna de las centésimas es $\frac{1}{10}$ del valor de la columna de las décimas: $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$.
- El valor de la columna de las milésimas es $\frac{1}{10}$ del valor de la columna de las centésimas: $\frac{1}{100} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{1{,}000}$.

El significado del decimal 4.458 se vuelve claro cuando se escribe en **forma expandida** (también llamada **notación expandida**).

4.458 = **4** unidades + **4** décimas + **5** centésimas + **8** milésimas

lo cual puede escribirse como:

$$4.458 = 4 + \frac{4}{10} + \frac{5}{100} + \frac{8}{1{,}000}$$

El lenguaje de las matemáticas La palabra *decimal* proviene del latín *decima,* que significa una décima parte.

Auto-revisión 2

Escriba el número decimal 1,277.9465 en forma expandida.

Ahora intente **Problemas 23 y 27**

EJEMPLO 2 Escriba el número decimal 592.8674 en forma expandida.

Estrategia Empezando de izquierda a derecha, se dará el valor posicional de cada dígito y se combinará con símbolos +.

POR QUÉ El término *forma expandida* significa escribir el número como una suma de los valores posicionales de cada uno de sus dígitos.

Solución La forma expandida del 592.8674 es:

5 centenas + **9** decenas + **2** unidades + **8** décimas + **6** centésimas + **7** milésimas + **4** diezmilésimas

lo cual puede escribirse como

$$500 + 90 + 2 + \frac{8}{10} + \frac{6}{100} + \frac{7}{1{,}000} + \frac{4}{10{,}000}$$

3 Leer decimales y escribirlos en forma estándar

Para comprender cómo leer un decimal se examinará con mayor detalle la forma expandida del 4.458. Recuerde que

$$4.458 = 4 + \frac{4}{10} + \frac{5}{100} + \frac{8}{1{,}000}$$

Para sumar las fracciones, se necesita construir $\frac{4}{10}$ y $\frac{5}{100}$ para que su denominador sea el mcd, 1,000.

$$\begin{aligned} 4.458 &= 4 + \frac{4}{10} \cdot \frac{\mathbf{100}}{\mathbf{100}} + \frac{5}{100} \cdot \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{10}} + \frac{8}{1{,}000} \\ &= 4 + \frac{400}{1{,}000} + \frac{50}{1{,}000} + \frac{8}{1{,}000} \\ &= 4 + \frac{458}{1{,}000} \\ &= 4\frac{458}{1{,}000} \end{aligned}$$

Parte de número natural

Se ha encontrado que $4.\underline{458} = 4\frac{458}{1{,}000}$

Parte fraccional

Se lee el 4.458 como "cuatro y cuatrocientas cincuenta y ocho milésimas" debido a que el 4.458 es lo mismo que $4\frac{458}{1{,}000}$. Observe que el último dígito en 4.45**8** está en la posición de las milésimas. Esta observación sugiere el siguiente método para leer decimales.

Lectura de un decimal

Para leer un decimal:

1. Vea la parte izquierda del punto decimal y diga el nombre del número entero.
2. El punto decimal se lee como "y".
3. Diga la parte fraccional del decimal como un número entero seguido por el nombre de la última columna de valor posicional del dígito que está más a la derecha.

Se pueden utilizar los pasos para leer un decimal para escribirlo en palabras.

EJEMPLO 3 Escriba cada decimal en palabras y después como una fracción o un número mixto. **No tiene que simplificar la fracción.**

a. El Sputnik, el primer satélite lanzado al espacio, pesaba 184.3 libras.

b. Usain Bolt, de Jamaica, posee el récord mundial masculino en la carrera de 100 metros: 9.69 segundos.

c. Un billete de un dólar es de 0.0043 pulgadas de grosor.

d. El mercurio líquido se congela a sólido a −37.7°F.

Estrategia Se identificará el número natural a la izquierda del punto decimal, la parte fraccional a su derecha y el nombre de la columna de valor posicional del dígito más a la derecha.

POR QUÉ Se necesitan conocer estas tres piezas de información para leer un decimal o escribirlo en palabras.

Auto-revisión 3

Escriba cada decimal en palabras y después como una fracción o un número mixto. **No tiene que simplificar la fracción.**

a. La temperatura normal promedio del cuerpo es de 98.6ºF.

b. El planeta Venus realiza una órbita completa alrededor del sol cada 224.7007 días terrestres.

c. Un gramo es alrededor de 0.035274 onzas.

d. El nitrógeno líquido se congela en −345.748°F.

Ahora intente **Problemas 31, 35 y 39**

Solución

a. **184** . **3** La parte de número entero es el 184. La parte fraccional es el 3. El dígito más a la derecha, el 3, está en la posición de las décimas.

Ciento ochenta y cuatro y tres décimas

Escrito como un número mixto, el 184.3 es $184\frac{3}{10}$.

b. **9** . **69** La parte de número entero es el 9. La parte fraccional es el 69. El dígito más a la derecha, el 9, está en la posición de las centésimas.

Nueve y sesenta y nueve centésimas

Escrito como un número mixto, el 9.69 es $9\frac{69}{100}$.

c. **0** . **0043** La parte de número entero es el 0. La parte fraccional es el 43. El dígito más a la derecha, el 3, está en la posición de las diezmilésimas.

Cuarenta y tres diezmilésimas Dado que la parte de número entero es de 0, no se necesita escribirla y tampoco la palabra y.

Escrito como una fracción, el 0.0043 es $\frac{43}{10{,}000}$.

d. **−37** . **7** Este es un decimal negativo.

Treinta y siete y siete décimas **negativo**

Escrito como un número mixto negativo, el -37.7 es $-37\frac{7}{10}$.

El lenguaje de las matemáticas Los decimales con frecuencia se leen de manera informal. Por ejemplo, se puede leer el 184.3 como "ciento ochenta y cuatro punto tres" y el 9.69 como "nueve punto seis nueve".

El procedimiento para la lectura de un decimal puede aplicarse de manera inversa para convertir de la forma escrita en palabras a la forma estándar.

Auto-revisión 4

Escriba cada número en forma estándar:

a. *Ochocientos seis y noventa y dos centésimas*

b. *Doce y sesenta y siete diezmilésimas*

Ahora intente **Problemas 41, 45 y 47**

EJEMPLO 4 Escriba cada número en forma estándar:

a. *Ciento setenta y dos y cuarenta y tres centésimas*

b. *Once y cincuenta y un milésimas*

Estrategia Se localizará la palabra *y* en la forma escrita en palabras y se traducirá por separado la frase que aparece antes de ella y la frase que aparece después de ella.

POR QUÉ La parte de número entero del decimal está descrita por la frase que aparece antes de la palabra *y*. La parte fraccional del decimal está descrita por la frase que aparece después de la palabra *y*.

Solución

a. ***Ciento setenta y dos*** ***y*** ***cuarenta y tres centésimas***

172.43

Esta es la columna del valor posicional de las centésimas.

b. En ocasiones, cuando se cambia de la forma escrita en palabras a la forma estándar, se debe insertar 0 marcadores de posición en la parte fraccional de un decimal para que el último dígito aparezca en la columna de valor posicional apropiada.

Once ***y*** ***cincuenta y un milésimas***

11.051

Esta es la columna de valor posicional de las milésimas.

Debe insertarse un 0 marcador de posición aquí para que el último dígito en el 51 esté en la columna de las milésimas.

¡Cuidado! Si no se escribiera un 0 marcador de posición en el 11.051, resulta una respuesta incorrecta de 11.51 (once y cincuenta y un *centésimas*, no *milésimas*).

4 Comparar decimales utilizando símbolos de desigualdad

Para desarrollar una manera de comparar decimales se considera el 0.3 y el 0.271. Dado que el 0.271 contiene más dígitos, puede parecer que el 0.271 es mayor que el 0.3. Sin embargo, lo opuesto es verdadero. Para mostrar esto, se escriben el 0.3 y el 0.271 en forma de fracción:

$$0.3 = \frac{3}{10} \qquad 0.271 = \frac{271}{1{,}000}$$

Ahora se construye el $\frac{3}{10}$ en una fracción equivalente que tenga un denominador de 1,000, como la de $\frac{271}{1{,}000}$.

$$0.3 = \frac{3}{10} \cdot \frac{\mathbf{100}}{\mathbf{100}} = \frac{300}{1{,}000}$$

Dado que $\frac{300}{1{,}000} > \frac{271}{1{,}000}$, se tiene que $0.3 > 0.271$. Esta observación sugiere un método más rápido para comparar decimales.

Comparación de decimales

Para comparar dos decimales:

1. Asegúrese de que ambos números tengan la misma cantidad de lugares decimales a la derecha del punto decimal. Escriba cualesquiera ceros adicionales necesarios para lograr esto.
2. Compare los dígitos de cada decimal, columna por columna, trabajando de izquierda a derecha.
3. *Si los decimales son positivos:* Cuando dos dígitos difieren, el decimal con el dígito mayor es el número más grande. *Si los decimales son negativos:* Cuando dos dígitos difieren, el decimal con el dígito menor es el número más grande.

EJEMPLO 5 Coloque un símbolo de $<$ o $>$ en el recuadro para formar un enunciado verdadero:

a. 1.2679 ☐ 1.2658 **b.** 54.9 ☐ 54.929 **c.** −10.419 ☐ −10.45

Estrategia Se apilarán los decimales y después, empezando de izquierda a derecha, se examinarán sus columnas de valor posicional buscando una diferencia en sus dígitos.

POR QUÉ Sólo se necesita examinar en esa columna para determinar cuál dígito es el mayor.

Solución

a. Dado que ambos decimales tienen el mismo número de posiciones a la derecha del punto decimal, se pueden comparar de inmediato los dígitos, columna por columna.

1.2679
1.2658

Mismo dígito
Mismo dígito
Mismo dígito

Estos dígitos son diferentes: Dado que el 7 es mayor que el 5, se tiene que el primer decimal es mayor que el segundo.

Por tanto, el 1.2679 es mayor que el 1.2658 y se puede escribir $1.2679 > 1.2658$.

b. Se pueden escribir dos ceros después del 9 en el 54.9 para que los decimales tengan el mismo número de dígitos a la derecha del punto decimal. Esto hace más sencilla la comparación.

54.900
54.929

A medida que se va de izquierda a derecha, esta es la primera columna en la que los dígitos difieren. Dado que $2 > 0$, se tiene que el 54.929 es mayor que el 54.9 (o que el 54.9 es menor que el 54.929) y se puede escribir $54.9 < 54.929$.

Auto-revisión 5

Coloque un símbolo de $<$ o $>$ en el recuadro para formar un enunciado verdadero:

a. 3.4308 ☐ 3.4312

b. 678.3409 ☐ 678.34

c. −703.8 ☐ −703.78

Ahora intente **Problemas 49, 55 y 59**

Consejo útil El escribir ceros adicionales *después del último dígito a la derecha del punto decimal no cambia el valor del decimal.* También, el borrar ceros adicionales después del último dígito a la derecha del punto decimal no cambia el valor del decimal. Por ejemplo,

$54.9 = 54.90 = 54.900$

Estos ceros adicionales no cambian el valor del decimal.

Debido a que $54\frac{90}{100}$ y $54\frac{900}{1{,}000}$ en la forma más simple son iguales a $54\frac{9}{10}$.

c. Se están comparando dos decimales negativos. En este caso, cuando dos dígitos difieren, el decimal con el dígito menor es el número mayor.

-10.419
-10.450 Escriba un cero después del 5 para ayudar en la comparación.

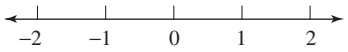
A medida que se va de izquierda a derecha, esta es la primera columna en la que los dígitos difieren. Dado que $1 < 5$, se tiene que el -10.419 es mayor que el -10.45 y se puede escribir $-10.419 > -10.45$.

5 Graficar decimales en una recta numérica

Los decimales pueden mostrarse trazando puntos en una recta numérica.

Auto-revisión 6

Grafique -1.1, -1.64, -0.8 y 1.9 en una recta numérica.



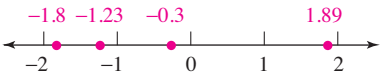
Ahora intente **Problema 61**

EJEMPLO 6 Grafique -1.8, -1.23, -0.3 y 1.89 en una recta numérica.

Estrategia Se localizará la posición de cada decimal en la recta numérica y se trazará un punto en negritas.

POR QUÉ El *graficar un número* significa realizar un trazado que represente el número.

Solución La gráfica de cada decimal negativo está a la izquierda del 0 y la gráfica de cada decimal positivo está a la derecha del 0. Dado que $-1.8 < -1.23$, la gráfica del -1.8 está a la izquierda del -1.23.



6 Redondear decimales

Cuando no se necesitan resultados exactos, se pueden aproximar los números decimales **redondeando.** Para redondear la parte decimal de un número decimal, se emplea un método similar al utilizado para redondear números enteros.

Redondeo de un decimal

1. Para redondear un decimal a cierto valor posicional decimal, localice el **dígito a redondear** en esa posición.
2. Busque el **dígito a examinar** directamente a la derecha del dígito a redondear.
3. Si el dígito a examinar es 5 o mayor, redondee hacia arriba sumando 1 al dígito a redondear y eliminando todos los dígitos a su derecha. Si el dígito a examinar es menor que 5, redondee hacia abajo conservando el dígito a redondear y eliminando todos los dígitos a su derecha.

EJEMPLO 7 ***Química*** Un estudiante en una clase de química utiliza una balanza digital para pesar un compuesto en gramos. Redondee la lectura mostrada en la balanza a la milésima de gramo más cercana.

Estrategia Se identificará el dígito en la columna de las milésimas y el dígito en la columna de las diezmilésimas.

POR QUÉ Para redondear a la milésima más cercana, el dígito en la columna de las milésimas es el dígito a redondear y el dígito en la columna de las diezmilésimas es el dígito a examinar.

Solución El dígito a redondear en la columna de las milésimas es el 8. Dado que el dígito a examinar 7 es 5 o mayor, se redondea hacia arriba.

Dígito a redondear: columna de las milésimas
15.2387
Dígito a examinar: el 7 es 5 o mayor.

Sume 1 al 8.
15.2387
Elimine este dígito.

La lectura en la balanza es de aproximadamente 15.239 gramos.

Auto-revisión 7

Redondee el 24.41658 a la diezmilésima más cercana.

Ahora intente **Problemas 65 y 69**

EJEMPLO 8 Redondee cada decimal al valor posicional indicado:

a. −645.1358 a la décima más cercana **b.** 33.096 a la centésima más cercana

Estrategia En cada caso, primero se identificará el dígito a redondear. Después se identificará el dígito a examinar y se determinará si es menor que 5 o mayor que o igual a 5.

POR QUÉ Si el dígito a examinar es menor que 5, se redondea hacia abajo; si es mayor que o igual a 5, se redondea hacia arriba.

Solución

a. Los decimales negativos se redondean de la misma manera que los decimales positivos. El dígito a redondear en la columna de las décimas es el 1. Dado que el dígito a examinar 3 es menor que 5, se redondea hacia abajo.

Dígito a redondear: columna de las décimas
−645.1358
Dígito a examinar: el 3 es menor que 5.

Conserve el dígito a redondear: No sume 1.
−645.1358
Elimine el dígito a examinar y los dígitos a su derecha.

Por tanto, el −645.1358 redondeado a la decena más cercana es el −645.1.

b. El dígito a redondear en la columna de las centésimas es el 9. Dado que el dígito a examinar 6 es 5 o mayor, se redondea hacia arriba.

Dígito a redondear: columna de las centésimas.
33.096
Dígito a examinar: el 6 es 5 o mayor.

Sume 1. Dado que 9 + 1 = 10, escriba 0 en esta columna y acarree el 1 a la columna de las decenas
1
33.096
Elimine el dígito a examinar.

Por tanto, 33.096 redondeado a la centésima más cercana es 33.10.

¡Cuidado! Sería incorrecto eliminar el 0 en la respuesta 33.10. Si se le pide redondear a cierto valor posicional (en este caso, milésimas) esa posición debe tener un dígito, aun si el dígito es el 0.

Auto-revisión 8

Redondee cada decimal al valor posicional indicado:

a. −708.522 a la décima más cercana

b. 9.1198 a la milésima más cercana

Ahora intente **Problemas 73 y 77**

Existen varias situaciones en la vida diaria que necesitan el redondeo de cantidades de dinero. Por ejemplo, un comprador en una tienda de abarrotes podría redondear el costo unitario de un artículo al centavo más cercano y un contribuyente podría redondear sus ingresos al dólar más cercano cuando llene una declaración de impuestos.

Autocomprobación 9

a. Redondee $0.076601 al centavo más cercano.

b. Redondee $24,908.53 al dólar más cercano.

Ahora intente **Problemas 85 y 87**

EJEMPLO 9

a. ***Facturas de servicios públicos*** Una compañía de servicios públicos calcula la factura de la electricidad mensual del propietario de una casa multiplicando el costo unitario de $0.06421 por el número de kilowatts hora utilizados en ese mes. Redondee el costo unitario al centavo más cercano.

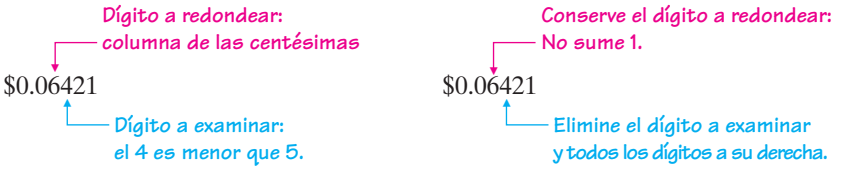
b. ***Ingreso anual*** Una secretaria gana $36,500.91 dólares en un año. Redondee su ingreso al dólar más cercano.

Estrategia En el inciso a, se redondeará el decimal a la centésima más cercana. En el inciso b, se redondeará el decimal a la columna de las unidades.

POR QUÉ Dado que hay 100 centavos en un dólar, cada centavo es $\frac{1}{100}$ de un dólar. El redondear al *centavo más cercano* es lo mismo que redondear a la *centésima más cercana* de un dólar. El redondear al *dólar más cercano* es lo mismo que redondear a la *posición de las unidades.*

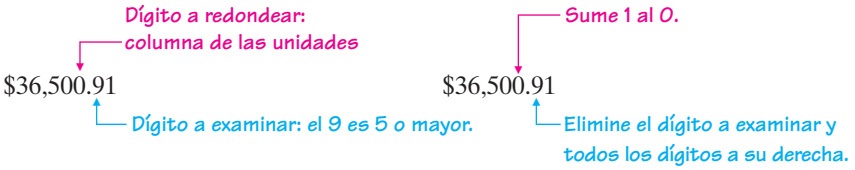
Solución

a. El dígito a redondear en la columna de las centésimas es el 6. Dado que el dígito a examinar 4 es menor que 5, se redondea hacia abajo.



Por tanto, $0.06421 redondeado al centavo más cercano es $0.06.

b. El dígito a redondear en la columna de las unidades es el 0. Dado que el dígito a examinar 9 es 5 o mayor, se redondea hacia arriba.



Por tanto, $36,500.91 redondeado al dólar más cercano es $36,501.

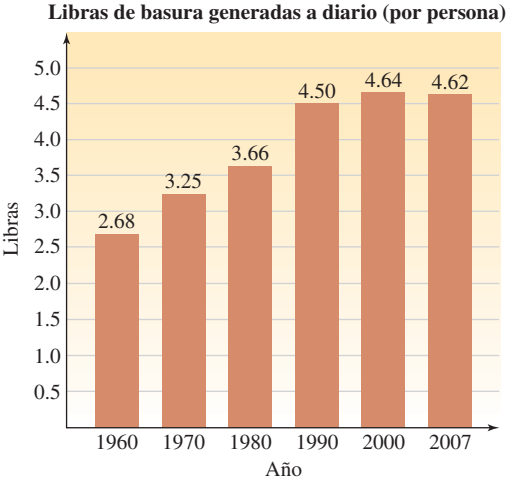
7 Leer tablas y gráficas que involucran decimales

Año	Libras
1960	2.68
1970	3.25
1980	3.66
1990	4.50
2000	4.64
2007	4.62

(Fuente: U.S. Environmental Protection Agency)

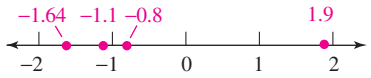
La tabla a la izquierda es un ejemplo del uso de decimales. Muestra el número de libras de basura generadas a diario por persona en Estados Unidos para los años seleccionados de 1960 al 2007.

Cuando la información en la tabla se presente en la forma de una **gráfica de barras,** es aparente una tendencia. La cantidad de basura generada a diario por persona aumentó de manera constante hasta el año 2000. Desde entonces, parece haber permanecido aproximadamente igual.



RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. a. 9 milésimas **b.** 2 **2.** $1{,}000 + 200 + 70 + 7 + \frac{9}{10} + \frac{4}{100} + \frac{6}{1{,}000} + \frac{5}{10{,}000}$
3. a. noventa y ocho y seis décimas, $98\frac{6}{10}$ **b.** doscientos veinticuatro y siete mil siete diezmilésimas, $224\frac{7{,}007}{10{,}000}$ **c.** treinta y cinco mil, doscientos setenta y cuatro millonésimas, $\frac{35{,}274}{1{,}000{,}000}$ **d.** trescientos cuarenta y cinco y setecientos cuarenta y ocho milésimas negativo, $-345\frac{748}{1{,}000}$ **4. a.** 806.92 **b.** 12.0067 **5. a.** $<$ **b.** $>$ **c.** $<$
6.



7. 24.4166 **8. a.** -708.5 **b.** 9.120
9. a. \$0.08 **b.** \$24,909

SECCIÓN 4.1 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Complete los espacios.

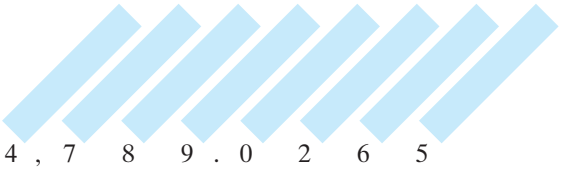
1. Los decimales se escriben introduciendo los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 en las columnas de los valores posicionales que están separadas por un _____ decimal.
2. Las columnas de los valores posicionales a la izquierda del punto decimal forman la parte de número entero de un número decimal y las columnas de los valores posicionales a la derecha del punto decimal forman la parte _____.
3. Se puede mostrar el valor representado por cada dígito del decimal 98.6213 utilizando la forma _____:

$$98.6213 = 90 + 8 + \frac{6}{10} + \frac{2}{100} + \frac{1}{1{,}000} + \frac{3}{10{,}000}$$

4. Cuando no se necesitan resultados exactos, se pueden aproximar los números decimales _____.

CONCEPTOS

5. Escriba el nombre de cada columna en la siguiente tabla de valores posicionales.

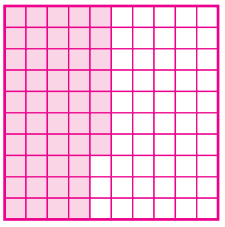


6. Escriba el valor de cada columna en la siguiente tabla de valores posicionales.

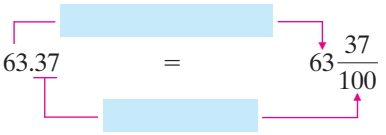
7	2	.	3	1	9	5	8

7. Complete los espacios.
   a. El valor de cada posición en la parte de número entero de un decimal es ____ veces mayor que la columna directamente a su derecha.
   b. El valor de cada posición en la parte fraccional de un número decimal es ____ del valor de la posición directamente a su izquierda.
8. Represente cada situación utilizando un número con signo.
   a. Una cuenta de cheques sobregirada por \$33.45
   b. Un río 6.25 pies arriba de la fase de inundación
   c. 3.9 grados bajo cero
   d. 17.5 segundos después del despegue
9. **a.** Represente la parte sombreada de la región rectangular como una fracción y un decimal.

   b. Represente la parte sombreada de la región cuadrada como una fracción y un decimal.



10. Escriba $400 + 20 + 8 + \frac{9}{10} + \frac{1}{100}$ como un decimal.
11. Complete los espacios en la siguiente ilustración para etiquetar la *parte de número entero* y la *parte fraccional.*



12. Complete los espacios.
   a. Para redondear \$0.13506 al *centavo más cercano,* el dígito a redondear es el ____ y el dígito a examinar es el ____.
   b. Para redondear \$1,906.47 al *dólar más cercano,* el dígito a redondear es el ____ y el dígito a examinar es el ____.

NOTACIÓN

Complete los espacios.

13. Las columnas a la derecha del punto decimal en un número decimal forman su parte fraccional. Sus nombres de valor posicional son similares a los de la parte de número entero, pero terminan en las letras "_____."

14. Cuando se lee un decimal, como 2.37, se puede leer el punto decimal como "_____" o como "_____".

15. Escriba un número decimal que tenga . . .
al 6 en la columna de las unidades,
al 1 en la columna de las decenas,
al 0 en la columna de las décimas,
al 8 en la columna de las centésimas,
al 2 en la columna de las centenas,
al 9 en la columna de los millares,
al 4 en la columna de las milésimas,
al 7 en la columna de las decenas de millares y
al 5 en la columna de las diezmilésimas.

16. Determine si cada enunciado es verdadero o falso.
a. $0.9 = 0.90$
b. $1.260 = 1.206$
c. $-1.2800 = -1.280$
d. $0.001 = .0010$

PRÁCTICA GUIADA

Responda las siguientes preguntas acerca del valor posicional. **Vea el Ejemplo 1.**

17. Considere el número decimal: 145.926
a. ¿Cuál es el valor posicional del dígito 9?
b. ¿Cuál dígito indica el número de milésimas?
c. ¿Cuál dígito indica el número de decenas?
d. ¿Cuál es el valor posicional del dígito 5?

18. Considere el número decimal: 304.817
a. ¿Cuál es el valor posicional del dígito 1?
b. ¿Cuál dígito indica el número de milésimas?
c. ¿Cuál dígito indica el número de centenas?
d. ¿Cuál es el valor posicional del dígito 7?

19. Considere el número decimal: 6.204538
a. ¿Cuál es el valor posicional del dígito 8?
b. ¿Cuál dígito indica el número de centésimas?
c. ¿Cuál dígito indica el número de diezmilésimas?
d. ¿Cuál es el valor posicional del dígito 6?

20. Considere el número decimal: 4.390762
a. ¿Cuál es el valor posicional del dígito 6?
b. ¿Cuál dígito indica el número de milésimas?
c. ¿Cuál dígito indica el número de diezmilésimas?
d. ¿Cuál es el valor posicional del dígito 4?

Escriba cada número decimal en forma expandida. **Vea el Ejemplo 2.**

21. 37.89

22. 26.93

23. 124.575

24. 231.973

25. 7,498.6468

26. 1,946.7221

27. 6.40941

28. 8.70214

Escriba cada decimal en palabras y después como una fracción o un número mixto. **Vea el Ejemplo 3.**

29. 0.3
30. 0.9
31. 50.41
32. 60.61
33. 19.529
34. 12.841
35. 304.0003
36. 405.0007
37. −0.00137
38. −0.00613
39. −1,072.499
40. −3,076.177

Escriba cada número en forma estándar. **Vea el Ejemplo 4.**

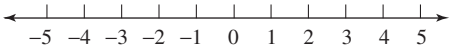
41. Seis y ciento ochenta y siete milésimas
42. Cuatro y trescientas noventa y dos milésimas
43. Diez y cincuenta y seis diezmilésimas
44. Once y ochenta y seis diezmilésimas
45. Dieciséis y treinta y nueve centésimas negativo
46. Veintisiete y cuarenta y cuatro centésimas negativo
47. Ciento cuatro y cuatro millonésimas
48. Doscientos tres y tres millonésimas

Coloque un símbolo $<$ o $>$ en el recuadro para formar un enunciado verdadero. **Vea el Ejemplo 5.**

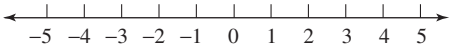
49. 2.59 ☐ 2.55
50. 5.17 ☐ 5.14
51. 45.103 ☐ 45.108
52. 13.874 ☐ 13.879
53. 3.28724 ☐ 3.2871
54. 8.91335 ☐ 8.9132
55. 379.67 ☐ 379.6088
56. 446.166 ☐ 446.2
57. −23.45 ☐ −23.1
58. −301.98 ☐ −302.45
59. −0.065 ☐ −0.066
60. −3.99 ☐ −3.9888

Grafique cada número en la recta numérica. Vea el Ejemplo 6.

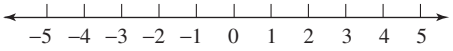
61. 0.8, −0.7, −3.1, 4.5, −3.9



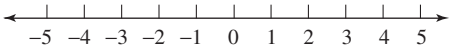
62. 0.6, −0.3, −2.7, 3.5, −2.2



63. −1.21, −3.29, −4.25, 2.75, −1.84



64. −3.19, −0.27, −3.95, 4.15, −1.66



Redondee cada número decimal al valor posicional indicado. Vea el Ejemplo 7.

65. 506.198 a la décima más cercana

66. 51.451 a la décima más cercana

67. 33.0832 a la centésima más cercana

68. 64.0059 a la centésima más cercana

69. 4.2341 a la milésima más cercana

70. 8.9114 a la milésima más cercana

71. 0.36563 a la diezmilésima más cercana

72. 0.77623 a la diezmilésima más cercana

Redondee cada número decimal al valor posicional indicado. Vea el Ejemplo 8.

73. −0.137 a la centésima más cercana

74. −808.0897 a la centésima más cercana

75. −2.718218 a la décima más cercana

76. −3,987.8911 a la décima más cercana

77. 3.14959 a la milésima más cercana

78. 9.50966 a la milésima más cercana

79. 1.4142134 a la millonésima más cercana

80. 3.9998472 a la millonésima más cercana

81. 16.0995 a la milésima más cercana

82. 67.0998 a la milésima más cercana

83. 290.303496 a la cienmilésima más cercana

84. 970.457297 a la cienmilésima más cercana

Redondee cada cantidad de dólares proporcionada. Vea el Ejemplo 9.

85. $0.284521 al centavo más cercano

86. $0.312906 al centavo más cercano

87. $27,841.52 al dólar más cercano

88. $44,633.78 al dólar más cercano

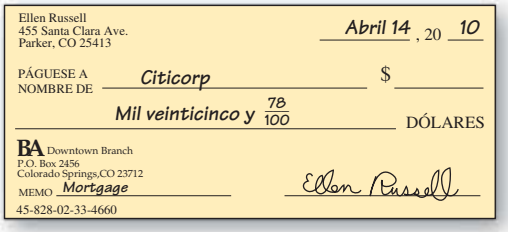
APLICACIONES

89. LECTURA DE MEDIDORES ¿A qué decimal está apuntando la flecha?

90. MEDICIÓN Estime una longitud de 0.3 pulgadas en el segmento de línea de 1 pulgada de largo mostrado abajo.

_____

91. CUENTAS DE CHEQUES Complete el cheque mostrado escribiendo la cantidad utilizando un decimal.


Ellen Russell
455 Santa Clara Ave.
Parker, CO 25413

Abril 14 , 20 10

PÁGUESE A NOMBRE DE Citicorp $ _____

Mil veinticinco y 78/100 DÓLARES

BA Downtown Branch
P.O. Box 2456
Colorado Springs,CO 23712

MEMO Mortgage

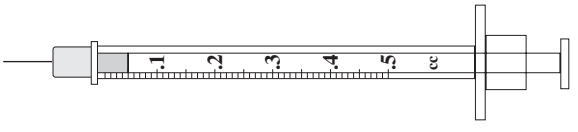
Ellen Russell

45-828-02-33-4660

92. DINERO Se utiliza un punto decimal cuando se trabaja con dólares, pero el punto decimal no es necesario cuando se trabaja con centavos. Para cada cantidad de dólares en la tabla, dé la cantidad equivalente expresada como centavos.

Dólares	Centavos
$0.50	
$0.05	
$0.55	
$5.00	
$0.01	

93. INYECCIONES Abajo se muestra una jeringa. Use una flecha para mostrar hasta qué punto debe llenarse la jeringa si se va a inyectar una dosis de medicamento de 0.38 cc. ("cc" representa "centímetros cúbicos".)



94. LÁSERES El láser utilizado en la corrección de la visión es tan preciso que cada pulso puede eliminar 39 millonésimas de pulgada de tejido en 12 milmillonésimas de segundo. Escriba cada uno de estos números como un decimal.

95. NASCAR El final más cerrado en la historia de la NASCAR tuvo lugar en la pista de carreras de Darlington el 16 de marzo del 2003, cuando Ricky Craven venció a Kurt Bush por sólo 0.002 segundos. Escriba el decimal en palabras y después como una fracción en la forma más simple. (Fuente: NASCAR)

96. SISTEMA MÉTRICO El sistema métrico es empleado de manera amplia en la ciencia para medir longitud (metros), peso (gramos) y capacidad (litros). Redondee cada decimal a la centésima más cercana.

a. 1 pie son 0.3048 metros.

b. 1 mi son 1,609.344 metros.

c. 1 lb son 453.59237 gramos.

d. 1 gal son 3.785306 litros.

97. FACTURAS DE SERVICIOS PÚBLICOS Abajo se muestra una porción de la factura del gas del propietario de una casa. Redondee cada cantidad de dólares decimal al centavo más cercano.

Periodo de facturación

De	A	Número del medidor
05/06/10	05/07/10	10694435

Gas La Compañía

Datos de lectura del medidor en o cerca del 3 de Agosto de 2010

Resumen de cargos

Cargo al cliente	30 días	× $0.16438
Lectura inicial	14 Termias	× $1.01857
Lectura final	11 Termias	× $1.20091
Cargo por regulación estatal	25 Termias	× $0.00074
Recargo de utilidad pública	25 Termias	× $0.09910

98. DECLARACIÓN DE IMPUESTOS Abajo se muestra una porción del formato de impuestos W-2. Redondee cada cantidad de dólares al dólar más cercano.

Formato W-2 Declaración de salarios e impuestos 2010

1 Salarios, gratificaciones y otros comp *$35,673.79*	2 Retención de impuestos federales *$7,134.28*	3 Pagos de seguridad social *$38,204.16*
4 Retención de impuestos SS *$2,368.65*	5 Pagos y gratificaciones de cuidado médico *$38,204.16*	6 Retención de impuesto por cuidado médico *$550.13*
7 Gratificaciones de seguridad social	8 Gratificaciones atribuidas	9 Pago de CPI avanzado
10 Beneficios del cuidado de dependientes	11 Planes no calificados	12a

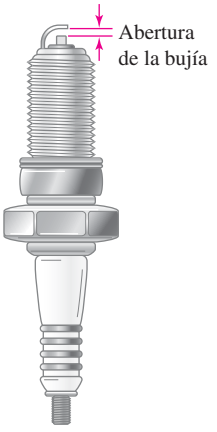
99. SISTEMA DECIMAL DEWEY Cuando se acomodan en las repisas, los libros de la biblioteca mostrados en la siguiente columna tienen que ponerse en orden numérico, de menor a mayor, *de izquierda a derecha.* ¿Cómo deben reacomodarse los títulos para que estén en el orden apropiado?

100. OLIMPIADAS 2008 Abajo se muestran en orden alfabético los seis finalistas en la competición de gimnasia all-around individual femenil en los Juegos Olímpicos de Beijing. Si gana la calificación más alta, ¿cuáles gimnastas ganaron las medallas de oro (1er lugar), de plata (2do lugar) y de bronce (3er lugar)?

	Nombre	Nación	Calificación
	Yuyuan Jiang	China	60.900
	Shawn Johnson	E.U.	62.725
	Nastia Liukin	E.U.	63.325
	Steliana Nistor	Rumania	61.050
	Ksenia Semenova	Rusia	61.925
	Yilin Yang	China	62.650

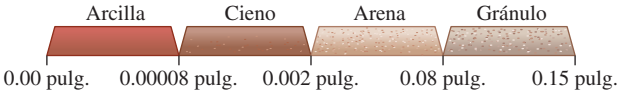
(Fuente: SportsIllustrated.cnn.com)

101. AFINACIÓN Se quitaron las seis bujías del motor de un automóvil y se comprobó la abertura de la bujía. Si las especificaciones del vehículo solicitan que el espacio sea de 0.031 a 0.035 pulgadas, ¿cuáles de las bujías deben reemplazarse?



Cilindro 1: 0.035 pulg.
Cilindro 2: 0.029 pulg.
Cilindro 3: 0.033 pulg.
Cilindro 4: 0.039 pulg.
Cilindro 5: 0.031 pulg.
Cilindro 6: 0.032 pulg.

102. GEOLOGÍA Los geólogos clasifican los tipos de suelo de acuerdo con el tamaño de grano de las partículas que conforman el suelo. Abajo se muestran las cuatro clasificaciones principales de los suelos. Clasifique cada una de las muestras (A, B, C y D) en la tabla como arcilla, cieno, arena o gránulo.



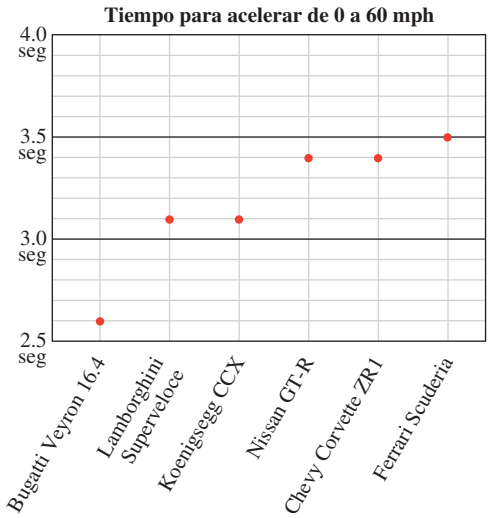
Muestra	Lugar de hallazgo	Tamaño de grano (pulg.)	Clasificación
A	Orilla del río	0.009	
B	Estanque	0.0007	
C	Esquina NE	0.095	
D	Lago seco	0.00003	

103. MICROSCOPIOS Un microscopio empleado en un laboratorio es capaz de examinar estructuras que varían de tamaño de 0.1 a tan pequeñas como 0.0001 centímetros. ¿Cuáles de las estructuras listadas en la tabla serían visibles a través de este microscopio?

Estructura	Tamaño (cm)
Bacteria	0.00011
Célula vegetal	0.015
Virus	0.000017
Célula animal	0.00093
Fibra de asbésto	0.0002

104. AUTOMÓVILES MÁS RÁPIDOS La gráfica de abajo muestra la lista de Auto Week de los automóviles más rápidos del 2009. Encuentre el tiempo que le toma a cada automóvil en acelerar de 0 a 60 mph.

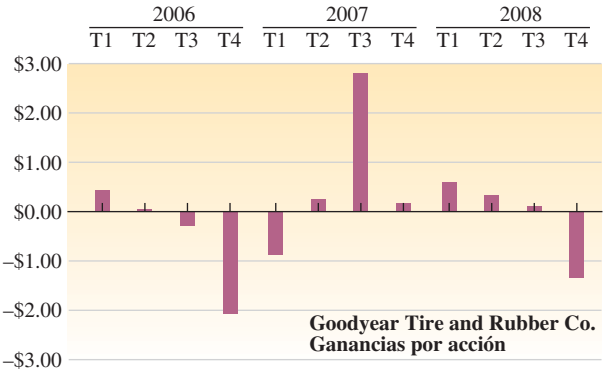
LIONEL VADAM/Maxppp/Landov



105. BOLSA DE VALORES Refiérase a la gráfica de abajo, la cual muestra las ganancias (y pérdidas) en el valor de una acción de la Goodyear Tire and Rubber Company durante doce trimestres. (Para efectos contables, un año se divide en cuatro trimestres.)

a. ¿En qué trimestre, de qué año, fueron mayores los beneficios por acción? Estime la ganancia.

b. ¿En qué trimestre, de qué año, fue mayor la pérdida por acción? Estime la pérdida.



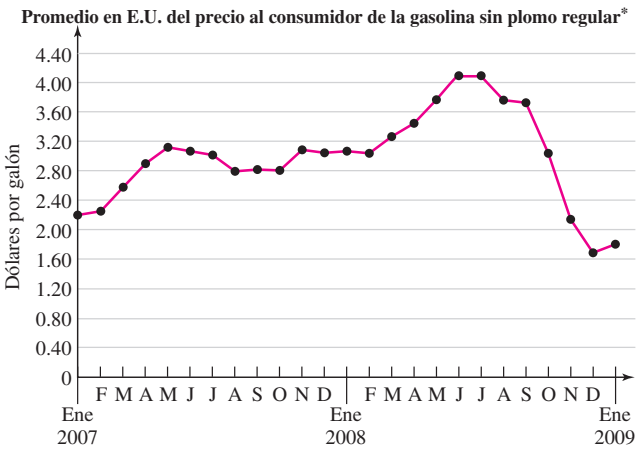
(Fuente: *Wall Street Journal*)

106. PRECIOS DE LA GASOLINA Refiérase a la gráfica abajo.

a. ¿En qué mes, de qué año, fue más bajo el precio al consumidor de un galón de gasolina? Estime el precio.

b. ¿En qué mes(es), de qué año, fue más alto el precio al consumidor de un galón de gasolina? Estime el precio.

c. ¿En qué mes del 2007 fue el mayor precio de un galón de gasolina? Estime el precio.



*El precio al consumidor incluye impuestos estatales y federales

(Fuente: EPA Short-Term Energy Outlook, marzo del 2009)

REDACCIÓN

107. Explique la diferencia entre decena y una décima.

108. "Mientras más dígitos contenga un número, mayor es". ¿Este enunciado es verdadero? Explique.

109. Explique por qué es incorrecto leer al 2.103 como *"dos y ciento y tres milésimas"*.

110. SEÑALIZACIONES

a. Una señalización enfrente de un restaurante de comida rápida tenía el costo de una hamburguesa listado como ¢.99. Explique el error.

b. La ilustración de abajo muestra la notación inusual que algunas estaciones de servicio utilizan para expresar el precio de un galón de gasolina. Explique el error.

111. Escriba una definición para cada una de estas palabras.

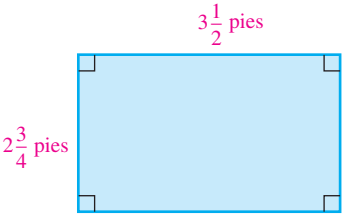
década *decatlón* *decimal*

112. Muestre que en el sistema de numeración decimal, cada columna de valor posicional para la parte fraccional de un decimal es $\frac{1}{10}$ del valor de la posición directamente a su izquierda.

REPASO

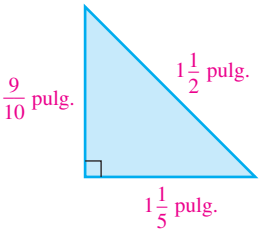
113. **a.** Encuentre el perímetro del rectángulo mostrado abajo.

b. Encuentre el área del rectángulo.



114. **a.** Encuentre el perímetro del triángulo mostrado abajo.

b. Encuentre el área del triángulo.



Objetivos

1. Sumar decimales.
2. Restar decimales.
3. Sumar y restar decimales con signo.
4. Estimar sumas y diferencias de decimales.
5. Resolver problemas de aplicación sumando y restando decimales.

SECCIÓN 4.2
Suma y resta de decimales

Para sumar o restar objetos, deben ser similares. El formato para la declaración de impuestos federales mostrada abajo tiene una línea vertical para asegurar que los dólares se sumen a dólares y que los centavos se sumen a centavos. En esta sección se muestra cómo los números decimales se suman y restan utilizando este tipo de forma vertical.

Formato **1040EZ**

Departamento del tesoro-Servicio de impuestos internos

Declaración de impuestos para contribuyentes solteros y acompañados sin dependientes **2010**

Ingreso **Adjuntar Formato(s) W-2 aquí.** Incluir, pero no adjuntar, cualquier pago.	1 Sueldos, salarios y beneficios. Esto debe mostrarse en el recuadro 1 de su(s) Formato(s) W-2. Adjuntar su(s) Formato (s) W-2.	1	21,056	89
	2 Interés fiscal. Si el total es sobre $1,500, no puede utilizar el Formato 1040 EZ	2	42	06
	3 Seguro de desempleo y Dividendos de los fondos permanentes de Alaska (vea la página 11).	3	200	00
	4 Sume las líneas 1, 2 y 3. Este es su **ingreso bruto ajustado.**	4	21,298	95

1 Sumar decimales

La suma de decimales es similar a la suma de números enteros. Se utiliza la **forma vertical** y se apilan los decimales con sus valores posicionales correspondientes y con los puntos decimales alineados. Después se suman los dígitos en cada columna, empezando de derecha a izquierda, asegurándose que las centésimas se sumen a

centésimas, las décimas se sumen a décimas, las unidades se sumen a unidades, etc. Se escribe el punto decimal en la **suma** de tal manera que se alinee con los puntos decimales en los **sumandos.** Por ejemplo, para encontrar 4.21 + 1.23 + 2.45, se procede como a continuación:

Forma vertical

```
  4.21
  1.23
+ 2.45
  7.89
```

Columna de las unidades
Columna de las décimas
Columna de las centésimas

A los números que se están sumando, 4.21, 1.23 y 2.45, se les llama sumandos.

Escriba el punto decimal en la suma directamente debajo de los puntos decimales en los sumandos.

Suma de los dígitos de las centésimas: Piense 1 + 3 + 5 = 9
Suma de los dígitos de las décimas: Piense 2 + 2 + 4 = 8
Suma de los dígitos de las unidades: Piense 4 + 1 + 2 = 7

La suma es de 7.89.

En este ejemplo, cada sumando tiene dos posiciones decimales, décimas y centésimas. Si el número de posiciones decimales en los sumandos son diferentes, se pueden insertar ceros adicionales para que el número de posiciones decimales coincidan.

Suma de decimales

Para sumar números decimales:

1. Escriba los números en forma vertical con los puntos decimales alineados.
2. Sume los números como sumaría números enteros, de derecha a izquierda.
3. Escriba el punto decimal en el resultado del Paso 2 directamente debajo de los puntos decimales en los sumandos.

Como la suma de números enteros, si la suma de los dígitos en cualquier columna de valor posicional es mayor que 9, se debe **acarrear.**

EJEMPLO 1

Sume: 31.913 + 5.6 + 68 + 16.78

Estrategia Se escribirá la suma en forma vertical para que los valores posicionales correspondientes y los puntos decimales de los sumandos estén alineados. Después se sumarán los dígitos, columna por columna, empezando de derecha a izquierda.

POR QUÉ Sólo se pueden sumar dígitos con el mismo valor posicional.

Solución Para hacer más sencillas las sumas de las columnas, se escribirán dos ceros después del 6 en el sumando 5.6 y un cero después del 8 en el sumando 16.78. Dado que los números enteros tienen un punto decimal "sobrentendido" inmediatamente a la derecha de su dígito de las unidades, se puede escribir el sumando 68 como 68.000 para ayudar a alinear las columnas.

```
 31.913
  5.600
 68.000
+16.780
```

Inserte dos ceros después del 6.
Inserte un punto decimal y tres ceros: 68 = 68.000.
Inserte un cero después del 8.
Alinee los puntos decimales.

Ahora se suma, de derecha a izquierda, como se sumarían números enteros, escribiendo la suma de cada columna debajo de la barra horizontal.

Auto-revisión 1

Sume:
41.07 + 35 + 67.888 + 4.1

Ahora intente **Problema 19**

$$\begin{array}{r} \overset{2\,2}{3}1.913 \\ 5.600 \\ 68.000 \\ +\ \ 16.780 \\ \hline 122.293 \end{array}$$

Acarree un 2 (mostrado en azul) a la columna de las unidades.

Acarree un 2 (mostrado en verde) a la columna de las decenas.

Escriba el punto decimal en el resultado directamente debajo de los puntos decimales en los sumandos.

La suma es de 122.293.

Consejo útil En el Ejemplo 1, los dígitos en cada columna de valor posicional se sumaron de *arriba hacia abajo*. Para comprobar la respuesta, se puede en su lugar sumar de *abajo hacia arriba*. La suma hacia abajo y la suma hacia arriba deben dar el mismo resultado. Si no es así, se ha cometido un error y debe volverse a realizar la suma.

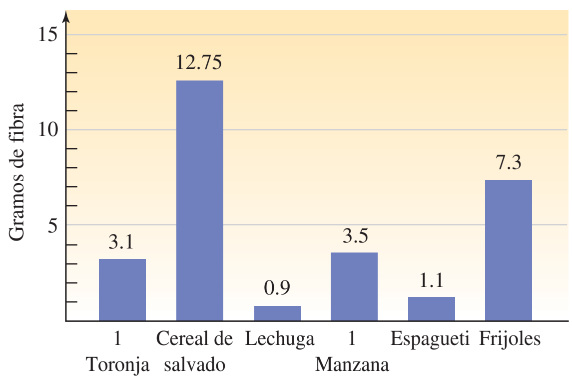
Primero sume de arriba hacia abajo

$$\begin{array}{r} \underline{122.293} \\ 31.913 \\ 5.600 \\ 68.000 \\ +\ \ 16.780 \\ \hline 122.293 \end{array}$$

Para comprobar, sume de abajo hacia arriba

Utilizando su CALCULADORA **Suma de decimales**

La gráfica de barras a la derecha muestra el número de gramos de fibra en una porción estándar de varios alimentos. Se cree que el hombre puede disminuir de manera significativa su riesgo de ataque cardíaco ingiriendo al menos 25 gramos de fibra al día. ¿Esta dieta cumple o excede el requerimiento de 25 gramos?



Para encontrar la ingesta de fibra total, se suma el contenido de fibra de cada uno de los alimentos. Se puede utilizar una calculadora para sumar los decimales.

3.1 [+] 12.75 [+] .9 [+] 3.5 [+] 1.1 [+] 7.3 [=] 28.65

En algunas calculadoras, se presiona la tecla [ENTER] para encontrar la suma.

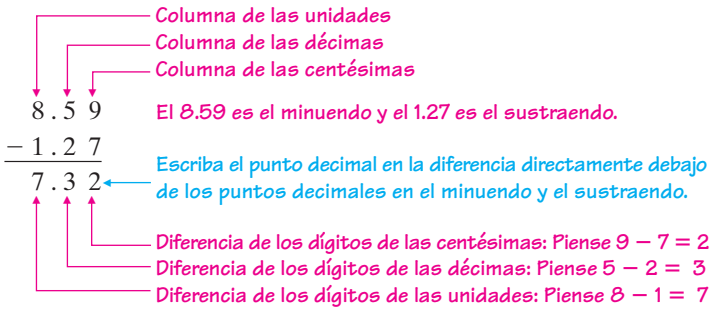
Dado que $28.65 > 25$, la dieta excede el requerimiento diario de fibra de 25 gramos.

2 Restar decimales

La resta de decimales es similar a la resta de números enteros. Se utiliza la **forma vertical** y se apilan los decimales con sus valores posicionales correspondientes y los puntos decimales alineados para que se resten objetos similares —centésimas de centésimas, décimas de décimas, unidades de unidades, etc. Se escribe el punto decimal en

la **diferencia** de tal manera que se alinee con los puntos decimales en el **minuendo** y el **sustraendo.** Por ejemplo, para encontrar 8.59 − 1.27, se procede como a continuación:

Forma vertical



La diferencia es de 7.32.

Resta de decimales

Para restar números decimales:

1. Escriba los números en forma vertical con los puntos decimales alineados.
2. Reste los números como restaría números enteros de derecha a izquierda.
3. Escriba el punto decimal en el resultado del Paso 2 directamente debajo de los puntos decimales en el minuendo y el sustraendo.

Como con los números enteros, si la resta de los dígitos en cualquier columna de valor posicional requiere que se reste un dígito más grande de un dígito más pequeño, se debe **realizar un acarreo negativo** o **reagrupar.**

EJEMPLO 2

Reste: 279.6 − 138.7

Estrategia A medida que se prepara para restar en cada columna, se comparará el dígito en el sustraendo (número inferior) con el dígito directamente arriba de él en el minuendo (número superior).

POR QUÉ Si un dígito en el sustraendo es mayor que el dígito directamente sobre él en el minuendo, se debe realizar un acarreo negativo (reagrupar) para restar en esa columna.

Solución Dado que el 7 en la columna de las décimas del 138.**7** es mayor que el 6 en la columna de las décimas del 279.**6**, no se puede restar de inmediato en esa columna debido a que 6 − 7 *no* es un número entero. Para restar en la columna de las décimas, se debe reagrupar realizando un acarreo negativo como se muestra abajo.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 8\ \ 16} \\ 279.\not{6} \\ -\ 138.7 \\ \hline 140.9 \end{array}$$

Para restar en la columna de las décimas, realice el acarreo negativo de 1 unidad en la forma de 10 décimas de la columna de las unidades. Sume 10 al 6 en la columna de las décimas para obtener 16 (mostrado en azul).

Recuerde a partir de la Sección 1.3 que la resta puede comprobarse por medio de una suma. Si una resta se realiza de manera correcta, la suma de la diferencia y el sustraendo será igual al minuendo: **Diferencia + sustraendo = minuendo.**

Comprobación:

$$\begin{array}{rl} {\scriptstyle 1} & \\ 140.9 & \text{Diferencia} \\ +\ 138.7 & \text{Sustraendo} \\ \hline 279.6 & \text{Minuendo} \end{array}$$

Dado que la suma de la diferencia y el sustraendo es el minuendo, la resta es correcta.

Algunas restas requieren el acarreo negativo de dos (o más) columnas de valor posicional.

Auto-revisión 2

Reste: 382.5 − 227.1

Ahora intente **Problema 27**

Auto-revisión 3

Reste 27.122 de 29.7.

Ahora intente **Problema 31**

EJEMPLO 3

Reste 13.059 de 15.4.

Estrategia Se traducirá el enunciado a símbolos matemáticos y después se desarrollará la resta. A medida que se prepara para restar en cada columna, se comparará el dígito en el sustraendo (número inferior) con el dígito directamente arriba de él en el minuendo (número superior).

POR QUÉ Si un dígito en el sustraendo es mayor que el dígito directamente sobre él en el minuendo, se debe realizar un acarreo negativo (reagrupar) para restar en esa columna.

Solución Dado que el 13.059 es el número a restarse, es el sustraendo.

Restar 13.059 de 15.4

$$15.4 - 13.059$$

Para encontrar la diferencia, se escribe la resta en forma vertical. Para ayudar con las restas de las columnas, se escriben dos ceros a la derecha del 15.4 para que ambos números tengan tres posiciones decimales.

$$\begin{array}{r} 15.400 \\ -\ 13.059 \\ \hline \end{array}$$

Inserte dos ceros después del 4 para que las posiciones decimales coincidan.

Alinee los puntos decimales.

Dado que el 9 en la columna de las milésimas del 13.059 es mayor que el 0 en la columna de las milésimas del 15.400, no se puede restar de inmediato. No es posible realizar el acarreo negativo del dígito **0** en la columna de las centésimas del 15.400. Sin embargo, se puede realizar el acarreo negativo del dígito **4** en la columna de las décimas del 15.400.

$$\begin{array}{r} 15.\overset{3}{\not 4}\overset{10}{\not 0}0 \\ -\ 13.059 \\ \hline \end{array}$$

Realice el acarreo negativo de 1 décima en la forma de 10 centésimas del 4 en la columna de las décimas.

Sume 10 a 0 en la columna de las centésimas para obtener 10 (mostrado en azul).

Ahora se completa el proceso de acarreo negativo de dos columnas realizando un acarreo negativo del **10** en la columna de las centésimas. Después se resta, columna por columna, de derecha a izquierda para encontrar la diferencia.

$$\begin{array}{r} 15.\overset{3}{\not 4}\overset{9}{\not 0}\overset{10}{\not 0} \\ -\ 13.059 \\ \hline 2.341 \end{array}$$

Realice el acarreo negativo de 1 centésima en la forma de 10 milésimas del 10 en la columna de las centésimas. Sume 10 a 0 en la columna de las milésimas para obtener 10 (mostrado en verde).

Cuando se resta 13.059 de 15.4, la diferencia es de 2.341.

Comprobación:

$$\begin{array}{r} \overset{1\ 1}{2.341} \\ +\ 13.059 \\ \hline 15.400 \end{array}$$

Dado que la suma de la diferencia y el sustraendo es el minuendo, la resta es correcta.

Utilizando su CALCULADORA Resta de decimales

Un globo meteorológico gigante está hecho de material ahulado flexible que tiene un grosor sin inflar de 0.011 pulgadas. Cuando el globo se infla con helio, el grosor se vuelve de 0.0018 pulgadas. Para encontrar el cambio en el grosor, se necesita restar. Se puede utilizar una calculadora para restar los decimales.

.011 [−] .0018 [=] 0.0092

En algunas calculadoras, se presiona la tecla [ENTER] para encontrar la diferencia.

Después que se infla el globo, el material ahulado pierde 0.0092 pulgadas de grosor.

3 Sumar y restar decimales con signo

Para sumar decimales con signo, se utilizan las mismas reglas que se utilizan para la suma de enteros.

Suma de dos decimales que tienen signos iguales (similares)

1. Para sumar dos decimales positivos, súmelos como siempre. La respuesta final es positiva.
2. Para sumar dos decimales negativos, sume sus valores absolutos y haga negativa la respuesta final.

Suma de dos decimales que tienen signos diferentes (no similares)

Para sumar un decimal positivo y un decimal negativo, reste el valor absoluto más pequeño del más grande.

1. Si el decimal positivo tiene el valor absoluto más grande, la respuesta final es positiva.
2. Si el decimal negativo tiene el valor absoluto más grande, haga negativa la respuesta final.

EJEMPLO 4 Sume: $-6.1 + (-4.7)$.

Estrategia Se utilizará la regla para la suma de dos decimales que tienen el mismo signo.

POR QUÉ Ambos sumandos, -6.1 y -4.7, son negativos.

Solución Encuentre los valores absolutos: $|-6.1| = 6.1$ y $|-4.7| = 4.7$.

$$-6.1 + (-4.7) = -10.8$$

Sume los valores absolutos, 6.1 y 4.7, para obtener 10.8. Después haga negativa la respuesta final.

$$\begin{array}{r} 6.1 \\ +\ 4.7 \\ \hline 10.8 \end{array}$$

Auto-revisión 4

Sume: $-5.04 + (-2.32)$

Ahora intente **Problema 35**

EJEMPLO 5 Sume: $5.35 + (-12.9)$.

Estrategia Se utilizará la regla para la suma de dos enteros que tienen signos diferentes.

POR QUÉ Un sumando es positivo y el otro es negativo.

Solución Encuentre los valores absolutos: $|5.35| = 5.35$ y $|-12.9| = 12.9$.

$$5.35 + (-12.9) = -7.55$$

Reste el valor absoluto más pequeño del más grande: $12.9 - 5.35 = 7.55$. Dado que el número negativo, -12.9, tiene el valor absoluto más grande, haga negativa la respuesta final.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 8\ 10} \\ 12.\not{9}\not{0} \\ -\ 5.3\,5 \\ \hline 7.5\,5 \end{array}$$

Auto-revisión 5

Sume: $-21.4 + 16.75$

Ahora intente **Problema 39**

La regla para la resta que se introdujo en la Sección 2.3 puede utilizarse con decimales con signo: *Para restar dos decimales, sume el primer decimal al opuesto del decimal a restarse.*

EJEMPLO 6 Reste: $-35.6 - 5.9$.

Estrategia Se aplicará la regla para la resta: Sume el primer decimal al opuesto del decimal a restarse.

POR QUÉ Es fácil cometer un error cuando se restan decimales con signo. Probablemente será más acertado si se escribe la resta como una suma del opuesto.

Auto-revisión 6

Reste: $-1.18 - 2.88$

Ahora intente **Problema 43**

Solución El número a restarse es el 5.7. La resta del 5.9 es lo mismo que la suma de su opuesto, −5.9.

Cambie la resta a una suma.

$$-35.6 - 5.9 = -35.6 + (-5.9) = -41.5$$

Cambie el número que se está restando a su opuesto.

Use la regla para la suma de dos decimales con el mismo signo. Haga negativa la respuesta final.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ 1} \\ 35.6 \\ +\ 5.9 \\ \hline 41.5 \end{array}$$

Auto-revisión 7

Reste: $-2.56 - (-4.4)$

Ahora intente **Problema 47**

EJEMPLO 7

Reste: $-8.37 - (-16.2)$.

Estrategia Se aplicará la regla para la resta: Sume el primer decimal al opuesto del decimal a restarse.

POR QUÉ Es fácil cometer un error cuando se restan decimales con signo. Probablemente será más acertado si se escribe la resta como una suma del opuesto.

Solución El número a restarse es el −16.2. La resta del −16.2 es lo mismo que la suma de su opuesto, 16.2.

Sume . . .

$$-8.37 - (-16.2) = -8.37 + 16.2 = 7.83$$

. . . el opuesto

Use la regla para la suma de dos decimales con signos diferentes. Dado que el 16.2 tiene el valor absoluto más grande, la respuesta final es positiva.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 11} \\ {\scriptstyle 5\ \not{1}\ {}^{1}\not{0}} \\ 16.\not{2}\not{0} \\ -\ 8.37 \\ \hline 7.83 \end{array}$$

Auto-revisión 8

Evalúe:
$-4.9 - (-1.2 + 5.6)$

Ahora intente **Problema 51**

EJEMPLO 8

Evalúe: $-12.2 - (-14.5 + 3.8)$.

Estrategia Se desarrollará primero la operación dentro de los paréntesis.

POR QUÉ Este es el primer paso de la regla del orden de las operaciones.

Solución Se desarrolla primero la suma dentro de los símbolos de agrupación.

$$\begin{aligned} -12.2 - (-14.5 + 3.8) &= -12.2 - (-10.7) && \text{Desarrolle la suma.} \\ &= -12.2 + 10.7 && \text{Sume el opuesto del } -10.7. \\ &= -1.5 && \text{Desarrolle la suma.} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 3\ 15} \\ 1\not{4}.\not{5} \\ -\ 3.8 \\ \hline 10.7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ 12} \\ 12.\not{2} \\ -10.7 \\ \hline 1.5 \end{array}$$

4 Estimar sumas y diferencias de decimales

Puede utilizarse la estimación para comprobar la sensatez de una respuesta para una suma o resta de decimales. Existen varias maneras de estimar, pero el objetivo es el mismo: Simplificar los números en el problema para que los cálculos puedan hacerse de manera sencilla y rápida.

Auto-revisión 9

a. Estime redondeando los sumandos a la decena más cercana: 526.93 + 284.03

b. Estime utilizando el redondeo por la izquierda: 512.33 − 36.47

Ahora intente **Problemas 55 y 57**

EJEMPLO 9

a. Estime redondeando los sumandos a la decena más cercana: 261.76 + 432.94

b. Estime utilizando el redondeo por la izquierda: 381.77 − 57.01

Estrategia Se utilizará el redondeo para aproximar cada sumando, minuendo y sustraendo. Después se encontrará la suma o diferencia de la aproximación.

POR QUÉ El redondeo produce números que contienen varios 0. Tales números son más fáciles de sumar o restar.

Solución

a.
$$\begin{array}{rcl} 261.76 & \rightarrow & 260 \\ +\ 432.94 & \rightarrow & +\ 430 \\ & & 690 \end{array}$$
Redondee a la decena más cercana.
Redondee a la decena más cercana.

El estimado es de 690. Si se calcula 261.76 + 432.94, la suma es de 694.7. Se puede ver que el estimado es cercano; sólo 4.7 menos que 694.7.

b. Se utiliza el redondeo por la izquierda. Cada número se redondea a su mayor valor posicional.

$$\begin{array}{rcl} 381.77 & \rightarrow & 400 \\ -\ 57.01 & \rightarrow & -\ 60 \\ & & 340 \end{array}$$
Redondee a la centena más cercana.
Redondee a la decena más cercana.

El estimado es de 340. Si se calcula 381.77 − 57.01, la diferencia es de 324.76. Se puede ver que el estimado es cercano; es 15.24 más que 324.76.

5 Resolver problemas de aplicación sumando y restando decimales

Para obtener un beneficio, una comerciante debe vender un artículo por más de lo que pagó por él. El precio al cual vende el producto la comerciante, llamado **precio al consumidor**, es la *suma* de lo que le **costó** el artículo a la comerciante más el **margen de ganancia.**

Precio al consumidor = costo + margen de ganancia

EJEMPLO 10 ***Fijación de precio*** Encuentre el precio al consumidor de un cubo de Rubik si la dueña de una tienda de juegos los compra por $8.95 cada uno y después les agrega un margen de ganancia $4.25 para venderlos en su tienda.

Analizar

- Los cubos de Rubik le cuestan a la dueña de la tienda $8.95 cada uno. — Proporcionado
- Les agrega un margen ganancia de $4.25. — Proporcionado
- ¿Cuál es el precio al consumidor del cubo de Rubik? — A encontrar

Andrea Presazzi/Dreamstime.com

Formar Se traducen las palabras del problema a números y símbolos.

El precio al consumidor	es igual al	costo	más	el margen de ganancia
El precio al consumidor	=	8.95	+	4.25

Resolver Use la forma vertical para desarrollar la suma de decimales:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ 1} \\ 8.95 \\ +\ 4.25 \\ \hline 13.20 \end{array}$$

Enunciar El precio al consumidor del cubo de Rubik es de $13.20.

Comprobar Se puede estimar para comprobar el resultado. Si se utiliza $9 para aproximar el costo de un cubo de Rubik para la dueña de la tienda y $4 para que sea el margen de ganancia aproximado, entonces el precio al consumidor es de alrededor de $9 + $4 = $13. El resultado, $13.20, parece razonable.

Auto-revisión 10

FIJACIÓN DE PRECIO
Encuentre el precio al consumidor de un abrigo de lana si una tienda de distribución de ropa los compra por $109.95 cada uno y después les agrega un margen de ganancia de $99.95 para venderlos en sus tiendas.

Ahora intente **Problema 91**

EJEMPLO 11 ***Fregaderos para cocina*** Un modelo de fregadero para cocina está hecho de acero inoxidable de calibre 18 que es de 0.0500 pulgadas de grosor. Otro, modelo menos costoso, está hecho de acero inoxidable de calibre 20 que es de 0.0375 pulgadas de grosor. ¿Cuánto más grueso es el de calibre 18?

Auto-revisión 11

ALUMINIO ¿Cuánto más grueso es el aluminio de calibre 16 que es de 0.0508 pulgadas de grosor que el aluminio de calibre 22 que es de 0.0253 pulgadas de grosor?

Ahora intente **Problema 97**

Analizar

- El acero inoxidable de calibre 18 es de 0.0500 pulgadas de grosor. *Proporcionado*
- El acero inoxidable de calibre 20 es de 0.0375 pulgadas de grosor. *Proporcionado*
- ¿Cuánto más grueso es el acero inoxidable de calibre 18? *A encontrar*

Copyright de la imagen V. J. Matthew, 2009. Utilizada bajo licencia de Shutterstock.com

Formar Las frases *cuánto más viejo, cuánto más largo* y, en este caso *cuánto más grueso,* indican una resta. Se traducen las palabras del problema a números y símbolos.

Cuánto más grueso	es igual al	grosor del acero inoxidable de calibre 18	menos	el grosor del acero inoxidable de calibre 20
Cuánto más grueso	=	0.0500	−	0.0375

Resolver Use la forma vertical para desarrollar la resta:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 4\ 10\ 9\ 10} \\ 0.0\not{5}\ \not{0}\ \not{0} \\ -\ 0.0\ 3\ 7\ 5 \\ \hline 0.0\ 1\ 2\ 5 \end{array}$$

Enunciar El acero inoxidable de calibre 18 es 0.0125 pulgadas más grueso que el de calibre 20.

Comprobar Se puede sumar para comprobar la resta:

$$\begin{array}{rl} {\scriptstyle 1\ 1} & \\ 0.0125 & \textit{Diferencia} \\ +\ 0.0375 & \textit{Sustraendo} \\ \hline 0.0500 & \textit{Minuendo} \end{array}$$

El resultado es correcto.

En ocasiones es necesaria más de una operación para resolver un problema que involucra decimales.

Auto-revisión 12

LUCHA Un luchador de 195.5 libras tuvo que perder 6.5 libras para lograr el peso de su clase. Después del pesaje, ganó de vuelta 3.7 libras. ¿Cuánto pesaba entonces?

Ahora intente **Problema 103**

EJEMPLO 12 ***Programas de acondicionamiento*** Un jugador de futbol de 350 libras perdió 15.7 libras durante la primera semana de prácticas. Durante la segunda semana, ganó 4.9 libras. Encuentre su peso después de las primeras dos semanas de prácticas.

Analizar

- El peso inicial del jugador de futbol era de 350 libras. *Proporcionado*
- La primera semana perdió 15.7 libras. *Proporcionado*
- La segunda semana ganó 4.9 libras. *Proporcionado*
- ¿Cuál era su peso después de las dos semanas de prácticas? *A encontrar*

Formar La palabra *perdió* indica una resta. La palabra *ganó* indica una suma. Se traducen las palabras del problema a números y símbolos.

El peso del jugador después de dos semanas de prácticas	es igual a	su peso inicial	menos	el peso perdido la primera semana	más	el peso ganado la segunda semana
El peso del jugador después de dos semanas de prácticas	=	350	−	15.7	+	4.9

Resolver Para evaluar 350 − 15.7 + 4.9, se empieza de izquierda a derecha y se desarrolla primero la resta, después la suma.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 4\ 10\ 9\ 10} \\ 3\not{5}\not{0}.\not{0} \\ -\ 1\ 5.7 \\ \hline 3\ 3\ 4.3 \end{array}$$

Escriba el número natural 350 como 350.0 y use un proceso de acarreo negativo de dos columnas para restar en la columna de las décimas.

Este es el peso del jugador después de una semana de prácticas.

Después, se suma la ganancia de 4.9 libras al resultado previo para encontrar el peso del jugador después de dos semanas de prácticas.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 334.3 \\ +\ \ 4.9 \\ \hline 339.2 \end{array}$$

Enunciar El peso del jugador era de 339.2 libras después de las dos semanas de prácticas.

Comprobar Se puede estimar para comprobar el resultado. El jugador perdió alrededor de 16 libras la primera semana y después ganó de vuelta 5 libras la segunda semana, para una pérdida neta de 11 libras. Si se resta la pérdida aproximada de 11 libras de su peso inicial, se obtiene 350 − 11 = 339 libras. El resultado, 339.2 libras, parece razonable.

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. 148.058 **2.** 155.4 **3.** 2.578 **4.** −7.36 **5.** −4.65 **6.** −4.06 **7.** 1.84 **8.** −9.3
9. a. 810 **b.** 460 **10.** $209.90 **11.** 0.0255 pulg. **12.** 192.7 lb

SECCIÓN 4.2 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Complete los espacios.

1. En el problema de suma mostrado abajo etiquete cada *sumando* y la *suma.*

$$\begin{array}{rl} 1.72 & \leftarrow \square \\ 4.68 & \leftarrow \square \\ +\ 2.02 & \leftarrow \square \\ \hline 8.42 & \leftarrow \square \end{array}$$

2. Cuando se utiliza la forma vertical para sumar decimales, si la suma de los dígitos en cualquier columna produce una suma mayor que 9, se debe _____.

3. En el problema de resta mostrado abajo, etiquete el *minuendo*, el *sustraendo* y la *diferencia.*

$$\begin{array}{rl} 12.9 & \leftarrow \square \\ -\ \ 4.3 & \leftarrow \square \\ \hline 8.6 & \leftarrow \square \end{array}$$

4. Si la resta de los dígitos en cualquier columna de valor posicional requiere que se reste un dígito más grande de un dígito más pequeño, se debe realizar un _____ o *reagrupar.*

5. Para ver si el resultado de una suma es razonable, se pueden redondear los sumandos y _____ la suma.

6. En los problemas de aplicación, las frases como *cuánto más viejo, cuánto más largo* y *cuánto más grueso*, indican la operación de _____.

CONCEPTOS

7. Compruebe el siguiente resultado. Utilice una suma para determinar si 15.2 es la diferencia correcta.

$$\begin{array}{r} 28.7 \\ -\ 12.5 \\ \hline 15.2 \end{array}$$

8. Determine si el *signo* de cada resultado es positivo o negativo. *No tiene que encontrar la suma.*

a. −7.6 + (−1.8)

b. −24.99 + 29.08

c. 133.2 + (−400.43)

9. Complete el espacio: Para restar decimales con signo, sume el _____ del decimal que se está restando.

10. Aplique la regla para la resta y complete los tres espacios.

$$3.6 - (-2.1) = 3.6 \square \square = \square$$

11. Complete los espacios para rescribir cada resta como una suma del opuesto del número que se está restando.

a. $6.8 - 1.2 = 6.8 + (\quad)$

b. $29.03 - (-13.55) = 29.03 + \quad$

c. $-5.1 - 7.4 = -5.1 + (\quad)$

12. Llene los espacios para completar la estimación.

$$\begin{array}{rl} 567.7 \rightarrow & \quad \text{Redondee a la decena más cercana.} \\ +\ 214.3 \rightarrow & + \quad \text{Redondee a la decena más cercana.} \\ \hline 782.0 & \end{array}$$

NOTACIÓN

13. Copie el siguiente problema de adición. Inserte un punto decimal y ceros adicionales para que el número de posiciones decimales en los sumandos coincida.

$$\begin{array}{r} 46.600 \\ 11.000 \\ +\ 15.702 \\ \hline \end{array}$$

14. Refiérase al problema de resta mostrado abajo. Complete los espacios: Para restar en la columna de las _____ , se realiza el acarreo negativo de 1 décima en la forma de 10 centésimas del 3 en la columna de las _____.

$$\begin{array}{r} 29.\overset{2}{3}\overset{11}{1} \\ -\ 25.16 \\ \hline \end{array}$$

PRÁCTICA GUIADA

Sume. **Vea el Objetivo 1.**

15. $\begin{array}{r} 32.5 \\ +\ 7.4 \\ \hline \end{array}$

16. $\begin{array}{r} 16.3 \\ +\ 3.5 \\ \hline \end{array}$

17. $\begin{array}{r} 3.04 \\ 4.12 \\ +\ 1.43 \\ \hline \end{array}$

18. $\begin{array}{r} 2.11 \\ 5.04 \\ +\ 2.72 \\ \hline \end{array}$

Sume. **Vea el Ejemplo 1.**

19. $36.821 + 7.3 + 42 + 15.44$

20. $46.228 + 5.6 + 39 + 19.37$

21. $27.471 + 6.4 + 157 + 12.12$

22. $52.763 + 9.1 + 128 + 11.84$

Reste. **Vea el Objetivo 2.**

23. $\begin{array}{r} 6.83 \\ -\ 3.52 \\ \hline \end{array}$

24. $\begin{array}{r} 9.47 \\ -\ 5.06 \\ \hline \end{array}$

25. $\begin{array}{r} 8.97 \\ -\ 6.22 \\ \hline \end{array}$

26. $\begin{array}{r} 7.56 \\ -\ 2.33 \\ \hline \end{array}$

Reste. **Vea el Ejemplo 2.**

27. $\begin{array}{r} 495.4 \\ -\ 153.7 \\ \hline \end{array}$

28. $\begin{array}{r} 977.6 \\ -\ 345.8 \\ \hline \end{array}$

29. $\begin{array}{r} 878.1 \\ -\ 174.6 \\ \hline \end{array}$

30. $\begin{array}{r} 767.2 \\ -\ 614.7 \\ \hline \end{array}$

Desarrolle la operación indicada. **Vea el Ejemplo 3.**

31. Reste 11.065 de 18.3.

32. Reste 15.041 de 17.8.

33. Reste 23.037 de 66.9.

34. Reste 31.089 de 75.6.

Sume. **Vea el Ejemplo 4.**

35. $-6.3 + (-8.4)$

36. $-9.2 + (-6.7)$

37. $-9.5 + (-9.3)$

38. $-7.3 + (-5.4)$

Sume. **Vea el Ejemplo 5.**

39. $4.12 + (-18.8)$

40. $7.24 + (-19.7)$

41. $6.45 + (-12.6)$

42. $8.81 + (-14.9)$

Reste. **Vea el Ejemplo 6.**

43. $-62.8 - 3.9$

44. $-56.1 - 8.6$

45. $-42.5 - 2.8$

46. $-93.2 - 3.9$

Reste. **Vea el Ejemplo 7.**

47. $-4.49 - (-11.3)$

48. $-5.76 - (-13.6)$

49. $-6.78 - (-24.6)$

50. $-8.51 - (-27.4)$

Evalúe cada expresión. **Vea el Ejemplo 8.**

51. $-11.1 - (-14.4 + 7.8)$

52. $-12.3 - (-13.6 + 7.9)$

53. $-16.4 - (-18.9 + 5.9)$

54. $-15.5 - (-19.8 + 5.7)$

Estime cada suma redondeando los sumandos a la decena más cercana. **Vea el Ejemplo 9.**

55. $510.65 + 279.19$

56. $424.08 + 169.04$

Estime cada diferencia utilizando el redondeo por la izquierda. **Vea el Ejemplo 9.**

57. $671.01 - 88.35$

58. $447.23 - 36.16$

INTÉNTELO

Desarrolle las operaciones indicadas.

59. $-45.6 + 34.7$

60. $-19.04 + 2.4$

61. $-9.5 - 7.1$

62. $-7.08 - 14.3$

63. $46.09 + (-7.8)$

64. $34.7 + (-30.1)$

65. $\begin{array}{r} 21.88 \\ +\ 33.12 \\ \hline \end{array}$

66. $\begin{array}{r} 19.05 \\ +\ 31.95 \\ \hline \end{array}$

67. $30.03 - (-17.88)$

68. $143.3 - (-64.01)$

69. $645 + 9.90005 + 0.12 + 3.02002$

70. $505.0103 + 23 + 0.989 + 12.0704$

71. Reste 23.81 de 24.

72. Reste 5.9 de 7.001.

73. $(3.4 - 6.6) + 7.3$

74. $3.4 - (6.6 + 7.3)$

75. $247.9 + 40 + 0.56$

76. $0.0053 + 1.78 + 6$

77.
$$\begin{array}{r} 78.1 \\ -\ 7.81 \\ \hline \end{array}$$

78.
$$\begin{array}{r} 202.234 \\ -\ 19.34 \\ \hline \end{array}$$

79. $-7.8 + (-6.5)$

80. $-5.78 + (-33.1)$

81. $16 - (67.2 + 6.27)$

82. $-43 - (0.032 - 0.045)$

83. Encuentre la suma de *dos y cuarenta y tres centésimas* y *cinco y seis décimas.*

84. Encuentre la diferencia de *diecinueve centésimas* y *seis milésimas.*

85. $|-14.1 + 6.9| + 8$

86. $15 - |-2.3 + (-2.4)|$

87. $5 - 0.023$

88. $30 - 11.98$

89. $-2.002 - (-4.6)$

90. $-0.005 - (-8)$

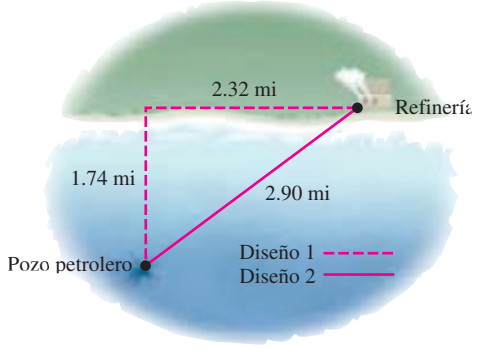
APLICACIONES

91. VENTAS AL POR MENOR Encuentre el precio al consumidor de cada electrodoméstico listado en la siguiente tabla si una tienda departamental los compra por los costos proporcionados y les agrega un margen de ganancia como se muestra.

Electrodoméstico	Costo	Margen de ganancia	Precio al consumidor
Refrigerador	$610.80	$205.00	
Lavadora	$389.50	$155.50	
Secadora	$363.99	$167.50	

92. FIJACIÓN DE PRECIOS Encuentre el precio al consumidor de un traje de dos botones Kenneth Cole si una tienda de distribución de ropa los compra por $210.95 cada uno y les agrega un margen de ganancia de $144.95 al venderlos en sus tiendas.

93. PERFORACIÓN MAR ADENTRO Una compañía necesita construir una tubería desde un pozo petrolero mar adentro a una refinería localizada en la costa. Los ingenieros de la compañía han diseñado dos planes, como se muestra. Utilice la información en la ilustración para completar la tabla que se muestra en la siguiente columna.



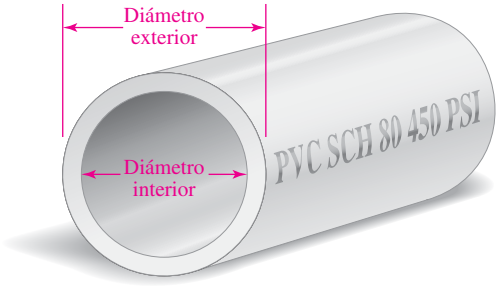
	Tubería bajo el agua (mi)	Tubería subterránea (mi)	Tubería total (mi)
Diseño 1			
Diseño 2			

94. DIRECCIONES AL CONDUCIR Encuentre la distancia total del viaje utilizando la información en la impresión de MapQuest mostrada abajo.

INICIO	**1:** Comience yendo al ESTE en la AV. SUNKIST.	**0.0 mi**
	2: Gire a la IZQUIERDA en la AV. MERCED.	**0.4 mi**
	3: Gire a la DERECHA en la AV. PUENTE.	**0.3 mi**
OESTE 10	**4:** Entre en la I-10 W hacia LOS ANGELES.	**2.2 mi**
SUR 605	**5:** Entre en la I-605 S.	**10.6 mi**
SUR 5	**6:** Entre en la I-5 S hacia SANTA ANA.	**14.9 mi**
110 A SALIDA	**7:** Tome la salida BLVD. HARBOR. SALIDA 110A.	**0.3 mi**
	8: Gire a la DERECHA en el BLVD. HARBOR S	**0.1 mi**
FIN	**9:** Finalice en 1313 BLVD. HARBOR S Anaheim, CA.	

Distancia total: ? **millas** MAPQUEST®

95. TUBERÍA (PVC) Encuentre el diámetro *exterior* de la tubería de plástico para un rociador mostrada abajo si el grosor de la pared del tubo es de 0.218 pulgadas y el diámetro interior es de 1.939 pulgadas.

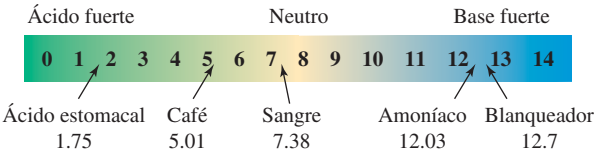


96. ESCALA DE pH La escala de pH mostrada abajo se utiliza para medir la fuerza de los ácidos y bases en la química. Encuentre la diferencia en las lecturas de pH entre

a. el blanqueador y el ácido estomacal.

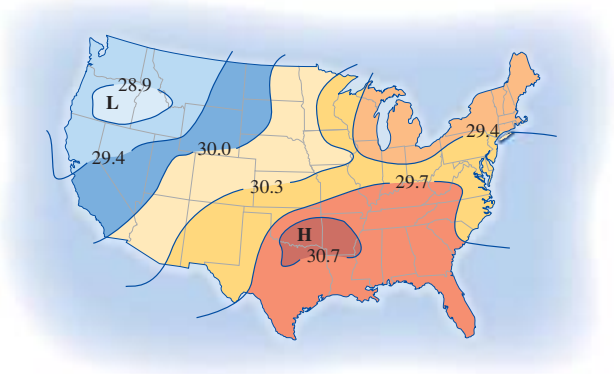
b. el amoníaco y el café.

c. la sangre y el café.



97. POSEEDORES DE RÉCORDS La fallecida Florence Griffith-Joyner de Estados Unidos mantiene el récord mundial femenil en la carrera de 100 metros: 10.49 segundos. Libby Trickett de Australia mantiene el récord mundial femenil de los 100 metros de nado libre: 52.88 segundos. ¿Cuánto más rápido corrió Griffith-Joyner los 100 metros que lo que los nadó Trickett? (Fuente: *The World Almanac and Book of Facts,* 2009)

98. REPORTES METEOROLÓGICOS Las lecturas de la presión barométrica se registran en el mapa meteorológico mostrado abajo. En un área de presión baja (L en el mapa), el clima con frecuencia es tempestuoso. El clima por lo regular es bueno en un área de presión alta (H). ¿Cuál es la diferencia en las lecturas entre las áreas de presión más alta y más baja?



99. BANCA Una mujer de negocios depositó varios cheques en la cuenta bancaria de su empresa. Encuentre la línea del *Subtotal* en la ficha sumando las cantidades de los cheques y el total del reverso. Si la mujer deseaba obtener de vuelta $25 en efectivo del cajero, ¿qué debió escribir como el *Depósito total* en la ficha?

Ficha de depósito

Efectivo		
Cheques (endosados de manera apropiada)	116	10
	47	93
Total del reverso	359	16
Subtotal		
Menos efectivo	25	00
Depósito total		

100. PÁGINAS DEPORTIVAS Los decimales se utilizan con frecuencia en las páginas deportivas de los periódicos. Abajo se proporcionan dos ejemplos.

a. "Los competidores de trineo alemanes fijaron un récord mundial hoy con una carrera final de 53.03 segundos, terminando adelante del equipo italiano por sólo catorce milésimas de segundo" ¿Cuál fue el tiempo para el equipo de trineo italiano?

b. "El título de patinaje artístico femenil fue decidido por sólo treinta y tres centésimas de punto". Si el total de puntos de la ganadora fue de 102.71, ¿cuál fue el total de la finalista en segundo lugar? (*Sugerencia:* La calificación más alta gana en una competición de patinaje artístico.)

101. Suponga que no se llenaron ciertas porciones de la tabla de temperaturas matinal (A.M.) del paciente. Utilice la información proporcionada para completar la tabla mostrada abajo. (*Sugerencia:* 98.6 °F se considera la normal.)

Carreras del campus

Asistente de salud en el hogar

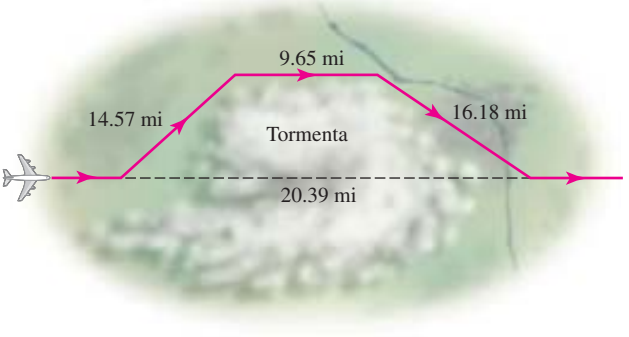
Tetra Images/Getty Images

Día de la semana	Temperatura A.M. del paciente	Cantidad sobre la normal
Lunes	99.7°	
Martes		2.5°
Miércoles	98.6°	
Jueves	100.0°	
Viernes		0.9°

102. CONTROL DE LA CALIDAD Una empresa de electrónica tiene especificaciones estrictas para los chips de silicio que utiliza en sus computadoras. La empresa sólo instala chips que estén dentro de 0.05 centímetros del grosor indicado. La tabla mostrada abajo proporciona las especificaciones para dos tipos de chips. Llene los espacios para completar la tabla.

Tipo de Chip	Especificación del grosor	Intervalo aceptable	
		Bajo	Alto
A	0.78 cm		
B	0.643 cm		

103. TRAYECTORIAS DE VUELO Encuentre la distancia adicional que debe recorrer un avión para evitar volar a través de la tormenta.

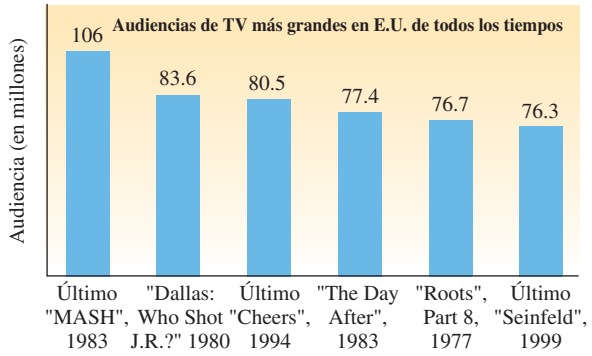


104. TELEVISIÓN La siguiente ilustración muestra los seis programas de televisión más vistos de todos los tiempos (excluyendo el Super Bowl y las Olimpiadas).

a. ¿Cuál fue la audiencia total combinada de los seis programas?

b. ¿Cuánta gente más vio el último episodio de "MASH" que el último episodio de "Seinfeld"?

c. ¿Cuánta gente más tendría que haber visto el último "Seinfeld" para moverlo a un empate con el quinto lugar?



Fuente: Nielsen Media Research

105. CADENA DE TELECOMPRAS La ilustración muestra una descripción de un juego de utensilios de cocina que se vendía en la televisión.

a. Encuentre la diferencia entre el precio al consumidor sugerido por el fabricante (PCSF) y el precio de venta.

b. Incluyendo el envío y manejo (E & M), ¿cuánto más costará el juego de utensilios de cocina?

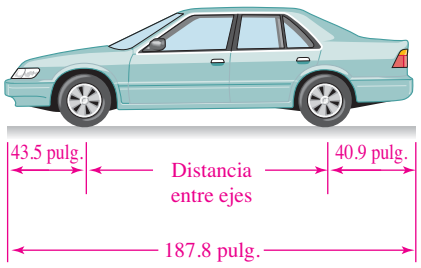
Artículo 229-442

Juego de utensilios de cocina Continental de 9 piezas

Acero inoxidable

PCSF	$149.79
Precio HSN	$59.85
En venta	**$47.85**
E & M	$7.95

106. ESPECIFICACIONES VEHICULARES Se muestran ciertas dimensiones de un automóvil compacto. Encuentre la distancia entre ejes del automóvil.



REDACCIÓN

107. Explique por qué se alinean los puntos decimales y las columnas de valores posicionales correspondientes cuando se suman decimales.

108. Explique por qué se pueden escribir ceros adicionales a la derecha de un decimal como el 7.89 sin afectar su valor.

109. Explique qué hay de incorrecto con la solución mostrada abajo.

$$\begin{array}{r} 203.56 \\ 37 \\ +\quad 0.43 \\ \hline 204.36 \end{array}$$

110. Considere la siguiente suma:

$$\begin{array}{r} \overset{2}{2}3.7 \\ 41.9 \\ +\ 12.8 \\ \hline 78.4 \end{array}$$

Explique el significado del 2 rojo pequeño escrito sobre la columna de las unidades.

111. Escriba un conjunto de instrucciones que explique el proceso de acarreo negativo de dos columnas mostrado abajo.

$$\begin{array}{r} 2.6\overset{4}{\cancel{5}}\overset{\overset{9}{\cancel{10}}}{\cancel{0}}\overset{10}{\cancel{0}} \\ -\ 1.3246 \\ \hline 1.3254 \end{array}$$

112. Explique por qué es más fácil sumar los decimales 0.3 y 0.17 que las fracciones $\frac{3}{10}$ y $\frac{17}{100}$.

REPASO

Desarrolle las operaciones indicadas.

113. **a.** $\frac{4}{5} + \frac{5}{12}$

b. $\frac{4}{5} - \frac{5}{12}$

c. $\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{12}$

d. $\frac{4}{5} \div \frac{5}{12}$

114. **a.** $\frac{3}{8} + \frac{1}{6}$

b. $\frac{3}{8} - \frac{1}{6}$

c. $\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{6}$

d. $\frac{3}{8} \div \frac{1}{6}$

Objetivos

1. Multiplicar decimales.
2. Multiplicar decimales por potencias de 10.
3. Multiplicar decimales con signo.
4. Evaluar expresiones exponenciales que tienen bases decimales.
5. Usar la regla del orden de las operaciones.
6. Evaluar fórmulas.
7. Estimar productos de decimales.
8. Resolver problemas de aplicación multiplicando decimales.

SECCIÓN 4.3
Multiplicación de decimales

Dado que los números decimales son números *de base diez*, la multiplicación de decimales es similar a la multiplicación de números enteros. Sin embargo, cuando se multiplican decimales, hay un paso adicional—se debe determinar dónde escribir el punto decimal en el producto.

1 Multiplicar decimales

A fin de desarrollar una regla para la multiplicación de decimales, se considerará la multiplicación $0.3 \cdot 0.17$ y se encontrará el producto de una manera indirecta. Primero, se escriben el 0.3 y el 0.17 como fracciones y se multiplican en esa forma. Después se expresa la fracción resultante como un decimal.

$$0.3 \cdot 0.17 = \frac{3}{10} \cdot \frac{17}{100}$$ Exprese los decimales 0.3 y 0.17 como fracciones.

$$= \frac{3 \cdot 17}{10 \cdot 100}$$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$$= \frac{51}{1{,}000}$$

$$= 0.051$$ Escriba la fracción resultante $\frac{51}{1{,}000}$ como un decimal.

A partir de este ejemplo, se pueden hacer observaciones acerca de la multiplicación de decimales.

- Los dígitos en la respuesta se encuentran multiplicando el 3 y el 17.

$$0.3 \cdot 0.17 = 0.051$$

$3 \cdot 17 = 51$

- La respuesta tiene 3 posiciones decimales. La *suma* del número de posiciones decimales en los factores 0.3 y 0.17 también es de 3.

$$0.3 \cdot 0.17 = 0.051$$

1 posición decimal + 2 posiciones decimales = 3 posiciones decimales

Estas observaciones ilustran la siguiente regla para la multiplicación de decimales.

Multiplicación de decimales

Para multiplicar dos decimales:

1. Multiplique los decimales como si fueran números enteros.
2. Encuentre el número total de posiciones decimales en ambos factores.
3. Inserte un punto decimal en el resultado del Paso 1 de tal manera que la respuesta tenga el mismo número de posiciones decimales que el total encontrado en el Paso 2.

Auto-revisión 1

Multiplique: $2.7 \cdot 4.3$

Ahora intente **Problema 9**

EJEMPLO 1 Multiplique: $5.9 \cdot 3.4$

Estrategia Se ignorarán los puntos decimales y se multiplicarán el 5.9 y el 3.4 como si fueran números enteros. Después se escribirá un punto decimal en ese resultado de tal manera que la respuesta final tenga dos posiciones decimales.

POR QUÉ Dado que el factor 5.9 tiene 1 posición decimal y el factor 3.4 tiene 1 posición decimal, el producto debe tener $1 + 1 = 2$ posiciones decimales.

Solución Se escribe la multiplicación en forma vertical y se procede como a continuación:

Forma vertical

$$\begin{array}{r} 5.9 \\ \times\ 3.4 \\ \hline 236 \\ 1770 \\ \hline 20.06 \end{array}$$

← 1 posición decimal
← 1 posición decimal
} La respuesta tendrá 1 + 1 = 2 posiciones decimales.

Muévase 2 posiciones de derecha a izquierda e inserte un punto decimal en la respuesta.

Por tanto, $5.9 \cdot 3.4 = 20.06$.

El lenguaje de las matemáticas Recuerde el vocabulario de la multiplicación.

$$\begin{array}{r} 5.9 \\ \times\ 3.4 \\ \hline 236 \\ 1770 \\ \hline 20.06 \end{array}$$

5.9 ← Factor
3.4 ← Factor
236, 1770 } Productos parciales
20.06 ← Producto

Consejo útil Cuando se multiplican decimales, no se necesitan alinear los puntos decimales, como ilustra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2

Multiplique: $1.3(0.005)$

Estrategia Se ignorarán los puntos decimales y se multiplicarán el 1.3 y el 0.005 como si fueran números enteros. Después se escribirá un punto decimal en ese resultado de tal manera que la respuesta final tenga cuatro posiciones decimales.

POR QUÉ Dado que el factor 1.3 tiene 1 posición decimal y el factor 0.005 tiene 3 posiciones decimales, el producto debe tener $1 + 3 = 4$ posiciones decimales.

Solución Dado que muchos estudiantes encuentran la multiplicación en forma vertical de decimales más sencilla si el decimal con el menor número de dígitos diferentes del cero se escribe abajo, se escribirá el 0.005 debajo del 1.3.

$$\begin{array}{r} 1.3 \\ \times\ 0.005 \\ \hline 0.00065 \end{array}$$

← 1 posición decimal
← 3 posiciones decimales
} La respuesta tendrá 1 + 3 = 4 posiciones decimales.

Escriba 2 ceros marcadores de posición enfrente del 6. Después muévase 4 posiciones de derecha a izquierda e inserte un punto decimal en la respuesta.

Por tanto, $1.3(0.005) = 0.0065$.

Auto-revisión 2
Multiplique: $(0.0002)7.2$
Ahora intente **Problema 13**

EJEMPLO 3

Multiplique: $234(5.1)$

Estrategia Se ignorará el punto decimal y se multiplicarán el 234 y el 5.1 como si fueran números naturales. Después se escribirá un punto decimal en ese resultado de tal manera que la respuesta final tenga una posición decimal.

POR QUÉ Dado que el factor 234 tiene 0 posiciones decimales y el factor 5.1 tiene 1 posición decimal, el producto debe tener $0 + 1 = 1$ posición decimal.

Auto-revisión 3
Multiplique: $178(4.7)$
Ahora intente **Problema 17**

Solución Se escribe la multiplicación en forma vertical, con el 5.1 debajo del 234.

$$\begin{array}{r} 234 \\ \times\ \ 5.1 \\ \hline 23\,4 \\ 1170\,0 \\ \hline 1193.4 \end{array}$$

← Sin posiciones decimales
← 1 posición decimal
} La respuesta tendrá 0 + 1 = 1 posición decimal.

Muévase 1 posición de derecha a izquierda e inserte un punto decimal en la respuesta.

Por tanto, $234(5.1) = 1{,}193.4$.

Utilizando su CALCULADORA Multiplicación de decimales

Cuando factura a un hogar, una empresa convierte la cantidad de gas natural utilizado a unidades de energía calorífica llamadas *termias*. Abajo se muestra el número de termias utilizadas por un hogar en un mes y el costo por termia.

Cargo al consumidor . . . . . 39 termias @ $0.72264

Para encontrar los cargos totales para el mes, se multiplica el número de termias por el costo por termia: $39 \cdot 0.72264$.

39 [×] .72264 [=] 28.18296 | 28.18296

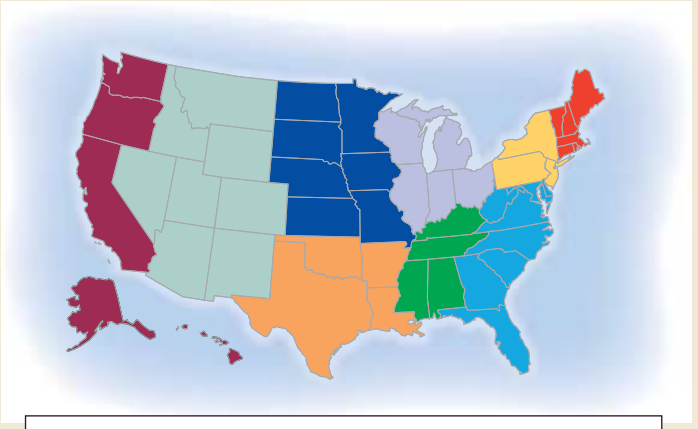
En algunos modelos de calculadoras, se presiona la tecla [ENTER] para mostrar el producto. Redondeado a la céntesima más cercana, se ve que el cargo total es de $28.18.

PIENSE DETENIDAMENTE *Horas extra*

"Los empleados protegidos por la ley de Estándares Laborales Justos deben recibir un pago de tiempo extra por las horas trabajadas en exceso de 40 en una semana de trabajo de al menos 1.5 veces sus tarifas de pago".

United States Department of Labor

El mapa de Estados Unidos mostrado abajo está divido en nueve regiones. También se lista en la leyenda debajo del mapa el salario por hora promedio para los trabajadores en la industria privada en cada región. Elija el salario por hora promedio para una de estas regiones. Después calcule el salario por hora extra promedio correspondiente para esa región.



Leyenda

- Central Noroestes: $17.42
- Montaña: $17.93
- Pacífico: $21.68
- Central Sureste: $16.58
- Central Noreste: $18.82
- Central Suroeste: $17.17
- Nueva Inglaterra: $22.38
- Atlántico medio: $21.31
- Atlántico Sur: $18.34

(Fuente: Bureau of Labor Statistics, National Compensation Survey, 2008)

2 Multiplicar decimales por potencias de 10

A los números 10, 100 y 1,000 se les llama **potencias de 10,** debido a que son los resultados cuando se evalúan 10^1, 10^2 y 10^3. Para desarrollar una regla para encontrar el producto cuando se multiplica un decimal por una potencia de 10, se multiplica el 8.675 por tres potencias de 10 diferentes.

Multiplique: $8.675 \cdot \mathbf{10}$

$$\begin{array}{r} 8.675 \\ \times \quad 10 \\ \hline 0000 \\ 86750 \\ \hline 86.750 \end{array}$$

Multiplique: $8.675 \cdot \mathbf{100}$

$$\begin{array}{r} 8.675 \\ \times \quad 100 \\ \hline 0000 \\ 00000 \\ 867500 \\ \hline 867.500 \end{array}$$

Multiplique: $8.675 \cdot \mathbf{1{,}000}$

$$\begin{array}{r} 8.675 \\ \times \quad 1000 \\ \hline 0000 \\ 00000 \\ 000000 \\ 8675000 \\ \hline 8675.000 \end{array}$$

Cuando se inspeccionan las respuestas, el punto decimal en el primer factor 8.675 se recorre a la derecha por el proceso de multiplicación. El número de posiciones decimales que se recorre depende de la potencia de 10 por la cual se multiplique el 8.675.

Un cero en el 10: $8.675 \cdot 10 = 86.75$ — Se recorre 1 posición a la derecha.

Dos ceros en el 100: $8.675 \cdot 100 = 867.5$ — Se recorre 2 posiciones a la derecha.

Tres ceros en el 1,000: $8.675 \cdot 1{,}000 = 8675$ — Se recorre 3 posiciones a la derecha.

Estas observaciones ilustran la siguiente regla.

Multiplicación de un decimal por 10, 100, 1,000, etcétera

Para encontrar el producto de un decimal y el 10, 100, 1,000, etc., se recorre el punto decimal a la derecha el mismo número de posiciones que los ceros que hay en la potencia de 10.

EJEMPLO 4

Multiplique: **a.** $2.81 \cdot 10$ **b.** $0.076(10{,}000)$

Estrategia Para cada multiplicación se identificará el factor que es una potencia de 10 y se contará el número de ceros que tiene.

PORQUÉ Para encontrar el producto de un decimal y una potencia de 10 que es mayor que 1, se recorre el punto decimal a la derecha el mismo número de posiciones que el número de ceros en la potencia de 10.

Solución

a. $2.81 \cdot 10 = 28.1$ Dado que el 10 tiene 1 cero, recorra el punto decimal 1 posición a la derecha.

b. $0.076(10{,}000) = 0760.$ Dado que el 10,000 tiene 4 ceros, recorra el punto decimal 4 posiciones a la derecha. Escriba un cero marcador de posición (mostrado en azul).

$= 760$

Auto-revisión 4

Multiplique:

a. $0.721 \cdot 100$

b. $6.08(1{,}000)$

Ahora intente **Problemas 21 y 23**

Los números como 10, 100 y 1,000 son potencias de 10 que son *mayores que 1.* También existen potencias de 10 que son *menores que 1,* como 0.1, 0.01 y 0.001. Para desarrollar una regla para encontrar el producto cuando se multiplica un decimal por una décima, una centésima, una milésima, etc., se considerarán tres ejemplos:

Multiplique: $5.19 \cdot \mathbf{0.1}$

$$\begin{array}{r} 5.19 \\ \times \quad 0.1 \\ \hline 0.519 \end{array}$$

Multiplique: $5.19 \cdot \mathbf{0.01}$

$$\begin{array}{r} 5.19 \\ \times \quad 0.01 \\ \hline 0.0519 \end{array}$$

Multiplique: $5.19 \cdot \mathbf{0.001}$

$$\begin{array}{r} 5.19 \\ \times \quad 0.001 \\ \hline 0.00519 \end{array}$$

Cuando se inspeccionan las respuestas, el punto decimal en el primer factor 5.19 se recorre a la izquierda por el proceso de multiplicación. El número de posiciones decimales que se recorre depende de la potencia de 10 por la cual se multiplique.

Estas observaciones ilustran la siguiente regla.

Multiplicación de un decimal por 0.1, 0.01, 0.001, etcétera

Para encontrar el producto de un decimal y el 0.1, 0.01 y 0.001, etc., se recorre el punto decimal a la izquierda el mismo número de posiciones decimales que hay en la potencia de 10.

Auto-revisión 5

Multiplique:

a. 0.1(129.9)

b. 0.002 · 0.00001

Ahora intente **Problemas 25 y 27**

EJEMPLO 5 Multiplique: **a.** 145.8 · 0.01 **b.** 9.76(0.0001)

Estrategia Para cada multiplicación, se identificará el factor de la forma 0.1, 0.01 y 0.001 y se contará el número de posiciones decimales que tiene.

POR QUÉ Para encontrar el producto de un decimal y una potencia de 10 que es menor que 1, se recorre el punto decimal a la izquierda el mismo número de posiciones decimales que hay en la potencia de 10.

Solución

a. 145.8 · 0.01 = 1.458

Dado que el 0.01 tiene dos posiciones decimales, recorra el punto decimal en el 145.8 dos posiciones a la izquierda.

b. 9.76(0.0001) = 0.000976

Dado que el 0.0001 tiene cuatro posiciones decimales, recorra el punto decimal en el 9.76 cuatro posiciones a la izquierda. Esto requiere que se inserten tres ceros marcadores de posición (mostrados en azul) enfrente del 9.

Con bastante frecuencia, los periódicos, los sitios web y los programas de televisión presentan números grandes en una notación acortada que involucra un decimal en combinación con un nombre de columna de valor posicional. Por ejemplo,

- Hasta el 31 de diciembre del 2008, Sony había vendido *21.3 millones* de unidades del Playstation 3 a nivel mundial. (Fuente: Sony Computer Entertainment)
- El Big Dig de Boston fue el proyecto de carretera única más costoso en la historia de Estados Unidos. Costó alrededor de *$14.63 mil millones*. (Fuente: Roadtraffic-technology.com)
- La distancia que recorre la luz en un año es de alrededor de *5.878 mil billones* de millas. (Fuente: Encyclopaedia Britannica)

Se puede utilizar la regla para la multiplicación de un decimal por una potencia de diez para escribir estos números grandes en forma estándar.

Auto-revisión 6

Escriba cada número en notación estándar:

a. 567.1 millones

b. 50.82 mil millones

c. 4.133 billones

Ahora intente **Problemas 29, 31 y 33**

EJEMPLO 6 Escriba cada número en notación estándar:

a. 21.3 millones **b.** 14.63 mil millones **c.** 5.9 billones

Estrategia Se expresará cada uno de los números grandes como el producto de un decimal y una potencia de 10.

POR QUÉ Entonces se puede utilizar la regla para la multiplicación de un decimal por una potencia de 10 para encontrar su producto. El resultado estará en la forma estándar requerida.

Solución

a. 21.3 millones = 21.3 · **1 millón**

= 21.3 · **1,000,000** Escriba 1 millón en la forma estándar.

= 21,300,000 Dado que el 1,000,000 tiene seis ceros, recorra el punto decimal en el 21.3 seis posiciones a la derecha.

b. 14.63 mil millones $= 14.63 \cdot$ **1 mil millones**
$= 14.63 \cdot 1{,}000{,}000{,}000$ Escriba 1 mil millones en la forma estándar.
$= 14{,}630{,}000{,}000$ Dado que el 1,000,000,000 tiene nueve ceros, recorra el punto decimal en el 14.63 nueve posiciones a la derecha.

c. 5.9 billones $= 5.9 \cdot$ **1 billón**
$= 5.9 \cdot 1{,}000{,}000{,}000{,}000$ Escriba 1 billón en la forma estándar.
$= 5{,}900{,}000{,}000{,}000$ Dado que el 1,000,000,000,000 tiene doce ceros, recorra el punto decimal en el 5.9 doce posiciones a la derecha.

3 Multiplicar decimales con signo

Las reglas para la multiplicación de enteros también se mantienen para la multiplicación de decimales con signo. El producto de dos decimales con signos similares es positivo y el producto de dos decimales con signos no similares es negativo.

EJEMPLO 7 Multiplique: **a.** $-1.8(4.5)$ **b.** $(-1{,}000)(-59.08)$

Estrategia En el inciso a, se utilizará la regla para la multiplicación de decimales con signo que tienen signos diferentes (no similares). En el inciso b, se utilizará la regla para la multiplicación de decimales con signo que tienen signos iguales (similares).

POR QUÉ En el inciso a, un factor es negativo y el otro positivo. En el inciso b, ambos factores son negativos.

Solución

a. Encuentre los valores absolutos: $|-1.8| = 1.8$ y $|4.5| = 4.5$. Dado que los decimales tienen signos no similares, su producto es negativo.

$-1.8(4.5) = -8.1$ Multiplique los valores absolutos, 1.8 y 4.5, para obtener 8.1. Después haga negativa la respuesta.

$$\begin{array}{r} 1.8 \\ \times\ 4.5 \\ \hline 90 \\ 720 \\ \hline 8.10 \end{array}$$

b. Encuentre los valores absolutos: $|-1{,}000| = 1{,}000$ y $|-59.08| = 59.08$. Dado que los decimales tienen signos similares, su producto es positivo.

$(-1{,}000)(-59.08) = 1{,}000(59.08)$
$= 59{,}080$ Multiplique los valores absolutos, 1,000 y 59.08. Dado que el 1,000 tiene 3 ceros, mueva el punto decimal en el 59.08 3 posiciones a la derecha. Escriba un cero marcador de posición. La respuesta es positiva.

Auto-revisión 7

Multiplique:

a. $6.6(-5.5)$

b. $-44.968(-100)$

Ahora intente **Problemas 37 y 41**

4 Evaluar expresiones exponenciales que tienen bases decimales

Se han evaluado expresiones exponenciales que tienen bases de número natural, bases enteras y bases fraccionales. La base de una expresión exponencial también puede ser un decimal positivo o negativo.

EJEMPLO 8 Evalúe: **a.** $(2.4)^2$ **b.** $(-0.05)^2$

Estrategia Se escribirá cada expresión exponencial como un producto de factores repetitivos y después se desarrollará la multiplicación. Esto requiere que se identifique la base y el exponente.

POR QUÉ El exponente indica el número de veces que la base se escribe como un factor.

Auto-revisión 8

Evalúe:

a. $(-1.3)^2$

b. $(0.09)^2$

Ahora intente **Problemas 45 y 47**

Solución

a. $(2.4)^2 = 2.4 \cdot 2.4$ La base es el 2.4 y el exponente es el 2. Escriba la base como un factor 2 veces.

$= 5.76$ Multiplique los decimales.

$$\begin{array}{r} 2.4 \\ \times\ 2.4 \\ \hline 96 \\ 480 \\ \hline 5.76 \end{array}$$

b. $(-0.05)^2 = (-0.05)(-0.05)$ La base es el -0.05 y el exponente es el 2. Escriba la base como un factor 2 veces.

$= 0.0025$ Multiplique los decimales. El producto de dos decimales con signos iguales es positivo.

$$\begin{array}{r} 0.05 \\ \times\ 0.05 \\ \hline 0.0025 \end{array}$$

5 Usar la regla del orden de las operaciones

Recuerde que la regla del orden de las operaciones se utiliza para evaluar expresiones que involucran más de una operación.

Auto-revisión 9

Evalúe:
$-2|-4.4 + 5.6| + (-0.8)^2$

Ahora intente **Problema 49**

EJEMPLO 9 Evalúe: $-(0.6)^2 + 5|-3.6 + 1.9|$.

Estrategia Las barras de valor absoluto son símbolos de agrupación. Se desarrollará primero la suma dentro de ellas.

POR QUÉ Por la regla del orden de las operaciones se deben desarrollar primero los cálculos dentro de los paréntesis y otros símbolos de agrupación (como las barras de valor absoluto).

Solución

$-(0.6)^2 + 5|-3.6 + 1.9|$

$= -(0.6)^2 + 5|-1.7|$ Realice la suma dentro de los símbolos de valor absoluto. Use la regla para la suma de dos decimales con signos diferentes.

$= -(0.6)^2 + 5(1.7)$ Simplifique: $|-1.7| = 1.7$.

$= -0.36 + 5(1.7)$ Evalúe: $(0.6)^2 = 0.36$.

$= -0.36 + 8.5$ Realice la multiplicación: $5(1.7) = 8.5$.

$= 8.14$ Use la regla para la suma de dos decimales con signos diferentes.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2\ 16} \\ 3.\cancel{6} \\ -\ 1.9 \\ \hline 1.7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle 3} \\ 1.7 \\ \times\ 5 \\ \hline 8.5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle 4\ 10} \\ 8.5\cancel{0} \\ -0.36 \\ \hline 8.14 \end{array}$$

6 Evaluar fórmulas

Recuerde que para evaluar una fórmula, se reemplazan las letras (llamadas **variables**) con números específicos y después se utiliza la regla del orden de las operaciones.

Auto-revisión 10

Evalúe $V = 1.3\pi r^3$ para $\pi = 3.14$ y $r = 3$.

Ahora intente **Problema 53**

EJEMPLO 10 Evalúe la fórmula $S = 6.28r(h + r)$ para $h = 3.1$ y $r = 6$.

Estrategia En la fórmula proporcionada se reemplazarán las letras r con 6 y la h con 3.1.

POR QUÉ Entonces se puede utilizar la regla del orden de las operaciones para encontrar el valor de la expresión en el lado derecho del símbolo $=$.

Solución

$S = 6.28\mathbf{r}(\mathbf{h} + \mathbf{r})$ $6.28r(h + r)$ significa $6.28 \cdot r \cdot (h + r)$.

$= 6.28(\mathbf{6})(\mathbf{3.1} + \mathbf{6})$ Reemplace r con 6 y h con 3.1.

$= 6.28(6)(9.1)$ Realice la suma dentro de los paréntesis.

$= 37.68(9.1)$ Realice la multiplicación: $6.28(6) = 37.68$.

$= 342.888$ Realice la multiplicación.

$$\begin{array}{r} 37.68 \\ \times\ 9.1 \\ \hline 3768 \\ 339120 \\ \hline 342.888 \end{array}$$

7 Estimar productos de decimales

Puede utilizarse la estimación para comprobar la sensatez de una respuesta para una multiplicación de decimales. Existen varias maneras de estimar, pero el objetivo es el mismo: Simplificar los números en el problema para que los cálculos puedan hacerse de manera sencilla y rápida.

EJEMPLO 11

a. Estime utilizando el redondeo por la izquierda: $27 \cdot 6.41$

b. Estime redondeando cada factor a la décima más cercana: $13.91 \cdot 5.27$

c. Estime redondeando: $0.1245(101.4)$

Estrategia Se utilizará el redondeo para aproximar los factores. Después se encontrará el producto de las aproximaciones.

POR QUÉ El redondeo produce factores que contienen menos dígitos. Tales números son más fáciles de multiplicar.

Solución

a. Para estimar $27 \cdot 6.41$ redondeando por la izquierda, se comienza redondeando ambos factores a su valor posicional *más grande*.

$$\begin{array}{rcrl} 27 & \longrightarrow & 30 & \text{Redondee a la decena más cercana.} \\ \times\ 6.41 & \longrightarrow & \times\ \ 6 & \text{Redondee a la unidad más cercana.} \\ & & 180 & \end{array}$$

El estimado es de 180. Si se calcula $27 \cdot 6.41$, el producto es de exactamente 173.07. El estimado es cercano: Es de alrededor de 7 más que 173.07.

b. Para estimar $13.91 \cdot 5.27$, se redondearán ambos decimales a la décima más cercana.

$$\begin{array}{rcrl} 13.91 & \longrightarrow & 13.9 & \text{Redondee a la décima más cercana.} \\ \times\ \ 5.27 & \longrightarrow & \times\ \ 5.3 & \text{Redondee a la décima más cercana.} \\ & & 417 & \\ & & 6950 & \\ & & 73.67 & \end{array}$$

El estimado es de 73.67. Si se calcula $13.91 \cdot 5.27$, el producto es de exactamente 73.3057. El estimado es cercano: Sólo ligeramente más que 73.3057.

c. Dado que el 101.4 es aproximadamente 100, se puede estimar $0.1245(\mathbf{101.4})$ utilizando $0.1245(\mathbf{100})$.

$$0.1245(100) = 12.45 \qquad \text{Dado que el 100 tiene dos ceros, mueva el punto decimal en el 0.1245 dos posiciones a la derecha.}$$

El estimado es de 12.45. Si se calcula $0.1245(101.4)$, el producto es de exactamente 12.6243. Observe que el estimado es cercano: Es ligeramente menos que 12.6243.

Auto-revisión 11

a. Estime utilizando el redondeo por la izquierda: $4.337 \cdot 65$

b. Estime redondeando los factores a la décima más cercana: $3.092 \cdot 11.642$

c. Estime redondeando: $0.7899(985.34)$

Ahora intente **Problemas 61 y 63**

8 Resolver problemas de aplicación multiplicando decimales

Los problemas de aplicación que involucran una suma repetitiva con frecuencia son más fáciles de resolver utilizando una multiplicación.

EJEMPLO 12

Monedas Los bancos envuelven las monedas de un centavo en rollos de 50 monedas. Si una moneda de un centavo es de 1.55 milímetros de grosor, ¿qué tan alta es una pila de 50 monedas de un centavo?

Cookey/Dreamstime.com

Analizar

- Hay 50 monedas de un centavo en una pila. — Proporcionado
- Una moneda de un centavo es de 1.55 milímetros de grosor. — Proporcionado
- ¿Qué tan alta es una pila de 50 monedas de un centavo? — A encontrar

Auto-revisión 12

MONEDAS Los bancos envuelven las monedas de cinco centavos en rollos de 40 monedas. Si una moneda de cinco centavos es de 1.95 milímetros de grosor, ¿qué tan alta es una pila de 40 monedas de 5 centavos?

Ahora intente **Problema 97**

Formar La altura (en milímetros) de una pila de 50 monedas de un centavo, cada una de las cuales tiene un grosor de 1.55, es la suma de cincuenta 1.55. Esta suma repetitiva puede calcularse de manera más sencilla por medio de una multiplicación.

La altura de una pila de monedas de un centavo	es igual al	grosor de una moneda de un centavo	por	el número de monedas de un centavo en una pila
La altura de una pila de monedas de un centavo	=	1.55	·	50

Resolver Use la forma vertical para desarrollar la multiplicación:

$$\begin{array}{r} 1.55 \\ \times \quad 50 \\ \hline 000 \\ 7750 \\ \hline 77.50 \end{array}$$

Enunciar Una pila de 50 monedas de un centavo es de 77.5 milímetros de alto.

Comprobar Se puede estimar para comprobar el resultado. Si se utilizan 2 milímetros para aproximar el grosor de una moneda de un centavo, entonces la altura de una pila de 50 monedas de un centavo es de alrededor de 2 · 50 milímetros = 100 milímetros. El resultado, 77.5 mm, parece razonable.

En ocasiones se necesita más de una operación para resolver un problema que involucra decimales.

Auto-revisión 13

INGRESOS SEMANALES La semana laboral básica de la asistente de una farmacia es de 40 horas. Después que su turno diario se acaba, puede trabajar tiempo extra a razón de 1.5 veces su tarifa regular de $15.90 por hora. ¿Cuánto dinero ganará en una semana si trabaja 4 horas de tiempo extra?

Ahora intente **Problema 113**

EJEMPLO 13 ***INGRESOS SEMANALES*** La semana laboral básica de un cajero es de 40 horas. Después que su turno diario se acaba, puede trabajar tiempo extra a razón de 1.5 veces su tarifa regular de $13.10 por hora. ¿Cuánto dinero ganará en una semana si trabaja 6 horas de tiempo extra?

Analizar

- La semana laboral básica de un cajero es de 40 horas. — *Proporcionado*
- Su paga por tiempo extra es 1.5 veces su tarifa regular de $13.10 por hora. — *Proporcionado*
- ¿Cuánto dinero ganará en una semana si trabaja su turno regular y 6 horas de tiempo extra? — *A encontrar*

Formar Para encontrar la tarifa de pago por tiempo extra del cajero, se multiplica 1.5 por su tarifa de pago regular, $13.10.

$$\begin{array}{r} 13.10 \\ \times \quad 1.5 \\ \hline 6550 \\ 13100 \\ \hline 19.650 \end{array}$$

La tarifa de paga por tiempo extra del cajero es de $19.65 por hora.

Ahora se traducen las palabras del problema a números y símbolos.

La cantidad total que el cajero gana en una semana	es igual a	40 horas	por	su tarifa de pago regular	más	el número de horas extra	por	su tarifa de tiempo extra
La cantidad total que el cajero gana en una semana	=	40	·	$13.10	+	6	·	$19.65

Resolver Se utilizará la regla para el orden de las operaciones para evaluar la expresión:

$$40 \cdot 13.10 + 6 \cdot 19.65 = 524.00 + 117.90 \quad \text{Realice primero la multiplicación.}$$
$$= 641.90 \quad \text{Realice la suma.}$$

$$\begin{array}{r} 13.10 \\ \times \quad 40 \\ \hline 0000 \\ 5240 \\ \hline 524.00 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle 5\,3\;3} \\ 19.65 \\ \times \quad 6 \\ \hline 117.90 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 524.00 \\ +\,117.90 \\ \hline 641.90 \end{array}$$

Enunciar El cajero ganará un total de $641.90 por la semana.

Comprobar Se puede utilizar una estimación para comprobar. El cajero trabaja 40 horas por semana por aproximadamente $13 por hora para ganar alrededor de $40 \cdot \$13 = \$520$. Sus 6 horas de tiempo extra a aproximadamente $20 por hora le dan alrededor de $6 \cdot \$20 = \$120$. Sus ingresos totales esa semana son de alrededor de $\$520 + \$120 = \$640$. El resultado, $641.90, parece razonable.

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. 11.61 **2.** 0.00144 **3.** 836.6 **4. a.** 72.1 **b.** 6,080 **5. a.** 12.99 **b.** 0.00000002 **6. a.** 567,100,000 **b.** 50,820,000,000 **c.** 4,133,000,000,000 **7. a.** −36.3 **b.** 4,496.8 **8. a.** 1.69 **b.** 0.0081 **9.** −1.76 **10.** 110.214 **11. a.** 280 **b.** 35.96 **c.** 789.9 **12.** 78 mm **13.** $731.40

SECCIÓN 4.3 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Complete los espacios.

1. En el problema de multiplicación mostrado abajo, etiquete cada *factor,* los *productos parciales,* y el *producto.*

3.4 ←	
× 2.6 ←	
204 ←	
680 ←	
8.84 ←	

2. A los números como el 10, 100 y 1,000 se les llama _____ de 10.

CONCEPTOS

Complete los espacios.

3. Inserte un punto decimal en la posición correcta para cada producto mostrado abajo. Escriba ceros marcadores de posición, si es necesario.

a.
$$\begin{array}{r} 3.8 \\ \times 0.6 \\ \hline 228 \end{array}$$

b.
$$\begin{array}{r} 1.79 \\ \times \quad 8.1 \\ \hline 179 \\ 14320 \\ \hline 14499 \end{array}$$

c.
$$\begin{array}{r} 2.0 \\ \times \quad 7 \\ \hline 140 \end{array}$$

d.
$$\begin{array}{r} 0.013 \\ \times \quad 0.02 \\ \hline 0026 \end{array}$$

4. Complete los espacios.

a. Para encontrar el producto de un decimal y el 10, 100, 1,000, etc., mueva el punto decimal a la _____ el mismo número de posiciones que el número de ceros en la potencia de 10.

b. Para encontrar el producto de un decimal y el 0.1, 0.01, 0.001, etc., mueva el punto decimal a la _____ el mismo número de posiciones que hay en la potencia de 10.

5. Determine si el *signo* de cada resultado es positivo o negativo. (***No tiene que encontrar el producto.***)

a. $-7.6(-1.8)$

b. $-4.09 \cdot 2.274$

6. a. Cuando se mueve su punto decimal a la derecha, ¿un número decimal se vuelve más grande o más pequeño?

b. Cuando se mueve su punto decimal a la izquierda, ¿un número decimal se vuelve más grande o más pequeño?

NOTACIÓN

7. a. Liste las primeras cinco potencias de 10 que son mayores que 1.

b. Liste las primeras cinco potencias de 10 que son menores que 1.

8. Escriba cada número en notación estándar.

a. un millón

b. mil millones

c. un billón

PRÁCTICA GUIADA

Multiplique. Vea el Ejemplo 1.

9. $4.8 \cdot 6.2$

10. $3.5 \cdot 9.3$

11. $5.6(8.9)$

12. $7.2(8.4)$

Multiplique. Vea el Ejemplo 2.

13. $0.003(2.7)$

14. $0.002(2.6)$

15.
$$\begin{array}{r} 5.8 \\ \times\ 0.009 \\ \hline \end{array}$$

16.
$$\begin{array}{r} 8.7 \\ \times\ 0.004 \\ \hline \end{array}$$

Multiplique. Vea el Ejemplo 3.

17. $179(6.3)$

18. $225(4.9)$

19.
$$\begin{array}{r} 316 \\ \times\ 7.4 \\ \hline \end{array}$$

20.
$$\begin{array}{r} 527 \\ \times\ 3.7 \\ \hline \end{array}$$

Multiplique. Vea el Ejemplo 4.

21. $6.84 \cdot 100$

22. $2.09 \cdot 100$

23. $0.041(10{,}000)$

24. $0.034(10{,}000)$

Multiplique. Vea el Ejemplo 5.

25. $647.59 \cdot 0.01$

26. $317.09 \cdot 0.01$

27. $1.15(0.001)$

28. $2.83(0.001)$

Escriba cada número en notación estándar. Vea el Ejemplo 6.

29. 14.2 millones

30. 33.9 millones

31. 98.2 mil millones

32. 80.4 mil millones

33. 1.421 billones

34. 3.056 billones

35. 657.1 mil millones

36. 422.7 mil millones

Multiplique. Vea el Ejemplo 7.

37. $-1.9(7.2)$

38. $-5.8(3.9)$

39. $-3.3(-1.6)$

40. $-4.7(-2.2)$

41. $(-10{,}000)(-44.83)$

42. $(-10{,}000)(-13.19)$

43. $678.231(-1{,}000)$

44. $491.565(-1{,}000)$

Evalúe cada expresión. Vea el Ejemplo 8.

45. $(3.4)^2$

46. $(5.1)^2$

47. $(-0.03)^2$

48. $(-0.06)^2$

Evalúe cada expresión. Vea el Ejemplo 9.

49. $-(-0.2)^2 + 4|-2.3 + 1.5|$

50. $-(-0.3)^2 + 6|-6.4 + 1.7|$

51. $-(-0.8)^2 + 7|-5.1 - 4.8|$

52. $-(-0.4)^2 + 6|-6.2 - 3.5|$

Evalúe cada fórmula. Vea el Ejemplo 10.

53. $A = P + Prt$ para $P = 85.50, r = 0.08$ y $t = 5$

54. $A = P + Prt$ para $P = 99.95, r = 0.05$ y $t = 10$

55. $A = lw$ para $l = 5.3$ y $w = 7.2$

56. $A = 0.5bh$ para $b = 7.5$ y $h = 6.8$

57. $P = 2l + 2w$ para $l = 3.7$ y $w = 3.6$

58. $P = a + b + c$ para $a = 12.91, b = 19$ y $c = 23.6$

59. $C = 2\pi r$ para $\pi = 3.14$ y $r = 2.5$

60. $A = \pi r^2$ para $\pi = 3.14$ y $r = 4.2$

Estime cada producto utilizando el redondeo por la izquierda. Vea el Ejemplo 11.

61. $46 \cdot 5.3$

62. $37 \cdot 4.29$

Estime cada producto redondeando los factores a la décima más cercana. Vea el Ejemplo 11.

63. $17.11 \cdot 3.85$

64. $18.33 \cdot 6.46$

INTÉNTELO

Desarrolle las operaciones indicadas.

65. $-0.56 \cdot 0.33$

66. $-0.64 \cdot 0.79$

67. $(-1.3)^2$

68. $(-2.5)^2$

69. $(-0.7 - 0.5)(2.4 - 3.1)$

70. $(-8.1 - 7.8)(0.3 + 0.7)$

71.
$$\begin{array}{r} 0.008 \\ \times\ 0.09 \\ \hline \end{array}$$

72.
$$\begin{array}{r} 0.003 \\ \times\ 0.09 \\ \hline \end{array}$$

73. $-0.2 \cdot 1{,}000{,}000$

74. $-1{,}000{,}000 \cdot 1.9$

75. $(-5.6)(-2.2)$

76. $(-7.1)(-4.1)$

77. $-4.6(23.4 - 19.6)$

78. $6.9(9.8 - 8.9)$

79. $(-4.9)(-0.001)$

80. $(-0.001)(-7.09)$

81. $(-0.2)^2 + 2(7.1)$

82. $(-6.3)(3) - (1.2)^2$

83.
$$\begin{array}{r} 2.13 \\ \times\ 4.05 \\ \hline \end{array}$$

84.
$$\begin{array}{r} 3.06 \\ \times\ 1.82 \\ \hline \end{array}$$

85. $-7(8.1781)$

86. $-5(4.7199)$

87. $-1{,}000(0.02239)$

88. $-100(0.0897)$

89. $(0.5 + 0.6)^2(-3.2)$

90. $(-5.1)(4.9 - 3.4)^2$

91. $-0.2(306)(-0.4)$

92. $-0.3(417)(-0.5)$

93. $-0.01(|-2.6 - 6.7|)^2$

94. $-0.01(|-8.16 + 9.9|)^2$

Complete cada tabla.

95.

Decimal	Su cuadrado
0.1	
0.2	
0.3	
0.4	
0.5	
0.6	
0.7	
0.8	
0.9	

96.

Decimal	Su cubo
0.1	
0.2	
0.3	
0.4	
0.5	
0.6	
0.7	
0.8	
0.9	

APLICACIONES

97. RESMAS DE PAPEL Encuentre el grosor de una resma de 500 páginas de papel para fotocopiadora si cada hoja es de 0.0038 pulgadas de grosor.

98. DECLARACIONES DE MILLAJE Cada mes, a un vendedor se le reembolsa por parte de su empresa cualquier viaje relacionado con el trabajo que realice en su propio automóvil a razón de $0.445 por milla. ¿Cuánto recibirá el vendedor si viajó un total de 120 millas en su automóvil por negocios en el mes de junio?

99. SALARIOS Use la siguiente fórmula para determinar el salario anual de un ingeniero de grabación que trabaja 38 horas por semana a razón de $37.35 por hora. Redondee el resultado a la centena de dólar más cercana.

$$\text{Salario anual} = \text{tarifa por hora} \cdot \text{horas por semana} \cdot 52.2 \text{ semanas}$$

100. RECIBO DE NÓMINA Si se le paga cada dos semanas, su ingreso neto mensual es su ingreso neto de un recibo de nómina por 2.17. Encuentre el ingreso neto mensual de un dependiente de un supermercado que gana $1,095.70 cada dos semanas. Redondee el resultado al centavo más cercano.

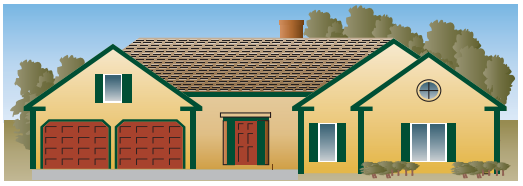
101. SUMINISTROS DE REPOSTERÍA Un repostero compra varios tipos de nueces como ingredientes para galletas. Complete la tabla llenando el costo de cada compra.

Tipo de nuez	Precio por libra	Libras	Costo
Almendras	$5.95	16	
Nueces	$4.95	25	

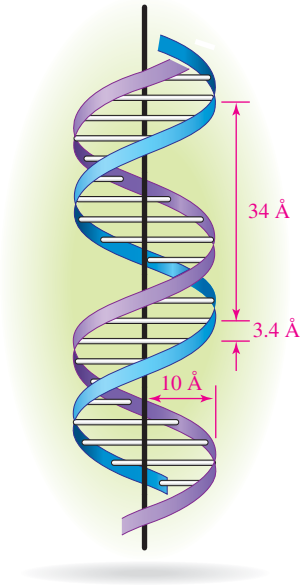
102. CASAS NUEVAS Encuentre el costo de la construcción de la casa mostrada abajo si los costos de construcción son de $92.55 por pie cuadrado.

Plan de casa #DP-2203

Pies cuadrados: **2,291 pies cuadrados**	Ancho: **70'70"**	Recámaras: **3**
		Baños: **3**
Pisos: **Una sola planta**	Profundidad: **64'0"**	Lugares de estacionamiento: **2**



103. BIOLOGÍA Las células contienen el ADN. En los humanos, determina rasgos como el color de los ojos, el color del cabello y la altura. Abajo aparece un modelo del ADN. Si 1 Å (angstrom) = 0.000000004 pulgadas, encuentre las dimensiones de 34 Å, 3.4 Å y 10 Å, mostradas en la ilustración.



104. TACÓMETROS

a. Estime el número decimal al que apunta la aguja del tacómetro en la ilustración mostrada abajo.

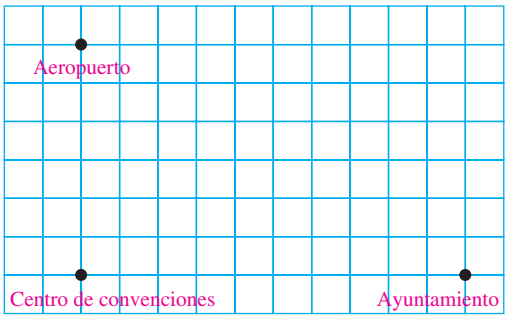
b. ¿Qué velocidad del motor (en rpm) indica el tacómetro?

105. URBANISMO Las calles mostradas en azul en el mapa de una ciudad mostrado abajo están separadas a 0.35 millas. Encuentre la distancia de cada recorrido entre las tres ubicaciones proporcionadas.

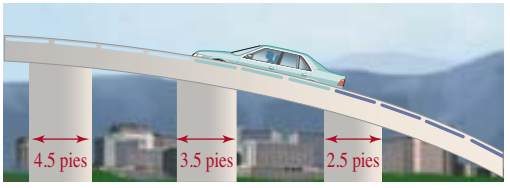
a. El aeropuerto al Centro de convenciones

b. El Ayuntamiento al Centro de convenciones

c. El aeropuerto al Ayuntamiento



106. REMODELACIONES La ilustración abajo muestra los anchos actuales de las tres columnas del puente de una carretera. Un análisis por computadora indica que el ancho de cada columna debe ser en realidad 1.4 veces el actual para soportar las tensiones de un terremoto. De acuerdo con el análisis, ¿qué tan ancha debe ser cada columna?



107. FACTURAS DE SERVICIO ELÉCTRICO Cuando se factura a un hogar, una compañía de servicios públicos cobra el número de kilowatts hora utilizados. Un kilowatt hora (kwh) es una medida estándar de la electricidad. Si el costo de 1 kwh es de $0.14277, ¿cuál es la factura de electricidad para un hogar que utiliza 719 kwh en un mes? Redondee la respuesta al centavo más cercano.

108. IMPUESTOS DE SERVICIOS PÚBLICOS A algunas compañías de gas se les pide que graven el número de termias utilizadas cada mes por un consumidor. ¿Cuáles son los impuestos recolectados en el uso mensual de 31 termias si la tasa de impuesto es de $0.00566 por termia? Redondee la respuesta al centavo más cercano.

109. Escriba cada número remarcado en forma estándar.

a. CONSERVACIÓN El Arctic National Wildlife Refuge de ***19.6 millones de acres*** se localiza en la esquina noreste de Alaska. (Fuente: National Wildlife Federation)

b. POBLACIÓN De acuerdo con las proyecciones del Centro de Programas Internacionales en la Oficina del Censo de E.U., a las 7:16 P.M. hora del este el sábado 25 de febrero del 2006, la población de la Tierra llegó a ***6.5 mil millones*** de personas.

c. CONDUCCIÓN El Departamento del Transporte de E.U. estimó que los estadounidenses condujeron un total de ***3.026 billones de millas*** en el 2008. (Fuente: Federal Highway Administration)

110. Escriba cada número remarcado en forma estándar.

a. MILLAJE Irv Gordon, de Long Island, Nueva York, ha conducido un récord de ***2.6 millones de millas*** en su Volvo P-1800 de 1966 (Fuente: autoblog.com)

b. COMERCIO ELECTRÓNICO Los gastos en línea durante la temporada navideña del 2008 (de noviembre 1 a diciembre 23) fueron de alrededor de ***$25.5 mil millones.*** (Fuente: pcmag.com)

c. DEUDA FEDERAL El 27 de marzo del 2009, la deuda nacional de E.U. era de ***$11.073 billones.*** (Fuente: National Debt Clock)

111. FUTBOL SOCCER Una portería de futbol es rectangular y mide 24 pies de ancho por 8 pies de alto. Los oficiales de la Major league soccer están proponiendo incrementar su ancho en 1.5 pies e incrementar su altura en 0.75 pies.

a. ¿Cuál es el área de la portería actual?

b. ¿Cuál sería el área si se adopta la propuesta?

c. ¿Cuánta área se añadiría?

112. INGESTA DE SAL Los estudios realizados por los Centros para el Control y Prevención de enfermedades encontraron que el estadounidense promedio come 3.436 gramos de sal al día. La cantidad recomendada es de 1.5 gramos al día. ¿Cuántos gramos más de sal come el estadounidense promedio en una semana en comparación con lo que recomienda el Centro?

113. ASIENTOS PARA CONCIERTOS Se vendieron dos tipos de boletos para un concierto. Los asientos de pista costaron $12.50 y los asientos de balcón costaron $15.75.

a. Complete la siguiente tabla y encuentre los ingresos de cada tipo de boleto.

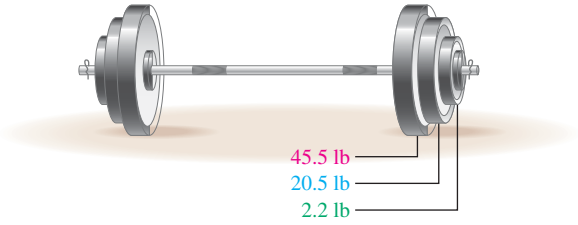
b. Encuentre los ingresos totales de la venta de ambos tipos de boletos.

Tipo de boleto	Precio	Número vendido	Ingresos
Pista		1,000	
Balcón		100	

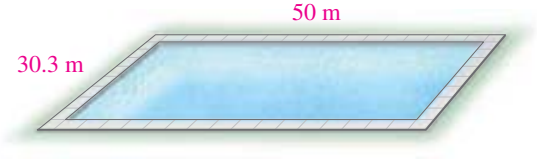
114. FACTURAS DE PLOMERÍA Una esquina de la factura de un trabajo de plomería está rota. ¿Cuál es el cargo por la mano de obra para las 4 horas de trabajo? ¿Cuál es el cargo total (cargo de servicio estándar, partes, mano de obra)?

Plomería Carter Av. Dalton 100 O		Factura #210
Cargo de servicio estándar	$	25.75
Partes	$	38.75
Mano de obra: 4 hr @ $40.55/hr	$	
Cargos totales	$	

115. LEVANTAMIENTO DE PESAS La barra con pesas está cargada de manera equitativa con discos de hierro. ¿Cuánto peso de los discos está cargado en la barra?



116. PISCINAS Pueden utilizarse ladrillos largos, llamados *albardilla,* para delinear el borde de una piscina. ¿Cuántos metros de albardilla serán necesarios en la construcción de la piscina mostrada?



117. DAÑO POR TORMENTA Después de una tormenta, la tierra saturada bajo una casa encima de una colina comienza a ceder. Un equipo de topógrafos observó que la casa había caído 0.57 pulgadas inicialmente. En las siguientes tres semanas, la casa descendió 0.09 pulgadas por semana. ¿Qué tanto descendió la casa durante este periodo de tres semanas?

118. CONSUMO DE AGUA En mayo, el nivel del agua de una reserva alcanzó su marca alta para el año. Durante los meses del verano, a medida que aumentó el consumo de agua, el nivel descendió. En los meses de mayo y junio, descendió 4.3 pies cada mes. En agosto y septiembre, debido a las temperaturas altas, descendió otros 8.7 pies cada mes. A inicio de octubre, ¿qué tanto había descendido el nivel del agua debajo de la marca alta?

REDACCIÓN

119. Explique cómo se determina dónde colocar el punto decimal en la respuesta cuando se multiplican dos decimales.

120. Liste las similitudes y las diferencias entre la multiplicación de números naturales y la multiplicación de decimales.

121. Explique cómo se multiplica un decimal por una potencia de 10 que es mayor que 1 y por una potencia de 10 que es menor que 1.

122. ¿Es más fácil multiplicar los decimales 0.4 y 0.16 o las fracciones $\frac{4}{10}$ y $\frac{16}{100}$? Explique por qué.

123. ¿Por qué se tienen que alinear los puntos decimales cuando se suma, pero no cuando se multiplica?

124. ¿Cuál forma vertical para la siguiente multiplicación prefiere? Explique por qué.

$$\begin{array}{r} 0.000003 \\ \times\quad 2.7 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2.8 \\ \times\ 0.000003 \\ \hline \end{array}$$

REPASO

Encuentre la factorización de primos de cada número. Use exponentes en su respuesta, cuando sea útil.

125. 220 **126.** 400

127. 162 **128.** 735

Objetivos

1. Dividir un decimal entre un número entero.
2. Dividir un decimal entre un decimal.
3. Redondear un cociente decimal.
4. Estimar cocientes de decimales.
5. Dividir decimales entre potencias de 10.
6. Dividir decimales con signo.
7. Usar la regla del orden de las operaciones.
8. Evaluar fórmulas.
9. Resolver problemas de aplicación dividiendo decimales.

SECCIÓN 4.4
División de decimales

En el Capítulo 1 se utilizó un proceso llamado división larga para dividir números enteros.

Forma de división larga

$$\begin{array}{r} 2 \leftarrow \text{Cociente} \\ \text{Divisor} \rightarrow 5\overline{)10} \leftarrow \text{Dividendo} \\ \underline{10} \\ 0 \leftarrow \text{Residuo} \end{array}$$

En esta sección se consideran problemas de división en los que el divisor, el dividendo o ambos son decimales.

1 Dividir un decimal entre un número natural

Para desarrollar una regla para la división de decimales, se considera el problema $47 \div 10$. Se rescribe la división como $\frac{47}{10}$, se puede utilizar el método de división larga del Capítulo 3 para cambiar una fracción impropia a un número mixto para encontrar la respuesta:

$$\begin{array}{r} 4\frac{7}{10} \\ 10\overline{)47} \\ \underline{-40} \\ 7 \end{array}$$

Aquí el resultado se escribe en forma de cociente + $\frac{\text{residuo}}{\text{divisor}}$.

Para desarrollar esta misma división utilizando decimales, se escribe el 47 como 47.0 y se divide como se dividirían números enteros.

$$\begin{array}{r} 4.7 \\ 10\overline{)47.0} \\ \underline{-\ 40} \\ 7\ 0 \\ \underline{-\ 7\ 0} \\ 0 \end{array}$$

Observe que el punto decimal en el cociente (respuesta) se coloca directamente sobre el punto decimal en el dividendo.

Después de restar 40 de 47, descienda el 0 y continúe dividiendo.

El residuo es 0.

Dado que $4\frac{7}{10} = 4.7$, cualquier método da la misma respuesta. Este resultado sugiere el siguiente método para la división de un decimal entre un número entero.

División de un decimal entre un número entero

Para dividir un decimal entre un número natural:

1. Escriba el problema en forma de división larga y coloque un punto decimal en el cociente (respuesta) directamente sobre el punto decimal en el dividendo.
2. Divida como si trabajara con números enteros.
3. Si es necesario, pueden escribirse ceros adicionales a la derecha del último dígito del dividendo para continuar la división.

Auto-revisión 1

Divida: $20.8 \div 4$.
Compruebe el resultado.

Ahora intente **Problema 15**

EJEMPLO 1 Divida: $42.6 \div 6$. Compruebe el resultado.

Estrategia Dado que el divisor, 6, es un número entero, se escribirá el problema en forma de división larga y se colocará un punto decimal directamente sobre el punto decimal en el 42.6. Después se dividirá como si el problema fuese $426 \div 6$.

POR QUÉ Para dividir un decimal entre un número entero, se divide como si se trabajara con números enteros.

Solución

Paso 1

Coloque un punto decimal en el cociente que se alinee con el punto decimal en el dividendo.

$$\begin{array}{r} \cdot \\ 6\overline{)42.6} \end{array}$$

Paso 2 Ahora se divide utilizando el proceso de división de cuatro pasos: **estimar, multiplicar, restar** y **descender.**

$$\begin{array}{rl} 7.1 & \\ 6\overline{)42.6} & \text{Ignore los puntos decimales y divida como si trabajara con números enteros.} \\ -\ 42 & \\ \hline 0\ 6 & \text{Después de restar 42 de 42, descienda el 6 y continúe dividiendo.} \\ -\ \ 6 & \\ \hline 0 & \text{El residuo es 0.} \end{array}$$

En la Sección 1.5, se comprobó la división de números enteros utilizando una multiplicación. La división de decimales se comprueba de la misma manera: *El producto del cociente y el divisor debe ser el dividendo.*

$$\begin{array}{rl} 7.1 & \leftarrow \text{Cociente} \\ \times\ \ \ 6 & \leftarrow \text{Divisor} \\ \hline \mathbf{42.6} & \leftarrow \text{Dividendo} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7.1 \\ 6\overline{)42.6} \end{array}$$

La comprobación confirma que $42.6 \div 6 = 7.1$.

EJEMPLO 2 Divida: $71.68 \div 28$.

Auto-revisión 2

Divida: $101.44 \div 32$

Ahora intente **Problema 19**

Estrategia Dado que el divisor es un número entero, 28, se escribirá el problema en forma de división larga y se colocará un punto decimal directamente sobre el punto decimal en el 71.68. Después se dividirá como si el problema fuese $7{,}168 \div 28$.

POR QUÉ Para dividir un decimal entre un número entero se divide como si se trabajara con números enteros.

Solución

Escriba el punto decimal en el cociente (respuesta) directamente sobre el punto decimal en el dividendo.

$$\begin{array}{rl} 2.56 & \text{Ignore los puntos decimales y divida como si trabajara con números enteros.} \\ 28\overline{)71.68} & \\ -\ 56 & \\ \hline 15\ 6 & \text{Después de restar 56 de 71, descienda el 6 y continúe dividiendo.} \\ -\ 14\ 0 & \\ \hline 1\ 68 & \text{Después de restar 140 de 156, descienda el 8 y continúe dividiendo.} \\ -\ 1\ 68 & \\ \hline 0 & \text{El residuo es 0.} \end{array}$$

Se puede utilizar una multiplicación para comprobar este resultado.

$$\begin{array}{r} 2.56 \\ \times\ \ \ 28 \\ \hline 2048 \\ 5120 \\ \hline \mathbf{71.68} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2.56 \\ 28\overline{)71.68} \end{array}$$

La comprobación confirma que $71.68 \div 28 = 2.56$.

Auto-revisión 3

Divida: $42.8 \div 8$

Ahora intente **Problema 23**

EJEMPLO 3 Divida: $19.2 \div 5$.

Estrategia Se escribirá el problema en forma de división larga, se colocará un punto decimal directamente sobre el punto decimal en el 19.2 y se dividirá. Si es necesario, se escribirán ceros adicionales a la derecha del 2 en el 19.2.

POR QUÉ El escribir ceros adicionales a la derecha del 2 permite continuar el proceso de división hasta obtener un residuo de 0 ó hasta que los dígitos en el cociente se repitan en un patrón.

Solución

$$\begin{array}{r} 3.8 \\ 5\overline{)19.2} \\ -\,15 \\ \hline 4\,2 \\ -\,4\,0 \\ \hline 2 \end{array}$$

Después de restar 15 de 19, descienda el 2 y continúe dividiendo.

Se han utilizado todos los dígitos en el dividendo, pero el residuo no es 0.

Se puede escribir un cero a la derecha del 2 en el dividendo y continuar el proceso de división. Recuerde que el escribir ceros a la derecha del punto decimal no cambia el valor del decimal. Es decir, $19.2 = 19.20$.

$$\begin{array}{r} 3.84 \\ 5\overline{)19.20} \\ -\,15 \\ \hline 4\,2 \\ -\,4\,0 \\ \hline 2\,0 \\ -\,2\,0 \\ \hline 0 \end{array}$$

Escriba un cero a la derecha del 2 y desciéndalo.

Continúe dividiendo.

El residuo es cero.

Comprobación:

$$\begin{array}{r} 3.84 \\ \times\quad 5 \\ \hline 19.20 \end{array}$$

← Dado que este es el dividendo, el resultado es correcto.

2 Dividir un decimal entre un decimal

Para desarrollar una regla para una división que involucra un divisor decimal, se considera el problema $0.36\overline{)0.2592}$, donde el divisor es el decimal 0.36. Primero, se expresa la división en forma de fracción.

$0.36\overline{)0.2592}$ puede representarse por medio de $\dfrac{0.2592}{0.36}$

Divisor

Para ser capaz de utilizar la regla para la división de decimales entre un *número entero* explicada anteriormente, se necesita mover el punto decimal en el divisor 0.36 dos posiciones a la derecha. Esto puede lograrse multiplicándolo por 100. Sin embargo, si el denominador de la fracción se multiplica por 100, el numerador también debe multiplicarse por 100 para que la fracción mantenga el mismo valor. Se tiene que $\frac{100}{100}$ es la forma de 1 que se debe utilizar para construir $\frac{0.2592}{0.36}$.

$$\frac{0.2592}{0.36} = \frac{0.2592}{0.36} \cdot \frac{\mathbf{100}}{\mathbf{100}}$$

Multiplique por una forma de 1.

$$= \frac{0.2592 \cdot \mathbf{100}}{0.36 \cdot \mathbf{100}}$$

Multiplique los numeradores.
Multiplique los denominadores.

$$= \frac{25.92}{36}$$

El multiplicar ambos decimales por 100 mueve sus puntos decimales dos posiciones a la derecha.

Esta fracción representa el problema de división $36\overline{)25.92}$. A partir de este resultado, se tienen las siguientes observaciones.

- El problema de división $0.36\overline{)0.2592}$ es equivalente a $36\overline{)25.92}$; es decir, tienen la misma respuesta.
- El punto decimal en el divisor y el dividendo del primer problema de división se han movido dos posiciones decimales a la derecha para crear el segundo problema de división.

$0.36\overline{)0.2592}$ se vuelve $36\overline{)25.92}$

Estas observaciones ilustran la siguiente regla para la división con un divisor decimal.

División con un divisor decimal

Para dividir con un divisor decimal:

1. Escriba el problema en forma de división larga.
2. Mueva el punto decimal del divisor para que se vuelva un número entero.
3. Mueva el punto decimal del dividendo el mismo número de posiciones a la derecha.
4. Escriba el punto decimal en el cociente (respuesta) directamente sobre el punto decimal en el dividendo. Divida como si trabajara con números enteros.
5. Si es necesario, pueden escribirse ceros adicionales a la derecha del último dígito del dividendo para continuar la división.

EJEMPLO 4 Divida: $\dfrac{0.2592}{0.36}$.

Estrategia Se moverá el punto decimal del divisor, 0.36, dos posiciones a la derecha y se moverá el punto decimal del dividendo, 0.2592, el mismo número de posiciones a la derecha.

POR QUÉ Entonces se puede utilizar la regla para la división de un decimal entre un *número entero*.

Solución Se comienza escribiendo el problema en forma de división larga.

$$0\ 36\overline{)0\ 25.92}$$

Mueva el punto decimal dos posiciones a la derecha en el divisor y el dividendo. Escriba el punto decimal en el cociente (respuesta) directamente sobre el punto decimal en el dividendo.

Dado que el divisor ahora es un número entero se puede utilizar la regla para la división de un decimal entre un número entero para encontrar el cociente.

$$\begin{array}{r} 0.72 \\ 36\overline{)25.92} \\ -\ 25\ 2 \\ \hline 72 \\ -\ 72 \\ \hline 0 \end{array}$$

Ahora divida como con números enteros.

Comprobación:

$$\begin{array}{r} 0.72 \\ \times\quad 36 \\ \hline 432 \\ 2160 \\ \hline 25.92 \end{array}$$

Dado que este es el dividendo, el resultado es correcto.

Auto-revisión 4

Divida: $\dfrac{0.6045}{0.65}$

Ahora intente **Problema 27**

Consejo útil Cuando se dividen decimales, el mover los puntos decimales el mismo número de posiciones a la derecha en el divisor y el dividendo no cambia la respuesta.

3 Redondear un cociente decimal

En el Ejemplo 4, el proceso de división se detuvo después de que se obtuvo un 0 de la segunda resta. En ocasiones cuando se divide, las restas nunca dan un residuo de cero y el proceso de división continúa por siempre. En tales casos, se puede redondear el resultado.

Auto-revisión 5

Divida: $12.82 \div 0.9$. Redondee el cociente a la centésima más cercana.

Ahora intente **Problema 33**

EJEMPLO 5 Divida: $\frac{9.35}{0.7}$. Redondee el cociente a la centésima más cercana.

Estrategia Se utilizarán los métodos de esta sección para dividir hasta la columna de las milésimas.

POR QUÉ Para redondear a la columna de las centésimas se necesita continuar el proceso de división para una posición decimal más, la cual es la columna de las milésimas.

Solución Se comienza escribiendo el problema en forma de división larga.

$$0\,7\overline{)93.5}$$

Para escribir el divisor como número entero, mueva el punto decimal una posición a la derecha. Realice lo mismo para el dividendo. Coloque el punto decimal en el cociente (respuesta) directamente sobre el punto decimal en el dividendo.

Se necesita escribir dos ceros a la derecha del último dígito del dividendo para que se pueda dividir hasta la columna de las milésimas.

$$7\overline{)93.500}$$

Después de dividir hasta la columna de las milésimas, se redondea a la columna de las centésimas.

El dígito a redondear en la columna de las centésimas es el 5.
El dígito a examinar en la columna de las milésimas es el 7.

$$\begin{array}{r} 13.357 \\ 7\overline{)93.500} \\ -\,7 \\ \hline 23 \\ -\,21 \\ \hline 25 \\ -\,21 \\ \hline 40 \\ -\,35 \\ \hline 50 \\ -\,49 \\ \hline 1 \end{array}$$

Puede detenerse el proceso de división. Se ha dividido hasta la columna de las milésimas.

Dado que el dígito a examinar 7 es 5 o mayor, se redondeará el 13.357 hacia arriba para aproximar el cociente a la centésima más cercana.

$$\frac{9.35}{0.7} \approx 13.36$$

Se lee $\approx$ como "es aproximadamente igual a".

Comprobación:

$$\begin{array}{r} 13.36 \\ \times\quad 0.7 \\ \hline 9.352 \end{array}$$

← La aproximación del cociente
← El divisor original
← Dado que es cercano al dividendo original, 9.35, el resultado parece razonable.

Consejo útil Para redondear un cociente a cierto valor de posición decimal, continúe el proceso de división una columna más a su derecha para encontrar el *dígito a examinar.*

UTILIZANDO SU CALCULADORA **División de decimales**

El núcleo de una célula contiene la información vital acerca de la célula en la forma de ADN. El núcleo es muy pequeño. Una célula animal típica tiene un núcleo que es de sólo 0.00023622 pulgadas de ancho. ¿Cuántos núcleos habría que poner uno al lado de otro para extenderse a una longitud de 1 pulgada?

Para encontrar cuántas longitudes de 0.00023622 pulgadas hay en 1 pulgada, se debe utilizar la división: $1 \div 0.00023622$.

1 [÷] .00023622 [=] 4233.3418

En algunas calculadoras, se presiona la tecla [ENTER] para mostrar el cociente.

Se requerirían aproximadamente 4,233 núcleos acomodados uno al lado del otro para extenderse a una longitud de 1 pulgada.

4 Estimar cocientes de decimales

Existen varias maneras de cometer un error cuando se dividen decimales. La estimación es una herramienta útil que puede utilizarse para determinar si una respuesta parece o no razonable.

Para estimar cocientes, se emplea un método que aproxima el dividendo y el divisor para que se dividan con facilidad. Existe una regla práctica para este método: Si es posible, redondee ambos números hacia arriba o hacia abajo.

EJEMPLO 6 Estime el cociente: $248.687 \div 43.1$

Estrategia Se redondeará el dividendo y el divisor hacia abajo y se encontrará $240 \div 40$.

POR QUÉ La división puede hacerse más sencilla si el dividendo y el divisor terminan con ceros. También, el 40 divide el 240 de manera exacta.

Solución

El dividendo es aproximadamente

$248.687 \div 43.1 \qquad 240 \div 40 = 6$

El divisor es aproximadamente

Para dividir, deseche un cero del 240 y del 40 y encuentre $24 \div 4$.

El estimado es de 6.

Si se calcula $248.687 \div 43.1$, el cociente es de exactamente 5.77. Observe que el estimado es cercano: Sólo es 0.23 más que 5.77.

Auto-revisión 6

Estime el cociente: $6{,}229.249 \div 68.9$

Ahora intente **Problemas 35 y 39**

5 Dividir decimales entre potencias de 10

Para desarrollar un conjunto de reglas para la división de decimales entre una potencia de 10, se consideran los problemas $8.13 \div 10$ y $8.13 \div 0.1$.

$$\begin{array}{r} 0.813 \\ 10\overline{)8.130} \\ -\,80 \\ \hline 13 \\ -\,10 \\ \hline 30 \\ -\,30 \\ \hline 0 \end{array}$$

Escriba un cero a la derecha del 3.

$$\begin{array}{r} 81.3 \\ 0.1\overline{)8.13} \\ -\,8 \\ \hline 1 \\ -\,1 \\ \hline 3 \\ -\,3 \\ \hline 0 \end{array}$$

Mueva los puntos decimales en el divisor y el dividendo una posición a la derecha.

Observe que los cocientes, 0.813 y 81.3, y el dividendo, 8.13, son iguales excepto por la localización de los puntos decimales. El primer cociente, 0.813, puede obtenerse fácilmente moviendo el punto decimal del dividendo una posición a la izquierda. El segundo cociente, 81.3, se obtiene fácilmente moviendo el punto decimal del dividendo una posición a la derecha. Estas observaciones ilustran las siguientes reglas para la división de un decimal entre una potencia de 10.

División de un decimal entre 10, 100, 1,000, etcétera

Para encontrar el cociente de un decimal y el 10, 100, 1,000, etc., mueva el punto decimal a la izquierda el mismo número de posiciones que el número de ceros en la potencia de 10.

División de un decimal entre 0.1, 0.01, 0.001, etcétera

Para encontrar el cociente de un decimal y el 0.1, 0.01, 0.001, etc., mueva el punto decimal a la derecha el mismo número de posiciones decimales que hay en la potencia de 10.

Auto-revisión 7

Encuentre cada cociente:

a. $721.3 \div 100$

b. $\dfrac{1.07}{1{,}000}$

c. $19.4407 \div 0.0001$

Ahora intente **Problemas 43 y 49**

EJEMPLO 7 Encuentre cada cociente:

a. $16.74 \div 10$ **b.** $8.6 \div 10{,}000$ **c.** $\dfrac{290.623}{0.01}$

Estrategia Se identificará el divisor en cada división. Si es una potencia de 10 mayor que 1, se contará el número de ceros que tiene. Si es una potencia de 10 menor que 1, se contará el número de posiciones decimales que tiene.

POR QUÉ Entonces se conocerá cuántas posiciones a la derecha o a la izquierda se debe mover el punto decimal en el dividendo para encontrar el cociente.

Solución

a. $16.74 \div 10 = 1.674$ Dado que el divisor 10 tiene un cero, mueva el punto decimal una posición a la izquierda.

b. $8.6 \div 10{,}000 = .00086$ Dado que el divisor 10,000 tiene cuatro ceros, mueva el punto decimal cuatro posiciones a la izquierda. Escriba tres ceros marcadores de posición (mostrados en azul).

$= 0.00086$

c. $\dfrac{290.623}{0.01} = 29062.3$ Dado que el divisor 0.01 tiene dos posiciones decimales, mueva el punto decimal en el 290.623 dos posiciones a la derecha.

6 Dividir decimales con signo

Las reglas para la división de enteros también se mantienen para la división de decimales con signo. El cociente de dos decimales con *signos similares* es positivo y el cociente de dos decimales con *signos no similares* es negativo.

Auto-revisión 8

Divida:

a. $-100.624 \div 15.2$

b. $\dfrac{-23.9}{-0.1}$

Ahora intente **Problemas 51 y 55**

EJEMPLO 8 Divida: **a.** $-104.483 \div 16.3$ **b.** $\dfrac{-38.677}{-0.1}$

Estrategia En el inciso a se utilizará la regla para la división de decimales con signo que tienen signos diferentes (no similares). En el inciso b se utilizará la regla para la división de decimales con signo que tienen signos iguales (similares).

POR QUÉ En el inciso a, el divisor es positivo y el dividendo es negativo. En el inciso b, el dividendo y el divisor son negativos.

Solución

a. Primero, se encuentran los valores absolutos: $|-104.483| = 104.483$ y $|16.3| = 16.3$. Después se dividen los valores absolutos, 104.483 entre 16.3, utilizando los métodos de esta sección.

$$
\begin{array}{r}
6.41 \\
163\overline{)1044.83} \\
-978 \\
\hline
66\,8 \\
-65\,20 \\
\hline
1\,63 \\
-1\,63 \\
\hline
0
\end{array}
$$

Mueva el punto decimal en el divisor y el dividendo una posición a la derecha.

Escriba el punto decimal en el cociente (respuesta) directamente sobre el punto decimal en el dividendo.

Divida como si trabajara con números enteros.

Dado que los signos del dividendo y el divisor originales son no similares, se hace negativa la respuesta final. Por tanto,

$$-104.483 \div 16.3 = -6.41$$

Compruebe el resultado utilizando una multiplicación.

b. Se puede utilizar la regla para la división de un decimal entre una potencia de 10 para encontrar el cociente.

$$\frac{-38.677}{-0.1} = 386.77$$

Dado que el divisor 0.1 tiene una posición decimal, mueva el punto decimal en el 38.677 una posición a la derecha. Dado que el dividendo y el divisor tienen signos similares, el cociente es positivo.

7 Usar la regla del orden de las operaciones

Recuerde que la regla del orden de las operaciones se utiliza para evaluar expresiones que involucran más de una operación.

EJEMPLO 9 Evalúe: $\dfrac{2(0.351) + 0.5592}{0.2 - 0.6}$.

Estrategia Se evaluarán por separado la expresión sobre y la expresión debajo de la barra de fracción. Después se realizará la división indicada, si es posible.

POR QUÉ Las barras de fracción son símbolos de agrupación. Agrupan el numerador y el denominador.

Solución

$$\frac{2(0.351) + 0.5592}{0.2 - 0.6}$$

$$= \frac{0.702 + 0.5592}{-0.4}$$

En el numerador, realice la multiplicación. En el denominador, realice la resta.

$$= \frac{1.2612}{-0.4}$$

En el numerador, realice la suma.

$$= -3.153$$

Realice la división indicada por la barra de fracción. El cociente de dos números con signos no similares es negativo.

$$
\begin{array}{r}
{\scriptstyle 1} \\
0.351 \\
\times\quad 2 \\
\hline
0.702
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
{\scriptstyle 1\ 1} \\
0.7020 \\
+\ 0.5592 \\
\hline
1.2612
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
3.153 \\
4\overline{)12.612} \\
-\,12 \\
\hline
6 \\
-4 \\
\hline
21 \\
-20 \\
\hline
12 \\
-12 \\
\hline
0
\end{array}
$$

Auto-revisión 9

Evalúe: $\dfrac{2.7756 + 3(-0.63)}{0.4 - 1.2}$

Ahora intente **Problema 59**

8 Evaluar fórmulas

Auto-revisión 10
Evalúe la fórmula $l = \frac{A}{w}$ para $A = 5.511$ y $w = 1.002$.
Ahora intente **Problema 63**

EJEMPLO 10 Evalúe la fórmula $b = \frac{2A}{h}$ para $A = 15.36$ y $h = 6.4$.

Estrategia En la fórmula proporcionada se reemplazará la letra A con 15.36 y la letra h con 6.4.

POR QUÉ Entonces se puede utilizar la regla del orden de las operaciones para encontrar el valor de la expresión en el lado derecho del símbolo =.

Solución

$$B = \frac{2A}{h}$$ Esta es la fórmula proporcionada.

$$= \frac{2(15.36)}{6.4}$$ Reemplace A con 15.36 y h con 6.4.

$$= \frac{30.72}{6.4}$$ En el numerador, realice la multiplicación.

$$= 4.8$$ Realice la división indicada por la barra de fracción.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ \ 1} \\ 15.36 \\ \times\quad 2 \\ \hline 30.72 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4.8 \\ 64\overline{)307.2} \\ -256 \\ \hline 51\,2 \\ -51\,2 \\ \hline 0 \end{array}$$

9 Resolver problemas de aplicación dividiendo decimales

Recuerde que los problemas de aplicación que involucran la formación de grupos de igual tamaño pueden resolverse por medio de una división.

Auto-revisión 11
PASTELES DE FRUTA Un pedazo de pastel de fruta de 9 pulgadas de largo se corta en rebanadas de 0.25 pulgadas de grosor. ¿Cuántas rebanadas hay en un pastel de fruta?
Ahora intente **Problema 95**

EJEMPLO 11 ***Pan francés*** Una máquina para cortar pan corta una hogaza de baguete de 25 pulgadas de largo en rebanadas de 0.625 pulgadas de grosor. ¿Cuántas rebanadas hay en una hogaza?

Analizar

- La hogaza de pan francés de 25 pulgadas de largo se corta en rebanadas. — Proporcionado
- Cada rebanada es de 0.625 pulgadas de grosor. — Proporcionado
- ¿Cuántas rebanadas hay en una hogaza? — A encontrar

Formar El cortar una hogaza de pan francés en rebanadas de igual grosor indica una división. Se traducen las palabras del problema a números y símbolos.

El número de rebanadas en una hogaza de pan	es igual a	la longitud de la hogaza de pan	dividida entre	el grosor de una rebanada
El número de rebanadas en una hogaza de pan	=	25	÷	0.625

Resolver Cuando se escribe $25 \div 0.625$ en forma de división larga, se observa que el divisor es un decimal.

$$0.625\overline{)25.000}$$

Para escribir el divisor como un número entero, mueva el punto decimal tres posiciones a la derecha. Para mover el punto decimal tres posiciones a la derecha en el dividendo, deben insertarse tres ceros marcadores de posición (mostrados en azul).

Ahora que el divisor es un número entero, se puede desarrollar la división.

$$\begin{array}{r} 40 \\ 625\overline{)25000} \\ -\ 2500 \\ \hline 00 \\ -\ 0 \\ \hline 0 \end{array}$$

Enunciar Hay 40 rebanadas en una hogaza de pan francés.

Comprobar La multiplicación abajo verifica que 40 rebanadas, cada una de 0.625 pulgadas de grosor, conforman una hogaza de 25 pulgadas de largo. El resultado es correcto.

$$\begin{array}{rl} 0.625 & \leftarrow \text{El grosor de una rebanada de pan (en pulgadas)} \\ \times\ \ 40 & \leftarrow \text{El número de rebanadas en una hogaza} \\ \hline 0000 & \\ 25000 & \\ \hline 25.000 & \leftarrow \text{La longitud de una hogaza de pan (en pulgadas)} \end{array}$$

Recuerde que la **media aritmética,** o **promedio,** de varios números es un valor alrededor del cual se agrupan los números. Se utiliza la suma y la división para encontrar la media (promedio).

EJEMPLO 12 ***Comparación de compras*** Un sitio de ventas en línea, Shopping.com, lista los cuatro mejores precios para un receptor GPS para automóvil como se muestra abajo. ¿Cuál es el precio medio (promedio) del GPS?

Estrategia Se sumarán el 169.99, 182.65, 194.84 y 204.48 y se dividirá la suma entre 4.

POR QUÉ Para encontrar la media (promedio) de un conjunto de valores se divide la suma de los valores entre el número de valores.

Solución

$$\text{Media} = \frac{169.99 + 182.65 + 194.84 + 204.48}{4} \qquad \text{Dado que hay 4 precios, divida la suma entre 4.}$$

$$= \frac{751.96}{4} \qquad \text{En el numerador, realice la suma.}$$

$$= 187.99 \qquad \text{Realice la división indicada.}$$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2\,2\,2\ \ 2} \\ 169.99 \\ 182.65 \\ 194.84 \\ +204.48 \\ \hline 751.96 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 187.99 \\ 4\overline{)751.96} \\ -4 \\ \hline 35 \\ -32 \\ \hline 31 \\ -28 \\ \hline 39 \\ -36 \\ \hline 36 \\ -36 \\ \hline 0 \end{array}$$

El precio medio (promedio) del receptor GPS es de $187.99.

Auto-revisión 12

PARQUES NACIONALES EN E.U. Use la siguiente información para determinar el número promedio de visitantes por año para los parques nacionales para los años 2004 al 2008. (Fuente: National Park Service)

Año	Visitantes (millones)
2008	2.749
2007	2.756
2006	2.726
2005	2.735
2004	2.769

Ahora intente **Problema 103**

PIENSE DETENIDAMENTE *PC*

"Al considerar todos los factores que son importantes para los empleadores cuando reclutan estudiantes en colegios y universidades a nivel nacional, la especialización universitaria, el promedio de calificaciones y la experiencia relacionada con el trabajo por lo regular están en la parte superior de la lista."

Dra. Mary D. Feduccia, Career Services Director, Louisiana State University

El promedio de calificaciones (PC) es un promedio ponderado basado en las calificaciones recibidas y el número de unidades (horas crédito) tomadas. Un PC para un semestre (o periodo) se define como

el cociente de la suma de los puntos de calificación obtenidos por cada clase y la suma del número de unidades tomadas. El número de puntos de calificación obtenidos para una clase es el producto del número de unidades asignado a la clase y el valor de la calificación recibida en la clase.

1. Use la tabla de los valores de las calificaciones mostrada para computar el PC para el estudiante cuyo reporte de calificaciones del semestre se muestra. Redondee a la centésima más cercana.

Calificación	Valor
A	4
B	3
C	2
D	1
F	0

Clase	Unidades	Calificación
Geología	4	C
Álgebra	5	A
Psicología	3	C
Español	2	B

2. Si estuviese matriculado en el último semestre (o periodo) de la escuela, liste las clases tomadas, las unidades asignadas y las calificaciones recibidas como las mostradas en el reporte de calificaciones arriba. Después calcule su PC.

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. 5.2 **2.** 3.17 **3.** 5.35 **4.** 0.93 **5.** 14.24 **6.** $6{,}300 \div 70 = 630 \div 7 = 90$
7. a. 7.213 **b.** 0.00107 **c.** 194,407 **8. a.** -6.62 **b.** 239 **9.** -1.107 **10.** 5.5
11. 36 rebanadas **12.** 2.747 millones de visitantes

SECCIÓN 4.4 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Complete los espacios.

1. En el problema de división mostrado abajo, etiquete el *dividendo,* el *divisor* y el *cociente.*

$$\square \rightarrow 5\overline{)15.85} \leftarrow \square \qquad 3.17 \leftarrow \square$$

2. Para desarrollar la división $2.7\overline{)9.45}$, se mueve el punto decimal del divisor de tal manera que se convierte en el número _____ 27.

CONCEPTOS

3. Falta un punto decimal en cada uno de los siguientes cocientes. Escriba un punto decimal en la posición apropiada.

a. $4\overline{)21.04}$ 526 **b.** $3\overline{)0.024}$ 0008

4. a. ¿Cuántas posiciones a la derecha debe moverse el punto decimal en el 6.14 para que se vuelva un número natural?

b. Cuando el punto decimal en el 49.8 se mueve tres posiciones a la derecha, ¿cuál es el número resultante?

5. Mueva el punto decimal en el divisor y el dividendo el mismo número de posiciones para que el divisor se vuelva un número entero. (***No tiene que encontrar el cociente.***)

a. $1.3\overline{)10.66}$

b. $3.71\overline{)16.695}$

6. Complete los espacios: Para dividir con un divisor decimal, escriba el problema en forma de división _____ Mueva el punto decimal del divisor de tal manera que se convierta en un número _____. Después mueva el punto decimal del dividendo el mismo número de posiciones a la _____. Escriba el punto decimal en el cociente directamente _____ del punto decimal en el dividendo y divida como si trabajara con _____ enteros.

7. Para desarrollar la división $7.8\overline{)14.562}$, los puntos decimales en el divisor y el dividendo se mueven 1 posición a la derecha. ¿Esto es equivalente a la multiplicación de $\frac{14.562}{7.8}$ por qué forma de 1?

8. Use una multiplicación para comprobar la siguiente división. ¿El resultado es correcto?

$$\frac{1.917}{0.9} = 2.13$$

9. Cuando se redondea un decimal a la columna de las centésimas, ¿a qué otra columna se debe ver primero?

10. **a.** Cuando el 9.545 se divide entre 10, ¿la respuesta es menor o mayor que 9.545?

b. Cuando el 9.545 se divide entre 0.1, ¿la respuesta es menor o mayor que 9.545?

11. Complete los espacios.

a. Para encontrar el cociente de un decimal y el 10, 100, 1,000, etc., mueva el punto decimal a la _____ el mismo número de posiciones que el número de ceros en la potencia de 10.

b. Para encontrar el cociente de un decimal y el 0.1, 0.01, 0.001, etc., mueva el punto decimal a la _____ el mismo número de posiciones decimales que hay en la potencia de 10.

12. Determine si el *signo* de cada resultado es positivo o negativo. (***No tiene que encontrar el cociente.***)

a. $-15.25 \div (-0.5)$

b. $\frac{-25.92}{3.2}$

NOTACIÓN

13. Explique qué están ilustrando las flechas rojas en el problema de división abajo.

$467\overline{)3208.7}$

14. La división mostrada abajo no está finalizada. ¿Por qué se escribió el 0 rojo después del 7 en el dividendo?

$$\begin{array}{r} 2.3 \\ 2\overline{)4.70} \\ \underline{-4} \\ 07 \\ \underline{-6} \\ 1 \end{array}$$

PRÁCTICA GUIADA

Divida. Compruebe el resultado. Vea el Ejemplo 1.

15. $12.6 \div 6$

16. $40.8 \div 8$

17. $3\overline{)27.6}$

18. $4\overline{)28.8}$

Divida. Compruebe el resultado. Vea el Ejemplo 2.

19. $98.21 \div 23$

20. $190.96 \div 28$

21. $37\overline{)320.05}$

22. $32\overline{)125.12}$

Divida. Compruebe el resultado. Vea el Ejemplo 3.

23. $13.4 \div 4$

24. $38.3 \div 5$

25. $5\overline{)22.8}$

26. $6\overline{)28.5}$

Divida. Compruebe el resultado. Vea el Ejemplo 4.

27. $\frac{0.1932}{0.42}$

28. $\frac{0.2436}{0.29}$

29. $0.29\overline{)0.1131}$

30. $0.58\overline{)0.1566}$

Divida. Redondee el cociente a la centésima más cercana. Compruebe el resultado. Vea el Ejemplo 5.

31. $\frac{11.83}{0.6}$

32. $\frac{16.43}{0.9}$

33. $\frac{17.09}{0.7}$

34. $\frac{13.07}{0.6}$

Estime cada cociente. Vea el Ejemplo 6.

35. $289.842 \div 72.1$

36. $284.254 \div 91.4$

37. $383.76 \div 7.8$

38. $348.84 \div 5.7$

39. $3{,}883.284 \div 48.12$

40. $5{,}556.521 \div 67.89$

41. $6.1\overline{)15{,}819.74}$

42. $9.2\overline{)19{,}460.76}$

Encuentre cada cociente. Vea el Ejemplo 7.

43. $451.78 \div 100$

44. $991.02 \div 100$

45. $\frac{30.09}{10{,}000}$

46. $\frac{27.07}{10{,}000}$

47. $1.25 \div 0.1$

48. $8.62 \div 0.01$

49. $\frac{545.2}{0.001}$

50. $\frac{67.4}{0.001}$

Divida. **Vea el Ejemplo 8.**

51. $-110.336 \div 12.8$

52. $-121.584 \div 14.9$

53. $-91.304 \div (-22.6)$

54. $-66.126 \div (-32.1)$

55. $\dfrac{-20.3257}{-0.001}$

56. $\dfrac{-48.8933}{-0.001}$

57. $0.003 \div (-100)$

58. $0.008 \div (-100)$

Evalúe cada expresión. **Vea el Ejemplo 9.**

59. $\dfrac{2(0.614) + 2.3854}{0.2 - 0.9}$

60. $\dfrac{2(1.242) + 0.8932}{0.4 - 0.8}$

61. $\dfrac{5.409 - 3(1.8)}{(0.3)^2}$

62. $\dfrac{1.674 - 5(0.222)}{(0.1)^2}$

Evalúe cada fórmula. **Vea el Ejemplo 10.**

63. $t = \dfrac{d}{r}$ para $d = 211.75$ y $r = 60.5$

64. $h = \dfrac{2A}{b}$ para $A = 9.62$ y $b = 3.7$

65. $r = \dfrac{d}{t}$ para $d = 219.375$ y $t = 3.75$

66. $\pi = \dfrac{C}{d}$ para $C = 14.4513$ y $d = 4.6$ (Redondee a la centésima más cercana.)

INTÉNTELO

Desarrolle las operaciones indicadas. Redondee el resultado a la posición decimal especificada, cuando se indique.

67. $4.5\overline{)11.97}$

68. $4.1\overline{)14.637}$

69. $\dfrac{75.04}{10}$

70. $\dfrac{22.32}{100}$

71. $8\overline{)0.036}$

72. $4\overline{)0.073}$

73. $9\overline{)2.889}$

74. $6\overline{)3.378}$

75. $\dfrac{-3(0.2) - 2(3.3)}{30(0.4)^2}$

76. $\dfrac{(-1.3)^2 + 9.2}{-2(0.2) - 0.5}$

77. Divida 1.2202 entre -0.01.

78. Divida -0.4531 entre -0.001.

79. $-5.714 \div 2.4$ (décima más cercana)

80. $-21.21 \div 3.8$ (décima más cercana)

81. $-39 \div (-4)$

82. $-26 \div (-8)$

83. $7.8915 \div .00001$

84. $23.025 \div 0.0001$

85. $\dfrac{0.0102}{0.017}$

86. $\dfrac{0.0092}{0.023}$

87. $12.243 \div 0.9$ (centésima más cercana)

88. $13.441 \div 0.6$ (centésima más cercana)

89. $1{,}000\overline{)34.8}$

90. $10{,}000\overline{)678.9}$

91. $\dfrac{40.7(3 - 8.3)}{0.4 - 0.61}$ (centésima más cercana)

92. $\dfrac{(0.5)^2 - (0.3)^2}{0.005 + 0.1}$ (centésima más cercana)

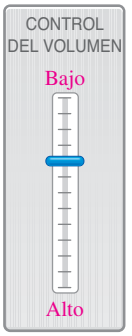
93. Divida 0.25 entre 1.6

94. Divida 1.2 entre 0.64

APLICACIONES

95. CARNICERÍAS Una rebanadora de carne corta piezas de 0.05 pulgadas de grosor de una salchicha. Si la salchicha es de 14 pulgadas de largo, ¿cuántas rebanadas hay en una salchicha?

96. ELECTRÓNICA A la derecha se muestra el control del volumen en una computadora. Si la distancia entre las configuraciones Bajo y Alto es de 21 cm, ¿qué tan separadas están las configuraciones del volumen espaciadas de manera equitativa?



97. COMPUTADORAS Una computadora puede realizar un cálculo aritmético en 0.00003 segundos. ¿Cuántos de estos cálculos puede realizar en 60 segundos?

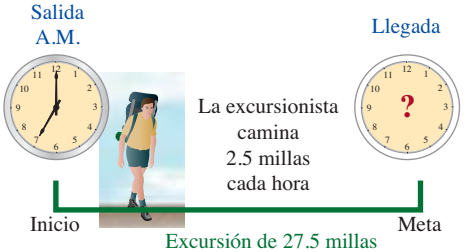
98. LOTERÍA En diciembre del 2008, 15 empleados municipales de Piqua, Ohio, que habían jugado a la Lotería mega millones como grupo, ganaron el premio gordo. Se les dio un total de $94.5 millones. Si el dinero se dividió de manera equitativa, ¿cuánto recibió cada persona? (Fuente: pal-item.com)

99. BOTELLA DE ESPRAY Cada apretón del disparador de una botella de espray emite 0.017 onzas de líquido. ¿Cuántos apretones hay en una botella de 8.5 onzas?

100. PRÉSTAMOS PARA COMPRAS DE AUTOMÓVILES Vea el enunciado de préstamo mostrado abajo. ¿Cuántos pagos mensuales más deben hacerse para liquidar el préstamo?

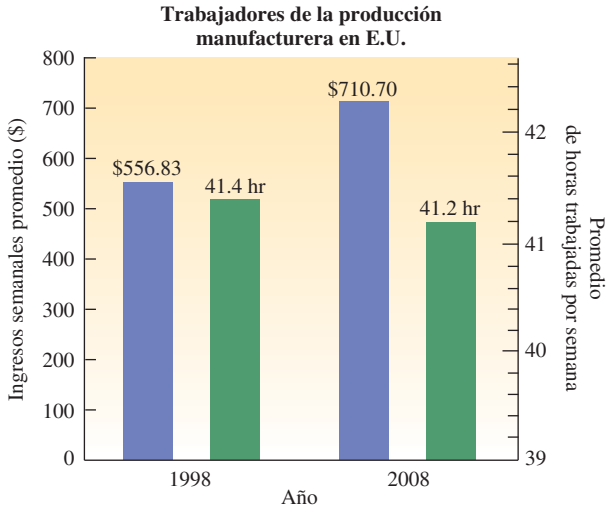
Compañía financiera americana	Junio
Pago mensual:	Pagado a la fecha: $547.30
$42.10	Saldo del préstamo: $631.50

101. EXCURSIONISMO Refiérase a la ilustración que aparece abajo para determinar qué tanto le llevará a la persona mostrada completar la excursión. Después determine a qué hora del día completará la excursión.



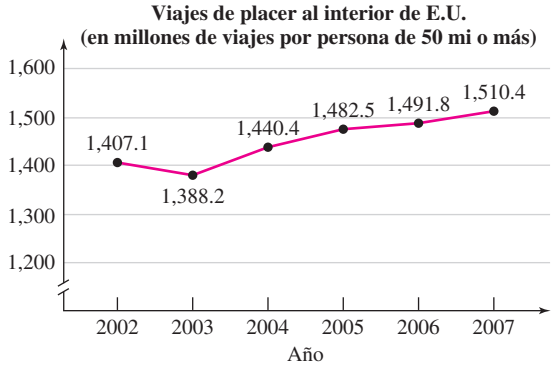
102. SALARIO POR HORA La gráfica de abajo muestra las horas promedio trabajadas y los ingresos semanales promedio de los trabajadores de la producción en E.U. en la manufactura para los años 1998 y 2008. ¿Cuánto ganó por hora el trabajador promedio de la producción en la manufactura

a. en 1998? **b.** en el 2008?



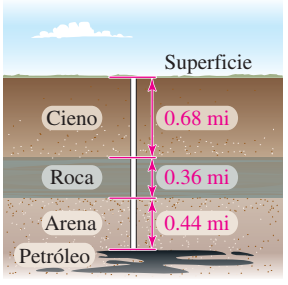
Fuente: U.S. Department of Labor Statistic.

103. VIAJES La ilustración muestra el número anual de los viajes por persona de 50 millas o más (sólo de ida) para los años 2002-2007, estimado por la Asociación de la Industria de Viajes de E.U. Encuentre el número promedio de viajes por año para este periodo de tiempo.



Fuente: *U.S. Travel Association*

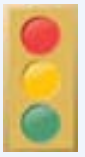
104. POZOS PETROLEROS Los geólogos han previsto los tipos de suelo a través de los cuales deben perforar los ingenieros para alcanzar un depósito de petróleo. Vea la ilustración abajo.



a. ¿Qué tan debajo de la superficie está el depósito de petróleo?

b. ¿Cuál es la profundidad promedio que debe perforarse cada semana si la perforación va a ser un proyecto de cuatro semanas?

105. REFLEJOS Abajo se muestra un examen en línea del tiempo de reacción. Cuando la luz de alto cambia de rojo a verde, el participante debe dar clic de inmediato en el botón verde grande. Entonces, el programa muestra el tiempo de reacción del participante en la tabla. Después de que el participante toma la prueba cinco veces, se encuentra el tiempo de reacción *promedio*. Determine el tiempo de reacción promedio para los resultados mostrados abajo.

Número de examen	Tiempo de reacción (en segundos)	Semáforo en rojo a observar	Botón a apretar
1	0.219		Dé click aquí cuando la luz sea verde
2	0.233		
3	0.204		
4	0.297		
5	0.202		
PROMEDIO	?		

106. INDY 500 El conductor Scott Dixon de Nueva Zelanda tuvo la velocidad de calificación promedio más rápida para la carrera de las 500 millas de Indianápolis del 2008. Esto le dio la *primera posición* al comenzar la carrera. Abajo se muestran las velocidades para cada una de sus cuatro vueltas de calificación. ¿Cuál fue su velocidad de calificación promedio?

Vuelta 1: 226.598 mph
Vuelta 2: 226.505 mph
Vuelta 3: 226.303 mph
Vuelta 4: 226.058 mph

(Fuente: indianapolismotorspeedway.com)

REDACCIÓN

107. Explique el proceso utilizado para dividir dos números cuando el divisor y el dividendo son decimales. Dé un ejemplo.

108. Explique por qué en algunas ocasiones se utiliza el redondeo cuando se escribe la respuesta a un problema de división.

109. La división $0.5\overline{)2.005}$ es equivalente a $5\overline{)20.05}$. Explique a qué se refiere con equivalente en este caso.

110. En $3\overline{)0.7}$, ¿por qué pueden colocarse ceros adicionales a la derecha del 0.7 sin afectar el resultado?

111. Explique cómo estimar el siguiente cociente: $0.75\overline{)2.415}$

112. Explique por qué la multiplicación de $\frac{4.86}{0.2}$ por la forma de 1 mostrada abajo mueve los puntos decimales en el dividendo, 4.86, y en el divisor, 0.2, una posición a la derecha.

$$\frac{4.86}{0.2} = \frac{4.86}{0.2} \cdot \frac{10}{10}$$

REPASO

113. a. Encuentre el mfc del 10 y el 25.
b. Encuentre el mcm del 10 y el 25.

114. a. Encuentre el mfc del 8, 12 y 16.
b. Encuentre el mcm del 8, 12 y 16.

SECCIÓN 4.5
Fracciones y decimales

Objetivos

1. Escribir fracciones como decimales terminales equivalentes.
2. Escribir fracciones como decimales repetitivos equivalentes.
3. Redondear decimales repetitivos.
4. Graficar fracciones y decimales en una recta numérica.
5. Comparar fracciones y decimales.
6. Evaluar expresiones que contienen fracciones y decimales.
7. Resolver problemas de aplicación que involucran fracciones y decimales.

Auto-revisión 1

Escriba cada fracción como un decimal.

a. $\frac{1}{2}$

b. $\frac{3}{16}$

c. $\frac{9}{2}$

Ahora intente **Problemas 15, 17 y 21**

En esta sección se continúa explorando la relación entre las fracciones y los decimales.

1 Escribir fracciones como decimales terminales equivalentes

Se dice que una fracción y un decimal son **equivalentes** si nombran al mismo número. Toda fracción puede escribirse en una forma equivalente decimal dividiendo el numerador entre el denominador, como indica la barra de fracción.

Escritura de una fracción como un decimal

Para escribir una fracción como un decimal, divida el numerador de la fracción entre su denominador.

EJEMPLO 1 Escriba cada fracción como un decimal.

a. $\frac{3}{4}$ **b.** $\frac{5}{8}$ **c.** $\frac{7}{2}$

Estrategia Se dividirá el numerador de cada fracción entre su denominador. Se continuará el proceso de división hasta que se obtenga un residuo de cero.

POR QUÉ Se dividirá el numerador entre el denominador debido a que una barra de fracción indica una división.

Solución

a. $\frac{3}{4}$ significa $3 \div 4$. Para encontrar $3 \div 4$ se comienza escribiéndola en forma de división larga como $4\overline{)3}$. Para proceder con la división, se debe escribir el dividendo 3 con un punto decimal y algunos ceros adicionales. Después se utiliza el procedimiento de la Sección 4.4 para la división de un decimal entre un número natural.

$$\begin{array}{r} 0.75 \\ 4\overline{)3.00} \\ -28\downarrow \\ \hline 20 \\ -20 \\ \hline 0 \end{array}$$

Escriba un punto decimal y dos ceros adicionales a la derecha del 3.

← El residuo es 0.

Por tanto, $\frac{3}{4} = 0.75$. Se dice que el **equivalente decimal** de $\frac{3}{4}$ es 0.75.

Se puede comprobar el resultado escribiendo 0.75 como una fracción en la forma más simple:

$$0.75 = \frac{75}{100}$$ El 0.75 es setenta y cinco centésimas.

$$= \frac{3 \cdot \overset{1}{\cancel{25}}}{4 \cdot \underset{1}{\cancel{25}}}$$ Para simplificar la fracción, factorice el 75 como 3 · 25 y el 100 como 4 · 25 y elimine el factor común de 25.

$$= \frac{3}{4}$$ Esta es la fracción original.

b. $\frac{5}{8}$ significa $5 \div 8$.

$$\begin{array}{r} 0.625 \\ 8\overline{)5.000} \\ -\,48 \\ \hline 20 \\ -\,16 \\ \hline 40 \\ -\,40 \\ \hline 0 \end{array}$$

Escriba un punto decimal y tres ceros adicionales a la derecha del 5.

← El residuo es 0.

Por tanto, $\frac{5}{8} = 0.625$.

c. $\frac{7}{2}$ significa $7 \div 2$.

$$\begin{array}{r} 3.5 \\ 2\overline{)7.0} \\ -\,6 \\ \hline 10 \\ -\,10 \\ \hline 0 \end{array}$$

Escriba un punto decimal y un cero adicional a la derecha del 7.

← El residuo es 0.

Por tanto, $\frac{7}{2} = 3.5$.

¡Cuidado! Un error común cuando se encuentra un equivalente decimal para una fracción es *dividir de manera incorrecta el denominador entre el numerador.* A la derecha se muestra un ejemplo de esto, donde el equivalente decimal de $\frac{5}{8}$ (un número menor que 1) se encuentra de manera incorrecta como de 1.6 (un número mayor que 1).

$$\begin{array}{r} 1.6 \\ 5\overline{)8.0} \\ -\,5 \\ \hline 30 \\ -\,30 \\ \hline 0 \end{array}$$

En los incisos a, b y c del Ejemplo 1, el proceso de división terminó debido a que se obtuvo un residuo de 0. Cuando tal división *termina* con un residuo de 0, se le llama al decimal resultante **decimal terminal.** Por tanto, 0.75, 0.625 y 3.5 son tres ejemplos de decimales terminales.

El lenguaje de las matemáticas *Terminar* significa llevar a un final. En la película *The Terminator,* el actor Arnold Schwarzenegger hace el papel de una máquina sin corazón enviada a la Tierra para llevar a un final a sus enemigos.

2 Escribir fracciones como decimales repetitivos equivalentes

En ocasiones, cuando se encuentra un equivalente decimal de una fracción, el proceso de división nunca da un residuo de 0. En este caso, el resultado es un **decimal repetitivo.** Ejemplos de decimales repetitivos son el 0.4444 . . . y 1.373737 . . . . Los tres puntos indican que un bloque de dígitos se repite en el patrón mostrado. Los deci-

males repetitivos también pueden escribirse utilizando una barra sobre el bloque de dígitos repetitivo. Por ejemplo, 0.4444 . . . puede escribirse como $0.\overline{4}$, y 1.373737 . . . puede escribirse como $1.\overline{37}$.

¡Cuidado! Cuando se utiliza una **barra superior** para escribir un decimal repetitivo, use el menor número de dígitos necesarios para mostrar el bloque repetitivo de dígitos.

$0.333\ldots = 0.\overline{333}$	$6.7454545\ldots = 6.7\overline{454}$
$0.333\ldots = 0.\overline{3}$	$6.7454545\ldots = 6.7\overline{45}$

Algunas fracciones pueden escribirse como decimales utilizando un método alterno. Si el denominador de una fracción en forma simplificada tiene factores de sólo 2 o 5, o una combinación de ambos, puede escribirse como un decimal multiplicándola por una forma de 1. El objetivo es escribir la fracción en una forma equivalente con un denominador que sea una potencia de 10, como 10, 100, 1,000, etcétera.

Auto-revisión 2

Escriba cada fracción como un decimal utilizando una multiplicación por una forma de 1:

a. $\frac{2}{5}$

b. $\frac{8}{25}$

Ahora intente **Problemas 27 y 29**

EJEMPLO 2 Escriba cada fracción como un decimal utilizando una multiplicación por una forma de 1: **a.** $\frac{4}{5}$ **b.** $\frac{11}{40}$

Estrategia Se multiplicará $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{2}$ y se multiplicará $\frac{11}{40}$ por $\frac{25}{25}$.

POR QUÉ El resultado de cada multiplicación será una fracción equivalente con un denominador que es una potencia de 10. Tales fracciones son fáciles de escribir en forma decimal.

Solución

a. Dado que se necesita multiplicar el denominador de $\frac{4}{5}$ por 2 para obtener un denominador de 10, se tiene que $\frac{2}{2}$ debe ser la forma de 1 que se utiliza para construir $\frac{4}{5}$.

$$\frac{4}{5} = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{2}$$ Multiplique $\frac{4}{5}$ por 1 en la forma de $\frac{2}{2}$.

$$= \frac{8}{10}$$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$$= 0.8$$ Escriba la fracción como un decimal.

b. Dado que se necesita multiplicar el denominador de $\frac{11}{40}$ por 25 para obtener un denominador de 1,000, se tiene que $\frac{25}{25}$ debe ser la forma de 1 que se utiliza para construir $\frac{11}{40}$.

$$\frac{11}{40} = \frac{11}{40} \cdot \frac{25}{25}$$ Multiplique $\frac{11}{40}$ por 1 en la forma de $\frac{25}{25}$.

$$= \frac{275}{1{,}000}$$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$$= 0.275$$ Escriba la fracción como un decimal.

Los números mixtos también pueden escribirse en forma decimal.

Auto-revisión 3

Escriba el número mixto $3\frac{17}{20}$ en forma decimal.

Ahora intente **Problema 37**

EJEMPLO 3 Escriba el número mixto $5\frac{7}{16}$ en forma decimal.

Estrategia Sólo se necesita encontrar el equivalente decimal para la parte fraccional del número mixto.

POR QUÉ La parte de número entero en la forma decimal es la misma que la parte de número entero en la forma de número mixto.

Solución Para escribir $\frac{7}{16}$ como una fracción, se encuentra $7 \div 16$.

$$\begin{array}{r} 0.4375 \\ 16\overline{)7.0000} \\ -64 \\ \hline 60 \\ -48 \\ \hline 120 \\ -112 \\ \hline 80 \\ -80 \\ \hline 0 \end{array}$$

Escriba un punto decimal y cuatro ceros adicionales a la derecha del 7.

← El residuo es 0.

Dado que la parte de número entero del decimal debe ser la misma que la parte de número entero del número mixto, se tiene:

$$5\frac{7}{16} = 5.4375$$

Se habría obtenido el mismo resultado si se hubiese cambiado $5\frac{7}{16}$ a la fracción impropia $\frac{87}{16}$ y dividido 87 entre 16.

EJEMPLO 4

Escriba $\frac{5}{12}$ como un decimal.

Estrategia Se dividirá el numerador de la fracción entre su denominador y se buscará un patrón repetitivo de residuos diferentes de cero.

POR QUÉ Una vez que se detecta un patrón repetitivo de residuos, el proceso de división puede detenerse.

Solución $\frac{5}{12}$ significa $5 \div 12$.

$$\begin{array}{r} 0.4166 \\ 12\overline{)5.0000} \\ -48 \\ \hline 20 \\ -12 \\ \hline 80 \\ -72 \\ \hline 80 \\ -72 \\ \hline 8 \end{array}$$

Escriba un punto decimal y cuatro ceros adicionales a la derecha del 5.

Es aparente que el 8 continuará reapareciendo como el residuo. Por tanto, el 6 continuará reapareciendo en el cociente. Dado que el patrón repetitivo ahora es claro, se puede detener la división.

Se pueden utilizar tres puntos para mostrar que en el cociente aparece un patrón repetitivo de 6:

$$\frac{5}{12} = 0.416666\ldots$$

O, se puede utilizar una barra superior para indicar la parte repetitiva (en este caso, sólo el 6) y escribir el equivalente decimal en forma más compacta:

$$\frac{5}{12} = 0.41\overline{6}$$

Auto-revisión 4

Escriba $\frac{1}{12}$ como un decimal.

Ahora intente **Problema 41**

EJEMPLO 5

Escriba $-\frac{6}{11}$ como un decimal.

Estrategia Para encontrar el equivalente decimal para $-\frac{6}{11}$, primero se encontrará el equivalente decimal para $\frac{6}{11}$. Para hacer esto, se dividirá el numerador de $\frac{6}{11}$ entre su denominador y se buscará un patrón repetitivo de residuos diferentes del cero.

Auto-revisión 5

Escriba $-\frac{13}{33}$ como un decimal.

Ahora intente **Problema 47**

POR QUÉ Una vez que se detecta un patrón repetitivo de residuos, el proceso de división puede detenerse.

Solución $\frac{6}{11}$ significa $6 \div 11$.

$$
\begin{array}{r}
0.54545 \\
11\overline{)6.00000} \\
-\ 55 \\
\hline
50 \\
-\ 44 \\
\hline
60 \\
-\ 55 \\
\hline
50 \\
-\ 44 \\
\hline
60 \\
-\ 55 \\
\hline
5
\end{array}
$$

Escriba un punto decimal y cinco ceros adicionales a la derecha del 6.

Es aparente que el 6 y el 5 continuarán reapareciendo como residuos. Por tanto, el 5 y el 4 continuarán reapareciendo en el cociente. Dado que el patrón repetitivo es ahora claro, se puede detener el proceso de división.

Se pueden utilizar tres puntos para mostrar que en el cociente aparece un patrón repetitivo de 5 y 4:

$$\frac{6}{11} = 0.545454\ldots \text{ y, por tanto, } -\frac{6}{11} = -0.545454\ldots$$

O, se puede utilizar una barra superior para indicar el patrón repetitivo (en este caso, 54) y escribir el equivalente decimal en forma más compacta:

$$\frac{6}{11} = 0.\overline{54} \text{ y, por tanto, } -\frac{6}{11} = -0.\overline{54}$$

La parte repetitiva del equivalente decimal de algunas fracciones es bastante larga. Aquí hay algunos ejemplos:

$$\frac{9}{37} = 0.\overline{243}$$ Se repite un bloque de tres dígitos.

$$\frac{13}{101} = 0.\overline{1287}$$ Se repite un bloque de cuatro dígitos.

$$\frac{6}{7} = 0.\overline{857142}$$ Se repite un bloque de seis dígitos.

Toda fracción puede escribirse como un decimal terminal o como un decimal repetitivo. Por esta razón, el conjunto de las fracciones (**números racionales**) forma un subconjunto del conjunto de los decimales llamado el conjunto de los **números reales.** El conjunto de los números reales corresponde a todos los puntos en una recta numérica.

No todos los decimales son decimales terminales o repetitivos. Por ejemplo,

$$0.2020020002\ldots$$

no termina y no tiene un bloque repetitivo de dígitos. Este decimal no puede escribirse como una fracción con un numerador entero y un denominador entero diferente del cero. Por tanto, no es un número racional. Es un ejemplo del conjunto de los **números irracionales.**

3 Redondear decimales repetitivos

Cuando una fracción se escribe en forma decimal, el resultado es un decimal terminal o repetitivo. Los decimales repetitivos con frecuencia se redondean a un valor posicional específico.

EJEMPLO 6 Escriba $\frac{1}{3}$ como un decimal y redondee a la centésima más cercana.

Estrategia Se utilizarán los métodos de esta sección para dividir hasta la columna de las milésimas.

POR QUÉ Para redondear a la columna de las centésimas se necesita continuar el proceso de división una posición decimal más, la cual es la columna de las milésimas.

Solución $\frac{1}{3}$ significa $1 \div 3$.

$$
\begin{array}{r}
0.333 \\
3\overline{)1.000} \\
-\ 9 \\
\hline
10 \\
-\ 9 \\
\hline
10 \\
-\ 9 \\
\hline
1
\end{array}
$$

Escriba un punto decimal y tres ceros adicionales a la derecha del 1.

El proceso de división puede detenerse. Se ha dividido hasta la columna de las milésimas.

Después de dividir hasta la columna de las milésimas, se redondea a la columna de las centésimas.

El dígito a redondear en la columna de las centésimas es el 3.
El dígito a examinar en la columna de las milésimas es el 3.

$0.333\ldots$

Dado que el 3 es menor que 5, se redondea hacia abajo y se tiene

$$\frac{1}{3} \approx 0.33$$

Se lee $\approx$ como "es aproximadamente igual a".

Auto-revisión 6

Escriba $\frac{4}{9}$ como un decimal y redondee a la centésima más cercana.

Ahora intente **Problema 51**

EJEMPLO 7 Escriba $\frac{2}{7}$ como un decimal y redondee a la milésima más cercana.

Estrategia Se utilizarán los métodos de esta sección para dividir hasta la columna de las diezmilésimas.

POR QUÉ Para redondear a la columna de las milésimas se necesita continuar el proceso de división una posición decimal más, la cual es la columna de las diezmilésimas.

Solución $\frac{2}{7}$ significa $2 \div 7$.

$$
\begin{array}{r}
0.2857 \\
7\overline{)2.0000} \\
-\ 14 \\
\hline
60 \\
-\ 56 \\
\hline
40 \\
-\ 35 \\
\hline
50 \\
-\ 49 \\
\hline
1
\end{array}
$$

Escriba un punto decimal y cuatro ceros adicionales a la derecha del 2.

El proceso de división puede detenerse.
Se ha dividido hasta la columna de las diezmilésimas.

Después de dividir hasta la columna de las diezmilésimas se redondea a la columna de las milésimas.

El dígito a redondear en la columna de las milésimas es el 5.
El dígito a examinar en la columna de las diezmilésimas es el 7.

0.2857

Dado que el 7 es mayor que 5, se redondea hacia arriba y $\frac{2}{7} \approx 0.286$.

Auto-revisión 7

Escriba $\frac{7}{24}$ como un decimal y redondee a la milésima más cercana.

Ahora intente **Problema 61**

Utilizando su CALCULADORA Tecla de punto fijo

Después de desarrollar un cálculo, una calculadora científica puede redondear el resultado a una posición decimal dada. Esto se hace utilizando la *tecla de punto fijo*. Como se hizo en el ejemplo 7, se encuentra el equivalente decimal del $\frac{2}{7}$ y se redondea a la milésima más cercana. Esta vez, se utiliza una calculadora.

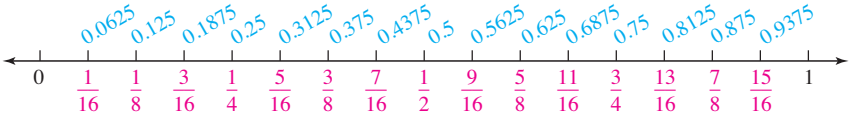
Primero, se configura la calculadora para que redondee a la tercera posición decimal (milésimas) presionando [2nd] [FIX] 3. Después se presiona 2 [÷] 7 [=] [0.286]

Por tanto, $\frac{2}{7} \approx 0.286$. Para redondear a la décima más cercana, se fijaría 1; para redondear a la centésima más cercana, se fijaría 2, etc. Después de utilizar la característica FIX, no olvide eliminarla y regresar la calculadora al modo normal.

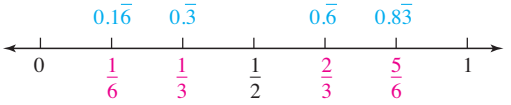
Las calculadoras gráficas también pueden redondear a una posición decimal dada. Vea el manual de usuario para la pulsación de teclas requerida.

4 Graficar fracciones y decimales en una recta numérica

Puede utilizarse una recta numérica para mostrar la relación entre las fracciones y sus equivalentes decimales. En la recta numérica mostrada abajo, se utilizan dieciséis marcas igualmente espaciadas para escalar del 0 al 1. Se muestran algunas fracciones utilizadas de manera común que tienen equivalentes decimales terminales. Por ejemplo, se ve que $\frac{1}{8} = 0.125$ y $\frac{13}{16} = 0.8125$.



En la siguiente recta numérica, se utilizan seis marcas igualmente espaciadas para escalar del 0 al 1. Se muestran algunas fracciones utilizadas de manera común que tienen equivalentes decimales repetitivos.



5 Comparar fracciones y decimales

Para comparar el tamaño de una fracción y un decimal, es de utilidad escribir la fracción en su forma decimal equivalente.

Auto-revisión 8

Coloque un símbolo $<$, $>$, o $=$ en el recuadro para formar un enunciado verdadero:

a. $\frac{3}{8}$ ☐ 0.305

b. $0.7\overline{6}$ ☐ $\frac{7}{9}$

c. $\frac{11}{4}$ ☐ 2.75

Ahora intente **Problemas 67, 69 y 71**

EJEMPLO 8 Coloque un símbolo $<$, $>$ o $=$ en el recuadro para formar un enunciado verdadero: **a.** $\frac{4}{5}$ ☐ 0.91 **b.** $0.3\overline{5}$ ☐ $\frac{1}{3}$ **c.** $\frac{9}{4}$ ☐ 2.25

Estrategia En cada caso, se escribirá la fracción proporcionada como un decimal.

POR QUÉ Entonces, se puede utilizar el procedimiento para la comparación de dos decimales para determinar cuál número es el más grande y cuál es el más pequeño.

Solución

a. Para escribir $\frac{4}{5}$ como un decimal, divida 4 entre 5.

$$\begin{array}{r} 0.8 \\ 5\overline{)4.0} \\ -\,40 \\ \hline 0 \end{array}$$

Escriba un punto decimal y un cero adicional a la derecha del 4.

Por tanto, $\frac{4}{5} = 0.8$.

Para hacer más sencilla la comparación de los decimales, se puede escribir un cero después del 8 para que tengan el mismo número de dígitos a la derecha del punto decimal.

$0.8\,\mathbf{0}$ Este es el equivalente decimal para $\frac{4}{5}$.
$0.9\,1$
↑

A medida que se trabaja de izquierda a derecha, esta es la primera columna en la que difieren los dígitos. Dado que $8 < 9$, se tiene que $0.80 = \frac{4}{5}$ es menor que 0.91 y se puede escribir $\frac{4}{5} < 0.91$.

b. En el Ejemplo 6, se vio que $\frac{1}{3} = 0.3333\ldots$. Para hacer más sencilla la comparación de estos decimales repetitivos, se escribe de tal manera que tengan el mismo número de dígitos a la derecha del punto decimal.

$0.3\,5\,55\ldots$ Esto es $0.3\overline{5}$.
$0.3\,3\,33\ldots$ Esto es $\frac{1}{3}$.
↑

A medida que se trabaja de izquierda a derecha, esta es la primera columna en la que difieren los dígitos. Dado que $5 > 3$, se tiene que $0.3555\ldots = 0.3\overline{5}$ es mayor que $0.3333\ldots = \frac{1}{3}$ y se puede escribir $0.3\overline{5} > \frac{1}{3}$.

c. Para escribir $\frac{9}{4}$ como un decimal, se divide 9 entre 4.

$$
\begin{array}{r}
2.25 \\
4\overline{)9.00} \\
-8 \\
\hline
10 \\
-8 \\
\hline
20 \\
-20 \\
\hline
0
\end{array}
$$

Escriba un punto decimal y dos ceros adicionales a la derecha del 9.

A partir de la división, se ve que $\frac{9}{4} = 2.25$.

EJEMPLO 9 Escriba los números en orden de menor a mayor: $2.168,\ 2\frac{1}{6},\ \frac{20}{9}$.

Estrategia Se escribirán $2\frac{1}{6}$ y $\frac{20}{9}$ en forma decimal.

POR QUÉ Entonces se puede realizar una comparación columna por columna de los números para determinar el mayor y el menor.

Solución A partir de la recta numérica en la página 378, se observa que $\frac{1}{6} = 0.1\overline{6}$. Por tanto, $2\frac{1}{6} = 2.1\overline{6}$. Para escribir $\frac{20}{9}$ como un decimal, se divide 20 entre 9.

$$
\begin{array}{r}
2.222 \\
9\overline{)20.000} \\
-18 \\
\hline
20 \\
-18 \\
\hline
20 \\
-18 \\
\hline
20 \\
-18 \\
\hline
2
\end{array}
$$

Escriba un punto decimal y tres ceros adicionales a la derecha del 20.

Por tanto, $\frac{20}{9} = 2.222\ldots$.

Auto-revisión 9

Escriba los números en orden de menor a mayor: $1.832,\ \frac{9}{5},\ 1\frac{5}{6}$

Ahora intente **Problema 75**

Para hacer más sencilla la comparación de los tres decimales, se apilan como se muestra abajo.

2.1680 Esto es el 2.168 con un 0 adicional.
$2.1666\ldots$ Esto es $2\frac{1}{6} = 2.1\overline{6}$.
$2.2222\ldots$ Esto es $\frac{20}{9}$.

Trabajando de izquierda a derecha, esta es la primera columna en la que los dígitos difieren. Dado que $2 > 1$, se tiene que $2.222\ldots = \frac{20}{9}$ es el mayor de los tres números.

Trabajando de izquierda a derecha, esta es la primera columna en la que difieren los dos números superiores. Dado que $8 > 6$, se tiene que el 2.168 es el siguiente número más grande y que $2.1\overline{6} = 2\frac{1}{6}$ es el menor.

Escritos en orden de menor a mayor, se tiene :

$$2\frac{1}{6},\ 2.168,\ \frac{20}{9}$$

6 Evaluar expresiones que contienen fracciones y decimales

Las expresiones pueden contener fracciones y decimales. En los siguientes ejemplos se muestran dos métodos que pueden utilizarse para evaluar expresiones de este tipo. Con el primer método se encuentra la respuesta trabajando en términos de fracciones.

Auto-revisión 10
Evalúe trabajando en términos de fracciones: $0.53 + \frac{1}{6}$
Ahora intente **Problema 79**

EJEMPLO 10 Evalúe $\frac{1}{3} + 0.27$ trabajando en términos de fracciones.

Estrategia Se comenzará escribiendo el 0.27 como una fracción.

POR QUÉ Entonces se pueden utilizar los métodos del Capítulo 3 para la suma de fracciones con denominadores no similares para encontrar la suma.

Solución Para escribir el 0.27 como una fracción, es de utilidad leerlo como "veintisiete centésimas".

$$\frac{1}{3} + 0.27 = \frac{1}{3} + \frac{27}{100}$$ Reemplace el 0.27 con $\frac{27}{100}$.

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\mathbf{100}}{\mathbf{100}} + \frac{27}{100} \cdot \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{3}}$$ El mcd para $\frac{1}{3}$ y $\frac{27}{100}$ es el 300. Para construir cada fracción para que su denominador sea de 300, multiplique por una forma de 1.

$$= \frac{100}{300} + \frac{81}{300}$$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$$= \frac{181}{300}$$ Sume los numeradores y escriba la suma sobre el denominador común de 300.

Ahora se evaluará la expresión del Ejemplo 10 trabajando en términos de decimales.

Auto-revisión 11
Estime el resultado trabajando en términos de decimales: $0.53 - \frac{1}{6}$
Ahora intente **Problema 87**

EJEMPLO 11 Estime $\frac{1}{3} + 0.27$ trabajando en términos de decimales.

Estrategia Dado que el 0.27 tiene dos posiciones decimales, se comenzará encontrando una aproximación decimal para $\frac{1}{3}$ a dos posiciones decimales.

POR QUÉ Entonces se pueden utilizar los métodos de este capítulo para sumar decimales para encontrar la suma.

Solución Se ha visto que el equivalente decimal de $\frac{1}{3}$ es el decimal repetitivo 0.333 . . . . Redondeado a la centésima más cercana: $\frac{1}{3} \approx 0.33$.

$$\frac{1}{3} + 0.27 \approx 0.33 + 0.27 \quad \text{Aproxime } \tfrac{1}{3} \text{ con el decimal 0.33.}$$

$$\approx 0.60 \quad \text{Realice la suma.}$$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 0.33 \\ +0.27 \\ \hline 0.60 \end{array}$$

En los Ejemplos 10 y 11, se evaluó $\frac{1}{3} + 0.27$ de diferentes maneras. En el Ejemplo 10 se obtuvo la respuesta exacta, $\frac{181}{300}$. En el Ejemplo 11, se obtuvo una aproximación, 0.6. Los resultados parecen razonables cuando se escribe $\frac{181}{300}$ en forma decimal: $\frac{181}{300} = 0.60333 \ldots$.

EJEMPLO 12 Evalúe: $\left(\frac{4}{5}\right)(1.35) + (0.5)^2$

Estrategia Se encontrará el equivalente decimal de $\frac{4}{5}$ y después se evaluará la expresión en términos de decimales.

POR QUÉ Es más sencillo desarrollar la multiplicación y la suma con los decimales proporcionados que lo que sería si se convirtieran a fracciones.

Solución Se utiliza una división para encontrar el equivalente decimal de $\frac{4}{5}$.

$$\begin{array}{r} 0.8 \\ 5\overline{)4.0} \\ -\,4\,0 \\ \hline 0 \end{array} \quad \text{Escriba un punto decimal y un cero adicional a la derecha del 4.}$$

Ahora utilice la regla del orden de las operaciones para evaluar la expresión.

$$\left(\frac{4}{5}\right)(1.35) + (0.5)^2$$

$$= (0.8)(1.35) + (0.5)^2 \quad \text{Reemplace } \tfrac{4}{5} \text{ con su equivalente decimal, 0.8.}$$

$$= (0.8)(1.35) + 0.25 \quad \text{Evalúe: } (0.5)^2 = 0.25.$$

$$= 1.08 + 0.25 \quad \text{Realice la multiplicación: } (0.8)(1.35) = 1.08.$$

$$= 1.33 \quad \text{Realice la suma.}$$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2} \\ 0.5 \\ \times\ 0.5 \\ \hline 0.25 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle 2\ 4} \\ 1.35 \\ \times\ \ 0.8 \\ \hline 1.080 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 1.08 \\ +0.25 \\ \hline 1.33 \end{array}$$

Auto-revisión 12

Evalúe: $(-0.6)^2 + (2.3)\left(\frac{1}{8}\right)$

Ahora intente **Problema 99**

7 Resolver problemas de aplicación que involucran fracciones y decimales

EJEMPLO 13 ***Compras*** Un comprador adquirió $\frac{3}{4}$ de libra de fruta, a un precio de \$0.88 la libra, y $\frac{1}{3}$ de libra de café molido fresco, vendido a \$6.60 la libra. Encuentre el costo total de estos productos.

Analizar

- Se adquirió $\frac{3}{4}$ de libra de fruta a \$0.88 por libra. — Proporcionado
- Se adquirió $\frac{1}{3}$ de libra de café a \$6.60 por libra. — Proporcionado
- ¿Cuál fue el costo total de los productos? — A encontrar

Formar Para encontrar el costo total de cada producto, multiplique el número de libras adquiridas por el precio por libra.

Auto-revisión 13

SALCHICHONERÍA Un comprador adquiere $\frac{2}{3}$ de libra de queso suizo, a un precio de \$2.19 por libra y $\frac{3}{4}$ de libra de pavo rebanado, vendido por \$6.40 por libra. Encuentre el costo total de estos productos.

Ahora intente **Problema 111**

El costo total de los productos	es igual al	número de libras de fruta	por	el precio por libra	más	el número de libras de café	por	el precio por libra
El costo total de los productos	=	$\frac{3}{4}$	·	\$0.88	+	$\frac{1}{3}$	·	\$6.60

Resolver Debido a que el 0.88 es divisible entre 4 y el 6.60 es divisible entre 3, se puede trabajar con los decimales y las fracciones en esta forma: no es necesaria una conversión.

$$\frac{3}{4} \cdot 0.88 + \frac{1}{3} \cdot 6.60$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{0.88}{1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{6.60}{1}$$ Exprese el 0.88 como $\frac{0.88}{1}$ y el 6.60 como $\frac{6.60}{1}$.

$$= \frac{2.64}{4} + \frac{6.60}{3}$$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$$= 0.66 + 2.20$$ Realice cada división.

$$= 2.86$$ Realice la suma.

$$\begin{array}{r} \overset{2}{0.88} \\ \times \quad 3 \\ \hline 2.64 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0.66 \\ 4\overline{)2.64} \\ -24 \\ \hline 24 \\ -24 \\ \hline 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2.20 \\ 3\overline{)6.60} \\ -6 \\ \hline 06 \\ -6 \\ \hline 00 \\ -0 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0.66 \\ +2.20 \\ \hline 2.86 \end{array}$$

Enunciar El costo total de los productos es de \$2.86.

Comprobar Si se adquirió aproximadamente 1 libra de fruta, a un precio de aproximadamente \$1 por libra, entonces se gastó alrededor de \$1 en la fruta. Si se adquirió exactamente $\frac{1}{3}$ de una libra de café, a un precio de aproximadamente \$6 por libra, entonces se gastó alrededor de $\frac{1}{3} \cdot \$6$, o \$2, en el café. Dado que el costo aproximado de los productos \$1 + \$2 = \$3, es cercano al resultado, \$2.86, el resultado parece razonable.

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. a. 0.5 **b.** 0.1875 **c.** 4.5 **2. a.** 0.4 **b.** 0.32 **3.** 3.85 **4.** $0.08\overline{3}$ **5.** $-0.\overline{39}$ **6.** 0.44 **7.** 0.292 **8. a.** > **b.** < **c.** = **9.** $\frac{9}{5}, 1.832, 1\frac{5}{6}$ **10.** $\frac{209}{300}$ **11.** aproximadamente 0.36 **12.** 0.6475 **13.** \$6.26

SECCIÓN 4.5 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Complete los espacios.

1. Se dice que una fracción y un decimal son _____ si nombran al mismo número.
2. El equivalente _____ de $\frac{3}{4}$ es 0.75.
3. 0.75, 0.625 y 3.5 son ejemplos de decimales _____.
4. 0.3333 . . . y 1.666 . . . son ejemplos de decimales _____.

CONCEPTOS

Complete los espacios.

5. $\frac{7}{8}$ significa 7 ▯ 8.
6. Para escribir una fracción como un decimal, divida el _____ de la fracción entre su denominador.
7. Para desarrollar la división mostrada abajo, se escribe un punto decimal y dos _____ adicionales a la derecha del 3.

$$4\overline{)3.00}$$

8. En ocasiones, cuando se encuentra el equivalente decimal de una fracción, el proceso de división termina debido a que se obtiene un residuo de 0. Al decimal resultante se le llama decimal _____.

9. En ocasiones, cuando se está encontrando el equivalente decimal de una fracción, el proceso de división nunca da un residuo de 0. Al decimal resultante se le llama decimal _____.

10. Si el denominador de una fracción en forma simplificada tiene factores de sólo 2 o 5, o una combinación de ambos, puede escribirse como un decimal multiplicándola por una forma de _____.

11. **a.** Redondee 0.3777 . . . a la centésima más cercana.

b. Redondee 0.212121 . . . a la milésima más cercana.

12. **a.** Cuando se evalúa la expresión $0.25 + \left(2.3 + \frac{2}{5}\right)^2$, ¿sería más sencillo trabajar en términos de fracciones o de decimales?

b. ¿Cuál es el primer paso que debe desarrollarse para evaluar la expresión?

NOTACIÓN

13. Escriba cada decimal en forma de fracción.

a. 0.7 **b.** 0.77

14. Escriba cada decimal repetitivo en la forma más sencilla utilizando una barra superior.

a. 0.888 . . . **b.** 0.323232 . . .

c. 0.56333 . . . **d.** 0.8898989 . . .

PRÁCTICA GUIADA

Escriba cada fracción como un decimal. Vea el Ejemplo 1.

15. $\frac{1}{2}$ **16.** $\frac{1}{4}$

17. $\frac{7}{8}$ **18.** $\frac{3}{8}$

19. $\frac{11}{20}$ **20.** $\frac{17}{20}$

21. $\frac{13}{5}$ **22.** $\frac{15}{2}$

23. $\frac{9}{16}$ **24.** $\frac{3}{32}$

25. $-\frac{17}{32}$ **26.** $-\frac{15}{16}$

Escriba cada fracción como un decimal utilizando una multiplicación por una forma de 1. Vea el Ejemplo 2.

27. $\frac{3}{5}$ **28.** $\frac{13}{25}$

29. $\frac{9}{40}$ **30.** $\frac{7}{40}$

31. $\frac{19}{25}$ **32.** $\frac{21}{50}$

33. $\frac{1}{500}$ **34.** $\frac{1}{250}$

Escriba cada número mixto en forma decimal. Vea el Ejemplo 3.

35. $3\frac{3}{4}$ **36.** $5\frac{4}{5}$

37. $12\frac{11}{16}$ **38.** $32\frac{9}{16}$

Escriba cada fracción como un decimal. Use una barra superior en su respuesta. Vea el Ejemplo 4.

39. $\frac{1}{9}$ **40.** $\frac{8}{9}$

41. $\frac{7}{12}$ **42.** $\frac{11}{12}$

43. $\frac{7}{90}$ **44.** $\frac{1}{99}$

45. $\frac{1}{60}$ **46.** $\frac{1}{66}$

Escriba cada fracción como un decimal. Use una barra superior en su respuesta. Vea el Ejemplo 5.

47. $-\frac{5}{11}$ **48.** $-\frac{7}{11}$

49. $-\frac{20}{33}$ **50.** $-\frac{16}{33}$

Escriba cada fracción en forma decimal. Redondee a la centésima más cercana. Vea el Ejemplo 6.

51. $\frac{7}{30}$ **52.** $\frac{8}{9}$

53. $\frac{22}{45}$ **54.** $\frac{17}{45}$

55. $\frac{24}{13}$ **56.** $\frac{34}{11}$

57. $-\frac{13}{12}$ **58.** $-\frac{25}{12}$

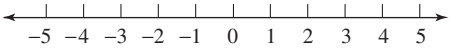
Escriba cada fracción en forma decimal. Redondee a la milésima más cercana. Vea el Ejemplo 7.

59. $\frac{5}{33}$ **60.** $\frac{5}{24}$

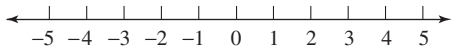
61. $\frac{10}{27}$ **62.** $\frac{17}{21}$

Grafique los números proporcionados en una recta numérica. Vea el Ejemplo 4.

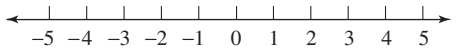
63. $1\frac{3}{4}$, -0.75, $0.\overline{6}$, $-3.8\overline{3}$



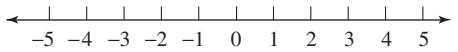
64. $2\frac{7}{8},\ -2.375,\ 0.\overline{3},\ 4.1\overline{6}$



65. $3.875,\ -3.\overline{5},\ 0.\overline{2},\ -1\frac{4}{5}$



66. $1.375,\ -4\frac{1}{7},\ 0.\overline{1},\ -2.\overline{7}$



Coloque un símbolo <, > o = en el recuadro para formar un enunciado verdadero. Vea el Ejemplo 8.

67. $\frac{7}{8}$ ☐ 0.895

68. $\frac{3}{8}$ ☐ 0.381

69. $0.\overline{7}$ ☐ $\frac{17}{22}$

70. $0.\overline{45}$ ☐ $\frac{7}{16}$

71. $\frac{52}{25}$ ☐ 2.08

72. 4.4 ☐ $\frac{22}{5}$

73. $-\frac{11}{20}$ ☐ $-0.\overline{48}$

74. $-0.0\overline{9}$ ☐ $-\frac{1}{11}$

Escriba los número en orden de menor a mayor. Vea el Ejemplo 9.

75. $6\frac{1}{2},\ 6.25,\ \frac{19}{3}$

76. $7\frac{3}{8},\ 7.08,\ \frac{43}{6}$

77. $-0.\overline{81},\ -\frac{8}{9},\ -\frac{6}{7}$

78. $-0.\overline{19},\ -\frac{1}{11},\ -0.1$

Evalúe cada expresión. Trabaje en términos de fracciones. Vea el Ejemplo 10.

79. $\frac{1}{9} + 0.3$

80. $\frac{2}{3} + 0.1$

81. $0.9 - \frac{7}{12}$

82. $0.99 - \frac{5}{6}$

83. $\frac{5}{11}(0.3)$

84. $(0.9)\left(\frac{1}{27}\right)$

85. $\frac{1}{4}(0.25) + \frac{15}{16}$

86. $\frac{2}{5}(0.02) - (0.04)$

Estime el valor de cada expresión. Trabaje en términos de decimales. Vea el Ejemplo 11.

87. $0.24 + \frac{1}{3}$

88. $0.02 + \frac{5}{6}$

89. $5.69 - \frac{5}{12}$

90. $3.19 - \frac{2}{3}$

91. $0.43 - \frac{1}{12}$

92. $0.27 + \frac{5}{12}$

93. $\frac{1}{15} - 0.55$

94. $\frac{7}{30} - 0.84$

Evalúe cada expresión. Trabaje en términos de decimales. Vea el Ejemplo 12.

95. $(3.5 + 6.7)\left(-\frac{1}{4}\right)$

96. $\left(-\frac{5}{8}\right)\left(5.3 - 3\frac{9}{10}\right)$

97. $\left(\frac{1}{5}\right)^2(1.7)$

98. $(2.35)\left(\frac{2}{5}\right)^2$

99. $7.5 - (0.78)\left(\frac{1}{2}\right)^2$

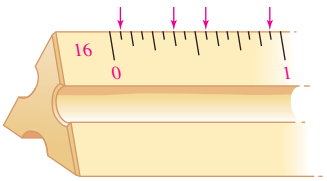
100. $8.1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2(0.12)$

101. $\frac{3}{8}(3.2) + \left(4\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)$

102. $(-0.8)\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5}\right)(0.39)$

APLICACIONES

103. DISEÑO La escala de arquitecto mostrada abajo tiene varios bordes de medición. El borde marcado como 16 divide cada pulgada en 16 partes iguales. Encuentre la forma decimal para cada parte fraccional de 1 pulgada que se resalta con una flecha roja.



104. SEÑALIZACIONES DE MILLAJES La señalización de carretera mostrada abajo proporciona el número de millas para las siguientes tres salidas. Convierta los millajes a notación decimal.

105. JARDINERÍA Las dos marcas de línea de reemplazo para una cortadora de césped mostradas abajo se etiquetan de maneras

diferentes. En un paquete, el grosor de la línea se expresa como un decimal; en el otro, como una fracción. ¿Cuál línea es más gruesa?

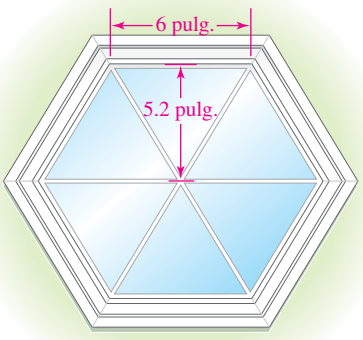
106. MECÁNICOS DE AUTOMÓVILES Mientras realiza una afinación, un mecánico comprueba la abertura de las bujías del automóvil para asegurarse que se encienden de manera correcta. El manual de usuario establece que el espacio debe ser de $\frac{2}{125}$ pulgadas. El calibrador que utiliza el mecánico para comprobar el espacio está en notación decimal; registra 0.025 pulgadas. ¿La abertura de la bujía es muy grande o muy pequeña?

107. CARRERAS DE CABALLOS En las carreras de purasangres, el tiempo que le toma a un caballo correr una distancia dada se mide utilizando quintos de un segundo. Por ejemplo, $:23^2$ (se lee "veintitrés y dos") significa $23\frac{2}{5}$ segundos. La ilustración de abajo lista cuatro tiempos parciales para un caballo llamado *Speedy Flight* en una carrera de $1\frac{1}{16}$ millas. Exprese cada tiempo parcial en forma decimal.

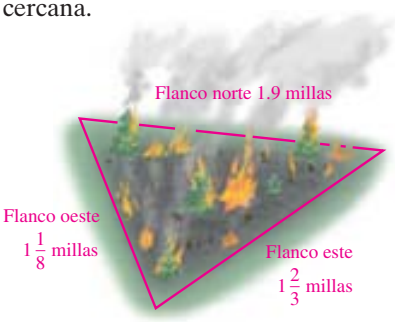
Speedy Flight	Turfway Park, Ky			3 años de edad
	Mayo 17 del 2010			$1\frac{1}{16}$ millas
Parciales	$:23^2$	$:23^4$	$:24^1$	$:32^3$

108. GEOLOGÍA Un geólogo pesó una muestra de roca en el sitio donde se descubrió y encontró que pesaba $17\frac{7}{8}$ lb. Después, una báscula digital más precisa en el laboratorio dio el peso como 17.671 lb. ¿Cuál es la diferencia en las dos mediciones?

109. REEMPLAZAMIENTO DE VENTANAS La cantidad de luz solar que entra en una habitación depende del área de las ventanas en la habitación. ¿Cuál es el área de la ventana mostrada abajo? (*Sugerencia:* Use la fórmula $A = \frac{1}{2}ba$.)



110. SILVICULTURA Un puesto de comando preguntó a cada uno de los tres grupos de bomberos que estimaran la longitud de la línea de fuego que estaban apagando. Sus reportes llegaron en formas diferentes, como se muestra. Encuentre el perímetro del incendio. Redondee a la décima más cercana.



111. SALCHICHONERÍA Un comprador adquirió $\frac{2}{3}$ de libra de aceitunas verdes, a un precio de \$4.14 por libra y $\frac{3}{4}$ de libra de jamón ahumado, vendido a \$5.68 la libra. Encuentre el costo total de estos productos.

112. CHOCOLATE Un comprador adquirió $\frac{3}{4}$ de libra de chocolate oscuro, a un precio de \$8.60 por libra y $\frac{1}{3}$ de libra de chocolate con leche, vendido a \$5.25 la libra. Encuentre el costo total de estos productos.

REDACCIÓN

113. Explique el procedimiento utilizado para escribir una fracción en forma decimal.

114. ¿En qué difiere el decimal terminal 0.5 del decimal repetitivo $0.\overline{5}$?

115. Un estudiante representó el decimal repetitivo 0.1333 . . . como $0.\overline{1333}$. ¿Es esta la mejor forma? Explique por qué sí o por qué no.

116. ¿El 0.10100100010000 . . . es un decimal repetitivo? Explique por qué sí o por qué no.

117. Una estudiante dividió 19 entre 25 para encontrar el equivalente decimal de $\frac{19}{25}$ como de 0.76. Explique cómo puede comprobar este resultado.

118. Explique el error en la siguiente solución para encontrar el equivalente decimal para $\frac{5}{6}$.

$$\begin{array}{r} 1.2 \\ 5\overline{)\,6.0} \\ \underline{-5} \\ 10 \\ \underline{-10} \\ 0 \end{array}$$

Por tanto, $\frac{5}{6} = 1.2$.

REPASO

119. Escriba cada conjunto de números.

a. los primeros 10 números enteros

b. los primeros 10 números primos

c. los enteros

120. Dé un ejemplo de cada propiedad.

a. la propiedad conmutativa de la suma

b. la propiedad asociativa de la multiplicación

c. la propiedad de la multiplicación del 1

Objetivos

1. Encontrar la raíz cuadrada de un cuadrado perfecto.
2. Encontrar la raíz cuadrada de fracciones y decimales.
3. Evaluar expresiones que contienen raíces cuadradas.
4. Evaluar fórmulas que involucran raíces cuadradas.
5. Aproximar raíces cuadradas.

SECCIÓN 4.6
Raíces cuadradas

Se han explicado las relaciones entre la suma y la resta y entre la multiplicación y la división. En esta sección se explora la relación entre elevar un número a una potencia y encontrar una raíz. Los decimales desempeñan una función importante en esta explicación.

1 Encontrar la raíz cuadrada de un cuadrado perfecto

Cuando se eleva un número a la segunda potencia, se está elevando al cuadrado, o se está encontrando su **cuadrado.**

El cuadrado de 6 es el 36, debido a que $6^2 = 36$.

El cuadrado de -6 es el 36, debido a que $(-6)^2 = 36$.

La **raíz cuadrada** de un número proporcionado es un número cuyo cuadrado es el número proporcionado. Por ejemplo, las raíces cuadradas del 36 son el 6 y el -6, debido a que cualquiera de estos números, cuando se eleva al cuadrado, es el 36.

Todo número positivo tiene dos raíces cuadradas. El número 0 sólo tiene una raíz cuadrada. De hecho, es su propia raíz cuadrada, debido a que $0^2 = 0$.

Raíz cuadrada

Un número es una **raíz cuadrada** de un segundo número si el cuadrado del primer número es igual al segundo número.

Auto-revisión 1

Encuentre las dos raíces cuadradas del 64.

Ahora intente **Problema 21**

EJEMPLO 1 Encuentre las dos raíces cuadradas del 49.

Estrategia Se preguntará: "¿Qué número positivo y qué número negativo, cuando se elevan al cuadrado, es 49?"

POR QUÉ La raíz cuadrada del 49 es un número cuyo cuadrado es el 49.

Solución

7 es una raíz cuadrada del 49 debido a que $7^2 = 49$

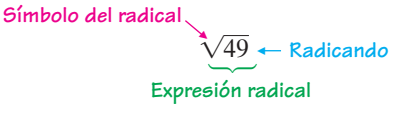
y

-7 es una raíz cuadrada del 49 debido a que $(-7)^2 = 49$.

En el Ejemplo 1, se vio que el 49 tiene dos raíces cuadradas—una positiva y una negativa. Al símbolo $\sqrt{\ }$ se le llama **símbolo del radical** y se utiliza para indicar una raíz cuadrada positiva de un número no negativo. Cuando se lee este símbolo, por lo regular se desecha la palabra *positiva* y simplemente se dice *raíz cuadrada.* Dado que el 7 es la raíz cuadrada positiva del 49, se puede escribir

$\sqrt{49} = 7$ $\sqrt{49}$ representa el número positivo cuyo cuadrado es el 49. Se lee como "la raíz cuadrada del 49 es el 7".

Cuando un número, llamado **radicando,** se escribe bajo un símbolo del radical, se tiene una **expresión radical.**



Algunos otros ejemplos de expresiones radicales son:

$$\sqrt{36} \qquad \sqrt{100} \qquad \sqrt{144} \qquad \sqrt{81}$$

Para evaluar (o simplificar) una expresión radical como las mostradas arriba, se necesita encontrar la raíz cuadrada positiva del radicando. Por ejemplo, si se evalúa $\sqrt{36}$ (se lee como "la raíz cuadrada del 36"), el resultado es

$$\sqrt{36} = 6$$

debido a que $6^2 = 36$.

¡Cuidado! Recuerde que el símbolo del radical le pide que encuentre sólo la raíz cuadrada *positiva* del radicando. Por ejemplo, es incorrecto decir que

~~$\sqrt{36}$ es 6 y -6~~

El símbolo $-\sqrt{\ }$ se utiliza para indicar la **raíz cuadrada negativa** de un número positivo. Es el opuesto de la raíz cuadrada positiva. Dado que el –6 es la raíz cuadrada negativa del 36, se puede escribir

$$-\sqrt{36} = -6$$

Se lee como "la raíz cuadrada negativa de 36 es -6" o "el opuesto de la raíz cuadrada de 36 es -6". $-\sqrt{36}$ representa el número negativo cuyo cuadrado es 36.

Si el número bajo el símbolo del radical es el 0, se tiene $\sqrt{0} = 0$.

A los números, como el 36 y el 49, que son cuadrados de números naturales, se les llama **cuadrados perfectos.** Para evaluar expresiones radicales de raíces cuadradas, es de utilidad el ser capaz de identificar los radicandos cuadrados perfectos. Necesita memorizar la siguiente lista de cuadrados perfectos, mostrados en rojo.

Cuadrados perfectos

$\mathbf{0} = 0^2$	$\mathbf{16} = 4^2$	$\mathbf{64} = 8^2$	$\mathbf{144} = 12^2$
$\mathbf{1} = 1^2$	$\mathbf{25} = 5^2$	$\mathbf{81} = 9^2$	$\mathbf{169} = 13^2$
$\mathbf{4} = 2^2$	$\mathbf{36} = 6^2$	$\mathbf{100} = 10^2$	$\mathbf{196} = 14^2$
$\mathbf{9} = 3^2$	$\mathbf{49} = 7^2$	$\mathbf{121} = 11^2$	$\mathbf{225} = 15^2$

Una calculadora es útil al encontrar la raíz cuadrada de un cuadrado perfecto que sea mayor que 225.

EJEMPLO 2 Evalúe cada raíz cuadrada: **a.** $\sqrt{81}$ **b.** $-\sqrt{100}$

Estrategia En cada caso, se determinará qué número positivo, cuando se eleva al cuadrado, produce el radicando.

POR QUÉ El símbolo del radical $\sqrt{\ }$ indica que debe encontrarse la raíz cuadrada positiva del número escrito bajo él.

Solución

a. $\sqrt{81} = 9$ Pregunte: ¿Qué número positivo, cuando se eleva al cuadrado, es 81? La respuesta es 9 debido a que $9^2 = 81$.

b. $-\sqrt{100}$ es el opuesto (o negativo) de la raíz cuadrada del 100. Dado que $\sqrt{100} = 10$, se tiene

$$-\sqrt{100} = -10$$

Auto-revisión 2

Evalúe cada raíz cuadrada:

a. $\sqrt{144}$

b. $-\sqrt{81}$

Ahora intente **Problemas 25 y 29**

¡Cuidado! Las expresiones radicales como

$$\sqrt{-36} \qquad \sqrt{-100} \qquad \sqrt{-144} \qquad \sqrt{-81}$$

no representan números reales, debido a que no existen números reales que cuando se elevan al cuadrado dan un número negativo.

Tenga cuidado al observar la diferencia entre las expresiones como $-\sqrt{36}$ y $\sqrt{-36}$. Se ha visto que $-\sqrt{36}$ es un número real: $-\sqrt{36} = -6$. En contraste, $\sqrt{-36}$ no es un número real.

Utilizando su CALCULADORA **Encontrar una raíz cuadrada**

Se utiliza la tecla $\boxed{\sqrt{\ }}$ (tecla de raíz cuadrada) en una calculadora científica para encontrar raíces cuadradas. Por ejemplo, para encontrar $\sqrt{729}$, se introducen estos números y se presionan estas teclas.

729 $\boxed{\sqrt{\ }}$ 27

Se ha encontrado que $\sqrt{729} = 27$. Para comprobar este resultado, se necesita elevar al cuadrado el 27. Esto puede realizarse introduciendo el 27 presionando la tecla $\boxed{x^2}$ Se obtiene 729. Por tanto, el 27 es la raíz cuadrada del 729.

Algunos modelos de calculadora requieren la combinación de teclas de $\boxed{\text{2nd}}$ y después $\boxed{\sqrt{\ }}$ seguida por el radicando para encontrar una raíz cuadrada.

2 Encontrar la raíz cuadrada de fracciones y decimales

Hasta ahora, se han encontrado raíces cuadradas de números naturales. También se pueden encontrar raíces cuadradas de fracciones y decimales.

Auto-revisión 3

Evaluate:

a. $\sqrt{\dfrac{16}{49}}$

b. $\sqrt{0.04}$

Ahora intente **Problemas 37 y 43**

EJEMPLO 3 Evalúe cada raíz cuadrada: **a.** $\sqrt{\dfrac{25}{64}}$ **b.** $\sqrt{0.81}$

Estrategia En cada caso, se determinará qué número positivo, cuando se eleva al cuadrado, produce el radicando.

POR QUÉ El símbolo del radical $\sqrt{\ }$ indica que debe encontrarse la raíz cuadrada positiva del número escrito bajo él.

Solución

a. $\sqrt{\dfrac{25}{64}} = \dfrac{5}{8}$ *Pregunte: ¿Qué fracción positiva, cuando se eleva al cuadrado, es $\frac{25}{64}$? La respuesta es $\frac{5}{8}$ debido a que $\left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{25}{64}$.*

b. $\sqrt{0.81} = 0.9$ *Pregunte: ¿Qué decimal positivo, cuando se eleva al cuadrado, es el 0.81? La respuesta es el 0.9, debido a que $(0.9)^2 = 0.81$.*

3 Evaluar expresiones que contienen raíces cuadradas

En los capítulos 1, 2 y 3, se utilizó la regla del orden de las operaciones para evaluar expresiones que involucran más de una operación. Si una expresión contiene alguna raíz cuadrada, tiene que evaluarse en el mismo paso en su solución que las expresiones exponenciales. (Vea el Paso 2 en la regla común del orden de las operaciones en la siguiente página.)

Orden de las operaciones

1. Desarrolle todos los cálculos dentro de los paréntesis y otros símbolos de agrupación siguiendo el orden listado abajo en los pasos 2–4 empezando desde el par más interno de símbolos de agrupación al par más externo.
2. Evalúe todas las expresiones exponenciales y las **raíces cuadradas.**
3. Desarrolle todas las multiplicaciones y divisiones a medida que aparezcan de izquierda a derecha.
4. Desarrolle todas las sumas y restas a medida que aparezcan de izquierda a derecha.

EJEMPLO 4

Evalúe: **a.** $\sqrt{64} + \sqrt{9}$ **b.** $-\sqrt{25} - \sqrt{225}$

Estrategia Se examinará la expresión para determinar qué operaciones se necesitan desarrollar primero. Después se desarrollarán estas operaciones, una a la vez, siguiendo la regla del orden de las operaciones.

POR QUÉ Si no se sigue el orden correcto de las operaciones, la expresión puede tener más de un valor.

Solución Dado que la expresión no contiene algún paréntesis se comienza con el Paso 2 de la regla del orden de las operaciones: Evaluar todas las expresiones exponenciales y cualquier raíz cuadrada.

a. $\sqrt{64} + \sqrt{9} = 8 + 3$ Evalúe primero cada raíz cuadrada.

$= 11$ Realice la suma.

b. $-\sqrt{25} - \sqrt{225} = -5 - 15$ Evalúe primero cada raíz cuadrada.

$= -20$ Realice la resta.

Auto-revisión 4

Evalúe:

a. $\sqrt{121} + \sqrt{1}$

b. $-\sqrt{9} - \sqrt{196}$

Ahora intente **Problemas 49 y 53**

EJEMPLO 5

Evalúe: **a.** $6\sqrt{100}$ **b.** $-5\sqrt{16} + 3\sqrt{9}$

Estrategia Se examinará la expresión para determinar qué operaciones se necesitan desarrollar primero. Después se desarrollarán estas operaciones, una a la vez, siguiendo la regla del orden de las operaciones.

POR QUÉ Si no se sigue el orden correcto de las operaciones, la expresión puede tener más de un valor.

Solución Dado que la expresión no contiene algún paréntesis, se comienza con el paso 2 de la regla del orden de las operaciones: Evaluar todas las expresiones exponenciales y cualquier raíz cuadrada.

a. Se observa que $6\sqrt{100}$ significa $6 \cdot \sqrt{100}$.

$6\sqrt{100} = 6(10)$ Evalúe primero la raíz cuadrada.

$= 60$ Realice la multiplicación.

b. $-5\sqrt{16} + 3\sqrt{9} = -5(4) + 3(3)$ Evalúe primero cada raíz cuadrada.

$= -20 + 9$ Realice la multiplicación.

$= -11$ Realice la suma.

Auto-revisión 5

Evalúe:

a. $8\sqrt{121}$

b. $-6\sqrt{25} + 2\sqrt{36}$

Ahora intente **Problemas 57 y 61**

EJEMPLO 6

Evalúe: $12 + 3[3^2 - (4 - 1)\sqrt{36}]$

Estrategia Se resolverá primero dentro de los paréntesis y después dentro de los corchetes. Dentro de cada conjunto de símbolos de agrupación se seguirá la regla del orden de las operaciones.

POR QUÉ Por la regla del orden de las operaciones se debe resolver del par *más interno* de símbolos de agrupación al *más externo.*

Auto-revisión 6

Evalúe:

$10 - 4[2^2 - (3 + 2)\sqrt{4}]$

Ahora intente **Problemas 65 y 69**

Solución

$12 + 3[3^2 - (4 - 1)\sqrt{36}] = 12 + 3[3^2 - 3\sqrt{36}]$ Realice la resta dentro de los paréntesis.

$= 12 + 3[9 - 3(6)]$ Dentro de los corchetes, evalúe la expresión exponencial y la raíz cuadrada.

$= 12 + 3[9 - 18]$ Realice la multiplicación dentro de los corchetes.

$= 12 + 3[-9]$ Realice la resta dentro de los corchetes.

$= 12 + (-27)$ Realice la multiplicación.

$= -15$ Realice la suma.

4 Evaluar fórmulas que involucran raíces cuadradas

Para evaluar fórmulas que involucran raíces cuadradas se reemplazan las letras con números específicos y después se utiliza la regla del orden de las operaciones.

Auto-revisión 7

Evalúe $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ para $c = 17$ y $b = 15$.

Ahora intente **Problema 81**

EJEMPLO 7 Evalúe $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ para $a = 3$ y $b = 4$.

Estrategia En la fórmula proporcionada se reemplazarán las letras a con 3 y la b con 4. Después se utilizará la regla del orden de las operaciones para encontrar el valor del radicando.

POR QUÉ Se necesita conocer el valor del radicando antes de que se pueda encontrar su raíz cuadrada.

Solución

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ Esta es la fórmula a evaluar.

$= \sqrt{3^2 + 4^2}$ Reemplace a con 3 y b con 4.

$= \sqrt{9 + 16}$ Evalúe las expresiones exponenciales.

$= \sqrt{25}$ Realice la suma.

$= 5$ Evalúe la raíz cuadrada.

5 Aproximar raíces cuadradas

En los ejemplos 2–7 se han encontrado raíces cuadradas de cuadrados perfectos. Si un número no es un cuadrado perfecto, se puede utilizar la tecla $\boxed{\sqrt{\ }}$ en una calculadora o una tabla de raíces cuadradas para encontrar su raíz cuadrada *aproximada*. Por ejemplo, para encontrar $\sqrt{17}$ utilizando una calculadora científica, se introduce el 17 y se presiona la tecla de raíz cuadrada:

17 $\boxed{\sqrt{\ }}$

La pantalla muestra

4.123105626

Este resultado es una aproximación, debido a que el valor exacto de $\sqrt{17}$ es un **decimal no terminal** que nunca se repite. Si se redondea a la milésima más cercana, se tiene

$\sqrt{17} \approx 4.123$ Se lee $\approx$ como "es aproximadamente igual a".

Para comprobar esta aproximación, se eleva al cuadrado el 4.123.

$(4.123)^2 = 16.999129$

Dado que el resultado es cercano a 17, se sabe que $\sqrt{17} \approx 4.123$.

n	$\sqrt{n}$
11	3.317
12	3.464
13	3.606
14	3.742
15	3.873
16	4.000
17	4.123
18	4.243
19	4.359
20	4.472

En el margen de la página anterior se muestra una porción de la tabla de raíces cuadradas del Apéndice III en la página A-00. La tabla proporciona las aproximaciones decimales de las raíces cuadradas de los números enteros que no son cuadrados perfectos. Para encontrar una aproximación de $\sqrt{17}$ a la milésima más cercana, se localiza el 17 en la columna de las n en la tabla y se examina directamente a la derecha, a la columna de $\sqrt{n}$ para encontrar que $\sqrt{17} \approx 4.123$.

EJEMPLO 8 Use una calculadora para aproximar cada raíz cuadrada. Redondee a la centésima más cercana. **a.** $\sqrt{373}$ **b.** $\sqrt{56.2}$ **c.** $\sqrt{0.0045}$

Estrategia Se identificará el radicando para encontrar la raíz cuadrada utilizando la tecla $\sqrt{\ }$. Después se identificará el dígito en la columna de las milésimas de la pantalla.

POR QUÉ Para redondear a la columna de las centésimas se debe determinar si el dígito en la columna de las milésimas es menor que 5 o mayor que o igual a 5.

Solución

a. A partir de la calculadora, se obtiene $\sqrt{373} \approx 19.31320792$. Redondeado a la centésima más cercana, $\sqrt{373} \approx 19.31$.

b. A partir de la calculadora, se obtiene $\sqrt{56.2} \approx 7.496665926$. Redondeado a la centésima más cercana, $\sqrt{56.2} \approx 7.50$.

c. A partir de la calculadora, se obtiene $\sqrt{0.0045} \approx 0.067082039$. Redondeado a la centésima más cercana, $\sqrt{0.0045} \approx 0.07$.

Auto-revisión 8

Use una calculadora para aproximar cada raíz cuadrada. Redondee a la centésima más cercana.

a. $\sqrt{153}$

b. $\sqrt{607.8}$

c. $\sqrt{0.076}$

Ahora intente **Problemas 87 y 91**

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. 8 y -8 **2. a.** 12 **b.** -9 **3. a.** $\frac{4}{7}$ **b.** 0.2 **4. a.** 12 **b.** -17 **5. a.** 88 **b.** -18 **6.** 34 **7.** 8 **8. a.** 12.37 **b.** 24.65 **c.** 0.28

SECCIÓN 4.6 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

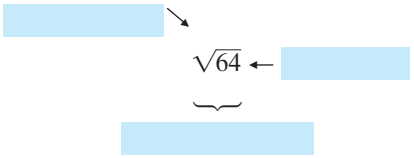
Complete los espacios.

1. Cuando se eleva un número a la segunda potencia, se está elevando al cuadrado, o encontrando su _____.

2. La _____ cuadrada de un número proporcionado es un número cuyo cuadrado es el número proporcionado.

3. Al símbolo $\sqrt{\ }$ se le llama símbolo del _____.

4. Etiquete el *radicando,* la *expresión radical,* y el *símbolo del radical* en la ilustración abajo.



5. A los números naturales como el 36 y el 49, que son cuadrados de números naturales, se les llama cuadrados _____.

6. El valor exacto de $\sqrt{17}$ es un decimal _____ que nunca se repite.

CONCEPTOS

Complete los espacios.

7. a. El cuadrado del 5 es ____, debido a que $5^2 =$ ____.

b. El cuadrado de $\frac{1}{4}$ es ____, debido a que $\left(\frac{1}{4}\right)^2 =$ ____.

8. Complete la lista de cuadrados perfectos: 1, 4, ____, 16, ____, 36, 49, 64, ____, 100, ____, 144, ____, 196, ____.

9. a. $\sqrt{49} = 7$, debido a que ____$^2 = 49$.

b. $\sqrt{4} = 2$, debido a que ____$^2 = 4$.

10. a. $\sqrt{\frac{9}{16}} =$ ____, debido a que $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$.

b. $\sqrt{0.16} =$ ____, debido a que $(0.4)^2 = 0.16$.

11. Evalúe cada raíz cuadrada.

a. $\sqrt{1}$ **b.** $\sqrt{0}$

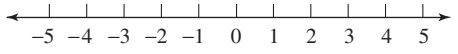
12. Evalúe cada raíz cuadrada.

a. $\sqrt{121}$ **b.** $\sqrt{144}$ **c.** $\sqrt{169}$

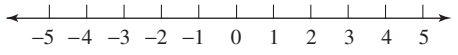
d. $\sqrt{196}$ **e.** $\sqrt{225}$

13. ¿En qué paso de la regla del orden de las operaciones se evalúan las raíces cuadradas?

14. Grafique $\sqrt{9}$ y $-\sqrt{4}$ en una recta numérica.



15. Grafique $-\sqrt{3}$ y $\sqrt{7}$ en una recta numérica. (*Sugerencia:* Use una calculadora o una tabla de raíces cuadradas para aproximar primero cada raíz cuadrada.)



16. a. ¿Entre cuáles dos números naturales se localizaría el $\sqrt{19}$ cuando se graficara en una recta numérica?

b. ¿Entre cuáles dos números naturales se localizaría el $\sqrt{50}$ cuando se graficara en una recta numérica?

NOTACIÓN

Complete los espacios.

17. a. El símbolo $\sqrt{\ }$ se utiliza para indicar una _____ _____ positiva.

b. El símbolo $-\sqrt{\ }$ se utiliza para indicar la raíz cuadrada _____ de un número positivo.

18. $4\sqrt{9}$ significa 4 ☐ $\sqrt{9}$.

Complete cada solución para evaluare la expresión.

19. $-\sqrt{49} + \sqrt{64} = \square + \square$
$= 1$

20. $2\sqrt{100} - 5\sqrt{25} = 2(\ \square\ ) - 5(\ \square\ )$
$= \square - 25$
$= -5$

PRÁCTICA GUIADA

Encuentre las dos raíces cuadradas de cada número. Vea el Ejemplo 1.

21. 25 **22.** 1

23. 16 **24.** 144

Evalúe cada raíz cuadrada sin utilizar una calculadora. Vea el Ejemplo 2.

25. $\sqrt{16}$ **26.** $\sqrt{64}$

27. $\sqrt{9}$ **28.** $\sqrt{16}$

29. $-\sqrt{144}$ **30.** $-\sqrt{121}$

31. $-\sqrt{49}$ **32.** $-\sqrt{81}$

Use una calculadora para evaluar cada raíz cuadrada. Vea el Objetivo 1, Utilizando su calculadora.

33. $\sqrt{961}$ **34.** $\sqrt{841}$

35. $\sqrt{3{,}969}$ **36.** $\sqrt{5{,}625}$

Evalúe cada raíz cuadrada sin utilizar una calculadora. Vea el Ejemplo 3.

37. $\sqrt{\frac{4}{25}}$ **38.** $\sqrt{\frac{36}{121}}$

39. $-\sqrt{\frac{16}{9}}$ **40.** $-\sqrt{\frac{64}{25}}$

41. $-\sqrt{\frac{1}{81}}$ **42.** $-\sqrt{\frac{1}{4}}$

43. $\sqrt{0.64}$ **44.** $\sqrt{0.36}$

45. $-\sqrt{0.81}$ **46.** $-\sqrt{0.49}$

47. $\sqrt{0.09}$ **48.** $\sqrt{0.01}$

Evalúe cada expresión sin utilizar una calculadora. Vea el Ejemplo 4.

49. $\sqrt{36} + \sqrt{1}$ **50.** $\sqrt{100} + \sqrt{16}$

51. $\sqrt{81} + \sqrt{49}$ **52.** $\sqrt{4} + \sqrt{36}$

53. $-\sqrt{144} - \sqrt{16}$ **54.** $-\sqrt{1} - \sqrt{196}$

55. $-\sqrt{225} + \sqrt{144}$ **56.** $-\sqrt{169} + \sqrt{16}$

Evalúe cada expresión sin utilizar una calculadora. Vea el Ejemplo 5.

57. $4\sqrt{25}$ **58.** $2\sqrt{81}$

59. $-10\sqrt{196}$ **60.** $-40\sqrt{4}$

61. $-4\sqrt{169} + 2\sqrt{4}$ **62.** $-6\sqrt{81} + 5\sqrt{1}$

63. $-8\sqrt{16} + 5\sqrt{225}$ **64.** $-3\sqrt{169} + 2\sqrt{225}$

Evalúe cada expresión sin utilizar una calculadora. Vea el Ejemplo 6.

65. $15 + 4\left[5^2 - (6 - 1)\sqrt{4}\right]$

66. $18 + 2\left[4^2 - (7 - 3)\sqrt{9}\right]$

67. $50 - \left[(6^2 - 24) + 9\sqrt{25}\right]$

68. $40 - \left[(7^2 - 40) + 7\sqrt{64}\right]$

69. $\sqrt{196} + 3\left(5^2 - 2\sqrt{225}\right)$

70. $\sqrt{169} + 2\left(7^2 - 3\sqrt{144}\right)$

71. $\dfrac{\sqrt{16} - 6(2^2)}{\sqrt{4}}$ **72.** $\dfrac{\sqrt{49} - 3(1^6)}{\sqrt{16} - \sqrt{64}}$

73. $\sqrt{\frac{1}{16}} - \sqrt{\frac{9}{25}}$ **74.** $\sqrt{\frac{25}{9}} - \sqrt{\frac{64}{81}}$

75. $5\left(-\sqrt{49}\right)(-2)^2$ **76.** $\left(-\sqrt{64}\right)(-2)(3)^3$

77. $(6^2)\sqrt{0.04} + 2.36$ **78.** $(5^2)\sqrt{0.25} + 4.7$

79. $-\left(-3\sqrt{1.44} + 5\right)$ **80.** $-\left(-2\sqrt{1.21} - 6\right)$

Evalúe cada fórmula sin utilizar una calculadora. Vea el Ejemplo 7.

81. Evalúe $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ para $a = 9$ y $b = 12$.

82. Evalúe $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ para $a = 6$ y $b = 8$.

83. Evalúe $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ para $c = 25$ y $b = 24$.

84. Evalúe $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ para $c = 17$ y $a = 8$.

Use una calculadora (o la tabla de raíces cuadradas en el Apéndice III) para completar cada tabla de raíces cuadradas. Redondee a la milésima más cercana cuando una respuesta no sea exacta. Vea el Ejemplo 8.

85.

Número	Raíz cuadrada
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

86.

Número	Raíz cuadrada
10	
20	
30	
40	
50	
60	
70	
80	
90	
100	

Use una calculadora (o una tabla de raíces cuadradas) para aproximar cada una de las siguientes a la centésima más cercana. Vea el Ejemplo 8.

87. $\sqrt{15}$ **88.** $\sqrt{51}$

89. $\sqrt{66}$ **90.** $\sqrt{204}$

Use una calculadora para aproximar cada una de las siguientes expresiones a la milésima más cercana. Vea el Ejemplo 8.

91. $\sqrt{24.05}$ **92.** $\sqrt{70.69}$

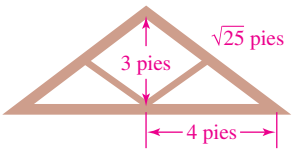
93. $-\sqrt{11.1}$ **94.** $\sqrt{0.145}$

APLICACIONES

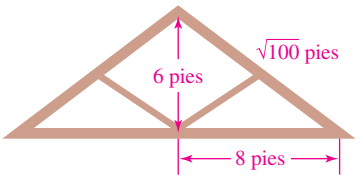
En los siguientes problemas, algunas longitudes se expresan como raíces cuadradas. Resuelva cada problema evaluando cualquier raíz cuadrada. Puede necesitar utilizar una calculadora. Si es así, redondee a la décima más cercana cuando una respuesta no sea exacta.

95. CARPINTERÍA Encuentre la longitud del lado inclinado de cada entramado de techo mostrado abajo.

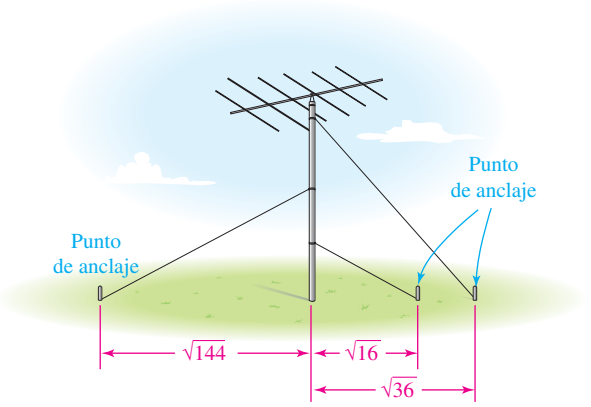
a.



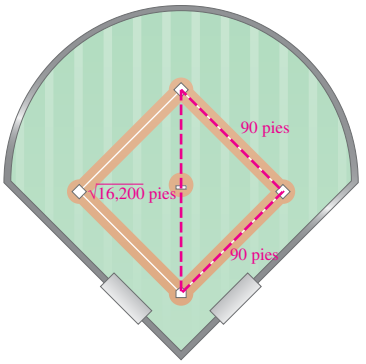
b.



96. ANTENAS DE RADIO Refiérase a la ilustración abajo. ¿Qué tan lejos de la base de la antena está anclado cada cable de sujeción? (Las mediciones están en pies.)

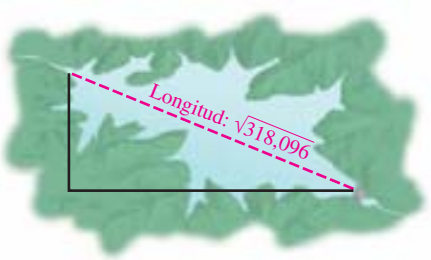


97. BEISBOL La ilustración de abajo muestra algunas dimensiones de un campo de beisbol de ligas mayores. ¿Qué tan lejos del plato de home está la segunda base?

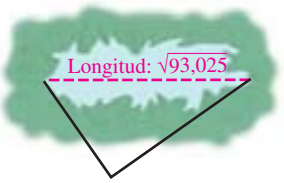


98. TOPOGRAFÍA Refiérase a la ilustración abajo. Use el montaje de triángulos imaginarios de un topógrafo para encontrar la longitud de cada lago. (Las mediciones están en metros.)

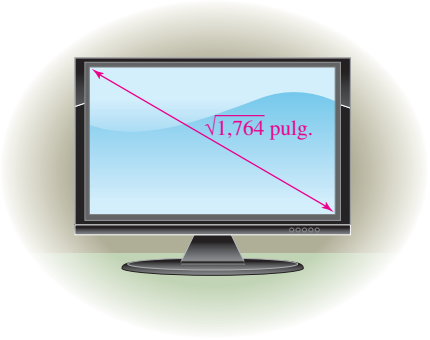
a.



b.



99. TELEVISORES DE PANTALLA PLANA La imagen en pantalla de un televisor se mide de manera diagonal. ¿Qué tamaño de pantalla se muestra abajo?



100. ESCALERAS Abajo se muestra la escalera de un pintor. ¿Qué tan largas son las patas de la escalera?

REDACCIÓN

101. Cuando se le pidió que encontrase $\sqrt{16}$, un estudiante respondió 8. Explique esta incomprensión del concepto de la raíz cuadrada.

102. Explique la diferencia entre el *cuadrado* y la *raíz cuadrada* de un número. Proporcione un ejemplo.

103. ¿Qué es un decimal *no terminal*? Use un ejemplo en su explicación.

104. **a.** ¿Cómo comprobaría si $\sqrt{389} = 17$?

b. ¿Cómo comprobaría si $\sqrt{7} \approx 2.65$?

105. Explique por qué $\sqrt{-4}$ no representa un número real.

106. ¿Existe una diferencia entre $-\sqrt{25}$ y $\sqrt{-25}$? Explique.

107. $\sqrt{6} \approx 2.449$. Explique por qué se utiliza un símbolo $\approx$ y no un símbolo $=$.

108. Sin evaluar las siguientes raíces cuadradas, determine cuál es la más grande y cuál es la más chica. Explique cómo lo decidió.

$$\sqrt{23}, \sqrt{27}, \sqrt{11}, \sqrt{6}, \sqrt{20}$$

REPASO

109. Multiplique: $6.75 \cdot 12.2$

110. Divida: $5.7\overline{)18.525}$

111. Evalúe: $(3.4)^3$

112. Sume: $23.45 + 76 + 0.009 + 3.8$

LISTA DE VERIFICACIÓN DE LAS HABILIDADES DE ESTUDIO

¿Conoce los aspectos básicos?

La clave para dominar el material en el Capítulo 4 es conocer las bases. Coloque una marca de verificación en el recuadro si puede responder "sí" al enunciado.

☐ He memorizado la *tabla de valores posicionales* en la página 317.

☐ Conozco las reglas para el redondeo de un decimal a cierto valor posicional decimal identificando el *dígito a redondear* y el *dígito a examinar*.

☐ Sé cómo sumar decimales utilizando el *acarreo* y cómo restar decimales utilizando el *acarreo negativo*.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ \ 1} \\ 7.18 \\ 154.20 \\ +\ 46.03 \\ \hline 207.41 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle 6\ \ 9\ 14} \\ 537.04 \\ -\ 23.98 \\ \hline 513.06 \end{array}$$

☐ He memorizada la lista de *cuadrados perfectos* en la página 387 y puedo encontrar sus *raíces cuadradas*.

$\sqrt{16} = 4$ $\sqrt{121} = 11$

☐ Sé cómo *multiplicar* y *dividir* decimales y localizar el punto decimal en la respuesta.

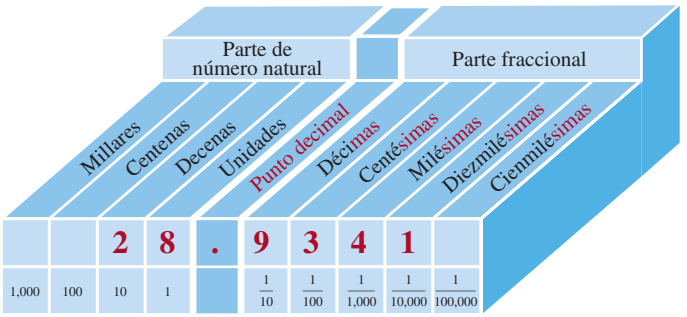
$$\begin{array}{r} 1.84 \\ \times\ 7.6 \\ \hline 1104 \\ 12880 \\ \hline 13.984 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2.8 \\ 3.4\overline{)9.52} \\ -68 \\ \hline 272 \\ -272 \\ \hline 0 \end{array}$$

☐ Sé cómo utilizar la división para escribir una *fracción como un decimal*.

$$\frac{3}{5} = 0.6 \qquad \begin{array}{r} 0.6 \\ 5\overline{)3.0} \\ -30 \\ \hline 0 \end{array}$$

CAPÍTULO 4 RESUMEN Y REPASO

SECCIÓN 4.1 Introducción a los decimales

DEFINICIONES Y CONCEPTOS	EJEMPLOS
El sistema de valores posicionales para los números naturales puede extenderse para crear el **sistema de numeración decimal.** Las columnas de valores posicionales a la izquierda del punto decimal forman la **parte de número natural** del número decimal. El valor de cada una de estas columnas es 10 veces mayor que la columna directamente a su derecha. Las columnas a la derecha del punto decimal forman la **parte fraccional.** Cada una de estas columnas tiene un valor que es $\frac{1}{10}$ del valor de la posición directamente a su izquierda.	 El valor posicional del dígito 3 es *3 centésimas.* El dígito que indica el número de *diezmilésimas* es el 1.
El escribir un número decimal en **forma expandida (notación expandida)** significa escribirlo como una suma de los valores posicionales de cada uno de sus dígitos.	Escriba el 28.9341 en notación expandida: $28.9341 = 20 + 8 + \frac{9}{10} + \frac{3}{100} + \frac{4}{1{,}000} + \frac{1}{10{,}000}$
Para leer un decimal: **1.** Vea la parte izquierda del punto decimal y diga el nombre del número natural. **2.** El punto decimal se lee como "y". **3.** Diga la parte fraccional del decimal como un número natural seguido por el nombre de la última columna de valor posicional del dígito que está más a la derecha. Se pueden utilizar los pasos para leer un decimal para **escribirlo en palabras.**	Escriba el decimal en palabras y después como una fracción o un número mixto: 28.9341 — La parte de número natural es el 28. La parte fraccional es el 9341. El dígito más a la derecha, el 1, está en la posición de las diezmilésimas. *Veintiocho y nueve mil trescientas cuarenta y un diezmilésimas* Escrito como un número mixto, el 28.9341 es $28\frac{9{,}341}{10{,}000}$. Escriba el decimal en palabras y después como una fracción o un número mixto: 0.079 — La parte de número natural es el 0. La parte fraccional es el 79. El dígito más a la derecha, el 9, está en la posición de las milésimas. *Setenta y nueve milésimas* Escrito como una fracción, el 0.079 es $\frac{79}{1{,}000}$.
El procedimiento para la **lectura de un decimal** puede aplicarse de manera inversa para convertir de la forma escrita en palabras a la forma estándar.	Escriba el número decimal en forma estándar: ***Doce y sesenta y cinco diezmilésimas negativo*** −12.0065 Esta es la columna del valor posicional de las diezmilésimas. Deben insertarse aquí dos 0 marcadores de posición para que el último dígito en el 65 esté en la columna de las diezmilésimas

Para comparar dos decimales:

1. Asegúrese que ambos números tienen el mismo número de posiciones decimales a la derecha del punto decimal. Escriba cualquier cero adicional necesario para lograr esto.
2. Compare los dígitos de cada decimal, columna por columna, empezando de izquierda a derecha.
3. Si los decimales son *positivos*: Cuando dos dígitos difieren, el decimal con el dígito más grande es el número mayor.

   Si los decimales son *negativos*: Cuando dos dígitos difieren, el decimal con el dígito más pequeño es el número mayor.

Compare el 47.31572 y el 47.31569.

47.315 7 2
47.315 6 9

A medida que se va de izquierda a derecha, esta es la primera columna en la que los dígitos difieren. Dado que $7 > 6$, se tiene que el 47.31572 es mayor que el 47.31569.

Por tanto, $47.31572 > 47.31569$.

Compare el -6.418 y el -6.41.

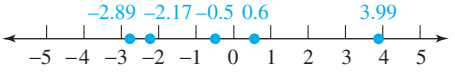
$-6.41\,8$ Estos decimales son negativos.
$-6.41\,0$ Escriba un cero después del 1 para ayudar en la comparación.

A medida que se va de izquierda a derecha, esta es la primera columna en la que los dígitos difieren. Dado que $0 < 8$, se tiene que el -6.410 es mayor que el -6.418.

Por tanto, $-6.41 > -6.418$.

El **graficar un número decimal** significa realizar un trazado que represente el número.

Grafique -2.17, 0.6, -2.89, 3.99 y -0.5 en una recta numérica.



1. Para **redondear un decimal** a cierto valor posicional decimal, localice el **dígito a redondear** en esa posición.
2. Busque el **dígito a examinar** directamente a la derecha del dígito a redondear.
3. Si el dígito a examinar es 5 o mayor, redondee hacia arriba sumando 1 al dígito a redondear y eliminando todos los dígitos a su derecha. Si el dígito a examinar es menor que 5, redondee hacia abajo conservando el dígito a redondear y eliminando todos los dígitos a su derecha.

Redondee el 33.41632 a la milésima más cercana.

Dígito a redondear: columna de las milésimas
33.41632
Dígito a examinar: el 3 es menor que 5

Conserve el dígito a redondear: No sume 1.
33.41632
Elimine el dígito a examinar y todos los dígitos a su derecha.

Por tanto, el, 33.41632 redondeado a la milésima más cercana es el 33.416.

Redondee el 2.798 a la centésima más cercana.

Dígito a redondear: columna de las centésimas
2.798
Dígito a examinar: el 8 es 5 o mayor

Sume 1. Dado que $9 + 1 = 10$, escriba el 0 en esta columna y acarree el 1 a la columna de las décimas
1
2.798
Elimine el dígito a examinar.

Por tanto, el 2.798 redondeado a la centésima más cercana es el 2.80.

Existen varias situaciones en la vida diaria en las que se necesita **redondear cantidades de dinero.**

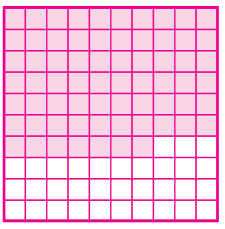
Redondeado al *centavo más cercano,* \$0.14672 es \$0.15.

Redondeado al *dólar más cercano,* \$142.39 es \$142.

EJERCICIOS DE REPASO

1. **a.** Represente la cantidad de la región cuadrada que está sombreada, utilizando un decimal y una fracción.

   b. Sombree 0.8 de la región mostrada abajo.



2. Considere el número decimal 2,809.6735.
   a. ¿Cuál es el valor posicional del dígito 7?
   b. ¿Cuál dígito indica el número de milésimas?
   c. ¿Cuál dígito indica el número de centésimas?
   d. ¿Cuál es el valor posicional del dígito 5?
3. Escriba el 16.4523 en notación expandida.

Escriba cada decimal en palabras y después como una fracción o un número mixto.

4. 2.3

5. –615.59

6. 0.0601

7. 0.00001

Escriba cada número en forma estándar.

8. Cien y sesenta y un centésimas

9. Once y novecientas noventa y siete milésimas

10. Trescientos uno y dieciséis millonésimas

Coloque un símbolo $<$ o $>$ en el recuadro para formar un enunciado verdadero.

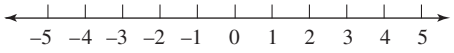
11. 5.68 ☐ 5.75

12. 106.8199 ☐ 106.82

13. −78.23 ☐ −78.303

14. −555.098 ☐ −555.0991

15. Grafique: 1.55, −0.8, −2.1 y −2.7.



16. Determine si cada enunciado es verdadero o falso.

a. 78 = 78.0 **b.** 6.910 = 6.901

c. −3.4700 = −3.470 **d.** 0.008 = .00800

Redondee cada decimal al valor posicional indicado.

17. 4.578 a la centésima más cercana

18. 3,706.0815 a la milésima más cercana

19. −0.0614 a la décima más cercana

20. −88.12 a la décima más cercana

21. 6.702983 a la diezmilésima más cercana

22. 11.314964 a la diezmilésima más cercana

23. 0.2222282 a la millonésima más cercana

24. 0.635265 a la cienmilésima más cercana

Redondee cada cantidad de dólares proporcionada.

25. $0.671456 al centavo más cercano

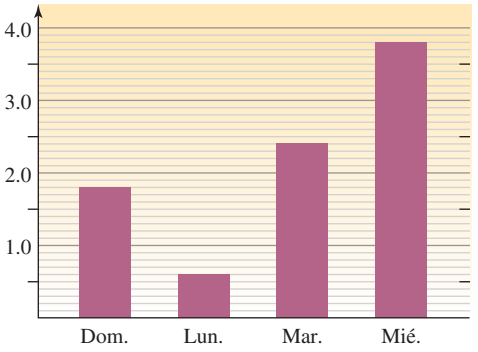
26. $12.82 al dólar más cercano

27. ORADORES DE GRADUACIÓN Al final del año escolar, los cinco estudiantes listados abajo estaban en la competencia para ser el orador en la graduación de la clase (el estudiante con el promedio de calificaciones más alto). Clasifique los estudiantes en orden por PC, comenzando con el orador en la graduación.

Nombre	PC
Diaz, Cielo	3.9809
Chou, Wendy	3.9808
Washington, Shelly	3.9865
Gerbac, Lance	3.899
Singh, Amani	3.9713

28. PRONÓSTICO DE ALERGIAS La gráfica abajo muestra un pronóstico de cuatro días de los niveles de polen para Las Vegas, Nevada. Determine el pronóstico en número decimal para cada día.

Pronóstico de 4 días de alerta de alergia para Las Vegas, Nevada



SECCIÓN 4.2 Suma y resta de decimales

DEFINICIONES Y CONCEPTOS

Para **sumar o restar decimales:**

1. Escriba los números en **forma vertical** con los puntos decimales alineados.
2. Sume (o reste) los números como lo haría con números naturales.
3. Escriba el punto decimal en el resultado del Paso 2 directamente debajo de los puntos decimales en el problema.

Si los números de posiciones decimales en el problema son diferentes, inserte ceros adicionales para que el número de posiciones decimales coincida.

EJEMPLOS

Sume: 15.82 + 19 + 32.995

Escriba el problema en forma vertical y sume, columna por columna, empezando de derecha a izquierda.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1\;1} \\ 15.820 \\ 19.000 \\ +\,32.995 \\ \hline 67.815 \end{array}$$

Inserte un cero extra.

Inserte un punto decimal y ceros extra.

Alinee los puntos decimales.

Para **comprobar** el resultado, sume de *abajo hacia arriba.*

Si la suma de los dígitos en cualquier columna de valor posicional es mayor que 9, se debe realizar un **acarreo.** Si la resta de los dígitos en cualquier columna de valor posicional requiere que se reste un dígito más grande de un dígito más pequeño, se debe realizar un **acarreo negativo** o **reagrupar.**	Reste: $8.4 - 3.029$ Escriba el problema en **forma vertical** y reste, columna por columna, comenzando de derecha a izquierda. $\begin{array}{r} {\scriptstyle 9} \\ {\scriptstyle 3\,\cancel{10}\,10} \\ 8.\cancel{4}\cancel{0}\cancel{0} \\ -3.029 \\ \hline 5.371 \end{array}$ Inserte ceros extra. Primero, realice un acarreo negativo de la columna de las décimas; después realice un acarreo negativo de la columna de las centésimas. Para **comprobar**: La suma de la diferencia y el sustraendo debe ser igual al minuendo. $\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1} \\ 5.371 \\ +3.029 \\ \hline 8.400 \end{array}$ Diferencia / Sustraendo / Minuendo
Para **sumar decimales con signo,** se utilizan las mismas reglas que se utilizan para sumar enteros. **Con signos similares:** Sume sus valores absolutos y añada su signo común a la suma. **Con signos no similares:** Reste sus valores absolutos (el menor del mayor). Si el decimal positivo tiene el valor absoluto más grande, la respuesta final es positiva. Si el decimal negativo tiene el valor absoluto más grande, haga negativa la respuesta final.	Sume: $-21.35 + (-64.52)$ Encuentre los valores absolutos: $\lvert -21.35 \rvert = 21.35$ y $\lvert -64.52 \rvert = 64.52$ $-21.35 + (-64.52) = -85.87$ Sume los valores absolutos, 21.35 y 64.52, para obtener 85.87. Dado que ambos decimales son negativos, haga negativa la respuesta final. Sume: $-7.4 + 9.8$ Encuentre los valores absolutos: $\lvert -7.4 \rvert = 7.4$ y $\lvert 9.8 \rvert = 9.8$ $-7.4 + 9.8 = 2.4$ Reste el valor más pequeño del valor más grande: $9.8 - 7.4 = 2.4$. Dado que el número positivo, 9.8, tiene el valor absoluto más grande, la respuesta final es positiva.
Para **restar dos decimales con signo,** sume el primer decimal al opuesto del decimal a restarse.	Reste: $-8.62 - (-1.4)$ El número a restarse es el -1.4. El restar el -1.4 es lo mismo que sumar su opuesto, el 1.4. Sume . . . $-8.62 - (-1.4) = -8.62 + 1.4 = -7.22$ Use la regla para la suma de dos decimales con signos diferentes. . . . al opuesto
La **estimación** puede utilizarse para comprobar la sensatez de una respuesta para una suma o resta decimal.	Estime la suma redondeando los sumandos a la decena más cercana: $328.99 + 459.02$ $\begin{array}{r} 328.99 \\ +459.02 \\ \hline 788.01 \end{array} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \end{array} \begin{array}{r} 330 \\ +460 \\ \hline 790 \end{array}$ Redondee a la decena más cercana. / Redondee a la decena más cercana. / Este es el estimado. Estime la diferencia utilizando el **redondeo por la izquierda:** $302.47 - 36.9$ Cada número se redondea a su valor posicional más grande. $\begin{array}{r} 302.47 \\ -\ 36.9 \\ \hline 265.57 \end{array} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \end{array} \begin{array}{r} 300 \\ -\ 40 \\ \hline 260 \end{array}$ Redondee a la centena más cercana. / Redondee a la decena más cercana. / Este es el estimado.
Se puede utilizar la **estrategia para la resolución de problemas** de cinco pasos para resolver problemas de aplicación que involucran decimales.	Vea los ejemplos 10–12 que comienzan en la página 337 para repasar cómo resolver problemas de aplicación sumando y restando decimales.

EJERCICIOS DE REPASO

Desarrolle cada operación indicada.

29. $19.5 + 34.4 + 12.8$

30. $3.4 + 6.78 + 35 + 0.008$

31. $68.47 - 53.3$

32. $45.8 - 17.372$

33. $9{,}000.09 - 7{,}067.445$

34.
$$\begin{array}{r} 8.61 \\ 5.97 \\ +\,9.72 \\ \hline \end{array}$$

35. $-16.1 + 8.4$

36. $-4.8 - (-7.9)$

37. $-3.55 + (-1.25)$

38. $-15.1 - 13.99$

Evalúe cada expresión.

39. $-8.8 + (-7.3 - 9.5)$

40. $(5 - 0.096) - (-0.035)$

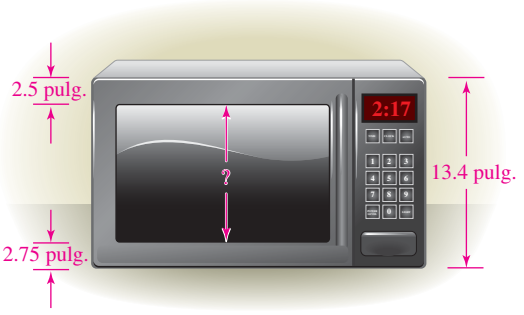
41. **a.** Estime la suma redondeando los sumandos a la decena más cercana: $612.05 + 145.006$

b. Estime la diferencia utilizando el redondeo por la izquierda: $289.43 - 21.86$

42. MONEDAS El grosor de una moneda de un centavo, de una moneda de cinco centavos, de una moneda de 10 centavos, de una moneda de 25 centavos, de una moneda de 50 centavos y de una moneda de $1 son de 1.55 milímetros, 1.95 milímetros, 1.35 milímetros, 1.75 milímetros, 2.15 milímetros y 2.00 milímetros, en ese orden. Encuentre la altura de una pila conformada por una moneda de cada tipo.

43. PRECIOS EN REBAJA Una calculadora por lo regular se vende a $52.20. Si tiene un descuento de $3.99, ¿cuál es el precio en rebaja?

44. HORNOS DE MICROONDAS Abajo se muestra un horno de microondas. ¿Qué tan alta es la ventana?



SECCIÓN 4.3 Multiplicación de decimales

DEFINICIONES Y CONCEPTOS

Para **multiplicar dos decimales:**

1. Multiplique los decimales como si fueran números naturales.
2. Encuentre el número total de posiciones decimales en ambos factores.
3. Inserte un punto decimal en el resultado del paso 1 de tal manera que la respuesta tenga el mismo número de posiciones decimales que el total encontrado en el Paso 2.

Cuando se multiplican decimales, *no* se necesita alinear los puntos decimales.

Multiplicación de un decimal por 10, 100, 1,000, etcétera

Para encontrar el producto de un decimal y el 10, 100, 1,000, etc., se mueve el punto decimal a la derecha el mismo número de posiciones que los ceros que hay en la potencia de 10.

Multiplicación de un decimal por 0.1, 0.01, 0.001, etcétera

Para encontrar el producto de un decimal y el 0.1, 0.01 y 0.001, etc., se mueve el punto decimal a la izquierda el mismo número de posiciones decimales que hay en la potencia de 10.

EJEMPLOS

Multiplique: $2.76 \cdot 4.3$

Escriba el problema en forma vertical y multiplique el 2.76 y el 4.3 como si fuesen números naturales.

$$\begin{array}{r} 2.76 \\ \times\ 4.3 \\ \hline 828 \\ 11040 \\ \hline 11.868 \end{array}$$

2 posiciones decimales. 1 posición decimal. } La respuesta tendrá 2 + 1 = 3 posiciones decimales.

Muévase 3 posiciones de derecha a izquierda e inserte un punto decimal en la respuesta.

Por tanto, $2.76 \cdot 4.3 = 11.868$.

Multiplique:

$84.561 \cdot 10{,}000 = 845{,}610$

Dado que el 10,000 tiene cuatro ceros, mueva el punto decimal en el 84.561 cuatro posiciones a la derecha. Escriba un cero marcador de posición (mostrado en azul).

Multiplique:

$32.67 \cdot 0.01 = 0.3267$

Dado que el 0.01 tiene dos posiciones decimales, mueva el punto decimal en el 32.67 dos posiciones a la izquierda.

Las reglas para la multiplicación de enteros también se mantienen para la **multiplicación de decimales con signo:**

El producto de dos decimales con **signos similares** es positivo y el producto de dos decimales con **signos diferentes** es negativo.

Multiplique: $(-0.03)(-4.1)$

Encuentre los valores absolutos: $|-0.03| = 0.03$ y $|4.1| = 4.1$

Dado que los decimales tienen signos similares, el producto es positivo.

$(-0.03)(-4.1) = 0.123$ Multiplique los valores absolutos, 0.03 y 4.1 para obtener 0.123.

Multiplique: $-5.7(0.4)$

Encuentre los valores absolutos: $|-5.7| = 5.7$ y $|0.4| = 0.4$

Dado que los decimales tienen signos no similares, el producto es negativo.

$-5.7(0.4) = -2.28$ Multiplique los valores absolutos, 5.7 y 0.4 para obtener 2.28. Haga negativa la respuesta.

Se puede utilizar la regla para la multiplicación de un decimal por una potencia de 10 para **escribir números grandes en forma estándar.**

Escriba *4.16 mil millones* en notación estándar:

4.16 mil millones $= 4.16 \cdot$ **1 mil millones**

$= 4.16 \cdot$ **1,000,000,000** Escriba 1 mil millones en forma estándar.

$= 4,160,000,000$ Dado que el 1,000,000,000 tiene nueve ceros, mueva el punto decimal en el 4.16 nueve posiciones a la derecha.

La base de una **expresión exponencial** puede ser un decimal positivo o negativo.

Evalúe: $(1.5)^2$

$(1.5)^2 = 1.5 \cdot 1.5$ La base es el 1.5 y el exponente es el 2. Escriba la base como un factor 2 veces.

$= 2.25$ Multiplique los decimales.

Evalúe: $(-0.02)^2$

$(-0.02)^2 = (-0.02)(-0.02)$ La base es el -0.02 y el exponente es el 2. Escriba la base como un factor 2 veces.

$= 0.0004$ Multiplique los decimales. El producto de dos decimales con signos similares es positivo.

Para **evaluar una fórmula,** se reemplazan las letras con números específicos y después se utiliza la regla del orden de las operaciones.

Evalúe $P = 2l + 2w$ para $l = 4.9$ y $w = 3.4$.

$P = 2l + 2w$

$= 2(4.9) + 2(3.4)$ Reemplace l con 4.9 y w con 3.4.

$= 9.8 + 6.8$ Realice la multiplicación.

$= 16.6$ Realice la suma.

Puede utilizarse una **estimación** para comprobar la sensatez de una respuesta para una multiplicación de decimales.

Estime $37 \cdot 8.49$ **redondeando por la izquierda.**

$37 \longrightarrow 40$ Redondee a la decena más cercana.

$\times 8.49 \longrightarrow \times\ 8$ Redondee a la unidad más cercana.

320 Este es el estimado.

El estimado es de 320. Si se calcula $37 \cdot 8.49$, el producto es de exactamente 314.13.

Se puede utilizar la **estrategia para la resolución de problemas** de cinco pasos para resolver problemas de aplicación que involucran decimales.

Vea los ejemplos 12 y 13 que comienzan en la página 351 para repasar cómo resolver problemas de aplicación multiplicando decimales.

EJERCICIOS DE REPASO

Multiplique.

45. $2.3 \cdot 6.9$

46. $32.45(6.1)$

47. $\begin{array}{r} 1.7 \\ \times 0.004 \\ \hline \end{array}$

48. $\begin{array}{r} 275 \\ \times 8.4 \\ \hline \end{array}$

49. $15.5(-9.8)$

50. $(-0.003)(-0.02)$

51. $1{,}000(90.1452)$

52. $0.001(2.897)$

Evalúe cada expresión.

53. $(0.2)^2$

54. $(-0.15)^2$

55. $(0.6 + 0.7)^2 - (-3)(-4.1)$

56. $3(7.8) + 2(1.1)^2$

57. $(-3.3)^2(0.00001)$

58. $(0.1)^3 + 2|-45.63 - 12.24|$

59. ***Escriba cada número en notación estándar.***

a. GEOGRAFÍA China es el tercer país con mayor área terrestre con un territorio que se extiende por más de *9.6 millones* de kilómetros cuadrados. (Fuente: china.org)

b. PLANTACIÓN DE ÁRBOLES En el 2008, los chinos plantaron *2.31 mil millones* de árboles en las montañas, parques citadinos y a lo largo de las carreteras para incrementar el número de bosques en su país. (Fuente: xinhuanet.com)

60. a. Estime el producto utilizando el redondeo por la izquierda: $193.28 \cdot 7.63$

b. Estime el producto redondeando los factores a la décima más cercana: $12.42 \cdot 7.38$

61. Evalúe la fórmula $A = P + Prt$ para $P = 70.05$, $r = 0.08$ y $t = 5$.

62. COMPRAS Si la carne de cangrejo se vende por \$12.95 la libra, ¿cuál sería el costo de 1.5 libras de carne de cangrejo? Redondee al centavo más cercano.

63. PINTADO DE AUTOMÓVILES Un fabricante utiliza un proceso de tres pasos para el acabado exterior de los automóviles que produce.

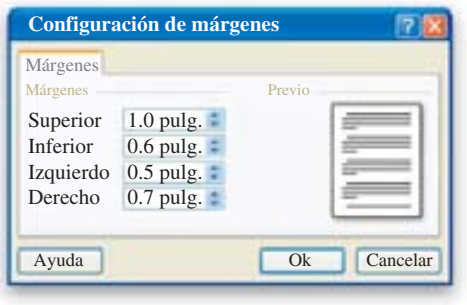
Paso 1: Se aplica una pintura base para prevenir la oxidación de 0.03 pulgadas de grosor.

Paso 2: Se rocían tres capas de pintura de color, cada una de 0.015 pulgadas de grosor.

Paso 3: Después el acabado se pule, perdiendo 0.005 pulgadas de su grosor.

¿Cuál es el grosor resultante del acabado de los automóviles?

64. PROCESADORES DE PALABRAS Se muestra la pantalla de Configuración de márgenes para un procesador de palabras. Encuentre el área que puede llenarse con texto en una hoja de papel de 8.5 pulg. × 11 pulg. si se configuran los márgenes como se muestra.



SECCIÓN 4.4 División de decimales

DEFINICIONES Y CONCEPTOS

Para **dividir un decimal entre un número natural:**

1. Escriba el problema en forma de división larga y coloque un punto decimal en el cociente (respuesta) directamente sobre el punto decimal en el dividendo.
2. Divida como si trabajara con números naturales.
3. Si es necesario, pueden escribirse ceros adicionales a la derecha del último dígito del dividendo para continuar la división.

EJEMPLOS

Divida: $6.2 \div 4$

Coloque un punto decimal en el cociente que se alinee con el punto decimal en el dividendo.

$$\begin{array}{r} 1.55 \\ 4\overline{)6.20} \\ -4 \\ \hline 22 \\ -20 \\ \hline 20 \\ -20 \\ \hline 0 \end{array}$$

Ignore los puntos decimales y divida como si trabajara con números naturales.

Escriba un cero a la derecha del 2 y desciéndalo. Continúe dividiendo.

El residuo es 0.

Para **comprobar** el resultado, se multiplica el divisor por el cociente. El resultado debe ser el dividendo.

Comprobación:

1.55 ← Cociente
× 4 ← Divisor
6.20 ← Dividendo

La comprobación confirma que $6.2 \div 4 = 1.55$.

Para **dividir con un divisor decimal:**

1. Escriba el problema en forma de división larga.
2. Mueva el punto decimal del divisor para que se vuelva un número natural.
3. Mueva el punto decimal del dividendo el mismo número de posiciones a la derecha.
4. Escriba el punto decimal en el cociente (respuesta) directamente sobre el punto decimal en el dividendo. Divida como si trabajara con números naturales.
5. Si es necesario, pueden escribirse ceros adicionales a la derecha del último dígito del dividendo para continuar la división.

Divida: $\dfrac{1.462}{3.4}$

$3.4\overline{)1.462}$ Escriba el problema en forma de división larga. Mueva el punto decimal del divisor, el 3.4, una posición a la derecha para hacerlo un número natural. Mueva el punto decimal del dividendo, el 1.462, el mismo número de posiciones a la derecha.

Ahora utilice la regla para división de un decimal entre un *número natural.*

$34\overline{)14.62}$ Escriba un punto decimal en el cociente (respuesta) directamente sobre el punto decimal en el dividendo.

-136 Divida como con los números naturales.

102

-102

0

En ocasiones cuando se dividen decimales, las restas nunca dan un residuo de cero y el proceso de división continúa por siempre. En tales casos, se puede **redondear el resultado.**

Divida: $0.77 \div 6$. Redondee el cociente a la centésima más cercana.

Para redondear a la columna de las centésimas, se necesita continuar el proceso de división una posición decimal más, la cual es la columna de las milésimas.

Dígito a redondear: columna de las centésimas
Dígito a examinar: Dado que el 8 es 5 o mayor, sume 1 al dígito a redondear y elimine el dígito a examinar.

$6\overline{)0.770}$

-6

17

-12

50

-48

2 El residuo aun no es de 0.

Por tanto, $0.77 \div 6 \approx 0.13$.

Para **estimar cocientes,** se emplea un método que aproxima el dividendo y el divisor para que se dividan con facilidad. Existe una regla práctica para este método: Si es posible, redondee ambos números hacia arriba o hacia abajo.

Estime el cociente: $337.96 \div 23.8$

El dividendo es aproximadamente

$337.96 \div 23.8 \qquad 320 \div 20 = 16$

El divisor es aproximadamente

Para dividir, elimine un cero del 320 y un cero del 20 y después encuentre $32 \div 2$.

El estimado es 16. (La respuesta exacta es 14.2.)

División de un decimal entre 10, 100, 1,000, etc. Para encontrar el cociente de un decimal y el 10, 100, 1,000, etc., mueva el punto decimal a la izquierda el mismo número de posiciones que el número de ceros en la potencia de 10.

Divida: $79.36 \div 10{,}000$

$79.36 \div 10{,}000 = 0.00\,7936$ Dado que el divisor 10,000 tiene cuatro ceros, mueva el punto decimal cuatro posiciones a la izquierda. Inserte dos ceros marcadores de posición (mostrados en azul).

División de un decimal entre 0.1, 0.01, 0.001, etc. Para encontrar el cociente de un decimal y el 0.1, 0.01, 0.001, etc., mueva el punto decimal a la derecha el mismo número de posiciones decimales que hay en la potencia de 10.	Divida: $\frac{1.6402}{0.001}$ $\frac{1.6402}{0.001} = 1{,}640.2$ Dado que el divisor 0.001 tiene tres posiciones decimales, mueva el punto decimal en el 1.6402 tres posiciones a la derecha.
Las reglas para la división de enteros también se mantienen para la **división de decimales con signo**. El cociente de dos decimales con *signos similares* es positivo y el cociente de dos decimales con *signos no similares* es negativo.	Divida: $-1.53 \div 0.3 = -5.1$ Dado que los signos del dividendo y el divisor son no similares, la respuesta final es negativa. Divida: $\frac{-0.84}{-4.2} = 0.2$ Dado que el dividendo y el divisor tienen signos similares, el cociente es positivo.
Se utiliza la regla del orden de las operaciones para **evaluar expresiones** y **fórmulas.**	Evalúe: $\frac{37.8 - (1.2)^2}{0.1 + 0.3}$ $\frac{37.8 - (1.2)^2}{0.1 + 0.3} = \frac{37.8 - 1.44}{0.4}$ En el numerador, evalúe $(1.2)^2$. En el denominador, realice la suma. $= \frac{36.36}{0.4}$ En el numerador, realice la resta. $= 90.9$ Realice la división indicada por la barra de fracción.
Se puede utilizar la **estrategia para la resolución de problemas** de cinco pasos para resolver problemas de aplicación que involucran decimales.	Vea los Ejemplos 10 y 11 que comienzan en la página 366 para repasar cómo resolver problemas de aplicación dividiendo decimales.

EJERCICIOS DE REPASO

Divida. Compruebe el resultado.

65. $3\overline{)27.9}$

66. $41.8 \div 4$

67. $\frac{-29.67}{-23}$

68. $24.618 \div 0.6$

69. $-80.625 \div 12.9$

70. $\frac{0.0742}{1.4}$

71. $\frac{15.75}{0.25}$

72. $\frac{-0.003726}{-0.0046}$

73. $89.76 \div 1{,}000$

74. $\frac{0.0112}{-10}$

75. Divida -0.8765 entre -0.001

76. $77.021 \div 0.0001$

Estime cada cociente:

77. $4{,}983.01 \div 41.33$

78. $8.8\overline{)25{,}904.39}$

Divida y redondee cada resultado a la posición decimal especificada.

79. $78.98 \div 6.1$ (a la décima más cercana)

80. $\frac{-5.438}{0.007}$ (a la centésima más cercana)

81. Evalúe: $\frac{(1.4)^2 - 2(-4.6)}{0.5 + 0.3}$

82. Evalúe la fórmula $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ para $F = 68.9$.

83. CENA DE ACCIÓN DE GRACIAS El costo de la compra de los alimentos para una cena de acción de gracias para una familia de 5 fue de $41.70. ¿Cuál fue el costo de la cena por persona?

84. AGUA POTABLE Se tomaron muestras de agua de cinco pozos y se analizaron para PCB (bifenilos policlorados). Abajo se proporciona el número de partes por billón (ppb) encontrado en cada muestra. Encuentre el número promedio de partes por billón para estas muestras.

Muestra #1:	0.44 ppb
Muestra #2:	0.50 ppb
Muestra #3:	0.46 ppb
Muestra #4:	0.52 ppb
Muestra #5:	0.63 ppb

85. TAMAÑO DE PORCIONES La ilustración abajo muestra el etiquetado de un empaque en una caja de un cereal para niños. Use la información proporcionada para encontrar el número de porciones.

Datos nutricionales

Tamaño de la porción	1.1 onzas
Porciones por paquete	?
Peso del empaque	15.4 onzas

86. TELESCOPIOS Para cambiar la posición de un espejo de enfoque en un telescopio, se utiliza una perilla de ajuste. El espejo se mueve 0.025 pulgadas con cada revolución de la perilla. El espejo necesita moverse 0.2375 pulgadas para mejorar la nitidez de la imagen. ¿Cuántas revoluciones de la perilla de ajuste requiere esto?

SECCIÓN 4.5 Fracciones y decimales

DEFINICIONES Y CONCEPTOS	EJEMPLOS
Se dice que una fracción y un decimal son **equivalentes** si nombran al mismo número. Para **escribir una fracción como un decimal,** divida el numerador de la fracción entre su denominador. En ocasiones, cuando se encuentra el equivalente decimal de una fracción, el proceso de división termina debido a que se obtiene un residuo de 0. Se le llama al decimal resultante **decimal terminal.**	Escriba $\frac{3}{5}$ como un decimal. Se divide el numerador entre el denominador debido a que una barra de fracción indica una división: $\frac{3}{5}$ significa $3 \div 5$. $5\overline{)3.0}$ cociente 0.6 -30 0 ← Dado que se obtiene un residuo de cero, el resultado es un decimal terminal. Escriba un punto decimal y un cero adicional a la derecha del 3. Por tanto, $\frac{3}{5} = 0.6$. Se dice que el 0.6 es el **equivalente decimal** de $\frac{3}{5}$.
Si el denominador de una fracción en forma simplificada tiene factores de sólo 2 o 5, o una combinación de ambos, puede escribirse como un decimal **multiplicando por una forma de 1.** El objetivo es escribir la fracción en una forma equivalente con un denominador que sea una potencia de 10, como el 10, 100, 1,000, etcétera.	Escriba $\frac{3}{25}$ como un decimal. Dado que se necesita multiplicar el denominador de $\frac{3}{25}$ por 4 para obtener un denominador de 100, se tiene que $\frac{4}{4}$ debe ser la forma de 1 que se utiliza para construir $\frac{3}{25}$. $\frac{3}{25} = \frac{3}{25} \cdot \frac{4}{4}$ Multiplique $\frac{3}{25}$ por 1 en la forma de $\frac{4}{4}$. $= \frac{12}{100}$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores. $= 0.12$ Escriba la fracción como un decimal.
En ocasiones, cuando se encuentre el equivalente decimal de una fracción, el proceso de división nunca da un residuo de 0. Se le llama al decimal resultante **decimal repetitivo.** Puede utilizarse una **barra superior** en vez de los tres puntos . . . para representar el patrón repetitivo en un **decimal repetitivo.**	Escriba $\frac{5}{6}$ como un decimal. $6\overline{)5.000}$ cociente 0.833 -48 20 -18 20 -18 2 ← Es aparente que el 2 continuará reapareciendo como el residuo. Por tanto, el 3 continuará reapareciendo en el cociente. Dado que el patrón repetitivo ahora es claro, se puede detener la división. Escriba un punto decimal y tres ceros adicionales a la derecha del 5. Por tanto, $\frac{5}{6} = 0.8333\ldots$, o, utilizando una barra superior, se tiene $\frac{5}{6} = 0.8\overline{3}$.
Cuando una fracción se escribe en forma decimal, el resultado es un decimal terminal o repetitivo. Los decimales repetitivos se **redondean** con frecuencia a un valor posicional especificado.	El equivalente decimal para $\frac{5}{11}$ es el $0.454545\ldots$. Redondéelo a la centésima más cercana. $\frac{5}{11} = 0.454545\ldots$ Dígito a redondear: columna de las centésimas. Dígito a examinar: Dado que el 4 es menor que 5, redondee hacia abajo. Por tanto, $\frac{5}{11} \approx 0.45$.

Para escribir un número mixto en forma decimal, sólo se necesita encontrar el equivalente decimal para la parte fraccional del número mixto. La parte de número natural en la forma decimal es la misma que la parte de número natural en la forma de número mixto.

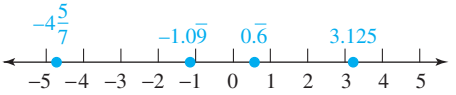
Parte de número natural

$$4\frac{7}{8} = 4.875$$

Escriba la fracción como un decimal.

Puede utilizarse una recta numérica para mostrar la relación entre fracciones y decimales.

Grafique 3.125, $-4\frac{5}{7}$, $0.\overline{6}$, $-1.\overline{09}$ en una recta numérica.



Para **comparar el tamaño de una fracción y un decimal,** es de utilidad escribir la fracción en su forma decimal equivalente.

Coloque un símbolo $<$, $>$, o $=$ en el recuadro para formar un enunciado verdadero:

$$\frac{3}{50} \square 0.07$$

Para escribir $\frac{3}{50}$ como un decimal, divida 50 entre 3: $\frac{3}{50} = 0.06$.

Dado que el 0.06 es menor que el 0.07, se tiene: $\frac{3}{50} < 0.07$.

Para evaluar **expresiones que pueden contener fracciones y decimales,** se puede trabajar en términos de decimales o en términos de fracciones.

Evalúe: $\frac{1}{6} + 0.31$

Si se trabaja en términos de fracciones, se tiene:

$$\frac{1}{6} + 0.31 = \frac{1}{6} + \frac{31}{100}$$ Escriba el 0.31 en forma de fracción.

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{\mathbf{50}}{\mathbf{50}} + \frac{31}{100} \cdot \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{3}}$$ El mcd es el 300. Construya cada fracción multiplicando por una forma de 1.

$$= \frac{50}{300} + \frac{93}{300}$$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$$= \frac{143}{300}$$ Sume los denominadores y escriba la suma sobre el denominador común de 300.

Si se trabaja en términos de decimales, se tiene:

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}} + 0.31 \approx \mathbf{0.17} + 0.31$$ Aproxime $\frac{1}{6}$ con el decimal 0.17.

$$\approx 0.48$$ Realice la suma.

Se puede utilizar la **estrategia para la resolución de problemas** de cinco pasos para resolver problemas de aplicación que involucran fracciones y decimales.

Vea el Ejemplo 13 en la página 381 para repasar cómo resolver problemas de aplicación que involucran fracciones y decimales.

EJERCICIOS DE REPASO

Escriba cada fracción o número mixto como un decimal. Use una barra superior cuando sea necesario.

87. $\frac{7}{8}$

88. $-\frac{2}{5}$

89. $\frac{9}{16}$

90. $\frac{3}{50}$

91. $\frac{6}{11}$

92. $-\frac{4}{3}$

93. $3\frac{7}{125}$

94. $\frac{26}{45}$

Escriba cada fracción como un decimal. Redondee a la centésima más cercana.

95. $\frac{19}{33}$

96. $\frac{31}{30}$

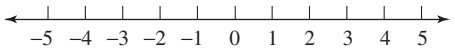
Coloque un símbolo $<$, $>$ o $=$ en el recuadro para formar un enunciado verdadero.

97. $\frac{13}{25} \square 0.499$

98. $-\frac{4}{15} \square -0.2\overline{6}$

99. Escriba los números en orden de menor a mayor: $\frac{10}{33}$, $0.\overline{3}$, 0.3

100. Grafique 1.125, $-3.\overline{3}$, $2\frac{3}{4}$ y $-\frac{9}{10}$ en una recta numérica.



Evalúe cada expresión. Trabaje en términos de fracciones.

101. $\frac{1}{3} + 0.4$

102. $\frac{5}{6} + 0.19$

Evalúe cada expresión. Trabaje en términos de decimales.

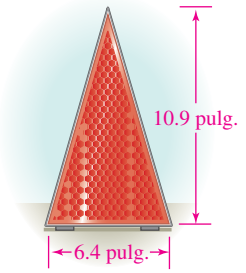
103. $\frac{4}{5}(-7.8)$

104. $\frac{1}{8}\left(7.3 - 5\frac{9}{10}\right)$

105. $\frac{1}{2}(9.7 + 8.9)(10)$

106. $7.5 - (0.78)\left(\frac{1}{2}\right)^2$

107. EMERGENCIAS EN CARRETERAS ¿Cuál es el área del reflector mostrado abajo?



108. MARISCOS Un comprador adquiere $\frac{3}{4}$ de libra de carne de cangrejo, a un precio de $13.80 la libra y $\frac{1}{3}$ de libra de carne de langosta, vendida a $35.70 la libra. Encuentre el costo total de estos productos.

SECCIÓN 4.6 Raíces cuadradas

DEFINICIONES Y CONCEPTOS	EJEMPLOS
La **raíz cuadrada** de un número proporcionado es un número cuyo cuadrado es el número proporcionado. Todo número positivo tiene dos raíces cuadradas. El número 0 sólo tiene una raíz cuadrada.	Encuentre las dos raíces cuadradas del 81. el 9 es una raíz cuadrada del 81 debido a que $9^2 = 81$ y el -9 es una raíz cuadrada del 81 debido a que $(-9)^2 = 81$.
Se utiliza un **símbolo del radical** $\sqrt{\ }$ para indicar una raíz cuadrada positiva. Para **evaluar una expresión radical** como $\sqrt{4}$, encuentre la raíz cuadrada positiva del radicando. Símbolo del radical $\sqrt{4}$ ← Radicando Expresión radical Se lee como "la raíz cuadrada de 4". A los números como el 4, 64 y 225, que son cuadrados de números naturales, se les llama **cuadrados perfectos.** Para evaluar expresiones radicales de raíz cuadrada, es de utilidad el ser capaz de identificar **radicandos cuadrados perfectos.** Repase la lista de cuadrados perfectos en la página 00.	Evalúe cada raíz cuadrada: $\sqrt{4} = 2$ Pregunte: ¿Qué número positivo, cuando se eleva al cuadrado, es el 4? La respuesta es el 2 debido a que $2^2 = 4$. $\sqrt{64} = 8$ Pregunte: ¿Qué número positivo, cuando se eleva al cuadrado, es el 64? La respuesta es el 8 debido a que $8^2 = 64$. $\sqrt{225} = 15$ Pregunte: ¿Qué número positivo, cuando se eleva al cuadrado, es el 225? La respuesta es el 15 debido a que $15^2 = 225$.
El símbolo $-\sqrt{\ }$ se utiliza para indicar la **raíz cuadrada negativa** de un número positivo. Es el opuesto de la raíz cuadrada positiva.	Evalúe: $-\sqrt{36}$ $-\sqrt{36}$ es el opuesto (o negativo) de la raíz cuadrada del 36. Dado que $\sqrt{36} = 6$, se tiene: $-\sqrt{36} = -6$
Se puede encontrar la raíz cuadrada de fracciones y decimales.	Evalúe cada raíz cuadrada: $\sqrt{\frac{49}{100}}$ Pregunte: ¿Qué fracción positiva, cuando se eleva al cuadrado, es $\frac{49}{100}$? La respuesta es $\frac{7}{10}$ debido a que $\left(\frac{7}{10}\right)^2 = \frac{49}{100}$. $\sqrt{0.25}$ Pregunte: ¿Qué decimal positivo, cuando se eleva al cuadrado, es el 0.25? La respuesta es el 0.5 debido a que $(0.5)^2 = 0.25$.

Cuando **evalúe una expresión que contiene raíces cuadradas,** evalúe las raíces cuadradas en el mismo paso en su solución que las expresiones exponenciales.

Evalúe: $20 + 6\left(2^3 - 4\sqrt{9}\right)$

Desarrolle primero las operaciones dentro del paréntesis.

$20 + 6\left(2^3 - 4\sqrt{9}\right) = 20 + 6(8 - 4 \cdot 3)$ Dentro de los paréntesis, evalúe la expresión exponencial y la raíz cuadrada.

$= 20 + 6(8 - 12)$ Dentro de los paréntesis, realice la multiplicación.

$= 20 + 6(-4)$ Dentro de los paréntesis, realice la resta.

$= 20 + (-24)$ Realice la multiplicación.

$= -4$ Realice la suma.

Para **evaluar fórmulas que involucran raíces cuadradas,** se reemplazan las letras con números específicos y después se utiliza la regla del orden de las operaciones.

Evalúe $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ para $c = 25$ y $b = 20$.

$a = \sqrt{c^2 - b^2}$ Esta es la fórmula a evaluar.

$= \sqrt{25^2 - 20^2}$ Reemplace c con 25 y b con 20.

$= \sqrt{625 - 400}$ Evalúe las expresiones exponenciales.

$= \sqrt{225}$ Realice la resta.

$= 15$ Evalúe la raíz cuadrada.

Si un número no es un cuadrado perfecto, se puede utilizar la tecla raíz cuadrada $\boxed{\sqrt{\ }}$ en una calculadora (o una tabla de raíces cuadradas) para encontrar su **raíz cuadrada aproximada.**

Aproxime $\sqrt{149}$. Redondee a la centésima más cercana.

A partir de una calculadora científica se obtiene $\sqrt{149} \approx 12.20655562$. Redondeado a la centésima más cercana,

$\sqrt{149} \approx 12.21$

EJERCICIOS DE REPASO

109. Encuentre las dos raíces cuadradas del 25.

110. Complete los espacios: $\sqrt{49} =$ ☐ debido a que ☐$^2 = 49$.

Evalúe cada raíz cuadrada sin utilizar una calculadora.

111. $\sqrt{49}$

112. $-\sqrt{16}$

113. $\sqrt{100}$

114. $\sqrt{0.09}$

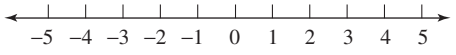
115. $\sqrt{\dfrac{64}{169}}$

116. $\sqrt{0.81}$

117. $-\sqrt{\dfrac{1}{36}}$

118. $\sqrt{0}$

119. Grafique cada raíz cuadrada: $\sqrt{9}, -\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{16}$ (*Sugerencia:* Use una calculadora o una tabla de raíces cuadradas para aproximar cualquier raíz cuadrada, cuando sea necesario.)



120. Use una calculadora para aproximar cada raíz cuadrada a la centésima más cercana.

a. $\sqrt{19}$ **b.** $\sqrt{598}$ **c.** $\sqrt{12.75}$

Evalúe cada expresión sin utilizar una calculadora.

121. $-3\sqrt{100}$

122. $5\sqrt{196}$

123. $-3\sqrt{49} - \sqrt{36}$

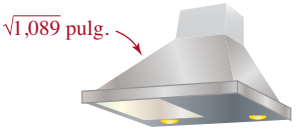
124. $\sqrt{\dfrac{100}{9}} + \sqrt{225}$

125. $40 + 6[5^2 - (7 - 2)\sqrt{16}]$

126. $1 - 7[6^2 + (1 + 2)\sqrt{81}]$

127. Evalúe $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ para $c = 17$ y $a = 15$.

128. HOJA DE METAL Encuentre la longitud del lado de la campana extractora mostrada en la ilustración abajo.



129. ¿Entre cuáles dos números naturales se localizaría el $\sqrt{83}$ cuando se graficara en una recta numérica?

130. $\sqrt{7} \approx 2.646$. Explique por qué se utiliza un símbolo $\approx$ y no un símbolo $=$.

CAPÍTULO 4 EXAMEN

1. Complete los espacios.

a. Copie la siguiente suma. Etiquete cada *sumando* y la *suma.*

$$\begin{array}{r} 2.67 \leftarrow \square \\ +\,6.01 \leftarrow \square \\ \hline 8.68 \leftarrow \square \end{array}$$

b. Copie la siguiente resta. Etiquete el *minuendo,* el *sustraendo* y la *diferencia.*

$$\begin{array}{r} 9.6 \leftarrow \square \\ -\,6.2 \leftarrow \square \\ \hline 3.4 \leftarrow \square \end{array}$$

c. Copie la siguiente multiplicación. Etiquete los *factores* y el *producto.*

$$\begin{array}{r} 1.3 \leftarrow \square \\ \times\ 7 \leftarrow \square \\ \hline 9.1 \leftarrow \square \end{array}$$

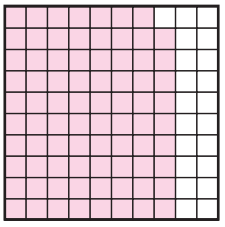
d. Copie la siguiente división. Etiquete el *dividendo,* el *divisor* y el *cociente.*

$$\begin{array}{r} 3.4 \leftarrow \square \\ \square \rightarrow 2\overline{)6.8} \leftarrow \square \end{array}$$

e. 0.6666 . . . y 0.8333 . . . son ejemplos de decimales _____.

f. Al símbolo $\sqrt{\ }$ se le llama símbolo del _____.

2. Exprese la cantidad de la región cuadrada que está sombreada utilizando una fracción y un decimal.



3. Considere el número decimal: 629.471

a. ¿Cuál es el valor posicional del dígito 1?

b. Cuál dígito indica el número de décimas?

c. ¿Cuál dígito indica el número de centenas?

d. ¿Cuál es el valor posicional del dígito 2?

4. PUREZA DEL AGUA El departamento de salud de un condado muestreó el contenido de contaminación del agua entubada en cinco ciudades, con los resultados mostrados.

Clasifique las ciudades en orden, del agua entubada más sucia a la más limpia.

Ciudad	Contaminación, partes por millón
Monroe	0.0909
Covington	0.0899
Paston	0.0901
Cadia	0.0890
Selway	0.1001

5. Escriba *cuatro mil quinientos diecinueve y veintisiete diezmilésimas* en forma estándar.

6. Escriba cada decimal en
- forma expandida
- palabras
- como una fracción o un número mixto. (No tiene que simplificar la fracción.)

a. PATINAJE Gary Hardwick de Carlsbad, California, fijó el récord de velocidad de patinaje de 62.55 mph en 1998. (Fuente: skateboardballbearings.com)

b. DINERO Una moneda de 10 centavos pesa 0.08013 onzas.

7. Redondee cada número decimal al valor posicional indicado.

a. 461.728 a la décima más cercana

b. 2,733.0495 a la milésima más cercana

c. −1.9833732 a la millonésima más cercana

8. Redondee $0.648209 al centavo más cercano.

Desarrolle cada operación.

9. 4.56 + 2 + 0.896 + 3.3

10. Reste 39.079 de 45.2

11. $(0.32)^2$

12. $\dfrac{0.1368}{0.24}$

13. $-6.7(-2.1)$

14. $\begin{array}{r} 8.7 \\ \times\ 0.004 \\ \hline \end{array}$

15. $11\overline{)13}$

16. $-2.4 - (-1.6)$

17. Divida. Redondee el cociente a la centésima más cercana:

$$\frac{12.146}{-5.3}$$

18. **a.** Estime el producto utilizando el redondeo por la izquierda: 34 · 6.83

b. Estime el cociente: 3,907.2 ÷ 19.3

19. Desarrolle cada operación de manera mental.

a. 567.909 ÷ 1,000

b. 0.00458 · 100

20. Escriba 61.4 mil millones en notación estándar.

21. DAÑO POR TERREMOTO Después de un terremoto, los geólogos encontraron que el suelo en el lado oeste de la línea de falla había descendido 0.834 pulgadas. La siguiente semana, una réplica fuerte ocasionó que la misma área se hundiera 0.192 pulgadas más. ¿Qué tanto descendió el suelo en el lado oeste de la falla debido al terremoto y la réplica?

22. CIUDAD DE NUEVA YORK Refiérase a la ilustración a la derecha. El Parque central, el cual se encuentra en medio de Manhattan, es el parque mejor conocido de la ciudad. Es de 2.5 millas de largo y 0.5 millas de ancho, ¿cuál es su área?

23. DIRECTORIOS TELEFÓNICOS Para imprimir un directorio telefónico, se utilizaron 565 hojas de papel. Si el directorio es de 2.26 pulgadas de grosor, ¿cuál es el grosor de cada hoja de papel?

24. CONTABILIDAD En un complejo de patinaje en hielo, las entradas el viernes eran de \$130.25 para el patinaje bajo techo y de \$162.25 para el patinaje al aire libre. El sábado, las cantidades correspondientes eran de \$140.50 y \$175.75. ¿En qué día, viernes o sábado, fueron más caras las entradas? ¿Cuánto más caras?

25. QUÍMICA En un experimento en un laboratorio, una químico mezcló tres compuestos para formar una mezcla que pesaba 4.37 g. Después, descubrió que había olvidado registrar el peso del compuesto C en sus notas. Encuentre el peso del compuesto C utilizado en el experimento.

	Peso
Compuesto A	1.86 g
Compuesto B	2.09 g
Compuesto C	?
Total de la mezcla	4.37 g

26. PESO DEL AGUA Un galón de agua pesa 8.33 libras. ¿Cuánto pesa el agua en un jarrón de $2\frac{1}{2}$ galones?

27. Evalúe la fórmula $C = 2\pi r$ para $\pi = 3.14$ y $r = 1.7$.

28. Escriba cada fracción como un decimal.

a. $\frac{17}{50}$ **b.** $\frac{5}{12}$

Evalúe cada expresión.

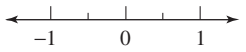
29. $4.1 - (3.2)(0.4)^2$

30. $\left(\frac{2}{5}\right)^2 + 6\left|-6.2 - 3\frac{1}{4}\right|$

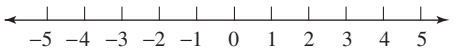
31. $8 - 2\left(2^4 - 60 + 6\sqrt{81}\right)$

32. $\frac{2}{3} + 0.7$ (Trabaje en términos de fracciones.)

33. a. Grafique $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{3}$ y $-\frac{4}{5}$ en una recta numérica. Etiquete cada punto utilizando el equivalente decimal de la fracción.



b. Grafique $\sqrt{16}$, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{9}$ y $-\sqrt{5}$ en una recta numérica. (*Sugerencia:* Cuando sea necesario, utilice una calculadora o una tabla de raíces cuadradas para aproximar una raíz cuadrada.)



34. ENSALADAS Un comprador adquiere $\frac{3}{4}$ de libra de ensalada de patatas, a un precio de \$5.60 la libra y $\frac{1}{3}$ de libra de ensalada de col, vendida a \$4.35 la libra. Encuentre el costo total de los productos.

35. Use una calculadora para evaluar $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ para $a = 12$ y $b = 35$.

36. Escriba cada número en forma decimal.

a. $-\frac{27}{25}$ **b.** $2\frac{9}{16}$

37. Complete los espacios: $\sqrt{144} =$ ☐ debido a que ☐$^2 = 144$.

38. Coloque un símbolo $<$, $>$ o $=$ en el recuadro para formar un enunciado verdadero.

a. -6.78 ☐ -6.79

b. 0.3 ☐ $\frac{3}{8}$

c. $\sqrt{\frac{16}{81}}$ ☐ $0.\overline{4}$

d. 0.45 ☐ $0.\overline{45}$

Evalúe cada expresión sin utilizar una calculadora.

39. $-2\sqrt{25} + 3\sqrt{49}$

40. $\sqrt{\frac{1}{36}} - \sqrt{\frac{1}{25}}$

41. Evalúe cada raíz cuadrada sin utilizar una calculadora.

a. $-\sqrt{0.04}$

b. $\sqrt{1.69}$

c. $\sqrt{225}$

d. $-\sqrt{121}$

42. Aunque el decimal 3.2999 contiene más dígitos que el 3.3, es menor que el 3.3. Explique por qué es esto.

CAPÍTULOS 1–4 REPASO ACUMULATIVO

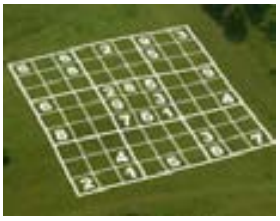
1. Escriba el 154,302
   a. en palabras
   b. en forma expandida [Sección 1.1]

2. Use el 3, el 4 y el 5 para expresar la propiedad asociativa de la suma. [Sección 1.2]

3. Sume: 9,339 + 471 + 6,883 [Sección 1.2]

4. Reste 199 de 301. [Sección 1.3]

5. SUDOKU El Sudoku más grande del mundo se labró en una colina cerca de Bristol, Inglaterra. Medía 275 pies por 275 pies. Encuentre el área cubierta por el Sudoku de forma cuadrada. (Fuente: joe-ks.com) [Sección 1.4]


Tim Anderson Photography Ltd/Sky 1

6. Divida: $43\overline{)1{,}203}$ [Sección 1.5]

7. PODER EJECUTIVO El salario anual del presidente de Estados Unidos es de $400,000 y al vicepresidente se le pagan $221,100 al año. ¿Cuánto dinero más gana el presidente que el vicepresidente durante un periodo de cuatro años? [Sección 1.6]

8. Liste los factores del 20, de menor a mayor. [Sección 1.7]

9. Encuentre la factorización de primos del 220. [Sección 1.7]

10. Encuentre el mcm y el mfc del 100 y el 120. [Sección 1.8]

11. Encuentre la media (promedio) del 7, 1, 8, 2 y 2. [Sección 1.9]

12. Coloque un símbolo $<$ o $>$ en el recuadro para formar un enunciado verdadero: $|-50| \square -(-40)$ [Sección 2.1]

13. Sume: $-8 + (-5)$ [Sección 2.2]

14. Complete el espacio: La resta es lo mismo que la _____ del opuesto. [Sección 2.3]

15. CLIMA Marsha voló de su hogar en Minneapolis a Hawai para una semana de vacaciones. Voló en condiciones de nevasca y a una temperatura de $-11°$F y descendió del avión en un clima de 72°F. ¿Qué cambio de temperatura experimentó? [Sección 2.3]

16. Multiplique: $-3(-5)(2)(-9)$ [Sección 2.4]

17. Evalúe: $(-1)^5$ [Sección 2.4]

18. SUBMARINOS Como parte de un ejercicio de entrenamiento, el capitán de un submarino ordenó un descenso de 350 pies, nivelar por 10 minutos y después repetir el proceso varias veces. Si el submarino se encontraba en la superficie del océano al inicio del ejercicio, encuentre su profundidad a la 6a inmersión. [Sección 2.4]

19. Considere el enunciado de división $\frac{-15}{-5} = 3$. ¿Cuál es el enunciado de multiplicación relacionado? [Sección 2.5]

20. Divida: $-420{,}000 \div (-7{,}000)$ [Sección 2.5]

21. Complete la solución para evaluar la expresión. [Sección 2.6]

$$\begin{aligned}(-6)^2 - 2(5 - 4 \cdot 2) &= (-6)^2 - 2(5 - \square) \\ &= (-6)^2 - 2(\square) \\ &= \square - 2(-3) \\ &= 36 - (\square) \\ &= 36 + \square \\ &= 42\end{aligned}$$

22. Evalúe: $|-7(5)|$ [Sección 2.6]

23. Estime el valor de $-3{,}887 + (-5{,}806) + 4{,}701$ redondeando cada número a la centena más cercana. [Sección 2.6]

24. BANDERAS ¿Qué fracción de las barras de la bandera de E.U. son blancas? [Sección 3.1]

25. Aunque las fracciones listadas abajo parecen diferentes, representan el mismo valor. ¿Qué concepto ilustra esto? [Sección 3.1]

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12}$$

26. Simplifique: $\frac{90}{126}$ [Sección 3.1]

Desarrolle las operaciones. Simplifique el resultado.

27. $\frac{3}{8} \cdot \frac{7}{16}$ [Sección 3.2]

28. $-\frac{15}{8} \div 10$ [Sección 3.3]

29. $\frac{1}{9} + \frac{5}{6}$ [Sección 3.4]

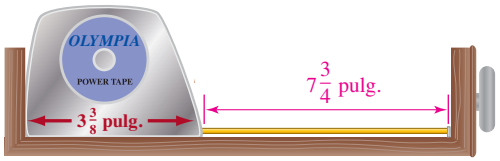
30. $-4\frac{1}{4}\left(-4\frac{1}{2}\right)$ [Sección 3.5]

31. $76\frac{1}{6} - 49\frac{7}{8}$ [Sección 3.6]

32. $\dfrac{\frac{5}{27}}{-\frac{5}{9}}$ [Sección 3.7]

33. ¿Qué es $\frac{1}{4}$ de $\frac{7}{16}$? [Sección 3.2]

34. CINTAS MÉTRICAS Use la información mostrada en la ilustración de abajo para determinar la longitud interior del cajón. [Sección 3.6]



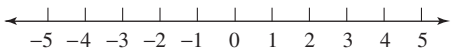
35. Evalúe: $\left(\frac{9}{20} \div 2\frac{2}{5}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)^2$ [Sección 3.7]

36. VIDRIO Algunos equipos electrónicos y médicos utilizan vidrio que es de sólo 0.00098 pulgadas de grosor. Redondee este número a la milésima más cercana. [Sección 4.1]

37. Coloque un símbolo $<$ o $>$ en el recuadro para formar un enunciado verdadero. [Sección 4.1]

356.1978 ☐ 356.22

38. Grafique $-3\frac{1}{4}, 0.75, -1.5, -\frac{9}{8}, 3.8$ y $\sqrt{4}$ en una recta numérica. [Sección 4.1]



Desarrolle las operaciones.

39. $56.228 + 5.6 + 39 + 29.37$ [Sección 4.2]

40. $7.001 - 5.9$ [Sección 4.2]

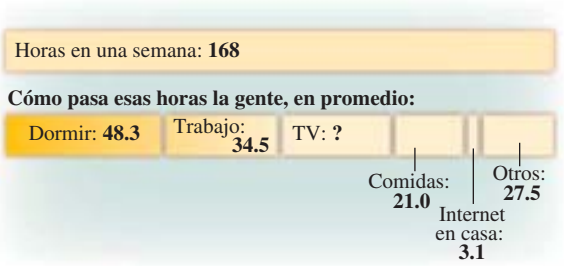
41. $-1.8(4.52)$ [Sección 4.3]

42. $56.012(0.001)$ [Sección 4.3]

43. $\dfrac{-21.28}{-3.8}$ [Sección 4.4]

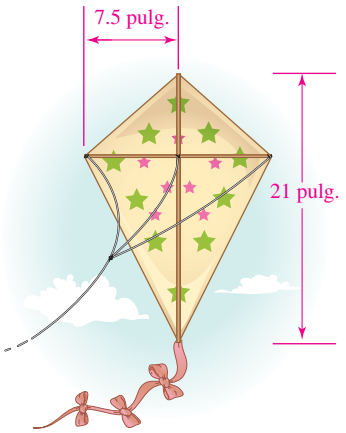
44. $\dfrac{0.897}{10{,}000}$ [Sección 4.4]

45. HORARIOS SEMANALES Use la información en la ilustración de abajo para determinar el número de horas durante una semana que por lo regular pasan los adultos viendo televisión. [Sección 4.2]



Fuente: National Sleep Foundation and the U.S. Bureau of Statistics

46. COMETAS Encuentre el área del frente de la cometa mostrada abajo. [Sección 4.3]



47. Evalúe la fórmula $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ para $F = 451$. Redondee a la décima más cercana. [Sección 4.4]

48. Escriba la fracción $\frac{5}{12}$ como un decimal. [Sección 4.5]

49. Evalúe: $\frac{3}{8}(-3.2) + \left(4\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)$ [Sección 4.5]

50. Complete los espacios: $\sqrt{64} =$ ☐, debido a que ☐$^2 = 64$. [Sección 4.6]

Evalúe cada expresión. [Sección 4.6]

51. $\sqrt{49}$

52. $\sqrt{\dfrac{225}{16}}$

53. $-4\sqrt{36} + 2\sqrt{81}$

54. $\sqrt{169} + 2\left(7^2 - 3\sqrt{144}\right)$

Razón, proporción y medición

5

5.1 Razones
5.2 Proporciones
5.3 Unidades de medición estadounidenses
5.4 Unidades métricas de medición
5.5 Conversión entre unidades estadounidenses y métricas
Resumen y repaso
Examen
Repaso acumulativo

Nick White/Getty Images

Carreras del campus

Chef

Los chefs preparan y cocinan una amplia variedad de alimentos —desde sopas, bocadillos y ensaladas hasta platos principales, entremeses y postres—. Laboran en diversas clases de restaurantes y establecimientos de venta de comida. Miden, mezclan y cocinan ingredientes de acuerdo con las recetas, utilizando una variedad de equipo y herramientas. También son responsables de dirigir las tareas de los demás trabajadores en la cocina, de estimar los requerimientos alimenticios y de ordenar los suministros de alimentos.

En el **Problema 90** del **Espacio para el estudio 5.2,** verá cómo un chef puede utilizar proporciones para determinar las cantidades correctas de cada ingrediente para preparar una hornada grande de brownies.

CARGO LABORAL:
Chef

EDUCACIÓN: Los programas de entrenamiento están disponibles a través de escuelas culinarias, de programas de título universitario de 2 o 4 años y de las fuerzas armadas.

PERSPECTIVA LABORAL: Se espera que las oportunidades de trabajo sean plenas hasta el 2016.

INGRESOS ANUALES: El salario promedio (medio) en el 2008 era de $55,976.

PARA MÁS INFORMACIÓN:
www.searchbydegree.com/chef-cook-career.html

Objetivos

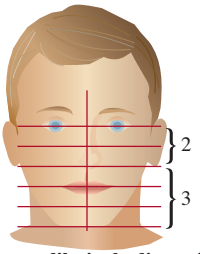
1. Escribir razones como fracciones.
2. Simplificar razones que involucran decimales y números mixtos.
3. Convertir unidades para escribir razones.
4. Escribir tasas como fracciones.
5. Encontrar tasas unitarias.
6. Encontrar la mejor compra con base en el precio unitario.

SECCIÓN 5.1
Razones

Las *razones* se utilizan con frecuencia para describir relaciones importantes entre dos cantidades. Aquí hay tres ejemplos:

Para preparar el combustible para un motor fuera de borda, se debe mezclar gasolina con aceite a razón de 50 a 1.

Para fabricar joyería de 14 quilates, se debe combinar el oro con otro metal a razón de 14 a 10.



En este dibujo, la distancia de los ojos a la nariz y la distancia de la nariz a la barbilla se dibujaron utilizando una razón de 2 a 3.

1 Escribir razones como fracciones

Las razones proporcionan una manera de comparar dos números o dos cantidades medidas en las mismas unidades.

Razones

Una **razón** es el cociente de dos números o el cociente de dos cantidades que tienen las mismas unidades.

Existen tres maneras de escribir una razón. La manera más común es como una fracción. Las razones también pueden escribirse como dos números separados por la palabra *a,* o como dos números separados por dos puntos. Por ejemplo, las razones descritas en las ilustraciones arriba pueden expresarse como:

$$\frac{50}{1}, \quad 14 \text{ a } 10 \quad \text{y} \quad 2:3$$

- La fracción $\frac{50}{1}$ se lee como "la razón de 50 a 1". — Una barra de fracción separa los números que se están comparando.
- 14 **a** 10 se lee como "la razón de 14 a 10". — La palabra "a" separa los números que se están comparando.
- 2**:**3 se lee como "la razón de 2 a 3". — Dos puntos separan los números que se están comparando.

Escribir una razón como una fracción

Para **escribir una razón como una fracción,** escriba el primer número (o cantidad) mencionado como el numerador y el segundo número (o cantidad) mencionado como el denominador. Después simplifique la fracción, si es posible.

EJEMPLO 1 Escriba cada razón como una fracción: **a.** 3 a 7 **b.** 10:11

Estrategia Se identificarán los números antes y después de la palabra *a* y los números antes y después de los dos puntos.

POR QUÉ La palabra *a* y los dos puntos separan los números a compararse en una razón.

Solución

Para escribir la razón como una fracción, el primer número mencionado es el numerador y el segundo número mencionado es el denominador.

a. La razón 3 **a** 7 puede escribirse como $\frac{3}{7}$. La fracción $\frac{3}{7}$ está en la forma más simple.

b. La razón 10 **:** 11 puede escribirse como $\frac{10}{11}$. La fracción $\frac{10}{11}$ está en la forma más simple.

Auto-revisión 1

Escriba cada razón como una fracción:

a. 4 a 9 **b.** 8:15

Ahora intente **Problema 13**

¡Cuidado! Cuando se escriba una razón como una fracción, la fracción debe estar en la forma más simple. (Recuerde a partir del Capítulo 3 que una fracción está en la **forma más simple,** o en los **términos más bajos,** cuando el numerador y el denominador no tienen factores comunes diferentes del 1.)

EJEMPLO 2 Escriba la razón 35 a 10 como una fracción en la forma más simple.

Estrategia Se traducirá la razón a partir de su forma dada en palabras a la forma fraccional. Después se buscará cualquier factor común para el numerador y el denominador y se eliminará.

POR QUÉ Se necesita asegurar que el numerador y el denominador no tienen factores comunes diferentes del 1. Si ese es el caso, la razón estará en la *forma más simple.*

Solución

La razón 35 **a** 10 puede escribirse como $\frac{35}{10}$. La fracción $\frac{35}{10}$ no está en la forma más simple.

Ahora, se simplifica la fracción utilizando el método explicado en la Sección 3.1.

$$\frac{35}{10} = \frac{\overset{1}{\cancel{5}} \cdot 7}{2 \cdot \underset{1}{\cancel{5}}}$$

Factorice el 35 como $5 \cdot 7$ y el 10 como $2 \cdot 5$. Después elimine el factor común de 5 en el numerador y el denominador.

$$= \frac{7}{2}$$

La razón 35 a 10 puede escribirse como la fracción $\frac{35}{10}$, la cual se simplifica a $\frac{7}{2}$ (se lee como "7 a 2"). Debido a que las fracciones $\frac{35}{10}$ y $\frac{7}{2}$ representan números iguales, se les llama **razones iguales.**

Auto-revisión 2

Escriba la razón 12 a 9 como una fracción en la forma más simple.

Ahora intente **Problemas 17 y 23**

¡Cuidado! Dado que las razones son comparaciones de dos números, en el Ejemplo 2 sería *incorrecto* escribir la razón $\frac{7}{2}$ como el número mixto $3\frac{1}{2}$. Las razones escritas como fracciones impropias son perfectamente aceptables —sólo asegúrese que el numerador y el denominador no tengan factores comunes diferentes del 1.

Para escribir una razón en la forma más simple se elimina cualquier factor común del numerador y el denominador al igual que cualquier unidad común.

Auto-revisión 3

EQUIPAJE DE MANO

a. Escriba la razón de la altura al largo del espacio para equipaje de mano mostrado en la ilustración en el Ejemplo 3 como una fracción en la forma más simple.

b. Escriba la razón de la longitud del espacio para equipaje de mano a su altura en la forma más simple.

Ahora intente **Problema 27**

EJEMPLO 3 *Equipaje de mano*

Una aerolínea permite que sus pasajeros transporten una pieza de equipaje en un avión sólo si se ajusta al espacio mostrado abajo.

a. Escriba la razón del ancho del espacio a su largo como una fracción en la forma más simple.

b. Escriba la razón del largo del espacio a su ancho como una fracción en la forma más simple.

Estrategia Para escribir cada razón como una fracción se identificará la cantidad antes de la palabra *a* y la cantidad después de ella.

POR QUÉ La primera cantidad mencionada es el numerador de la fracción y la segunda cantidad mencionada es el denominador.

Solución

a. La razón del ancho del espacio **a** su largo es $\frac{10 \text{ pulgadas}}{24 \text{ pulgadas}}$.

Para escribir la razón en la forma más simple se eliminan los factores comunes *y* las unidades comunes del numerador y el denominador.

$$\frac{10 \text{ pulgadas}}{24 \text{ pulgadas}} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot 5 \cancel{\text{ pulgadas}}}{\underset{1}{\cancel{2}} \cdot 12 \cancel{\text{ pulgadas}}} = \frac{5}{12}$$

Factorice el 10 como $2 \cdot 5$ y el 24 como $2 \cdot 12$. Después elimine el factor común de 2 y las unidades comunes de pulgadas del numerador y el denominador.

La razón ancho al largo del espacio para el equipaje de mano es $\frac{5}{12}$ (se lee como "5 a 12").

b. La razón del largo del espacio **a** su ancho es $\frac{24 \text{ pulgadas}}{10 \text{ pulgadas}}$.

$$\frac{24 \text{ pulgadas}}{10 \text{ pulgadas}} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot 12 \cancel{\text{ pulgadas}}}{\underset{1}{\cancel{2}} \cdot 5 \cancel{\text{ pulgadas}}} = \frac{12}{5}$$

Factorice el 24 y el 10. Después elimine el factor común de 2 y las unidades comunes de pulgadas del numerador y el denominador.

La razón largo a ancho del espacio para el equipaje de mano es $\frac{12}{5}$ (se lee como "12 a 5").

¡Cuidado! El Ejemplo 3 muestra que el orden es importante cuando se escribe una razón. La razón ancho a largo es $\frac{5}{12}$ mientras que la razón largo a ancho es $\frac{12}{5}$.

2 Simplificar razones que involucran decimales y números mixtos

EJEMPLO 4 Escriba la razón 0.3 a 1.2 como una fracción en la forma más simple.

Estrategia Después de escribir una razón como una fracción, se multiplicará por una forma de 1 para obtener una razón equivalente de números naturales.

POR QUÉ Una razón de números naturales es más fácil de comprender que una razón de decimales.

Solución

La razón 0.3 **a** 1.2 puede escribirse como $\frac{0.3}{1.2}$.

Para escribir esta como una razón de *números naturales* se necesita mover los puntos decimales en el numerador y el denominador una posición a la derecha. Recuerde que para encontrar el producto de un decimal y el 10, simplemente se mueve el punto decimal una posición a la derecha. Por tanto, se tiene que $\frac{10}{10}$ es la forma de 1 que se debe utilizar para costruir $\frac{0.3}{1.2}$ en una razón equivalente.

$$\frac{0.3}{1.2} = \frac{0.3}{1.2} \cdot \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{10}}$$ Multiplique la razón por una forma de 1.

$$\frac{0.3}{1.2} = \frac{0.3 \cdot \mathbf{10}}{1.2 \cdot \mathbf{10}}$$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$$= \frac{3}{12}$$ Realice la multiplicación moviendo el punto decimal una posición a la derecha. $0.3 \cdot 10 = 3$ y $1.2 \cdot 10 = 12$.

$$= \frac{1}{4}$$ Simplifique la fracción: $\frac{3}{12} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{3}} \cdot 4} = \frac{1}{4}$.

Auto-revisión 4

Escriba la razón 0.8 a 2.4 como una fracción en la forma más simple.

Ahora intente **Problemas 29 y 33**

PIENSE DETENIDAMENTE ***Razón estudiante a instructor***

"Una atmósfera de clase más personal en ocasiones puede ser una adaptación más simple para los estudiantes recién ingresados. Es menos probable que se sientan como un número, una sensación que en ocasiones puede impactar las calificaciones del primer semestre de los estudiantes".

A partir de *The Importance of Class Size* por Stephen Pemberton

La información de abajo proviene de un estudio a nivel nacional de los programas de matemáticas en universidades de dos años. Determine cuál curso tiene la razón estudiante a instructor más baja. (Asuma que hay un instructor por sección.)

	Matemáticas básicas	Álgebra elemental	Álgebra intermedia
Estudiantes matriculados	101,200	367,920	318,750
Número de secciones	4,400	15,330	12,750

Fuente: Conference Board of the Mathematical Science, 2005 CBMS Survey of Undergraduate Programs (Los datos se han redondeado para obtener razones que contengan números enteros.)

Auto-revisión 5

Escriba la razón $3\frac{1}{3}$ a $1\frac{1}{9}$ como una fracción en la forma más simple.

Ahora intente **Problema 37**

EJEMPLO 5 Escriba la razón $4\frac{2}{3}$ a $1\frac{1}{6}$ como una fracción en la forma más simple.

Estrategia Después de escribir la razón como una fracción, se utilizará el método para la simplificación de una fracción compleja de la Sección 3.7 a fin de obtener una razón equivalente de números naturales.

POR QUÉ Una razón de números enteros es más fácil de comprender que una razón de números mixtos.

Solución

La razón $4\frac{2}{3}$ **a** $1\frac{1}{6}$ puede escribirse como $\dfrac{4\frac{2}{3}}{1\frac{1}{6}}$.

La razón resultante es una fracción compleja. Para escribir la razón en la forma más simple se desarrolla la división indicada por la barra de fracción principal (mostrada en rojo).

$$\frac{4\frac{2}{3}}{1\frac{1}{6}} = \frac{\frac{14}{3}}{\frac{7}{6}}$$ Escriba $4\frac{2}{3}$ y $1\frac{1}{6}$ como fracciones impropias.

$$= \frac{14}{3} \div \frac{7}{6}$$ Escriba la división indicada por la barra de fracción principal utilizando un símbolo ÷.

$$= \frac{14}{3} \cdot \frac{6}{7}$$ Use la regla para la división de fracciones: Multiplique la primera fracción por el recíproco de $\frac{7}{6}$, el cual es $\frac{6}{7}$.

$$= \frac{14 \cdot 6}{3 \cdot 7}$$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$$= \frac{2 \cdot \overset{1}{\cancel{7}} \cdot 2 \cdot \overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{3}} \cdot \underset{1}{\cancel{7}}}$$ Para simplificar la fracción, factorice el 14 como $2 \cdot 7$ y el 6 como $2 \cdot 3$. Después elimine los factores comunes de 3 y 7.

$$= \frac{4}{1}$$ Multiplique los factores restantes en el numerador. Multiplique los factores restantes en el denominador.

Por lo regular se simplificaría el resultado $\frac{4}{1}$ y se escribiría como 4. Pero dado que una razón compara dos números, se deja el resultado en forma fraccional.

3 Convertir unidades para escribir razones

Cuando una razón compara dos cantidades, ambas cantidades deben medirse en las mismas unidades. Por ejemplo, las pulgadas deben compararse con pulgadas, las libras con libras y los segundos con segundos.

Auto-revisión 6

Escriba la razón *6 pies a 3 yardas* como una fracción en la forma más simple. (*Sugerencia:* 3 pies = 1 yarda)

Ahora intente **Problema 41**

EJEMPLO 6 Escriba la razón *12 onzas a 2 libras* como una fracción en la forma más simple.

Estrategia Se convertirán las 2 libras a onzas y se escribirá una razón que compare onzas con onzas. Después se simplificará la razón.

POR QUÉ Una razón compara dos cantidades que tienen las *mismas* unidades. Cuando las unidades son diferentes, por lo regular es más sencillo escribir la razón utilizando la unidad de medición más pequeña. Dado que las onzas son menores que las libras, se comparará en onzas.

Solución

Para expresar las 2 libras en onzas, se utiliza el hecho de que hay 16 onzas en una libra.

$$2 \cdot 16 \text{ onzas} = 32 \text{ onzas}$$

Ahora se puede expresar la razón *12 onzas a 2 libras* utilizando las mismas unidades:

12 **onzas** a 32 **onzas**

Después se escribe la razón en forma de fracción y se simplifica.

$$\frac{12 \text{ onzas}}{32 \text{ onzas}} = \frac{3 \cdot \overset{1}{\cancel{4}} \cancel{\text{onzas}}}{\underset{1}{\cancel{4}} \cdot 8 \cancel{\text{onzas}}}$$

Para simplificar, factorice el 12 como 3 · 4 y 32 como 4 · 8. Después elimine el factor común de 4 y las unidades comunes de onzas del numerador y el denominador.

$$= \frac{3}{8}$$

La razón en la forma más simple es $\frac{3}{8}$.

4 Escribir tasas como fracciones.

Cuando se comparan dos cantidades que tienen unidades diferentes (y ninguna de las unidades puede convertirse a la otra), a la comparación se le llama **tasa** y se puede escribir como una fracción. Por ejemplo, en la etiqueta de la lata de pintura mostrada a la derecha, se observa que se necesita 1 cuarto de galón de pintura por cada 200 pies cuadrados a pintarse. Al escribir esto como una tasa en forma fraccional, se tiene

$$\frac{1 \text{ cuarto de galón}}{200 \text{ pies cuadrados}}$$

Se lee como "1 cuarto por 200 pies cuadrados".

El lenguaje de las matemáticas Aquí la palabra *por* está asociada con la operación de división y significa "por cada" o "para cada". Por ejemplo, cuando se dice 1 cuarto de galón de pintura *por* 200 pies cuadrados, se quiere decir 1 cuarto de galón de pintura *por cada* 200 pies cuadrados.

Tasas

Una **tasa** es el cociente de dos cantidades que tienen unidades diferentes.

Cuando escriba una tasa, siempre incluya las unidades. Algunos otros ejemplos de tasas son:

- 16 computadoras **para** 75 estudiantes
- 1,550 pies **en** 4.5 segundos
- 88 jitomates **a partir de** 3 plantas
- 250 millas **por** 2 galones de gasolina

El lenguaje de las matemáticas Como se observa arriba, las palabras *por, para, en* y *a partir de* se utilizan para separar las dos cantidades que se comparan en una tasa.

Escritura de una tasa como una fracción

Para **escribir una tasa como una fracción,** escriba la primera cantidad mencionada como el numerador y la segunda cantidad mencionada como el denominador y después simplifique, si es posible. Escriba las unidades como parte de la fracción.

Auto-revisión 7

TASAS DE CRECIMIENTO La angiosperma de crecimiento más rápido registrada creció 12 pies en 14 días. Escriba la tasa de crecimiento como una fracción en la forma más simple.

Ahora intente **Problemas 49 y 53**

EJEMPLO 7 ***Nevada*** De acuerdo con el *Guinness Book of World Records,* cayó un total de 78 pulgadas de nieve en Mile 47 Camp 47 de la división de Río Cooper, Arkansas, en un periodo de 24 horas en 1963. Escriba la tasa de la nevada como una fracción en la forma más simple.

Estrategia Se utilizará una fracción para comparar la cantidad de nieve que cayó (en pulgadas) con la cantidad de tiempo en la que cayó (en horas). Después se simplificará.

POR QUÉ Una tasa es un cociente de dos cantidades con unidades diferentes.

Solución

78 pulgadas **en** 24 horas puede escribirse como $\frac{78 \text{ pulgadas}}{24 \text{ horas}}$.

Ahora, se simplifica la fracción.

$$\frac{78 \text{ pulgadas}}{24 \text{ horas}} = \frac{\overset{1}{\cancel{6}} \cdot 13 \text{ pulgadas}}{4 \cdot \underset{1}{\cancel{6}} \text{ horas}}$$

Para simplificar, factorice el 78 como 6 · 13 y el 24 como 4 · 6. Después elimine el factor común de 6 del numerador y el denominador.

$$= \frac{13 \text{ pulgadas}}{4 \text{ horas}}$$

Dado que las unidades son diferentes, no pueden eliminarse.

La nieve cayó a una tasa de 13 pulgadas en 4 horas.

5 Encontrar tasas unitarias

Tasa unitaria

Una **tasa unitaria** es una tasa en la que el denominador es de 1.

Para ilustrar el concepto de tasa unitaria, suponga que un conductor realiza el viaje de 354 millas de Pittsburgh a Indianápolis en 6 horas. Entonces la tasa del automovilista (o de manera más específica, la tasa de la velocidad) está dada por

$$\frac{354 \text{ millas}}{6 \text{ horas}} = \frac{\overset{1}{\cancel{6}} \cdot 59 \text{ millas}}{\underset{1}{\cancel{6}} \cdot \text{ horas}}$$

Factorice el 354 como 6 · 59 y elimine el factor común de 6 del numerador y el denominador.

$$= \frac{59 \text{ millas}}{1 \text{ hora}}$$

Dado que las unidades son diferentes, no se pueden eliminar. Observe que el denominador es de 1.

También se puede encontrar la tasa unitaria dividiendo el 354 entre el 6.

Tasa:

$$\frac{354 \text{ millas}}{6 \text{ horas}}$$

$$\begin{array}{r} 59 \\ 6\overline{)354} \\ -\ 30 \\ \hline 54 \\ -\ 54 \\ \hline 0 \end{array}$$

Este cociente es la parte numérica de la tasa unitaria, escrita como una fracción.

La parte numérica del denominador siempre es el 1.

Tasa unitaria:

$$\frac{59 \text{ millas}}{1 \text{ hora}}$$

La tasa unitaria $\frac{59 \text{ millas}}{1 \text{ hora}}$ puede expresarse en cualquiera de las siguientes formas:

$$59 \frac{\text{millas}}{\text{hora}}, \quad 59 \text{ millas por hora}, \quad 59 \text{ millas/hora} \quad \text{o} \quad 59 \text{ mph}$$

El lenguaje de las matemáticas Con frecuencia se utiliza una barra diagonal / para escribir una tasa unitaria. En tales casos, la barra diagonal se lee como "por". Por ejemplo, 33 libras/galón se lee como 33 libras *por* galón.

Escritura de una tasa como una tasa unitaria

Para **escribir una tasa como una tasa unitaria,** divida el numerador de la tasa entre el denominador.

EJEMPLO 8 ***Café*** Hay 384 calorías en una taza de 16 onzas de café frapuccino acaramelado con crema batida. Escriba la tasa como una tasa unitaria. (*Sugerencia:* Encuentre el número de calorías en 1 onza.)

Estrategia Se traducirá la tasa a partir de su forma dada en palabras a su forma fraccional. Después se desarrollará la división indicada.

POR QUÉ Para escribir una tasa como una tasa unitaria se divide el numerador de la tasa entre el denominador.

Solución

384 calorías **en** 16 onzas puede escribirse como $\frac{384 \text{ calorías}}{16 \text{ onzas}}$.

Para encontrar el número de calorías en 1 onza del café (la tasa unitaria) se desarrolla la división como está indicada por la barra de fracción:

$$\begin{array}{r} 24 \\ 16\overline{)384} \\ -32 \\ \hline 64 \\ -64 \\ \hline 0 \end{array}$$

Divida el numerador de la tasa entre el denominador.

Para el café frapuccino acaramelado con crema batida, la tasa unitaria es $\frac{24 \text{ calorías}}{1 \text{ onza}}$, la cual puede escribirse como 24 calorías por onza o 24 calorías/onza.

Auto-revisión 8

NUTRICIÓN Hay 204 calorías en una lata de 12 onzas de jugo de arándano. Escriba la tasa como una tasa unitaria. (*Sugerencia:* Encuentre el número de calorías en 1 onza.)

Ahora intente **Problema 57**

Auto-revisión 9

TRABAJOS DE TIEMPO COMPLETO Joan gana $436 por una semana de trabajo de 40 horas dirigiendo una tienda de ropa. Escriba esta tasa como una tasa unitaria. (*Sugerencia:* Encuentre la tasa de paga por hora.)

Ahora intente **Problema 61**

EJEMPLO 9 ***Trabajos de tiempo parcial*** Un estudiante gana $74 por 8 horas de trabajo en una librería. Escriba esta tasa como una tasa unitaria. (*Sugerencia:* Encuentre la tasa de paga por hora.)

Estrategia Se traducirá la tasa de su forma proporcionada en palabras a su forma fraccional. Después se desarrollará la división indicada.

POR QUÉ Para escribir una tasa como una tasa unitaria se divide el numerador de la tasa entre el denominador.

Solución

$74 **por** trabajar 8 horas puede escribirse como $\frac{\$74}{8 \text{ horas}}$.

Para encontrar la tasa de paga por 1 hora de trabajo (la tasa unitaria), se divide el 74 entre el 8.

$$\begin{array}{r} 9.25 \\ 8\overline{)74.00} \\ -72 \\ \hline 20 \\ -16 \\ \hline 40 \\ -40 \\ \hline 0 \end{array}$$

Escriba un punto decimal y dos ceros adicionales a la derecha del 4.

La tasa unitaria de paga es $\frac{\$9.25}{1 \text{ hora}}$, la cual puede escribirse como $9.25 por hora o $9.25/hr.

6 Encontrar la mejor compra con base en el precio unitario

Si una abarrotería vende un paquete de 5 libras de hamburguesa por $18.75, un consumidor podría desear conocer cuál es el costo de la hamburguesa por libra. Cuando se encuentra el costo de 1 libra de la hamburguesa, se está encontrando un **precio unitario.** Para encontrar el precio unitario de un producto se comienza comparando su precio con el número de unidades.

$$\frac{\$18.75 \leftarrow \text{Precio}}{5 \text{ libras} \leftarrow \text{Número de unidades}}$$

Después se divide el precio entre el número de unidades.

$$\begin{array}{r} 3.75 \\ 5\overline{)18.75} \end{array}$$

El precio unitario de la hamburguesa es de $3.75 por libra.

Otros ejemplos de precios unitarios son:

- $8.15 por onza
- $200 por día
- $0.75 por pie

Precio unitario

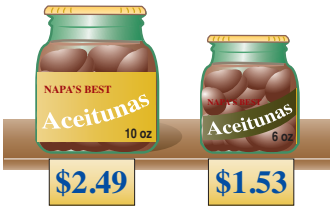
Un **precio unitario** es una tasa que indica cuánto se paga por *una* unidad (o *un* producto). Es el cociente del precio entre el número de unidades.

$$\text{Precio unitario} = \frac{\text{precio}}{\text{número de unidades}}$$

Al comprar, con frecuencia es difícil determinar las mejores compras debido a que los productos que se adquieren vienen en varios tamaños y marcas diferentes. La comparación al comprar puede ser mucho más sencilla encontrando los precios unitarios. *La mejor compra es el producto que tiene el precio unitario más bajo.*

EJEMPLO 10 *Comparación al comprar*

Las aceitunas vienen envasadas en un frasco de 10 onzas, el cual se vende por $2.94 o en un frasco de 6 onzas, el cual se vende por $1.53. ¿Cuál es la mejor compra?



Estrategia Se encontrará el precio unitario para cada frasco de aceitunas. Después se identificará cuál frasco tiene el precio unitario más bajo.

POR QUÉ La mejor compra es el frasco de aceitunas que tiene el menor precio unitario.

Solución

Para encontrar el precio unitario de un frasco de aceitunas, se escribe el cociente de su precio y su peso y después se desarrolla la división indicada. Antes de dividir, se convierte cada precio de dólares a centavos para que el precio unitario pueda expresarse en centavos por onza.

Frasco de 10 onzas:

$$\frac{\$2.49}{10 \text{ oz}} = \frac{¢249}{10 \text{ oz}}$$

Escriba la tasa: $\frac{\text{precio}}{\text{número de unidades}}$.
Después cambie $2.49 a 249 centavos.

$$= ¢24.9 \text{ por oz}$$

Divida el 249 entre el 10 moviendo el punto decimal 1 punto a la izquierda.

Frasco de 6 onzas:

$$\frac{\$1.53}{6 \text{ oz}} = \frac{¢153}{6 \text{ oz}}$$

Escriba la tasa: $\frac{\text{precio}}{\text{número de unidades}}$.
Después cambie $1.53 a 153 centavos.

$$= ¢25.5 \text{ por oz}$$

Realice la división.

$$\begin{array}{r} 25.5 \\ 6\overline{)153.0} \\ -12 \\ \hline 33 \\ -30 \\ \hline 30 \\ -30 \\ \hline 0 \end{array}$$

Una onza por ¢24.9 es una mejor compra que una onza por ¢25.5. El precio unitario es menor cuando las aceitunas se compran en frascos de 10 onzas, por lo que es la mejor compra.

Auto-revisión 10

COMPARACIÓN AL COMPRAR
Un restaurante de comida rápida vende un refresco de cola de 12 onzas por ¢72 y un refresco de cola de 16 onzas por ¢99. ¿Cuál es la mejor compra?

Ahora intente **Problemas 65 y 101**

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. **a.** $\frac{4}{9}$ **b.** $\frac{8}{15}$ **2.** $\frac{4}{3}$ **3.** **a.** $\frac{2}{3}$ **b.** $\frac{3}{2}$ **4.** $\frac{1}{3}$ **5.** $\frac{3}{1}$ **6.** $\frac{2}{3}$ **7.** $\frac{6 \text{ pies}}{7 \text{ días}}$
8. 17 calorías/oz **9.** $10.90 por hora **10.** el refresco de cola de 12 oz

SECCIÓN 5.1 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Complete los espacios.

1. Una _____ es el cociente de dos números o el cociente de dos cantidades que tienen las mismas unidades.
2. Una _____ es el cociente de dos cantidades que tienen unidades diferentes.
3. Una tasa _____ es una tasa en la que el denominador es el 1.
4. Un _____ unitario es una tasa que indica cuánto se paga por unidad o por un producto.

CONCEPTOS

5. Para escribir la razón $\frac{15}{24}$ en los términos más bajos, se elimina cualquier factor común del numerador y el denominador. ¿Qué factor común tienen?
6. Complete la solución. Escriba la razón $\frac{14}{21}$ en los términos más bajos.

$$\frac{14}{21} = \frac{2 \cdot 7}{\square \cdot \square} = \frac{2 \cdot \overset{1}{\cancel{7}}}{\square \cdot \underset{1}{\cancel{7}}} = \frac{\square}{\square}$$

7. Considere la razón $\frac{0.5}{0.6}$. ¿Por qué número se debe multiplicar el numerador y el denominador para hacer ésta una razón de números enteros?
8. ¿Qué debe hacerse para escribir la razón $\frac{15 \text{ pulgadas}}{22 \text{ pulgadas}}$ en la forma más simple?
9. Escriba $\frac{11 \text{ minutos}}{1 \text{ hora}}$ para que compare las mismas unidades y después simplifique.

10. **a.** Considere la tasa $\frac{\$248}{16 \text{ horas}}$. ¿Qué división debe desarrollarse para encontrar la tasa unitaria en dólares por hora?
    b. Suponga que se venden 3 pares de calcetines por \$7.95: $\frac{\$7.95}{3 \text{ pares}}$. ¿Qué división debe desarrollarse para encontrar el precio unitario de un par de calcetines?

NOTACIÓN

11. Escriba la razón del largo de la bandera a su ancho mediante una fracción, utilizando la palabra *a* y empleando dos puntos.

12. La razón $\frac{55 \text{ millas}}{1 \text{ hora}}$ puede expresarse como
    - 55 _____ _____ _____ (en tres palabras)
    - 55 _____ / _____ (en dos palabras y una diagonal)
    - 55 _____ _____ _____ (en tres letras)

PRÁCTICA GUIADA

Escriba cada razón como una fracción. **Vea el Ejemplo 1.**

13. 5 a 8
14. 3 a 23
15. 11:16
16. 9:25

Escriba cada razón como una fracción en la forma más simple. **Vea el Ejemplo 2.**

17. 25 a 15
18. 45 a 35
19. 63:36
20. 54:24
21. 22:33
22. 14:21
23. 17 a 34
24. 19 a 38

Escriba cada razón como una fracción en la forma más simple. **Vea el Ejemplo 3.**

25. 4 onzas a 12 onzas
26. 3 pulgadas a 15 pulgadas
27. 24 millas a 32 millas
28. 56 yardas a 64 yardas

Escriba cada razón como una fracción en la forma más simple. **Vea el Ejemplo 4.**

29. 0.3 a 0.9
30. 0.2 a 0.6
31. 0.65 a 0.15
32. 2.4 a 1.5
33. 3.8:7.8
34. 4.2:8.2
35. 7:24.5
36. 5:22.5

Escriba cada razón como una fracción en la forma más simple. **Vea el Ejemplo 5.**

37. $2\frac{1}{3}$ a $4\frac{2}{3}$
38. $1\frac{1}{4}$ a $1\frac{1}{4}$
39. $10\frac{1}{2}$ a $1\frac{3}{4}$
40. $12\frac{3}{4}$ a $2\frac{1}{8}$

Escriba cada razón como una fracción en la forma más simple. **Vea el Ejemplo 6.**

41. 12 minutos a 1 hora
42. 8 onzas a 1 libra
43. 3 días a 1 semana
44. 4 pulgadas a 1 yarda
45. 18 meses a 2 años
46. 8 pies a 4 yardas
47. 21 pulgadas a 3 pies
48. 32 segundos a 2 minutos

Escriba cada tasa como una fracción en la forma más simple. **Vea el Ejemplo 7.**

49. 64 pies en 6 segundos
50. 45 aplicaciones para 18 aberturas
51. 75 días por 20 galones de agua
52. 3,000 estudiantes en una carrera de 16 años
53. 84 logrados de 100 intentos
54. 16 correctos en comparación con 34 incorrectos
55. 18 pulsaciones cada 12 mediciones
56. 10 pulgadas como resultado de 30 giros

Escriba cada tasa como una tasa unitaria. **Vea el Ejemplo 8.**

57. 60 revoluciones en 5 minutos
58. 14 viajes cada 2 meses
59. \$50,000 pagados en 10 años
60. 245 obsequios para 35 niños

Escriba cada tasa como una tasa unitaria. **Vea el Ejemplo 9.**

61. 12 errores en 8 horas

62. 114 ocasiones en un periodo de 12 meses

63. 4,007,500 personas viviendo en 12,500 millas cuadradas

64. 117.6 libras de presión sobre 8 pulgadas cuadradas

Encuentre el precio unitario en cada caso. **Vea el Ejemplo 10.**

65. Cobran $48 por 12 minutos.

66. 150 barriles cuestan $4,950.

67. Cuatro vendidos por $272.

68. 7,020 pesos comprarán seis boletos.

69. Se venden 65 onzas por 78 centavos.

70. Por 7 docenas, pagará $10.15.

71. $3.50 por 50 pies

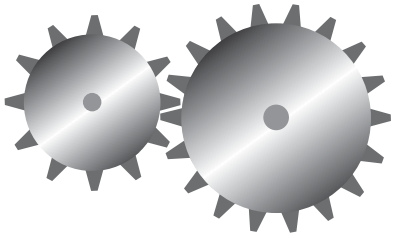
72. $4 mil millones en un periodo de 5 meses

APLICACIONES

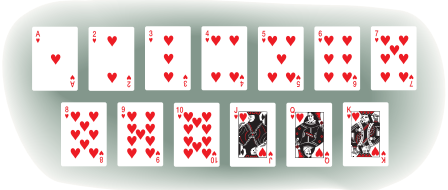
73. RAZONES DEL ENGRANAJE Refiérase a la ilustración de abajo.

a. Escriba la razón del número de dientes del engrane pequeño al número de dientes del engrane grande en la forma más simple.

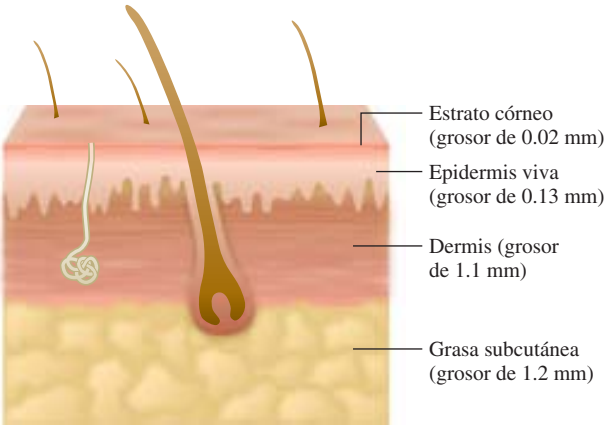
b. Escriba la razón del número de dientes del engrane grande al número de dientes del engrane pequeño en la forma más simple.



74. CARTAS Se muestra el palo de corazones de una baraja de cartas para jugar. ¿Cuál es la razón del número de cartas con figura al número total de cartas en el palo? (*Sugerencia:* Una carta con figura es la sota, la reina o el rey.)



75. PIEL Refiérase a la sección transversal de la piel humana mostrada abajo. Escriba la razón del grosor del estrato córneo al grosor de la dermis en la forma más simple. (Fuente: Philips Research Laboratories.)



76. PINTADO A una pared se le aplica un recubrimiento de 9.5 millares de pintura a prueba de fuego con un rodillo. (Un *millar* es una unidad de medición igual a 1/1,000 de pulgada.) El recubrimiento se seca a un grosor de 5.7 millares. Escriba la razón del grosor del recubrimiento cuando está fresco al grosor cuando está seco en la forma más simple.

77. PANIFICACIÓN Una receta para pan de masa fermentada requiere $5\frac{1}{4}$ tazas de harina de trigo y $1\frac{3}{4}$ tazas de agua. Escriba la razón de la harina al agua en la forma más simple.

78. POSTRES Refiérase a la tarjeta de una receta mostrada abajo. Escriba la razón de la leche al azúcar en la forma más simple.

Chocolate congelado a medio derretir
(8 porciones)

Una vez congelado, este chocolate puede cortarse en cubos, almacenarse en bolsas de plástico selladas para un postre de improviso.

$\frac{1}{2}$ tazas de polvo de chocolate holandés, colado

$1\frac{1}{2}$ tazas de azúcar

$3\frac{1}{2}$ tazas de leche desnatada

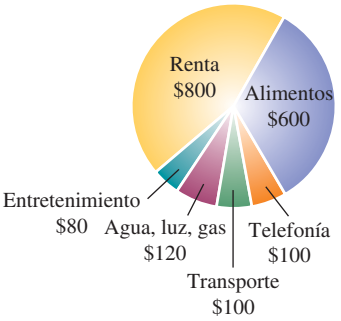
79. PRESUPUESTOS Refiérase a la gráfica circular abajo que muestra el presupuesto mensual de una familia. Escriba cada razón en la forma más simple.

a. Encuentre la cantidad total del presupuesto mensual.

b. Escriba la razón de la cantidad presupuestada para la renta al presupuesto total.

c. Escriba la razón de la cantidad presupuestada para alimentos al presupuesto total.

d. Escriba la razón de la cantidad presupuestada para la telefonía al presupuesto total.



80. IMPUESTOS Refiérase a la lista de deducciones de impuestos mostrada abajo. Escriba cada razón en la forma más simple.

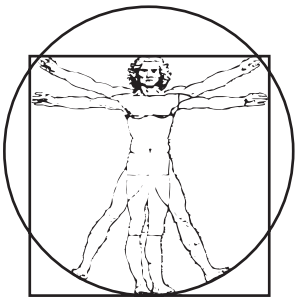
a. Escriba la razón de la deducción del impuesto predial a las deducciones totales.

b. Escriba la razón de las contribuciones a caridad a las deducciones totales.

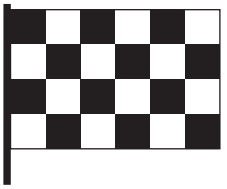
c. Escriba la razón de la deducción del interés hipotecario a la deducción de las cuotas sindicales.

Rubro	Cantidad
Gastos médicos	$875
Impuesto predial	$1,250
Contribuciones a caridad	$1,750
Interés hipotecario	$4,375
Cuotas sindicales	$500
Deducciones totales	$8,750

81. HISTORIA DEL ARTE Leonardo da Vinci dibujó la figura humana mostrada dentro de un cuadrado. Escriba la razón de la longitud de los brazos estirados por completo del hombre a su altura. (*Sugerencia:* Los cuatro lados del cuadrado tienen el mismo largo.)



82. BANDERAS La bandera a cuadros está compuesta de 24 cuadrados de igual tamaño. ¿Cuál es la razón del ancho de la bandera a su largo? (*Sugerencia:* Los cuatro lados del cuadrado son del mismo largo.)



83. BANCARROTA Después de declararse en bancarrota, una compañía podría pagar a sus acreedores sólo ¢5 por dólar. Escriba esto como una razón en la forma más simple.

84. HUEVOS Un huevo de avestruz de tamaño promedio pesa 3 libras y un huevo de gallina de tamaño promedio pesa 2 onzas. Escriba la razón del peso de un huevo de avestruz al peso de un huevo de gallina en la forma más simple.

85. CPR Un paramédico aplicó 125 compresiones a 50 respiraciones en un adulto sin pulso. ¿Qué tasa de compresiones a respiraciones utilizó el paramédico?

86. RAZONES FACULTAD-ESTUDIANTE En una universidad hay 125 miembros de la facultad y 2,000 estudiantes. Encuentre la tasa de la facultad a estudiantes. (A esto se le refiere con frecuencia como la *razón* facultad-estudiante, aun cuando las unidades son diferentes.)

87. QUEJAS CONTRA AEROLÍNEAS Una aerolínea recibió 3.29 quejas por cada 1,000 pasajeros. Escriba esto como una tasa de números enteros.

88. UÑAS DE LOS DEDOS En promedio, las uñas de los dedos crecen 0.02 pulgadas por semana. Escriba esta tasa utilizando números enteros.

89. VENTAS POR INTERNET Un sitio web determinó que tuvo 112,500 visitas en un mes. De aquellos que visitaron el sitio, 4,500 realizaron compras.

a. A aquellos que visitaron el sitio, pero no realizaron compra alguna, se les llama

navegantes. ¿Cuántos navegantes visitaron el sitio web ese mes?

b. ¿Cuál fue la tasa unitaria de navegantes a compradores para el sitio web ese mes?

90. MECANOGRAFÍA Una secretaria mecanografió un documento que contenía 330 palabras en 5 minutos. Escriba la tasa como una tasa unitaria.

91. PRECIOS UNITARIOS Una lata de 12 onzas de refresco de cola se vende por ¢84. Encuentre el precio unitario en centavos por onza.

92. GUARDERÍAS Una guardería cobra $32 por 8 horas de cuidado supervisado. Encuentre el precio unitario en dólares por hora para la guardería.

93. ESTACIONAMIENTOS Un parquímetro requiere ¢25 por 20 minutos de estacionamiento. Encuentre el precio unitario para estacionarse.

94. COSTO DE LA GASOLINA Un conductor bombeó 17 galones de gasolina en el tanque de su camioneta a un costo de $32.13. Encuentre el precio unitario de la gasolina.

95. PAISAJISMO Una bolsa de 50 libras de semilla para pasto se vende por $222.50. Encuentre el precio unitario de las semillas para pasto.

96. COSTOS UNITARIOS Un paquete de 24 onzas de frijoles se vende por $1.29. Encuentre el precio unitario en centavos por onza.

97. DRENADO DE TANQUES Un tanque de 11,880 galones de agua puede vaciarse en 27 minutos. Encuentre la tasa unitaria del flujo de agua que sale del tanque.

98. TASA DE PAGO Ricardo trabajó 27 horas ayudando a aislar una arena de hockey. Por su trabajo, recibió $337.50. Encuentre la tasa de pago por hora.

99. VIAJES POR AUTOMÓVIL El odómetro de un automóvil tiene una lectura de 34,746 al inicio de un viaje. Cinco horas después, su lectura es de 35,071.

a. ¿Qué tanto recorrió el automóvil?

b. ¿Cuál fue su tasa de velocidad?

100. TASAS DE VELOCIDAD Un avión viaja de Chicago a San Francisco, una distancia de 1,883 millas, en 3.5 horas. Encuentre la tasa de velocidad del avión.

101. COMPARACIÓN AL COMPRAR Una lata de 6 onzas de jugo de naranja se vende por ¢89 y una lata de 8 onzas se vende por $1.19. ¿Cuál es la mejor compra?

102. COMPARACIÓN AL COMPRAR Una bolsa de 30 libras de mezcla para plantar cuesta $12.25 y una bolsa de 80 libras cuesta $30.25. ¿Cuál es la mejor compra?

103. COMPARACIÓN AL COMPRAR Cierta marca de medicamento para resfriados y senos nasales se vende en cajas con 20 tabletas por $4.29 y en cajas con 50 tabletas por $9.59. ¿Cuál es la mejor compra?

104. COMPARACIÓN AL COMPRAR ¿Cuál neumático mostrado es la mejor compra?

105. COMPARACIÓN DE VELOCIDADES Un automóvil recorre 345 millas en 6 horas y un camión recorre 376 millas en 6.2 horas. ¿Cuál vehículo está yendo más rápido?

106. LECTURA Un alumno de primero de secundaria lee un libro de 54 páginas en 40 minutos. Otro lee un libro de 80 páginas en 62 minutos. Si los libros tienen la misma dificultad, ¿cuál estudiante lee más rápido?

107. RENDIMIENTO DE GASOLINA Un automóvil recorrió 1,235 millas con 51.3 galones de gasolina y otro recorrió 1,456 millas con 55.78 galones. ¿Cuál automóvil tuvo el mejor rendimiento de gasolina?

108. TARIFAS DE ELECTRICIDAD En una comunidad, una factura de electricidad por 575 kilowatts-hora de electricidad es de $38.81. En una segunda comunidad, una factura por 831 kwh es de $58.10. ¿En qué comunidad es más barata la electricidad?

REDACCIÓN

109. ¿Las razones 3 a 1 y 1 a 3 son iguales? Explique por qué sí o por qué no.

110. Dé tres ejemplos de razones (o tasas) con las que se haya encontrado la semana pasada.

111. ¿Cómo le harían a usted un mejor comprador los temas estudiados en esta sección?

112. ¿Qué es una tasa unitaria? Dé algunos ejemplos.

REPASO

Use el redondeo por la izquierda para estimar cada resultado.

113. $12{,}897 + 29{,}431 + 2{,}595$

114. $6{,}302 - 788$

115. $410 \cdot 21$

116. $63{,}467 \div 3{,}103$

Objetivos

1. Escribir proporciones.
2. Determinar si las proporciones son verdaderas o falsas.
3. Resolver una proporción para encontrar un término desconocido.
4. Escribir proporciones para resolver problemas de aplicación.

SECCIÓN 5.2
Proporciones

Uno de los conceptos más útiles en las matemáticas es la *ecuación.* Una **ecuación** es un enunciado que indica que dos expresiones son iguales. Todas las ecuaciones contienen un símbolo = Algunos ejemplos de ecuaciones son:

$$4 + 4 = 8, \qquad 15.6 - 4.3 = 11.3, \qquad \frac{1}{2} \cdot 10 = 5 \qquad \text{y} \qquad -16 \div 8 = -2$$

Cada una de las ecuaciones mostradas arriba es verdadera. Las ecuaciones también pueden ser falsas. Por ejemplo,

$$3 + 2 = 6 \quad \text{y} \quad -40 \div (-5) = -8$$

son ecuaciones falsas.

En esta sección se trabajará con ecuaciones que enuncian que dos razones (o tasas) son iguales.

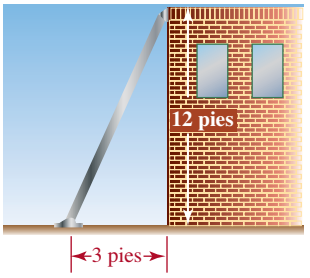
1 Escribir proporciones

Como cualquier herramienta, una escalera puede ser peligrosa si se utiliza de manera inapropiada. Cuando fijan una escalera de extensión, los usuarios deben seguir la *regla 4 a 1:* Por cada 4 pies de altura de la escalera, la posición de las patas de la escalera debe estar a 1 pie de la base de la pared. La regla 4 a 1 para las escaleras puede expresarse utilizando una razón.

$$\frac{4 \text{ pies}}{1 \text{ pie}} = \frac{4 \text{ pies}}{1 \text{ pie}} = \frac{4}{1}$$

Elimine las unidades comunes de pies.

La figura a la derecha muestra cómo se utilizó la regla 4 a 1 para posicionar de manera apropiada las patas de una escalera a 3 pies de la base de una pared de 12 pies de altura. Se puede escribir una razón que compare la altura de la escalera a su distancia de la pared.



$$\frac{12 \text{ pies}}{3 \text{ pies}} = \frac{12 \text{ pies}}{3 \text{ pies}} = \frac{12}{3}$$

Elimine las unidades comunes de pies.

Dado que esta razón satisface la regla 4 a 1, las dos razones $\frac{4}{1}$ y $\frac{12}{3}$ deben ser iguales. Por tanto, se tiene

$$\frac{4}{1} = \frac{12}{3}$$

A las ecuaciones como esta, las cuales muestran que dos razones son iguales, se les llama *proporciones.*

Proporción

Una **proporción** enuncia que dos razones (o tasas) son iguales.

Algunos ejemplos de proporciones son

- $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ Se lee como "1 es a 2 como 3 es a 6".
- $\frac{3 \text{ meseros}}{7 \text{ mesas}} = \frac{9 \text{ meseros}}{21 \text{ mesas}}$ Se lee como "3 meseros son a 7 mesas como 9 meseros son a 21 mesas".

EJEMPLO 1 Escriba cada enunciado como una proporción.

a. 22 es a 6 como 11 es a 3.

b. 1,000 administradores es a 8,000 profesores como 1 administrador es a 8 profesores.

Estrategia Se localizará la palabra *como* en cada enunciado y se identificarán las razones (o tasas) antes de y después de ella.

POR QUÉ La palabra *como* se traduce al símbolo = que se necesita para escribir el enunciado como una proporción (ecuación).

Solución

a. Esta proporción enuncia que dos razones son iguales.

$$\underbrace{\frac{22}{6}}_{\text{22 es a 6}} \quad \underbrace{=}_{\text{como}} \quad \underbrace{\frac{11}{3}}_{\text{11 es a 3}}$$

Recuerde que la palabra "a" se utiliza para separar los números que se están comparando.

b. Esta proporción enuncia que dos razones son iguales.

$$\underbrace{\frac{1{,}000 \text{ administradores}}{8{,}000 \text{ profesores}}}_{\text{1,000 administradores es a 8,000 profesores}} \underbrace{=}_{\text{como}} \underbrace{\frac{1 \text{ administrador}}{8 \text{ profesores}}}_{\text{1 administrador es a 8 profesores}}$$

Cuando las proporciones involucran tasas, con frecuencia las unidades se escriben fuera de la proporción, como se muestra abajo:

$$\begin{matrix}\text{Administradores} \\ \text{Profesores}\end{matrix} \rightarrow \frac{1{,}000}{8{,}000} = \frac{1}{8} \leftarrow \begin{matrix}\text{Administradores} \\ \text{Profesores}\end{matrix}$$

Auto-revisión 1

Escriba cada enunciado como una proporción.

a. 16 es a 28 como 4 es a 7.

b. 300 niños es a 500 adultos como 3 niños es a 5 adultos.

Ahora intente **Problemas 17 y 19**

2 Determinar si las proporciones son verdaderas o falsas

Dado que una proporción es una ecuación, una proporción puede ser verdadera o falsa. Una proporción es verdadera si sus razones (o tasas) son iguales y falsa si sus razones (o tasas) no son iguales. Una manera de determinar si una proporción es verdadera es utilizar las habilidades de simplificación de fracciones del Capítulo 3.

EJEMPLO 2 Determine si cada proporción es verdadera o falsa simplificando.

a. $\frac{3}{8} = \frac{21}{56}$ **b.** $\frac{30}{4} = \frac{45}{12}$

Estrategia Se simplificará cualquier razón en la proporción que no esté en la forma más simple. Después se compararán para determinar si son iguales.

POR QUÉ Si las razones son iguales, la proporción es verdadera. Si no son iguales, la proporción es falsa.

Solución

a. En el lado izquierdo de la proporción $\frac{3}{8} = \frac{21}{56}$, la razón $\frac{3}{8}$ está en la forma más simple. En el lado derecho, la razón $\frac{21}{56}$ puede simplificarse.

$$\frac{21}{56} = \frac{3 \cdot \overset{1}{\cancel{7}}}{\underset{1}{\cancel{7}} \cdot 8} = \frac{3}{8}$$

Factorice el 21 y el 56 y después elimine el factor común de 7 en el numerador y el denominador.

Dado que las razones en los lados izquierdo y derecho de la proporción son iguales, la proporción es verdadera.

Auto-revisión 2

Determine si cada proporción es verdadera o falsa simplificando.

a. $\frac{4}{5} = \frac{16}{20}$ **b.** $\frac{30}{24} = \frac{28}{16}$

Ahora intente **Problema 23**

b. Ninguna de las razones en la proporción $\frac{30}{4} = \frac{45}{12}$ está en la forma más simple. Para simplificar cada razón, se procede como a continuación:

$$\frac{30}{4} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot 15}{\underset{1}{\cancel{2}} \cdot 2} = \frac{15}{2} \qquad \frac{45}{12} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot 15}{\underset{1}{\cancel{3}} \cdot 4} = \frac{15}{4}$$

Dado que las razones en los lados izquierdo y derecho de la proporción no son iguales $\left(\frac{15}{2} \neq \frac{15}{4}\right)$, la proporción es falsa.

Existe otra manera de determinar si una proporción es verdadera o falsa. Antes de explicarla se necesita introducir un poco más del vocabulario de las proporciones.

A cada uno de los cuatro números de una proporción se le llama **término.** Al primero y al cuarto términos se les llama **extremos**, y al segundo y al tercer términos se les llama **medios.**

Primer término (extremo) → $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ ← Tercer término (medio)
Segundo término (medio) → ← Cuarto término (extremo)

En la proporción mostrada arriba, el *producto de los extremos es igual al producto de los medio.*

$$1 \cdot 6 = 6 \qquad \text{y} \qquad 2 \cdot 3 = 6$$

Estos productos pueden encontrarse multiplicando de manera diagonal en la proporción. A $1 \cdot 6$ y $2 \cdot 3$ se les llama **productos cruzados.**

Productos cruzados

$1 \cdot 6 = 6$ $\qquad$ $2 \cdot 3 = 6$

$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$

Observe que los productos cruzados son iguales. Este ejemplo ilustra la siguiente propiedad de las proporciones.

Propiedad de los productos cruzados (propiedad de medios-extremos)

Para determinar si una proporción es verdadera o falsa, primero multiplique a lo largo de una diagonal y después multiplique a lo largo de la otra diagonal.

- Si los productos cruzados son *iguales,* las proporciones son verdaderas.
- Si los productos cruzados *no son iguales,* la proporción es falsa.

(Si el producto de los extremos es *igual* al producto de los medios, la proporción es verdadera. Si el producto de los extremos *no es igual* al producto de los medios, la proporción es falsa.)

Auto-revisión 3

Determine si la proporción

$$\frac{6}{13} = \frac{18}{39}$$

es verdadera o falsa.

Ahora intente **Problema 25**

EJEMPLO 3 Determine si cada proporción es falsa o verdadera.

a. $\frac{3}{7} = \frac{9}{21}$ **b.** $\frac{8}{3} = \frac{13}{5}$

Estrategia Se comprobará si los productos cruzados son iguales (el producto de los extremos es igual al producto de los medios).

POR QUÉ Si los productos cruzados son iguales, la proporción es verdadera. Si los productos cruzados no son iguales, la proporción es falsa.

Solución

a. $3 \cdot 21 = 63$ $\qquad$ $7 \cdot 9 = 63$

$\frac{3}{7} = \frac{9}{21}$

Cada producto cruzado es 63.

Dado que los productos cruzados son iguales, la proporción es verdadera.

b. $8 \cdot 5 = 40$ $\quad 3 \cdot 13 = 39$

$$\frac{8}{3} = \frac{13}{5}$$

Un producto cruzado es 40 y el otro 39.

Dado que los productos cruzados no son iguales, la proporción es falsa.

¡Cuidado! No se pueden eliminar factores comunes "a través" de un símbolo = . Cuando se hace esto, la proporción verdadera del Ejemplo 3 inciso a, $\frac{3}{7} = \frac{9}{21}$, se cambia a la proporción falsa $\frac{1}{7} = \frac{9}{7}$.

$$\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{7} = \frac{9}{\underset{7}{\cancel{21}}}$$

EJEMPLO 4

Determine si cada proporción es verdadera o falsa.

a. $\dfrac{0.9}{0.6} = \dfrac{2.4}{1.5}$ **b.** $\dfrac{2\frac{1}{3}}{3\frac{1}{2}} = \dfrac{4\frac{2}{3}}{7}$

Estrategia Se comprobará para ver si los productos cruzados son iguales (el producto de los extremos es igual al producto de los medios).

POR QUÉ Si los productos cruzados son iguales, la proporción es verdadera. Si los productos cruzados no son iguales, la proporción es falsa.

Solución

a. $1.5 \times 0.9 = 1.35$ $\quad 2.4 \times 0.6 = 1.44$

$$\frac{0.9}{0.6} = \frac{2.4}{1.5}$$

Un producto cruzado es de 1.35 y el otro es de 1.44.

Dado que los productos cruzados no son iguales, la proporción no es verdadera.

b. $3\frac{1}{2} \cdot 4\frac{2}{3} = \frac{7}{2} \cdot \frac{14}{3}$

$2\frac{1}{3} \cdot 7 = \frac{7}{3} \cdot \frac{7}{1}$ $\quad = \frac{7 \cdot \overset{1}{\cancel{2}} \cdot 7}{\underset{1}{\cancel{2}} \cdot 3}$

$= \frac{49}{3}$ $\quad = \frac{49}{3}$

$$\frac{2\frac{1}{3}}{3\frac{1}{2}} = \frac{4\frac{2}{3}}{7}$$

Cada producto cruzado es de $\frac{49}{3}$.

Dado que los productos cruzados son iguales, la proporción es verdadera.

Cuando dos pares de números como 2, 3 y 8, 12 forman una proporción verdadera, se dice que son **proporcionales.** Para mostrar que 2, 3 y 8, 12 son proporcionales, se comprueba para ver si la ecuación

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$$

es una proporción verdadera. Para hacer esto, se encuentran los productos cruzados.

$2 \cdot 12 = 24$ $\quad 3 \cdot 8 = 24$

Dado que los productos cruzados son iguales, la proporción es verdadera y los números son proporcionales.

Auto-revisión 4

Determine si cada proporción es verdadera o falsa.

a. $\dfrac{9.9}{13.2} = \dfrac{1.125}{1.5}$

b. $\dfrac{3\frac{3}{16}}{2\frac{1}{2}} = \dfrac{4\frac{1}{4}}{3\frac{1}{3}}$

Ahora intente **Problemas 31 y 35**

Auto-revisión 5

Determine si 6, 11 y 54, 99 son proporcionales.

Ahora intente **Problema 37**

EJEMPLO 5 Determine si 3, 7 y 36, 91 son proporcionales.

Estrategia Se utilizarán los pares de números dados para escribir dos razones y formar una proporción. Después se encontrarán los productos cruzados.

POR QUÉ Si los productos cruzados son iguales, la proporción es verdadera y los números son proporcionales. Si los productos cruzados no son iguales, la proporción es falsa y los números no son proporcionales.

Solución

El par de números 3 y 7 forman una razón y el par de números 36 y 91 forman una segunda razón. Para escribir una proporción, se igualan las razones. Después se encuentran los productos cruzados.

$3 \cdot 91 = 273$ $\quad 7 \cdot 36 = 252$

$$\frac{3}{7} = \frac{36}{91}$$

Un producto cruzado es 273 y el otro es 252.

Dado que los productos cruzados no son iguales, los números no son proporcionales.

3 Resolver una proporción para encontrar un término desconocido

Suponga que conoce tres de los cuatro términos de la siguiente proporción.

$$\frac{?}{5} = \frac{24}{20}$$

En las matemáticas, con frecuencia una letra representa un número desconocido. A tal letra se le llama **variable.** Para encontrar el término desconocido, la variable x lo representa en la proporción y se puede escribir:

$$\frac{x}{5} = \frac{24}{20}$$

Para que la proporción sea verdadera, los productos cruzados deben ser iguales.

$x \cdot 20 = 5 \cdot 24$ Encuentre los productos cruzados para $\frac{x}{5} = \frac{24}{20}$ e iguálelos.

$x \cdot 20 = 120$ Para simplificar el lado derecho de la ecuación, realice la multiplicación: $5 \cdot 24 = 120$.

En el lado izquierdo de la ecuación, el número desconocido x está multiplicado por 20. Para deshacer la multiplicación por 20 y despejar x, se dividen ambos lados de la ecuación entre 20.

$$\frac{x \cdot 20}{\mathbf{20}} = \frac{120}{\mathbf{20}}$$

Se puede simplificar la fracción en el lado izquierdo de la ecuación eliminando el factor común de 20 del numerador y el denominador. En el lado derecho se desarrolla la división indicada por la barra de fracción.

$$\frac{x \cdot \overset{1}{\cancel{20}}}{\underset{1}{\cancel{20}}} = 6$$

Para simplificar el lado izquierdo de la ecuación, elimine el factor común de 20 en el numerador y el denominador.

Para simplificar el lado derecho de la ecuación, realice la división: $120 \div 20 = 6$.

Dado que el producto de cualquier número y el 1 siempre es ese número, se tiene que el numerador $x \cdot 1$ en el lado izquierdo puede reemplazarse con x.

$$\frac{x}{1} = 6$$

Dado que el cociente de cualquier número y el 1 es ese número, se tiene que $\frac{x}{1}$ en el lado izquierdo de la ecuación puede reemplazarse con x. Por tanto,

$$x = 6$$

Se ha encontrado que el término desconocido en la proporción es el 6 y se puede escribir:

$$\frac{6}{5} = \frac{24}{20}$$

Para comprobar este resultado, se encuentran los productos cruzados.

Comprobación:

$$\frac{6}{5} \stackrel{?}{=} \frac{24}{20} \qquad \begin{aligned} 20 \cdot 6 &= \mathbf{120} \\ 5 \cdot 24 &= \mathbf{120} \end{aligned}$$

Dado que los productos cruzados son iguales, el resultado, 6, es correcto.

En el ejemplo anterior, cuando se encontró el valor de la variable x que hace verdadera la proporción dada, se dice que se ha *resuelto la proporción* para encontrar el término desconocido.

El lenguaje de las matemáticas Las proporciones se resuelven escribiendo una serie de pasos que resultan en una ecuación de la forma $\boldsymbol{x}$ **= un número** o **un número =** $\boldsymbol{x}$. Se dice que la variable x está *despejada* en un lado de la ecuación. *Despejada* significa sola o por sí misma.

Resolver una proporción para encontrar un término desconocido

1. Iguale entre sí los productos cruzados para formar una ecuación.
2. Despeje la variable en un lado de la ecuación dividiendo ambos lados entre el número que está multiplicado por la variable.
3. Compruebe sustituyendo el resultado en la proporción original y encontrando los productos cruzados.

EJEMPLO 6

Resuelva la proporción: $\dfrac{12}{20} = \dfrac{3}{x}$

Estrategia Se igualarán entre sí los productos cruzados para formar una ecuación.

POR QUÉ Entonces se puede despejar la variable x en un lado de la ecuación para encontrar el término desconocido que representa.

Solución

$$\frac{12}{20} = \frac{3}{x}$$ Esta es la proporción a resolver.

$12 \cdot x = 20 \cdot 3$ Iguale entre sí los productos cruzados para formar una ecuación.

$12 \cdot x = 60$ Para simplificar el lado derecho de la ecuación, multiplique: $20 \cdot 3 = 60$.

$$\frac{12 \cdot x}{\mathbf{12}} = \frac{60}{\mathbf{12}}$$ Para deshacer la multiplicación por 12 y despejar x, divida ambos lados entre 12.

$x = 5$ Para simplificar el lado izquierdo, elimine el factor común de 12. Para simplificar el lado derecho de la ecuación, realice la división: $60 \div 12 = 5$.

$$\begin{array}{r} 5 \\ 12\overline{)60} \\ -\,60 \\ \hline 0 \end{array}$$

Por tanto, x es 5. Para comprobar el resultado se sustituye el 5 por x en la proporción original.

Comprobación:

$$\frac{12}{20} \stackrel{?}{=} \frac{3}{5} \qquad \begin{aligned} 5 \cdot 12 &= \mathbf{60} \\ 20 \cdot 3 &= \mathbf{60} \end{aligned}$$

Dado que los productos cruzados son iguales, el resultado, 5, es correcto.

Auto-revisión 6

Resuelva la proporción: $\dfrac{15}{x} = \dfrac{20}{32}$

Ahora intente **Problema 41**

Auto-revisión 7

Resuelva la proporción:

$$\frac{6.7}{x} = \frac{33.5}{38}$$

Ahora intente **Problema 45**

EJEMPLO 7

Resuelva la proporción: $\frac{3.5}{7.2} = \frac{x}{15.84}$

Estrategia Se igualarán entre sí los productos cruzados para formar una ecuación.

POR QUÉ Entonces se puede despejar la variable x en un lado de la ecuación para encontrar el término desconocido que representa.

Solución

$$\frac{3.5}{7.2} = \frac{x}{15.84}$$ Esta es la proporción a resolver.

$$3.5 \cdot 15.84 = 7.2 \cdot x$$ Iguale entre sí los productos cruzados para formar una ecuación.

$$55.44 = 7.2 \cdot x$$ Para simplificar el lado izquierdo de la ecuación, multiplique: $3.5 \cdot 15.84 = 55.44$.

$$\frac{55.44}{\mathbf{7.2}} = \frac{7.2 \cdot x}{\mathbf{7.2}}$$ Para deshacer la multiplicación por 7.2 y despejar x, divida ambos lados entre 7.2.

$$7.7 = x$$ Para simplificar el lado izquierdo de la ecuación, realice la división: $55.44 \div 7.2 = 7.7$. Para simplificar el lado derecho elimine el factor común de 7.2.

$$\begin{array}{r} 15.84 \\ \times\ 3.5 \\ \hline 7920 \\ 47520 \\ \hline 55.440 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7.7 \\ 7.2\overline{)\ 55.44} \\ -\ 50\,4 \\ \hline 5\,04 \\ -\ 5\,04 \\ \hline 0 \end{array}$$

Por tanto, x es 7.7. Compruebe el resultado en la proporción original.

Auto-revisión 8

Resuelva la proporción:

$$\frac{x}{2\frac{1}{3}} = \frac{2\frac{1}{4}}{1\frac{1}{2}}$$

Escriba el resultado como un número mixto.

Ahora intente **Problema 49**

EJEMPLO 8

Resuelva la proporción $\frac{x}{4\frac{1}{5}} = \frac{5\frac{1}{2}}{16\frac{1}{2}}$. Escriba el resultado como un número mixto.

Estrategia Se igualarán entre sí los productos cruzados para formar una ecuación.

POR QUÉ Entonces se puede despejar la variable x en un lado de la ecuación para encontrar el término desconocido que representa.

Solución

$$\frac{x}{4\frac{1}{5}} = \frac{5\frac{1}{2}}{16\frac{1}{2}}$$ Esta es la proporción a resolver.

$$x \cdot 16\frac{1}{2} = 4\frac{1}{5} \cdot 5\frac{1}{2}$$ Iguale entre sí los productos cruzados para formar una ecuación.

$$x \cdot \frac{33}{2} = \frac{21}{5} \cdot \frac{11}{2}$$ Escriba cada número mixto como una fracción impropia.

$$\frac{x \cdot \frac{33}{2}}{\mathbf{\frac{33}{2}}} = \frac{\frac{21}{5} \cdot \frac{11}{2}}{\mathbf{\frac{33}{2}}}$$ Para deshacer la multiplicación por $\frac{33}{2}$ y despejar x, divida ambos lados entre $\frac{33}{2}$.

$$x = \frac{21}{5} \cdot \frac{11}{2} \cdot \mathbf{\frac{2}{33}}$$ Para simplificar el lado izquierdo, elimine el factor de $\frac{33}{2}$ en el numerador y el denominador. Desarrolle la división en el lado derecho indicada por la barra de fracción compleja. Multiplique el numerador de la fracción compleja por el recíproco de $\frac{33}{2}$, el cual es $\frac{2}{33}$.

$$x = \frac{21 \cdot 11 \cdot 2}{5 \cdot 2 \cdot 33}$$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$$x = \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot 7 \cdot \overset{1}{\cancel{11}} \cdot \overset{1}{2}}{5 \cdot \underset{1}{\cancel{2}} \cdot \underset{1}{\cancel{3}} \cdot \underset{1}{\cancel{11}}}$$

Para simplificar la fracción, factorice el 21 y el 33 y después elimine los factores comunes de 2, 3 y 11 en el numerador y el denominador.

$$x = \frac{7}{5}$$

Multiplique los factores restantes en el numerador. Multiplique los factores restantes en el denominador.

$$x = 1\frac{2}{5}$$

Escriba la fracción impropia como un número mixto.

Por tanto, x es $1\frac{2}{5}$. Compruebe el resultado en la proporción original.

Utilizando su CALCULADORA **Resolver proporciones con una calculadora**

Para resolver la proporción en el Ejemplo 7, se igualaron los productos cruzados y se dividieron ambos lados entre 7.2 para despejar la variable x.

$$\frac{3.5 \cdot 15.84}{7.2} = x$$

Se puede encontrar x introduciendo estos números y presionando estas teclas en una calculadora.

3.5 [×] 15.84 [÷] 7.2 [=] 7.7

En algunas calculadoras, se presiona la tecla [ENTER] para encontrar el resultado. Por tanto, x es 7.7.

4 Escribir proporciones para resolver problemas de aplicación

Las proporciones pueden utilizarse para resolver problemas de aplicación de una amplia variedad de campos como medicina, contabilidad, construcción y negocios. Es fácil ubicar los problemas que pueden resolverse utilizando una proporción. Se le proporcionará una razón (o tasa) y se le pedirá que encuentre la parte faltante de otra razón (o tasa). Es de utilidad seguir la estrategia de cinco pasos para la resolución de problemas vista anteriormente en el texto para resolver problemas de proporción.

EJEMPLO 9 ***Compras*** Si 5 manzanas cuestan $1.15, encuentre el costo de 16 manzanas.

Analizar

- Se puede expresar el hecho de que 5 manzanas cuestan $1.15 utilizando la tasa: $\frac{5 \text{ manzanas}}{\$1.15}$.
- ¿Cuál es el costo de 16 manzanas?

Formar La variable c representa el costo desconocido de las 16 manzanas. Si se compara el número de manzanas con su costo, se sabe que las dos tasas deben ser iguales y se puede escribir una proporción.

5 manzanas **es** a $1.15 **como** 16 manzanas **es** a $$c$.

5 manzanas → $\frac{5}{1.15} = \frac{16}{c}$ ← 16 manzanas

Costo de 5 manzanas → ← Costo de 16 manzanas

Las unidades pueden escribirse fuera de la proporción.

Resolver Para encontrar el costo de 16 manzanas, se resuelve la proporción para c.

$5 \cdot c = 1.15 \cdot 16$ Se igualan entre sí los productos cruzados para formar una ecuación.

$5 \cdot c = 18.4$ Para simplificar el lado derecho de la ecuación, multiplique: 1.15(16) = 18.4.

$\frac{5 \cdot c}{5} = \frac{18.4}{5}$ Para deshacer la multiplicación por 5 y despejar c, divida ambos lados entre 5.

$c = 3.68$ Para simplificar el lado izquierdo, elimine el factor común de 5. En el lado derecho, realice la división: 18.4 ÷ 5 = 3.68.

$$5\overline{)18.40}\quad 3.68$$
$$-15$$
$$34$$
$$-30$$
$$40$$
$$-40$$
$$0$$

Auto-revisión 9

BOLETOS PARA CONCIERTOS
Si 9 boletos para un concierto cuestan $112.50, encuentre el costo de 15 boletos.

Ahora intente **Problema 73**

Enunciar Dieciséis manzanas costarán $3.68.

Comprobar Si 5 manzanas cuestan $1.15, entonces 15 manzanas costarán 3 veces más: $3 \cdot \$1.15 = \$3.45$. Parece razonable que 16 manzanas costarían $3.68.

En el Ejemplo 9 se pudo haber comparado el costo de las manzanas con el número de manzanas:

$1.15 **es** a 5 manzanas **como** $c es **a** 16 manzanas. Esto habriá conducido a la proporción

$$\frac{\text{Costo de 5 manzanas} \rightarrow 1.15}{\text{5 manzanas} \rightarrow 5} = \frac{c \leftarrow \text{Costo de 16 manzanas}}{16 \leftarrow \text{16 manzanas}}$$

Si se resuelve la proporción para c, se obtiene el mismo resultado: 3.68.

¡Cuidado! Cuando resuelva problemas utilizando proporciones, asegúrese que las unidades de los numeradores son las mismas y que las unidades de los denominadores son las mismas. En el ejemplo 9 sería incorrecto escribir

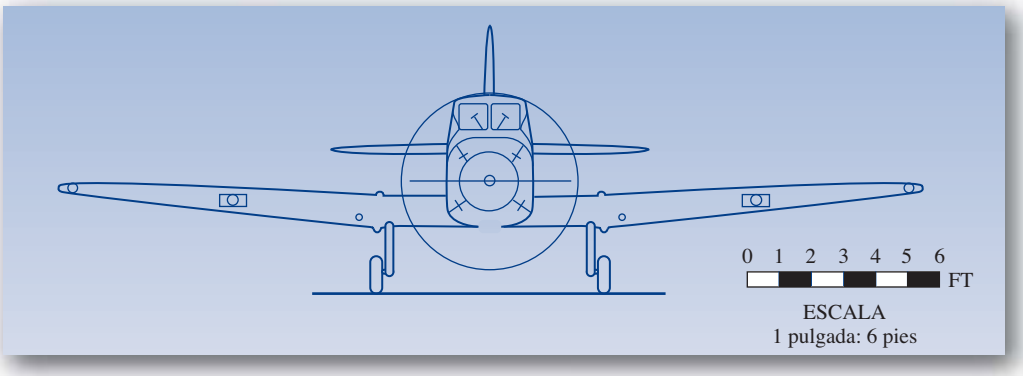
$$\frac{\text{Costo de 5 manzanas} \rightarrow 1.15}{\text{5 manzanas} \rightarrow 5} = \frac{16 \leftarrow \text{16 manzanas}}{c \leftarrow \text{Costo de 16 manzanas}}$$

Auto-revisión 10

MODELOS A ESCALA En un modelo a escala de una ciudad, un edificio de 300 pies de alto es de 4 pulgadas de alto. Una torre de observación en el modelo es de 9 pulgadas de alto. ¿Qué tan alta es la torre real?

Ahora intente
Problema 83

EJEMPLO 10 ***Dibujos a escala*** Una **escala** es una razón (o tasa) que compara el tamaño de un modelo, dibujo o mapa con el tamaño de un objeto real. El avión mostrado abajo se dibujó utilizando una escala de 1 pulgada: 6 pies. Esto significa que 1 pulgada en el dibujo es en realidad 6 pies en el avión. La distancia desde la punta de una ala a la punta de la otra (la envergadura) en el dibujo es de 4.5 pulgadas. ¿Cuál es la envergadura real del avión?



Analizar

- El avión se dibuja utilizando una escala de 1 pulgada: 6 pies, la cual puede escribirse como una tasa en forma de fracción como: $\frac{1 \text{ pulgada}}{6 \text{ pies}}$.
- La envergadura del avión en el dibujo es de 4.5 pulgadas.
- ¿Cuál es la envergadura real del avión?

Formar w representará la envergadura real desconocida del avión. Si se comparan las mediciones en el dibujo con las mediciones reales del avión, se sabe que esas dos tasas deben ser iguales y se puede escribir una proporción.

1 pulgada corresponde **a** 6 pies **como** 4.5 pulgadas corresponden **a** w pies.

Medición en el dibujo → $\frac{1}{6} = \frac{4.5}{w}$ ← Medición en el dibujo
Medición en el avión → ← Medición en el avión

Resolver Para encontrar la envergadura real del avión, se resuelve la proporción para w.

$1 \cdot w = 6 \cdot 4.5$ Iguale los productos cruzados para formar una ecuación.

$w = 27$ Para simplificar cada lado de la ecuación realice la multiplicación.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 3}\\ 4.5\\ \times\ 6\\ \hline 27.0 \end{array}$$

Enunciar La envergadura real del avión es de 27 pies.

Comprobar Cada 1 pulgada en el dibujo a escala corresponde a una longitud real de 6 pies en el avión. Por tanto, una medición de 5 pulgadas corresponde a una envergadura real de $5 \cdot 6$ pies, o 30 pies. Parece razonable que una medición de 4.5 pulgadas corresponda a una envergadura real de 27 pies.

EJEMPLO 11 *Repostería*

Una receta para un pastel de chocolate requiere $1\frac{1}{2}$ tazas de azúcar por cada $2\frac{1}{4}$ tazas de harina. Si un pastelero sólo tiene a la mano $\frac{1}{2}$ taza de azúcar, ¿cuánta harina debe añadirle para preparar la mezcla para el pastel de chocolate?

Analizar

- La tasa de $1\frac{1}{2}$ tazas de azúcar por cada $2\frac{1}{4}$ tazas de harina puede expresarse como:

$$\frac{1\frac{1}{2}\text{ tazas de azúcar}}{2\frac{1}{4}\text{ tazas de harina}}$$

- ¿Cuánta harina debe añadírsele a $\frac{3}{4}$ tazas de azúcar?

Formar La variable f representará las tazas desconocidas de harina. Si se comparan las tazas de azúcar con las tazas de harina, se sabe que las dos tasas deben ser iguales y puede escribirse una proporción.

$1\frac{1}{2}$ tazas de azúcar es **a** $2\frac{1}{4}$ tazas de harina **como** $\frac{1}{2}$ taza de azúcar es **a** f tazas de harina

Tazas de azúcar → $\frac{1\frac{1}{2}}{2\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2}}{f}$ ← Tazas de azúcar
Tazas de harina → ← Tazas de harina

Resolver Para encontrar la cantidad de harina que se necesita, se resuelve la proporción para f.

$\frac{1\frac{1}{2}}{2\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2}}{f}$ Esta es la proporción a resolver.

$1\frac{1}{2} \cdot f = 2\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$ Iguale entre sí los productos cruzados para formar una ecuación.

$\frac{3}{2} \cdot f = \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{2}$ Escriba cada número mixto como una fracción impropia.

$\frac{\frac{3}{2} \cdot f}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{9}{4} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}$ Para deshacer la multiplicación por $\frac{3}{2}$ y aislar f, divida ambos lados entre $\frac{3}{2}$.

Auto-revisión 11

REPOSTERÍA Vea el Ejemplo 11. ¿Cuántas tazas de harina se necesitarán para preparar varios pasteles de chocolate que requerirán un total de $12\frac{1}{2}$ tazas de azúcar?

Ahora intente **Problema 89**

$$f = \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$$

Para simplificar el lado izquierdo elimine el factor común de $\frac{3}{2}$ en el numerador y el denominador. Desarrolle la división en el lado derecho indicada por la barra de fracción. Multiplique el numerador de la fracción compleja por el recíproco de $\frac{3}{2}$, el cual es $\frac{2}{3}$.

$$f = \frac{9 \cdot 1 \cdot 2}{4 \cdot 2 \cdot 3}$$

Multiplique los numeradores.
Multiplique los denominadores.

$$f = \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot 3 \cdot 1 \cdot \overset{1}{\cancel{2}}}{4 \cdot \underset{1}{\cancel{2}} \cdot \underset{1}{\cancel{3}}}$$

Para simplificar la fracción, factorice el 9 y después elimine los factores comunes de 2 y 3 en el numerador y el denominador.

$$f = \frac{3}{4}$$

Multiplique los factores restantes en el numerador.
Multiplique los factores restantes en el denominador.

Enunciar El pastelero debe utilizar $\frac{3}{4}$ taza de harina.

Comprobar La tasa de $1\frac{1}{2}$ tazas de azúcar por cada $2\frac{1}{4}$ tazas de harina es de alrededor de 1 a 2. La taza de $\frac{1}{2}$ taza de azúcar a $\frac{3}{4}$ taza de harina también es de alrededor de 1 a 2. El resultado, $\frac{3}{4}$, parece razonable.

Consejo útil En el Ejemplo 11, un método alterno sería escribir cada término de la proporción en su forma decimal equivalente y después resolver para *f*.

Fracciones y números mixtos	Decimales
$\dfrac{1\frac{1}{2}}{2\frac{1}{4}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{f}$	$\dfrac{1.5}{2.25} = \dfrac{0.5}{f}$

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. a. $\frac{16}{28} = \frac{4}{7}$ **b.** $\frac{300 \text{ niños}}{500 \text{ adultos}} = \frac{3 \text{ niños}}{5 \text{ adultos}}$ **2. a.** verdadero **b.** falso **3.** verdadero **4. a.** verdadero **b.** verdadero **5.** sí **6.** 24 **7.** 7.6 **8.** $3\frac{1}{2}$ **9.** \$187.50 **10.** 675 pies **11.** $18\frac{3}{4}$

SECCIÓN 5.2 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Complete los espacios.

1. Una _____ enuncia que dos razones (o tasas) son iguales.
2. En $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$, a los términos 1 y 10 se les llama _____ de la proporción y a los términos 2 y 5 se les llama _____ de la proporción.
3. Los productos _____ para la proporción $\frac{4}{7} = \frac{36}{x}$ son $4 \cdot x$ y $7 \cdot 36$.
4. Cuando dos pares de números forman una proporción, se dice que los números son _____.
5. A una letra que se utiliza para representar un número desconocido se le llama _____.
6. Cuando se encuentra el valor de x que hace verdadera la proporción $\frac{3}{8} = \frac{x}{16}$ se dice que se ha _____ la proporción.
7. Las proporciones se resuelven escribiendo una serie de pasos que resultan en una ecuación de la forma $x =$ un número o un número $= x$. Se dice que la variable x está _____ en un lado de la ecuación.
8. Una _____ es una razón (o tasa) que compara el tamaño de un modelo, dibujo o mapa con el tamaño de un objeto real.

CONCEPTOS

Complete los espacios.

9. Si los productos cruzados de una proporción son iguales, la proporción es _____. Si los productos cruzados *no son iguales,* la proporción es _____.

10. La proporción $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$ será verdadera si el producto $\square \cdot 10$ es igual al producto $\square \cdot 4$.

11. Complete los productos cruzados.

$$\square \cdot 10 = \square \qquad 2 \cdot \square = \square$$
$$\frac{9}{2} = \frac{45}{10}$$

12. En la ecuación $6 \cdot x = 2 \cdot 12$, para deshacer la multiplicación por 6 y despejar x, _____ ambos lados de la ecuación entre 6.

13. Etiquete las unidades faltantes en la proporción.

$$\frac{\text{Auxiliares de profesores} \rightarrow 12}{\square \rightarrow 100} = \frac{3 \leftarrow \square}{25 \leftarrow \text{Niños}}$$

14. Considere el siguiente problema: *Por cada 15 pies de malla, se utilizan 4 postes de soporte. ¿Cuántos postes de soporte se necesitarán para 300 pies de malla?* ¿Cuáles de las proporciones abajo pudieran utilizarse para resolver el problema?

i. $\frac{15}{4} = \frac{300}{x}$ **ii.** $\frac{15}{4} = \frac{x}{300}$

iii. $\frac{4}{15} = \frac{300}{x}$ **iv.** $\frac{4}{15} = \frac{x}{300}$

NOTACIÓN

Complete cada solución.

15. Resuelva la proporción: $\frac{2}{3} = \frac{x}{9}$

$$2 \cdot 9 = \square$$
$$\square = 3 \cdot x$$
$$\frac{18}{\square} = \frac{3 \cdot x}{\square}$$
$$\square = x$$

La solución es $\square$.

16. Resuelva la proporción: $\frac{14}{x} = \frac{49}{17.5}$

$$14 \cdot \square = x \cdot 49$$
$$\square = x \cdot 49$$
$$\frac{245}{\square} = \frac{x \cdot 49}{\square}$$
$$\square = x$$

La solución es $\square$.

PRÁCTICA GUIADA

Escriba cada enunciado como una proporción. Vea el Ejemplo 1.

17. 20 es a 30 como 2 es a 3.

18. 9 es a 36 como 1 es a 4.

19. 400 cobijas es a 100 camas como 4 cobijas es a 1 cama.

20. 50 palas es a 125 trabajadores como 2 palas es a 5 trabajadores.

Determine si cada proporción es verdadera o falsa simplificando. Vea el Ejemplo 2.

21. $\frac{7}{9} = \frac{70}{81}$ **22.** $\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$

23. $\frac{21}{14} = \frac{18}{12}$ **24.** $\frac{42}{38} = \frac{95}{60}$

Determine si cada proporción es verdadera o falsa encontrando los productos cruzados. Vea el Ejemplo 3.

25. $\frac{4}{32} = \frac{2}{16}$ **26.** $\frac{6}{27} = \frac{4}{18}$

27. $\frac{9}{19} = \frac{38}{80}$ **28.** $\frac{40}{29} = \frac{29}{22}$

Determine si cada proporción es verdadera o falsa encontrando los productos cruzados. Vea el Ejemplo 4.

29. $\frac{0.5}{0.8} = \frac{1.1}{1.3}$ **30.** $\frac{0.6}{1.4} = \frac{0.9}{2.1}$

31. $\frac{1.2}{3.6} = \frac{1.8}{5.4}$ **32.** $\frac{3.2}{4.5} = \frac{1.6}{2.7}$

33. $\frac{1\frac{4}{5}}{3\frac{3}{7}} = \frac{2\frac{3}{16}}{4\frac{1}{6}}$ **34.** $\frac{2\frac{1}{2}}{1\frac{1}{5}} = \frac{3\frac{3}{4}}{2\frac{9}{10}}$

35. $\frac{\frac{1}{5}}{1\frac{1}{6}} = \frac{1\frac{1}{7}}{11\frac{2}{3}}$ **36.** $\frac{11\frac{1}{4}}{2\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{6}}$

Determine si los números son proporcionales. Vea el Ejemplo 5.

37. 18, 54 y 3, 9 **38.** 4, 3 y 12, 9

39. 8, 6 y 21, 16 **40.** 15, 7 y 13, 6

Resuelva cada proporción. Compruebe cada resultado. **Vea el Ejemplo 6.**

41. $\frac{5}{10} = \frac{3}{c}$

42. $\frac{7}{14} = \frac{2}{x}$

43. $\frac{2}{3} = \frac{x}{6}$

44. $\frac{3}{6} = \frac{x}{8}$

Resuelva cada proporción. Compruebe cada resultado. **Vea el Ejemplo 7.**

45. $\frac{0.6}{9.6} = \frac{x}{4.8}$

46. $\frac{0.4}{3.4} = \frac{x}{13.6}$

47. $\frac{2.75}{x} = \frac{1.5}{1.2}$

48. $\frac{9.8}{x} = \frac{2.8}{5.4}$

Resuelva cada proporción. Compruebe cada resultado. Escriba cada resultado como una fracción o un número mixto. **Vea el Ejemplo 8.**

49. $\frac{x}{1\frac{1}{2}} = \frac{10\frac{1}{2}}{4\frac{1}{2}}$

50. $\frac{x}{3\frac{1}{3}} = \frac{1\frac{1}{2}}{1\frac{9}{11}}$

51. $\frac{x}{1\frac{1}{6}} = \frac{2\frac{5}{8}}{3\frac{1}{2}}$

52. $\frac{x}{2\frac{2}{3}} = \frac{1\frac{1}{20}}{3\frac{1}{2}}$

INTÉNTELO

Resuelva cada proporción.

53. $\frac{4{,}000}{x} = \frac{3.2}{2.8}$

54. $\frac{0.4}{1.6} = \frac{96.7}{x}$

55. $\frac{12}{6} = \frac{x}{\frac{1}{4}}$

56. $\frac{15}{10} = \frac{x}{\frac{1}{3}}$

57. $\frac{x}{800} = \frac{900}{200}$

58. $\frac{x}{200} = \frac{1{,}800}{600}$

59. $\frac{x}{2.5} = \frac{3.7}{9.25}$

60. $\frac{8.5}{x} = \frac{4.25}{1.7}$

61. $\frac{0.8}{2} = \frac{x}{5}$

62. $\frac{0.9}{0.3} = \frac{6}{x}$

63. $\frac{x}{4\frac{1}{10}} = \frac{3\frac{3}{4}}{1\frac{7}{8}}$

64. $\frac{x}{2\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{5}}$

65. $\frac{340}{51} = \frac{x}{27}$

66. $\frac{480}{36} = \frac{x}{15}$

67. $\frac{0.4}{1.2} = \frac{6}{x}$

68. $\frac{5}{x} = \frac{2}{4.4}$

69. $\frac{4.65}{7.8} = \frac{x}{5.2}$

70. $\frac{8.6}{2.4} = \frac{x}{6}$

71. $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{0.25}{x}$

72. $\frac{\frac{7}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{0.25}{x}$

APLICACIONES

Para resolver cada problema, escriba y después resuelva una proporción.

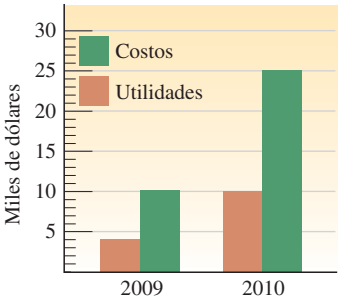
73. ALMUERZOS ESCOLARES La gerente de una cafetería escolar ordena 750 tazas de pudín. ¿Cuál será el costo de la orden si las adquiere al por mayor, 6 tazas por $1.75?

74. COMPRA DE ROPA Como parte de una liquidación de primavera, una tienda para hombres pone en oferta las camisas de vestir, 2 por $25.98. ¿Cuánto pagará un hombre de negocios si compra cinco camisas?

75. REGALOS DE ANIVERSARIO Una florista vende una docena de rosas rojas de tallo largo por $57.99. En honor de su 16o aniversario, un hombre desea comprar 16 rosas para su esposa. ¿Cuánto costarán las rosas? (*Sugerencia:* ¿Cuántas rosas hay en una docena?)

76. COCINA Una receta para salsa para espagueti requiere cuatro botellas de 16 onzas de catsup para preparar 2 galones de salsa. ¿Cuántas botellas de catsup se necesitan para preparar 10 galones de salsa? (*Sugerencia:* Lea el problema con mucho cuidado.)

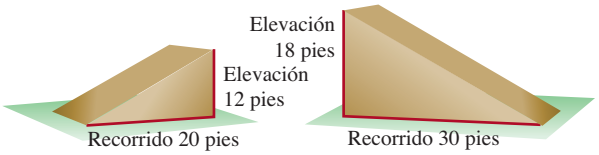
77. RENDIMIENTO DE NEGOCIOS La siguiente gráfica de barras muestra los costos anuales y las utilidades recibidas por un negocio. ¿Las razones de los costos a utilidades para el 2009 y el 2010 son iguales?



78. RAMPAS Escriba una razón de la elevación al recorrido para cada rampa mostrada. Iguale las razones.

a. ¿La proporción resultante es verdadera?

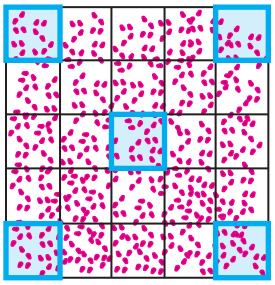
b. ¿Una rampa es más pronunciada que la otra?



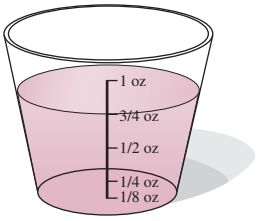
79. MEZCLADO DE PERFUMES Se va a mezclar un perfume en la razón de 3 gotas de esencia pura a 7 gotas de alcohol. ¿Cuántas gotas de esencia pura deben mezclarse con 56 gotas de alcohol?

80. PREPARACIÓN DE COLONIAS Se va a preparar una colonia mezclando 2 gotas de esencia pura con 5 gotas de agua destilada. ¿Cuánta agua debe utilizarse con 15 gotas de esencia pura?

81. TRABAJO DE LABORATORIO En un conteo de glóbulos rojos, se coloca una gota de la sangre diluida del paciente en una rejilla como la mostrada abajo. En vez de contar cada uno de todos los glóbulos rojos en la rejilla de 25 cuadrados, un técnico cuenta sólo el número de glóbulos en los cinco cuadrados remarcados. Después utiliza una proporción para estimar el conteo total de glóbulos rojos. Si hay 195 glóbulos rojos en los cuadrados azules, ¿alrededor de cuántos glóbulos rojos hay en toda la rejilla?

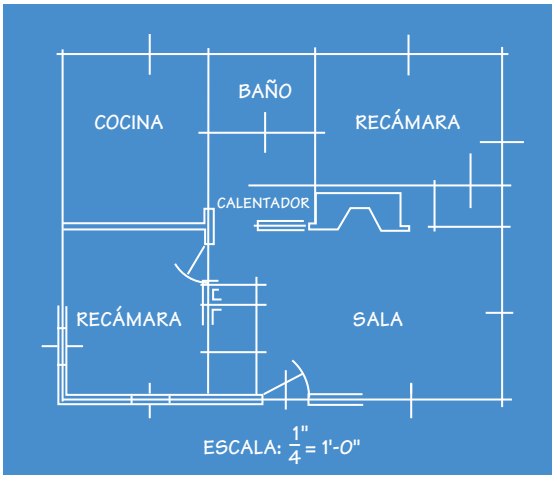


82. DOSIS Se muestra la dosis apropiada de cierto medicamento para un niño de 30 libras. A esta tasa, ¿cuál sería la dosis para un niño de 45 libras?



83. DISEÑO En un dibujo a escala, una torre para antena de 280 pies se dibuja de 7 pulgadas de alto. El edificio al lado de ella se dibuja de 2 pulgadas de alto. ¿Qué tan alto es el edificio real?

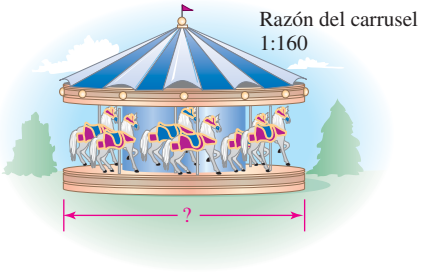
84. CIANOTIPOS La escala para el trazado en el cianotipo indica al lector que un largo de $\frac{1}{4}$ de pulgada $\left(\frac{1}{4}''\right)$ en el trazado corresponde a un tamaño real de 1 pie (1′0″). Suponga que el largo de la cocina es de $2\frac{1}{2}$ pulgadas en el cianotipo. ¿Qué tan larga es la cocina real?



85. FERROMODELISMO Un modelo a escala HO de una locomotora es de 9 pulgadas de largo. Si la escala HO es de 87 pies a 1 pie, ¿qué tan larga es la locomotora real? (*Sugerencia:* Compare pies con pulgadas. ¿Cuántas pulgadas hay en un pie?)

86. FERROMODELISMO Un modelo a escala N de un furgón es de 4 pulgadas de largo. Si la escala N es de 169 pies a 1 pie, ¿qué tan largo es el furgón real? (*Sugerencia:* Compare pies con pulgadas. ¿Cuántas pulgadas hay en un pie?)

87. CARRUSELES La razón en la ilustración de abajo indica que 1 pulgada en el modelo del carrusel es equivalente a 160 pulgadas en el carrusel real. ¿Qué tan ancho debe ser el modelo si el carrusel real es de 35 pies de ancho? (*Sugerencia:* Convierta 35 pies a pulgadas.)



88. MEZCLADO DE COMBUSTIBLES Las instrucciones en una lata de petróleo destinada a añadirse a la gasolina de una cortadora de césped se leen como se muestra. ¿Las instrucciones son correctas? (*Sugerencia*: Hay 128 onzas en un galón.)

Recomendado	Gasolina	Petróleo
50 a 1	6 gal	16 oz

89. PREPARACIÓN DE GALLETAS Una receta para galletas con chispas de chocolate requiere $1\frac{1}{4}$ tazas de harina y 1 taza de azúcar. La receta preparará $3\frac{1}{2}$ docenas de galletas. ¿Cuántas tazas de harina se necesitarán para preparar 12 docenas de galletas?

90. PREPARACIÓN DE BROWNIES Un receta para brownies requiere 4 huevos y $1\frac{1}{2}$ tazas de harina. Si la receta prepara 15 brownies, ¿cuántas tazas de harina se necesitarán para preparar 130 brownies?

Carreras del campus

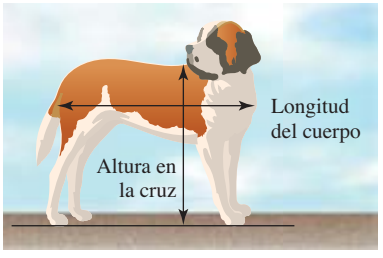
Chef

Nick White/Getty Images

91. VELOCIDAD DE CÓMPUTO Al utilizar el programa *Mathematica 3.0*, una computadora Dell Dimension XPS R350 (Pentium II) puede desarrollar un conjunto de 15 cálculos en 2.85 segundos. ¿Qué tanto le tomará a la computadora desarrollar 100 de tales cálculos?

92. CONTROL DE CALIDAD A partir de una muestra de 500 camisas para hombre, 17 se rechazaron debido a cuellos torcidos. ¿Cuántos cuellos torcidos esperaría encontrar en una tirada de 15,000 camisas?

93. PERROS Refiérase a la ilustración de abajo. Un sitio web de San Bernardos lista las "proporciones ideales para la *altura en la cruz a la longitud del cuerpo* como 5:6". ¿Cuál es la altura ideal en la cruz para un San Bernardo cuya longitud del cuerpo es de $37\frac{1}{2}$ pulgadas?



94. MILLAJE Bajo condiciones normales, una Hummer puede viajar 325 millas con un tanque lleno (25 galones) de diesel. ¿Qué tanto puede viajar con su tanque auxiliar, el cual contiene 17 galones de diesel?

95. RECIBOS DE NÓMINA Billie gana $412 por una semana de 40 horas. Si faltó 10 horas de trabajo la semana pasada, ¿cuánto se le pagó?

96. DOTACIÓN DE PERSONAL Una junta escolar ha determinado que debe haber 3 profesores por cada 50 estudiantes. Complete la tabla llenando el número de profesores necesarios en cada escuela.

	Glenwood High	Goddard Junior High	Sellers Elementary
Matrícula	2,700	1,900	850
Profesores			

REDACCIÓN

97. Explique la diferencia entre una razón y una proporción.

98. El siguiente párrafo es de un libro acerca de casas para muñecas. ¿Qué concepto de esta sección se menciona?

> *En la actualidad, la escala reconocida internacionalmente para las casas de muñecas y miniaturas es de 1 pulg. = 1 pie. Esta es suficientemente pequeña para definirse como miniatura, pero no tan pequeña para que los detalles de la decoración y amueblado se vean de manera clara.*

99. Escriba un problema que pudiera resolverse utilizando la siguiente proporción.

$$\frac{\text{Onzas de anacardos} \to 4}{\text{Calorías} \to 639} = \frac{10 \leftarrow \text{Onzas de anacardos}}{x \leftarrow \text{Calorías}}$$

100. Escriba un problema acerca de una situación con la que se encuentre en su vida diaria que pudiera resolverse utilizando una proporción.

REPASO

Desarrolle cada operación.

101. $7.4 + 6.78 + 35 + 0.008$

102. $29.5 + 34.4 + 12.8$

103. $48.8 - 17.372$

104. $78.47 - 53.3$

105. $-3.8 - (-7.9)$

106. $-17.1 + 8.4$

107. $-35.1 - 13.99$

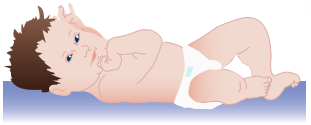
108. $-5.55 + (-1.25)$

SECCIÓN 5.3
Unidades de medición estadounidenses

Objetivos

1. Usar una regla para medir longitudes en pulgadas.
2. Definir las unidades de longitud estadounidenses.
3. Convertir de una unidad de longitud estadounidense a otra.
4. Definir las unidades de peso estadounidenses.
5. Convertir de una unidad de peso estadounidense a otra.
6. Definir las unidades de capacidad estadounidenses.
7. Convertir de una unidad de capacidad estadounidense a otra.
8. Definir las unidades de tiempo.
9. Convertir de una unidad de tiempo a otra.

Los dos sistemas de medición comunes son el **estadounidense** (o **inglés**) y el **sistema métrico.** En esta sección se explicarán las unidades de medición estadounidenses, y en la siguiente las unidades métricas. Algunas unidades estadounidenses comunes son *pulgadas, pies, millas, onzas, libras, toneladas, tazas, pintas, cuartos de galón* y *galones.* Estas unidades se utilizan cuando se mide la longitud, el peso y la capacidad.



Un bebé recién nacido tiene 20 pulgadas de largo.

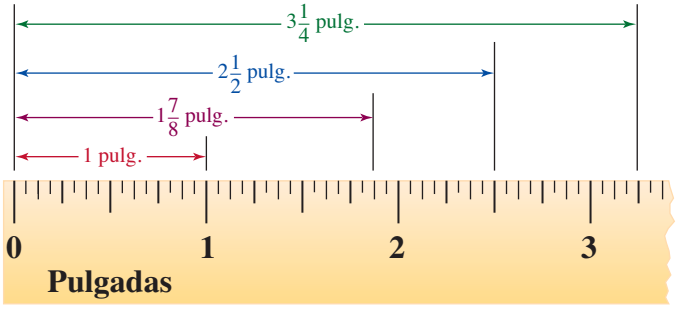
Un porte de correo de primera clase para una carta que pesa menos de 1 onza es de ¢44.

La leche se vende en contenedores de 1 galón.

1 Usar una regla para medir longitudes en pulgadas

Una regla es una de las herramientas más comunes utilizadas para medir distancias o longitudes. La figura abajo muestra parte de una regla. La mayoría de las reglas son de 12 pulgadas (1 pie) de largo. Dado que 12 pulgadas = 1 pie, una regla se divide en 12 longitudes iguales de 1 pulgada. Cada pulgada se divide en mitades de una pulgada, cuartos de una pulgada, octavos de una pulgada y dieciseisavos de una pulgada.

El extremo izquierdo de la regla puede estar (aunque en algunas ocasiones no) etiquetado con un cero. Cada punto en una regla, como cada punto en una recta numérica, tiene un número asociado con él. Ese número es la distancia entre el punto y el 0. Abajo se muestran varias longitudes en la regla.



Tamaño real

EJEMPLO 1 Encuentre la longitud del clip para papel mostrado aquí.

Estrategia Se colocará una regla debajo del clip para papel, con el extremo izquierdo de la regla (el cual puede pensarse como el 0) directamente debajo de un extremo del clip para papel.

POR QUÉ Entonces se puede encontrar la longitud del clip para papel identificando dónde se alinea su otro extremo con las marcas impresas en negro en la regla.

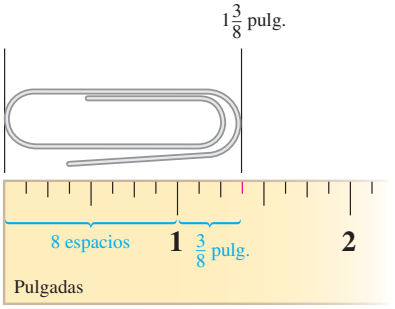
Auto-revisión 1

Encuentre la longitud del clip para papel tamaño jumbo.

Ahora intente **Problema 27**

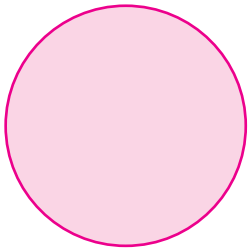
Solución

Dado que las marcas entre el 0 y el 1 en la regla crean ocho espacios iguales, la regla está escalada en octavos de una pulgada. El clip para papel es de $1\frac{3}{8}$ pulgadas de largo.



Auto-revisión 2

Encuentre el ancho del círculo.



Ahora intente **Problema 29**

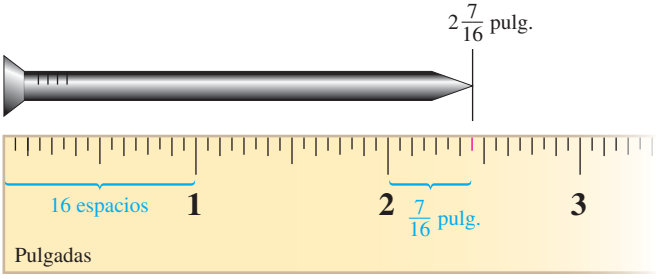
EJEMPLO 2 Encuentre la longitud del clavo mostrado abajo.

Estrategia Se colocará una regla debajo del clavo, con el extremo izquierdo de la regla (el cual puede pensarse como el 0) directamente debajo de un extremo de la cabeza del clavo.

POR QUÉ Entonces se puede encontrar la longitud del clavo identificando dónde se alinea su extremo con punta con las marcas impresas en negro en la regla.

Solución

Dado que las marcas entre el 0 y el 1 en la regla crean dieciséis espacios, la regla está escalada en dieciseisavos de una pulgada.



El clavo es de $2\frac{7}{16}$ pulgadas de longitud.

2 Definir las unidades de longitud estadounidenses

El sistema de medición estadounidense utiliza las unidades **pulgada, pie, yarda** y **milla** para medir la longitud. Estas unidades se relacionan de las siguientes maneras.

Unidades de longitud estadounidenses

1 pie (pie) = 12 pulgadas (pulg.)	1 yarda (yd) = 36 pulgadas
1 yarda = 3 pies	1 milla (mi) = 5,280 pies

La abreviación para cada unidad está escrita entre paréntesis.

El lenguaje de las matemáticas De acuerdo con algunas fuentes, la pulgada originalmente se definía como la punta del pulgar al primer nudillo. En algunos lenguajes la palabra *pulgada* es similar o igual que *pulgar*. En sueco, *tum* es pulgada y *tumme* es pulgar. En italiano, *pollice* es pulgada y pulgar.

3 Convertir de una unidad de longitud estadounidense a otra

Para convertir de una unidad de longitud a otra se utilizan *factores de conversión de unidades*. Para encontrar el factor de conversión de unidades entre yardas y pies se comienza con el hecho:

$$3 \text{ pies} = 1 \text{ yd}$$

Si se dividen ambos lados de esta ecuación entre 1 yarda, se obtiene

$$\frac{3 \text{ pies}}{\mathbf{1 \text{ yd}}} = \frac{1 \text{ yd}}{\mathbf{1 \text{ yd}}}$$

$$\frac{3 \text{ pies}}{1 \text{ yd}} = 1$$

Simplifique el lado derecho de la ecuación. Un número dividido entre sí mismo es 1: $\frac{1 \text{ yd}}{1 \text{ yd}} = 1$.

A la fracción $\frac{3 \text{ pies}}{1 \text{ yd}}$ se le llama **factor de conversión de unidades,** debido que su valor es de 1. Puede leerse como "3 pies por yarda". Dado que esta fracción es igual a 1, el multiplicar una longitud por esta fracción no cambia su medida; sólo cambia las *unidades* de medición.

Para convertir unidades de longitud en el sistema de medición estadounidense, se utilizan los siguientes factores de conversión de unidades. Cada factor de conversión mostrado abajo es una forma de 1.

Para convertir de	Use el factor de conversión de unidades	Para convertir de	Use el factor de conversión de unidades
pies a pulgadas	$\frac{12 \text{ pulg.}}{1 \text{ pie}}$	pulgadas a pies	$\frac{1 \text{ pie}}{12 \text{ pulg.}}$
yardas a pies	$\frac{3 \text{ pies}}{1 \text{ yd}}$	pies a yardas	$\frac{1 \text{ yd}}{3 \text{ pies}}$
yardas a pulgadas	$\frac{36 \text{ pulg.}}{1 \text{ yd}}$	pulgadas a yardas	$\frac{1 \text{ yd}}{36 \text{ pulg.}}$
millas a pies	$\frac{5{,}280 \text{ pies}}{1 \text{ mi}}$	pies a millas	$\frac{1 \text{ mi}}{5{,}280 \text{ pies}}$

EJEMPLO 3 Convierta 8 yardas a pies.

Estrategia Se multiplicarán las 8 yardas por un factor de conversión de unidades elegido de manera cuidadosa.

POR QUÉ Si se multiplica por el factor de conversión de unidades apropiado, se pueden eliminar las unidades no deseadas de yardas y convertir a pies.

Solución

Para convertir de yardas a pies, se debe utilizar un factor de conversión de unidades que relacione pies a yardas. Dado que hay 3 pies por yarda, se multiplican las 8 yardas por el factor de conversión de unidades $\frac{3 \text{ pies}}{1 \text{ yd}}$.

$$8 \text{ yd} = \frac{8 \text{ yd}}{1} \cdot \frac{\mathbf{3 \text{ pies}}}{\mathbf{1 \text{ yd}}}$$

Escriba 8 yd como una fracción: $8 \text{ yd} = \frac{8 \text{ yd}}{1}$. Después multiplique por una forma de 1: $\frac{3 \text{ pies}}{1 \text{ yd}}$.

$$= \frac{8 \text{ } \cancel{\text{yd}}}{1} \cdot \frac{3 \text{ pies}}{1 \text{ } \cancel{\text{yd}}}$$

Elimine las unidades comunes de yardas del numerador y el denominador. Observe que las unidades de pies permanecen.

$$= 8 \cdot 3 \text{ pies}$$

Simplifique.

$$= 24 \text{ pies}$$

Multiplique: $8 \cdot 3 = 24$.

8 yardas es igual a 24 pies.

Consejo útil Observe que en el Ejemplo 3 se eliminaron las unidades de yardas y se introdujeron las unidades de pies multiplicando por el factor de conversión de unidades apropiado. En general, un factor de conversión es una fracción con la siguiente forma:

$$\frac{\text{Unidad que se desea introducir}}{\text{Unidad que se desea eliminar}} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{Numerador} \\ \leftarrow \text{Denominador} \end{matrix}$$

Auto-revisión 3

Convierta 9 yardas a pies.

Ahora intente **Problema 35**

Auto-revisión 4

Convierta $1\frac{1}{2}$ pies a pulgadas.

Ahora intente **Problem 39**

EJEMPLO 4 Convierta $1\frac{3}{4}$ pies a pulgadas.

Estrategia Se multiplicarán los $1\frac{3}{4}$ pies por un factor de conversión de unidades elegido de manera cuidadosa.

POR QUÉ Si se multiplica por el factor de conversión de unidades apropiado, se pueden eliminar las unidades no deseadas de pies y convertir a pulgadas.

Solución

Para convertir de pies a pulgadas se debe elegir un factor de conversión de unidades cuyo numerador contenga las unidades que se desean introducir (pulgadas) y cuyo denominador contenga las unidades que se desean eliminar (pies). Dado que hay 12 pulgadas por pie, se utilizará

$$\frac{12 \text{ pulg.}}{1 \text{ pie}}$$

← Esta es la unidad que se desea introducir.
← Esta es la unidad que se desea eliminar (la unidad original).

Para desarrollar la conversión, se multiplica.

$$1\frac{3}{4} \text{ pie} = \frac{7}{4} \text{ pie} \cdot \frac{\mathbf{12 \text{ pulg.}}}{\mathbf{1 \text{ pie}}}$$

Escriba $1\frac{3}{4}$ como una fracción impropia: $1\frac{3}{4} = \frac{7}{4}$. Después multiplique por una forma de 1: $\frac{12 \text{ pulg.}}{1 \text{ pie}}$.

$$= \frac{7}{4} \text{ pie} \cdot \frac{12 \text{ pulg.}}{1 \text{ pie}}$$

Elimine las unidades comunes del numerador y el denominador. Observe que las unidades de pulgadas permanecen.

$$= \frac{7 \cdot 12}{4 \cdot 1} \text{ pulg.}$$

Multiplique las fracciones.

$$= \frac{7 \cdot 3 \cdot \overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{4}} \cdot 1} \text{ pulg.}$$

Para simplificar la fracción, factorice el 12. Después elimine el factor común de 4 del numerador y el denominador.

$$= 21 \text{ pulg.}$$

Simplifique.

$1\frac{3}{4}$ es igual a 21 pulgadas.

¡Cuidado! Cuando se convierten longitudes, si no aparecen unidades comunes a eliminar en el numerador y denominador, ha elegido el factor de conversión incorrecto.

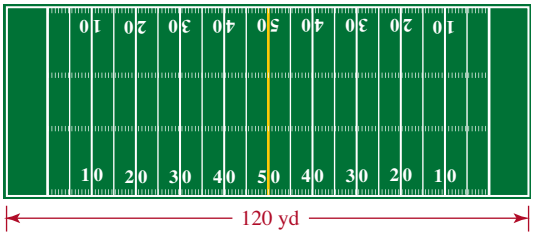
En ocasiones se deben utilizar dos (o más) factores de conversión para eliminar las unidades proporcionadas mientras se introducen las unidades deseadas. El siguiente ejemplo ilustra este concepto.

Auto-revisión 5

MARATONES El *maratón* es una carrera de larga distancia con una distancia oficial de 26 millas 385 yardas. Convierta las 385 yardas a millas. Dé la respuesta exacta y una aproximación decimal, redondeada a la centésima de milla más cercana.

Ahora intente **Problema 43**

EJEMPLO 5 ***Futbol americano*** Un campo de futbol americano (incluyendo ambas zonas de anotación) es de 120 yardas de largo. Convierta esta longitud a millas. Dé la respuesta exacta y una aproximación decimal, redondeada a la centésima de milla más cercana.



Estrategia Se utilizará un proceso de multiplicación en dos partes que convierta las 120 yardas a pies y después convierta ese resultado a millas.

POR QUÉ Se debe utilizar un proceso en dos partes debido a que la tabla en la página 445 no contiene un factor de conversión de unidades sencillo que convierta de yardas a millas.

Solución

Dado que hay 3 pies por yarda, se pueden convertir las 120 yardas a pies multiplicando por el factor de conversión de unidades $\frac{3 \text{ pies}}{1 \text{ yd}}$. Dado que hay 1 milla por cada 5.280 pies, se puede convertir ese resultado a millas multiplicando por el factor de conversión de unidades $\frac{1 \text{ mi}}{5{,}280 \text{ pies}}$.

$$120 \text{ yd} = \frac{120 \text{ yd}}{1} \cdot \frac{\mathbf{3 \text{ pies}}}{\mathbf{1 \text{ yd}}} \cdot \frac{\mathbf{1 \text{ mi}}}{\mathbf{5{,}280 \text{ pies}}}$$

Escriba las 120 yd como una fracción: $120 \text{ yd} = \frac{120 \text{ yd}}{1}$
Después multiplique por dos factores de conversión de unidades: $\frac{3 \text{ pies}}{1 \text{ yd}} = 1$ y $\frac{1 \text{ mi}}{5{,}280 \text{ pies}} = 1$.

$$= \frac{120 \text{ yd}}{1} \cdot \frac{3 \text{ pies}}{1 \text{ yd}} \cdot \frac{1 \text{ mi}}{5{,}280 \text{ pies}}$$

Elimine las unidades comunes de yardas y pies en el numerador y el denominador. Observe que todas las unidades se eliminan excepto las millas.

$$= \frac{120 \cdot 3}{5{,}280} \text{ mi}$$

Multiplique las fracciones.

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{1}{\cancel{3}} \cdot \overset{1}{\cancel{5}} \cdot 3}{\underset{1}{\cancel{2}} \cdot \underset{1}{\cancel{2}} \cdot \underset{1}{\cancel{2}} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \underset{1}{\cancel{3}} \cdot \underset{1}{\cancel{5}} \cdot 11} \text{ mi}$$

Para simplificar la fracción, realice la factorización de primos del 120 y el 5,280 y elimine los factores comunes de 2, 3 y 5.

$$= \frac{3}{44} \text{ mi}$$

Multiplique los factores restantes en el numerador. Multiplique los factores restantes en el denominador.

Un campo de futbol americano (incluyendo las zonas de anotación) es de *exactamente* $\frac{3}{44}$ millas de largo.

También se puede presentar esta conversión como un decimal. Si se divide el 3 entre el 44 (como se muestra a la derecha) y se redondea el resultado a la centésima más cercana, se ve que un campo de futbol americano (incluyendo las zonas de anotación) es de *aproximadamente* 0.07 millas de largo.

$$\begin{array}{r} 0.068 \\ 44\overline{)3.000} \\ -\ 0 \\ \hline 3\,00 \\ -\ 2\,64 \\ \hline 360 \\ -\ 352 \\ \hline 8 \end{array}$$

4 Definir las unidades de peso estadounidenses

El sistema de medición estadounidense utiliza las unidades **onza, libra** y **tonelada** para medir el peso. Estas unidades se relacionan de las siguientes maneras.

Unidades de peso estadounidenses

1 libra (lb) = 16 onzas (oz) 1 tonelada (T) = 2,000 libras

La abreviación para cada unidad está escrita entre paréntesis.

5 Convertir de una unidad de peso estadounidense a otra

Para convertir unidades de peso en el sistema de medición estadounidense, se utilizan los siguientes factores de conversión de unidades. Cada factor de conversión mostrado abajo es una forma de 1.

Para convertir de	Use el factor de conversión de unidades	Para convertir de	Use el factor de conversión de unidades
libras a onzas	$\frac{16 \text{ oz}}{1 \text{ lb}}$	onzas a libras	$\frac{1 \text{ lb}}{16 \text{ oz}}$
toneladas a libras	$\frac{2{,}000 \text{ lb}}{1 \text{ ton}}$	libras a toneladas	$\frac{1 \text{ ton}}{2{,}000 \text{ lb}}$

Auto-revisión 6

Convierta 60 onzas a libras.

Ahora intente **Problema 47**

EJEMPLO 6 Convierta 40 onzas a libras.

Estrategia Se multiplicarán las 40 onzas por un factor de conversión de unidades elegido de manera cuidadosa.

POR QUÉ Si se multiplica por el factor de conversión de unidades apropiado, se pueden eliminar las unidades no deseadas de onzas y convertir a libras.

Solución

Para convertir de onzas a libras, se debe elegir un factor de conversión de unidades cuyo numerador contenga las unidades que se desean introducir (libras) y cuyo denominador contenga las unidades que se desean eliminar (onzas). Dado que hay 1 libra por cada 16 onzas, se utilizará

$$\frac{1\ \text{lb}}{16\ \text{oz}}$$

← Esta es la unidad que se desea introducir.
← Esta es la unidad que se desea eliminar (la unidad original).

Para desarrollar la conversión, se multiplica.

$$40\ \text{oz} = \frac{40\ \text{oz}}{1} \cdot \frac{\mathbf{1\ lb}}{\mathbf{16\ oz}}$$

Escriba las 40 oz como una fracción: $40\ \text{oz} = \frac{40\ \text{oz}}{1}$. Después multiplique por una forma de 1: $\frac{1\ \text{lb}}{16\ \text{oz}}$.

$$= \frac{40\ \cancel{\text{oz}}}{1} \cdot \frac{1\ \text{lb}}{16\ \cancel{\text{oz}}}$$

Elimine las unidades comunes de onzas del numerador y el denominador. Observe que las unidades de libras permanecen.

$$= \frac{40}{16}\ \text{lb}$$

Multiplique las fracciones.

Hay dos maneras de completar la solución. Primero, se puede eliminar cualquier factor común del numerador y el denominador para simplificar la fracción. Después se puede escribir el resultado como un número mixto.

$$\frac{40}{16}\ \text{lb} = \frac{5 \cdot \overset{1}{\cancel{8}}}{2 \cdot \underset{1}{\cancel{8}}}\ \text{lb} = \frac{5}{2}\ \text{lb} = 2\frac{1}{2}\ \text{lb}$$

Un segundo método es dividir el numerador entre el denominador y expresar el resultado como un decimal.

$$\frac{40}{16}\ \text{lb} = 2.5\ \text{lb}$$

Desarrolle la división: 40 ÷ 16.

$$\begin{array}{r} 2.5 \\ 16\overline{)40.0} \\ \underline{-32} \\ 80 \\ \underline{-80} \\ 0 \end{array}$$

40 onzas es igual a $2\frac{1}{2}$ lb (ó 2.5 lb).

Auto-revisión 7

Convierta 60 libras a onzas.

Ahora intente **Problema 51**

EJEMPLO 7 Convierta 25 libras a onzas.

Estrategia Se multiplicarán las 25 libras por un factor de conversión de unidades elegido de manera cuidadosa.

POR QUÉ Si se multiplica por el factor de conversión de unidades apropiado, se pueden eliminar las unidades no deseadas de libras y convertir a onzas.

Solución

Para convertir de libras a onzas, se debe elegir un factor de conversión de unidades cuyo numerador contenga las unidades que se desean introducir (onzas) y cuyo denominador contenga las unidades que se desean eliminar (libras). Dado que hay 16 onzas por libra, se utilizará

$$\frac{16\ \text{oz}}{1\ \text{lb}}$$

← Esta es la unidad que se desea introducir.
← Esta es la unidad que se desea eliminar (la unidad original).

Para desarrollar la conversión, se multiplica.

$$25\text{ lb} = \frac{25\text{ lb}}{1} \cdot \frac{\mathbf{16\text{ oz}}}{\mathbf{1\text{ lb}}}$$

Escriba las 20 lb como una fracción: $25\text{ lb} = \frac{25\text{ lb}}{1}$. Después multiplique por una forma de 1: $\frac{16\text{ oz}}{1\text{ lb}}$.

$$= \frac{25\text{ lb}}{1} \cdot \frac{16\text{ oz}}{1\text{ lb}}$$

Elimine las unidades comunes de libras del numerador y el denominador. Observe que las unidades de onzas permanecen.

$$= 25 \cdot 16\text{ oz}$$

Simplifique.

$$= 400\text{ oz}$$

Multiplique: $25 \cdot 16 = 400$.

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times\ 16 \\ \hline 150 \\ 250 \\ \hline 400 \end{array}$$

25 libras es igual a 400 onzas.

6 Definir las unidades de capacidad estadounidenses

El sistema de medición estadounidense utiliza las unidades **onza, taza, pinta, cuarto de galón** y **galón** para medir la capacidad. Estas unidades se relacionan como a continuación.

Unidades de capacidad estadounidenses

1 taza (c) = 8 onzas líquidas (fl oz)
1 pinta (pt) = 2 tazas
1 cuarto de galón (qt) = 2 pintas
1 galón (gal) = 4 cuartos de galón

La abreviación para cada unidad está escrita entre paréntesis.

El lenguaje de las matemáticas La palabra *capacidad* significa la cantidad que puede contenerse. Por ejemplo, un tanque de gasolina podría tener una *capacidad* de 12 galones.

7 Convertir de una unidad de capacidad estadounidense a otra

Para convertir unidades de capacidad en el sistema de medición estadounidense, se utilizan los siguientes factores de conversión de unidades. Cada factor de conversión mostrado abajo es una forma de 1.

Para convertir de	Use el factor de conversión de unidades	Para convertir de	Use el factor de conversión de unidades
tazas a onzas	$\frac{8\text{ fl oz}}{1\text{ c}}$	onzas a tazas	$\frac{1\text{ c}}{8\text{ fl oz}}$
pintas a tazas	$\frac{2\text{ c}}{1\text{ pt}}$	tazas a pintas	$\frac{1\text{ pt}}{2\text{ c}}$
cuartos de galón a pintas	$\frac{2\text{ pt}}{1\text{ qt}}$	pintas a cuartos de galón	$\frac{1\text{ qt}}{2\text{ pt}}$
galones a cuartos de galón	$\frac{4\text{ qt}}{1\text{ gal}}$	cuartos de galón a galones	$\frac{1\text{ gal}}{4\text{ qt}}$

Auto-revisión 8

Convierta 2.5 pintas a onzas líquidas.

Ahora intente **Problema 55**

© Felix Wirth/Corbis

EJEMPLO 8 ***Cocina*** Si una receta requiere 3 pintas de leche, ¿cuántas onzas líquidas de leche deben utilizarse?

Estrategia Se utilizará un proceso de multiplicación en dos partes que convierta las 3 pintas a tazas y después convierta ese resultado a onzas líquidas.

POR QUÉ Se debe utilizar un proceso en dos partes debido a que la tabla en la página 449 no contiene un factor de conversión de unidades sencillo que convierta de pintas a onzas líquidas.

Solución

Dado que hay 2 tazas por pinta, se pueden convertir las 3 pintas a tazas multiplicando por el factor de conversión de unidades $\frac{2\text{ c}}{1\text{ pt}}$. Dado que hay 8 onzas líquidas por taza, se puede convertir ese resultado a onzas líquidas multiplicando por el factor de conversión de unidades $\frac{8\text{ fl oz}}{1\text{ c}}$.

$$3\text{ pt} = \frac{3\text{ pt}}{1} \cdot \frac{\mathbf{2\text{ c}}}{\mathbf{1\text{ pt}}} \cdot \frac{\mathbf{8\text{ fl oz}}}{\mathbf{1\text{ c}}}$$

Escriba las 3 pt como una fracción: $3\text{ pt} = \frac{3\text{ pt}}{1}$. Multiplique los dos factores de conversión de unidades: $\frac{2\text{ c}}{1\text{ pt}} = 1$ y $\frac{8\text{ fl oz}}{1\text{ c}} = 1$.

$$= \frac{3\text{ pt}}{1} \cdot \frac{2\text{ c}}{1\text{ pt}} \cdot \frac{8\text{ fl oz}}{1\text{ c}}$$

Elimine las unidades comunes de pintas y tazas en el numerador y el denominador. Observe que se eliminan todas las unidades excepto las onzas líquidas.

$$= 3 \cdot 2 \cdot 8\text{ fl oz}$$

Simplifique.

$$= 48\text{ fl oz}$$

Multiplique.

Dado que 3 pintas es igual a 48 onzas líquidas, deben utilizarse 48 onzas líquidas de leche.

8 Definir las unidades de tiempo

El sistema de medición estadounidense (y el sistema métrico) utilizan las unidades **segundo, minuto, hora** y **día** para medir el tiempo. Estas unidades se relacionan como a continuación.

Unidades de tiempo

1 minuto (min) = 60 segundos (seg) 1 hora (hr) = 60 minutos

1 día = 24 horas

La abreviación para cada unidad está escrita entre paréntesis.

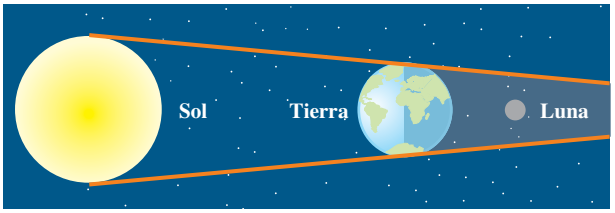
Para convertir unidades de tiempo, se utilizan los siguientes factores de conversión de unidades. Cada factor de conversión mostrado abajo es una forma de 1.

Para convertir de	Use el factor de conversión de unidades
minutos a segundos	$\frac{60\text{ seg}}{1\text{ min}}$
horas a minutos	$\frac{60\text{ min}}{1\text{ hr}}$
días a horas	$\frac{24\text{ hr}}{1\text{ día}}$

Para convertir de	Use el factor de conversión de unidades
segundos a minutos	$\frac{1\text{ min}}{60\text{ seg}}$
minutos a horas	$\frac{1\text{ hr}}{60\text{ min}}$
horas a días	$\frac{1\text{ día}}{24\text{ hr}}$

9 Convertir de una unidad de tiempo a otra

EJEMPLO 9 ***Astronomía*** Un eclipse lunar ocurre cuando la Tierra está entre el sol y la luna de tal manera que la sombra de la Tierra oscurece la luna. (Vea la figura abajo, la cual no está a escala.) Un eclipse lunar total puede durar hasta 105 minutos. Exprese este tiempo en horas.



Estrategia Se multiplicarán los 105 minutos por un factor de conversión de unidades elegido de manera cuidadosa.

POR QUÉ Si se multiplica por el factor de conversión de unidades apropiado, se pueden eliminar las unidades no deseadas de minutos y convertir a horas.

Solución

Para convertir de minutos a horas se debe elegir un factor de conversión de unidades cuyo numerador contenga las unidades que se desean introducir (horas) y cuyo denominador contenga las unidades que se desean eliminar (minutos). Dado que hay 1 hora por cada 60 minutos, se utilizará

$$\frac{1\ \text{hr}}{60\ \text{min}}$$

← Esta es la unidad que se desea introducir.
← Esta es la unidad que se desea eliminar (la unidad original).

Para desarrollar la conversión, se multiplica.

$$105\ \text{min} = \frac{105\ \text{min}}{1} \cdot \frac{\mathbf{1\ hr}}{\mathbf{60\ min}}$$

Escriba los 105 min como una fracción: $105 = \frac{105\ \text{min}}{1}$. Después multiplique por una forma de 1: $\frac{1\ \text{hr}}{60\ \text{min}}$.

$$= \frac{105\ \cancel{\text{min}}}{1} \cdot \frac{1\ \text{hr}}{60\ \cancel{\text{min}}}$$

Elimine las unidades comunes en el numerador y el denominador. Observe que las unidades de hora permanecen.

$$= \frac{105}{60}\ \text{hr}$$

Multiplique los factores.

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot \overset{1}{\cancel{5}} \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot \underset{1}{\cancel{3}} \cdot \underset{1}{\cancel{5}}}\ \text{hr}$$

Para simplificar la fracción, realice la factorización de primos del 105 y el 60. Después elimine los factores comunes de 3 y 5 en el numerador y el denominador.

$$= \frac{7}{4}\ \text{hr}$$

Multiplique los factores restantes en el numerador. Multiplique los factores restantes en el denominador.

$$= 1\tfrac{3}{4}\ \text{hr}$$

Escriba $\frac{7}{4}$ como un número mixto.

Un eclipse lunar total puede durar hasta $1\frac{3}{4}$ horas.

Auto-revisión 9

EL SOL Un eclipse solar (eclipse de Sol) puede durar hasta 450 segundos. Exprese el tiempo en minutos.

Ahora intente **Problema 59**

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. $1\frac{7}{8}$ pulg. **2.** $1\frac{1}{4}$ pulg. **3.** 27 pies **4.** 18 pulg. **5.** $\frac{7}{32}$ mi $\approx$ 0.22 mi **6.** $3\frac{3}{4}$ lb = 3.75 lb **7.** 960 oz **8.** 40 fl oz **9.** $7\frac{1}{2}$ min

SECCIÓN 5.3 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Complete los espacios.

1. Se utiliza una regla para medir _____.
2. Las pulgadas, los pies y las millas son ejemplos de unidades de _____ estadounidenses.
3. $\frac{3 \text{ pies}}{1 \text{ yd}}$, $\frac{1 \text{ ton}}{2{,}000 \text{ lb}}$ y $\frac{4 \text{ qt}}{1 \text{ gal}}$ son ejemplos de factores de conversión de _____.
4. Las onzas, las libras y las toneladas son ejemplos de unidades de _____ estadounidenses.
5. Algunos ejemplos de unidades de _____ estadounidenses son las tazas, las pintas, los cuartos de galón y los galones.
6. Algunas unidades de _____ son los segundos, los minutos, las horas y los días.

CONCEPTOS

Complete los espacios.

7. **a.** 12 pulgadas = ☐ pies
   b. ☐ pies = 1 yarda
   c. 1 yarda = ☐ pulgadas
   d. 1 milla = ☐ pies
8. **a.** ☐ onzas = 1 libra
   b. ☐ libras = 1 tonelada
9. **a.** 1 taza = ☐ onzas líquidas
   b. 1 pinta = ☐ tazas
   c. 2 pintas = ☐ cuarto de galón
   d. 4 cuartos de galón = ☐ galón
10. **a.** 1 día = ☐ horas
    b. 2 horas = ☐ minutos
11. El valor de cualquier factor de conversión es de ☐.
12. En general, un factor de conversión de unidades es una fracción con la siguiente forma:

$$\frac{\text{Unidad que se desea } \square}{\text{Unidad que se desea } \square}$$

← Numerador
← Denominador

13. Considere la solución mostrada abajo.

$$\frac{48 \text{ oz}}{1} \cdot \frac{1 \text{ lb}}{16 \text{ oz}}$$

    a. ¿Qué unidades pueden eliminarse?
    b. ¿Qué unidades quedan?
14. Considere la solución mostrada abajo.

$$\frac{600 \text{ yd}}{1} \cdot \frac{3 \text{ pies}}{1 \text{ yd}} \cdot \frac{1 \text{ mi}}{5{,}280 \text{ pies}}$$

    a. ¿Qué unidades pueden eliminarse?
    b. ¿Qué unidades quedan?
15. Escriba un factor de conversión de unidades para convertir
    a. libras a toneladas
    b. cuartos de galón a pintas
16. Escriba los dos factores de conversión de unidades utilizados para convertir
    a. pulgadas a yardas
    b. días a minutos
17. Relaciones cada objeto con su medición apropiada.
    a. La longitud del litoral de E.U.
    b. La altura de una muñeca Barbie
    c. La extensión del Puente Golden Gate
    d. El ancho de un campo de futbol
    i. $11\frac{1}{2}$ pulg.
    ii. 4,200 pies
    iii. 53.5 yd
    iv. 12,383 mi
18. Relacione cada objeto con su medición apropiada.
    a. El peso de la bala para hombres utilizada en el atletismo
    b. El peso de un elefante africano
    c. La cantidad de oro que vale $500
    i. $1\frac{1}{2}$ oz
    ii. 16 lb
    iii. 7.2 ton
19. Relacione cada objeto con su medición apropiada.
    a. La cantidad de sangre en un adulto
    b. El tamaño del derrame de petróleo del Exxon Valdez en 1989
    c. La cantidad de esmalte de uñas en una botella
    d. La cantidad de harina para preparar 3 docenas de galletas
    i. $\frac{1}{2}$ oz líquida
    ii. 2 tazas
    iii. 5 qt
    iv. 10,080,000 gal
20. Relacione cada objeto con su medición apropiada.
    a. La longitud del primer vuelo espacial tripulado de E.U.
    b. Un año bisiesto
    c. La diferencia en tiempo entre Nueva York y Fairbanks, Alaska
    d. La longitud del primer vuelo de los hermanos Wright
    i. 12 seg
    ii. 15 min
    iii. 4 hr
    iv. 366 días

NOTACIÓN

21. ¿Cuál unidad representa cada abreviación?

a. lb **b.** oz

c. oz lq

22. ¿Cuál unidad representa cada abreviación?

a. qt **b.** c

c. pt

Complete cada solución.

23. Convierta 2 yardas a pulgadas.

$$2 \text{ yd} = \frac{2 \text{ yd}}{1} \cdot \frac{\square \text{ pulg.}}{1 \text{ yd}}$$
$$= 2 \cdot 36 \square$$
$$= \square \text{ pulg.}$$

24. Convierta 24 pintas a cuartos de galón.

$$24 \text{ pt} = \frac{24 \text{ pt}}{1} \cdot \frac{1 \text{ qt}}{\square \text{ pt}}$$
$$= \frac{24}{1} \cdot \frac{1}{2} \square$$
$$= \square \text{ qt}$$

25. Convierta 1 tonelada a onzas.

$$1 \text{ ton} = \frac{1 \text{ ton}}{1} \cdot \frac{\square \text{ lb}}{1 \text{ ton}} \cdot \frac{\square \text{ oz}}{1 \text{ lb}}$$
$$= 1 \cdot 2{,}000 \cdot 16 \square$$
$$= \square \text{ oz}$$

26. Convierta 37,440 minutos a días.

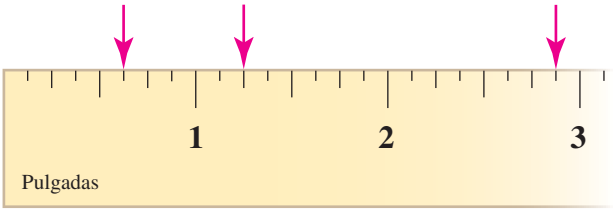
$$37{,}440 \text{ min} = 37{,}440 \text{ min} \cdot \frac{1 \text{ hr}}{\text{min}} \cdot \frac{1 \text{ día}}{24 \text{ hr}}$$
$$= \frac{37{,}440}{60 \cdot 24} \square$$
$$= \square \text{ días}$$

PRÁCTICA GUIADA

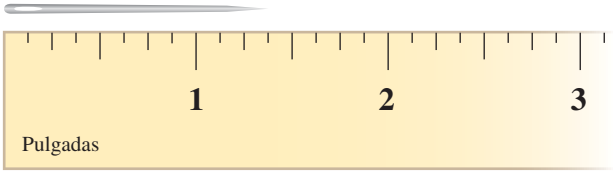
Refiérase a la regla proporcionada para responder cada pregunta. Vea el Ejemplo 1.

27. **a.** ¿En cuántas partes iguales está dividida cada pulgada?

b. Determine a cuáles mediciones en la regla apuntan las flechas.



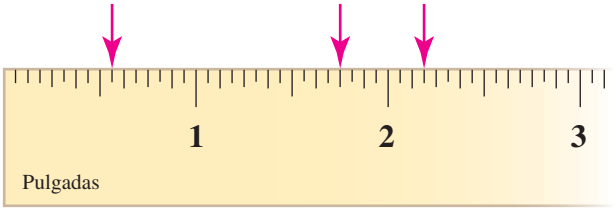
28. Encuentre la longitud de la aguja.



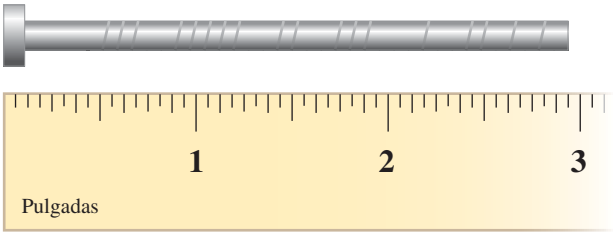
Refiérase a la regla proporcionada para responder cada pregunta. Vea el Ejemplo 2.

29. **a.** ¿En cuántas partes iguales está dividida cada pulgada?

b. Determine a cuáles mediciones en la regla apuntan las flechas.



30. Encuentre la longitud del tornillo.



Use una regla escalada en dieciseisavos de una pulgada para medir cada objeto. Vea el Ejemplo 2.

31. El ancho de un billete de 1 dólar.

32. La longitud de un billete de 1 dólar.

33. La longitud (de arriba abajo) de esta página.

34. La longitud de la siguiente palabra: supercalifragilisticexpialidocious

Desarrolle cada conversión. Vea el Ejemplo 3.

35. 4 yardas a pies **36.** 6 yardas a pies

37. 35 yardas a pies **38.** 33 yardas a pies

Desarrolle cada conversión. Vea el Ejemplo 4.

39. $3\frac{1}{2}$ pies a pulgadas **40.** $2\frac{2}{3}$ pies a pulgadas

41. $5\frac{1}{4}$ pies a pulgadas **42.** $6\frac{1}{2}$ pies a pulgadas

Use dos factores de conversión de unidades para desarrollar cada conversión. Dé la respuesta exacta y una aproximación decimal, redondeada a la centésima más cercana, cuando sea necesario. Vea el Ejemplo 5.

43. 105 yardas a millas

44. 198 yardas a millas

45. 1,540 yardas a millas

46. 1,512 yardas a millas

Desarrolle cada conversión. Vea el Ejemplo 6.

47. Convierta 44 onzas a libras.

48. Convierta 24 onzas a libras.

49. Convierta 72 onzas a libras.

50. Convierta 76 onzas a libras.

Desarrolle cada conversión. Vea el Ejemplo 7.

51. 50 libras a onzas

52. 30 libras a onzas

53. 87 libras a onzas

54. 79 libras a onzas

Desarrolle cada conversión. Vea el Ejemplo 8.

55. 8 pintas a onzas líquidas

56. 5 pintas a onzas líquidas

57. 21 pintas a onzas líquidas

58. 30 pintas a onzas líquidas

Desarrolle cada conversión. Vea el Ejemplo 9.

59. 165 minutos a horas

60. 195 minutos a horas

61. 330 minutos a horas

62. 80 minutos a horas

INTÉNTELO

Desarrolle cada operación.

63. 3 cuartos de galón a pintas

64. 20 cuartos de galón a galones

65. 7,200 minutos a días

66. 691,200 segundos a días

67. 56 pulgadas a pies

68. 44 pulgadas a pies

69. 4 pies a pulgadas

70. 7 pies a pulgadas

71. 16 pintas a galones

72. 3 galones a onzas líquidas

73. 80 onzas a libras

74. 8 libras a onzas

75. 240 minutos a horas

76. 2,400 segundos a horas

77. 8 yardas a pulgadas

78. 324 pulgadas a yardas

79. 90 pulgadas a yardas

80. 12 yardas a pulgadas

81. 5 yardas a pies

82. 21 pies a yardas

83. 12.4 toneladas a libras

84. 48,000 onzas a toneladas

85. 7 pies a yardas

86. $4\frac{2}{3}$ yardas a pies

87. 15,840 pies a millas

88. 2 millas a pies

89. $\frac{1}{2}$ milla a pies

90. 1,320 pies a millas

91. 7,000 libras a toneladas

92. 2.5 toneladas a onzas

93. 32 onzas líquidas a pintas

94. 2 cuartos de galón a onzas líquidas

APLICACIONES

95. LA GRAN PIRÁMIDE La Gran Pirámide en Egipto tiene alrededor de 450 pies de alto. Exprese esta distancia en yardas.

96. LOS HERMANOS WRIGHT En 1903, Orville Wright realizó el primer vuelo continuo del mundo. Duró 12 segundos y el avión recorrió 120 pies. Exprese la longitud del vuelo en yardas.

Hulton Archive/Getty Images

97. LA GRAN ESFINGE La Gran Esfinge de Egipto tiene 240 pies de largo. Exprese esto en pulgadas.

98. PRESA HOOVER La presa Hoover en Nevada tiene 726 pies de alto. Exprese esta distancia en pulgadas.

99. LA TORRE SEARS La Torre Sears en Chicago tiene 110 pisos y 1,454 pies de alto. A la centésima más cercana, exprese esta altura en millas.

100. RÉCORDS DE LA NFL Emitt Smith, el ex corredor de los Dallas Cowboys y los Arizona Cardinals, mantiene el récord de la National Football League por yardas corridas en su carrera: 18,355. ¿Cuántas millas es esto? Redondee a la décima de milla más cercana.

101. RÉCORDS DE LA NFL Cuando Dan Marino de los Miami Dolphins se retiró, ¡se observó que el total de yardas por aire en la carrera de Marino era de casi 35 millas! ¿Cuántas yardas es esto?

102. LEWIS Y CLARK Abajo se muestra el camino recorrido por la expedición de Lewis y Clark. Cuando la expedición alcanzó el Océano Pacífico, Clark estimó que habían recorrido 4,162 millas. (Después se determinó que esta suposición estaba a 40 millas de la distancia real.) Exprese el estimado de Clark de la distancia en pies.

103. PESO DEL AGUA Un galón de agua pesa alrededor de 8 libras. Exprese este peso en onzas.

104. PESO DE UN BEBÉ Un bebé varón recién nacido pesó 136 onzas. Exprese este peso en libras.

105. HIPOPÓTAMOS Un hipopótamo adulto puede pesar hasta 9,900 libras. Exprese este peso en toneladas.

106. ELEFANTES Un elefante adulto puede consumir hasta 495 libras de pasto y hojas en un día. ¿Cuántas onzas es esto?

107. COMPRA DE PINTURA Un pintor estima que necesitará 17 galones de pintura para un trabajo. Para aprovechar una venta de liquidación en latas de cuartos de galón, decide comprar la pintura en cuartos de galón. ¿Cuántas latas necesitará comprar?

108. CÁTERING ¿Cuántas tazas de sidra de manzana hay en un contenedor de 10 galones de sidra?

109. ALMUERZOS ESCOLARES Cada estudiante que asiste a la escuela primaria Eagle River recibe 1 pinta de leche para el almuerzo cada día. Si asisten 575 estudiantes a la escuela, ¿cuántos galones de leche se utilizan diariamente?

110. RADIADORES La capacidad del radiador de una pieza de equipo para remover tierra es de 39 cuartos. Si se drena el radiador y se coloca nuevo anticongelante, ¿cuántos galones del nuevo anticongelante se utilizarán?

111. CAMPISMO ¿Cuántas onzas de combustible para hornillo de acampar cabrán en el contenedor mostrado?

112. EXCURSIONISMO Un estudiante universitario camina 11 millas en 155 minutos. A la décima más cercana, ¿cuántas horas camina?

113. VIAJE ESPACIAL Los astronautas de la misión Apolo 8, la cual fue lanzada el 21 de diciembre de 1968, estuvieron en el espacio 147 horas. ¿Cuántos días tomó la misión?

114. AMELIA EARHART En 1935, Amelia Earhart se convirtió en la primera mujer en volar a través del Océano Atlántico en solitario, estableciendo un nuevo récord para la travesía: 13 horas y 30 minutos. ¿Cuántos minutos es esto?

REDACCIÓN

115. **a.** Explique cómo encontrar el factor de conversión de unidades que convertirá pies a pulgadas.

b. Explique cómo encontrar el factor de conversión de unidades que convertirá pintas a galones.

116. Explique por qué el factor de conversión de unidades $\frac{1\text{ lb}}{16\text{ oz}}$ es una forma de 1.

REPASO

117. Redondee el 3,673.263 a la

a. centena más cercana

b. decena más cercana

c. centésima más cercana

d. décima más cercana

118. Redondee el 0.100602 a la

a. milésima más cercana

b. centésima más cercana

c. décima más cercana

d. unidad más cercana

Objetivos

1. Definir las unidades métricas de longitud.
2. Usar una regla métrica para medir longitudes.
3. Usar factores de conversión de unidades para convertir unidades métricas de longitud.
4. Usar una tabla de conversiones para convertir unidades métricas de longitud.
5. Definir las unidades métricas de masa.
6. Convertir de una unidad métrica de masa a otra.
7. Definir las unidades métricas de capacidad.
8. Convertir de una unidad métrica de capacidad a otra.
9. Definir un centímetro cúbico.

SECCIÓN 5.4
Unidades métricas de medición

El sistema métrico es el sistema de medición utilizado por la mayoría de los países en el mundo. Todos los países, incluyendo Estados Unidos, lo utilizan para fines científicos. El sistema métrico, como el sistema de numeración decimal, está basado en el número 10. Por esta razón, convertir de una unidad métrica a otra es más fácil que con el sistema estadounidense.

1 Definir las unidades métricas de longitud

La unidad de longitud métrica básica es el **metro** (m). Un metro es aproximadamente 39 pulgadas, lo cual es ligeramente mayor que 1 yarda. La figura abajo compara la longitud de una regla para medir de 1 yarda con una regla para medir de un metro.

1 yarda: 36 pulgadas

1 metro: alrededor de 39 pulgadas

Las unidades de longitud métricas más largas y más cortas se crean añadiendo **prefijos** al frente de la unidad básica, el *metro*.

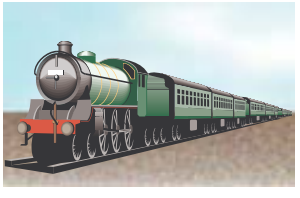
kilo significa millares
hecto significa centenas
deca significa decenas
deci significa décimas
centi significa centésimas
mili significa milésimas

Unidades métricas de longitud

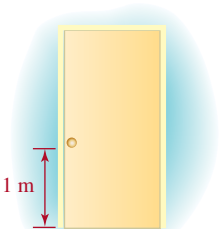
Prefijo	kiló-metro	hectó-metro	decá-metro	metro	decí-metro	centí-metro	milí-metro
Significado	1,000 metros	100 metros	10 metros	1 metro	$\frac{1}{10}$ o 0.1 de un metro	$\frac{1}{100}$ o 0.01 de un metro	$\frac{1}{1{,}000}$ o 0.001 de un metro
Abreviación	km	hm	dam	m	dm	cm	mm

El lenguaje de las matemáticas Es de utilidad memorizar los prefijos listados arriba debido a que también se utilizan con las unidades de peso y capacidad métricas.

Las unidades métricas de longitud utilizadas con mayor frecuencia son los kilómetros, los metros, los centímetros y los milímetros. Es importante que obtenga una comprensión práctica de las longitudes métricas como la que tiene para la longitud de una pulgada, un pie y una milla. Abajo se muestran algunos ejemplos de longitudes métricas.



1 kilómetro es aproximadamente la longitud de 60 vagones de tren.



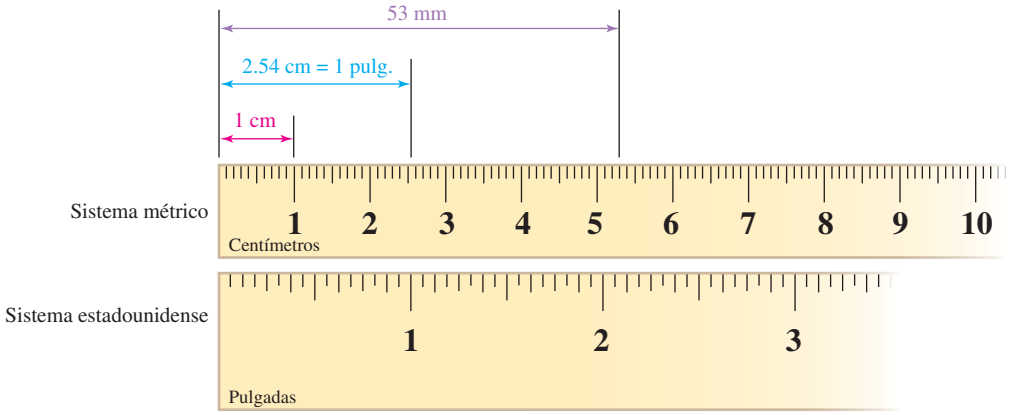
1 metro es de alrededor la distancia del pomo de una puerta al piso.

1 centímetro es casi tan ancho como la uña en su meñique.

1 milímetro es de aproximadamente el grosor de una moneda de 10 centavos.

2 Usar una regla métrica para medir longitudes

Abajo se muestran partes de una regla métrica, escalada en centímetros, y de una regla escalada en pulgadas. Se destacan varias longitudes de la regla métrica.



(Tamaño real)

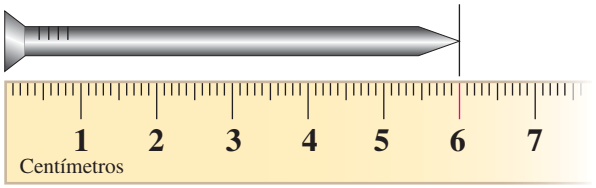
EJEMPLO 1 Encuentre la longitud del clavo mostrado abajo.

Estrategia Se colocará una regla métrica debajo del clavo, con el extremo izquierdo de la regla (el cual puede pensarse como el 0) directamente debajo de un extremo de la cabeza del clavo.

POR QUÉ Entonces se puede encontrar la longitud del clavo identificando dónde se alinea su extremo con punta con las marcas impresas en negro en la regla.

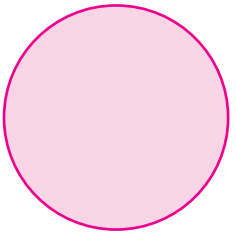
Solución

Las marcas gruesas más largas en la regla (aquellas etiquetadas con números) marcan longitudes en centímetros. Dado que el extremo con punta del clavo se alinea con el 6, el clavo es de 6 centímetros de largo.



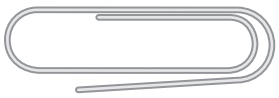
Auto-revisión 1

Al centímetro más cercano, encuentre el ancho del círculo.



Ahora intente **Problema 23**

EJEMPLO 2 Encuentre la longitud del clip para papel mostrado abajo.



Estrategia Se colocará una regla métrica debajo del clip para papel, con el extremo izquierdo de la regla (el cual puede pensarse como el 0) directamente debajo de un extremo del clip para papel.

POR QUÉ Entonces se puede encontrar la longitud del clip para papel identificando dónde se alinea su otro extremo con las marcas impresas en negro en la regla.

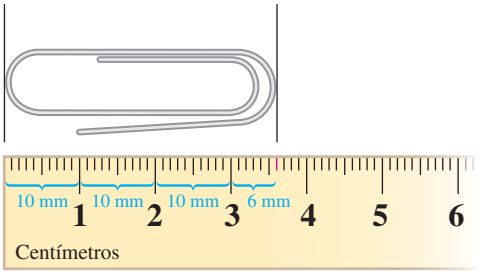
Auto-revisión 2

Encuentre la longitud del clip para papel tamaño jumbo.

Ahora intente **Problema 25**

Solución

En la regla, las marcas gruesas más cortas dividen cada centímetro en 10 milímetros, como se muestra. Si se comienza en el extremo izquierdo de la regla y se cuenta por decenas a medida que se mueve a la derecha hasta el 3 y después se suman 6 milímetros adicionales a ese resultado, se encuentra que la longitud del clip para papel es de 30 + 6 = 36 milímetros.



3 Usar factores de conversión de unidades para convertir unidades métricas de longitud

Las unidades métricas de longitud se relacionan como se muestra en la siguiente tabla.

Unidades métricas de longitud

1 kilómetro (km) = 1,000 metros	1 meter = 10 decímetros (dm)
1 hectómetro (hm) = 100 metros	1 meter = 100 centímetros (cm)
1 decámetro (dam) = 10 metros	1 meter = 1,000 milímetros (mm)

La abreviación para cada unidad está escrita entre paréntesis.

Se puede utilizar la información en la tabla para escribir los factores de conversión de unidades que pueden utilizarse para convertir las unidades métricas de longitud. Por ejemplo, en la tabla se observa que

$$1 \text{ metro} = 100 \text{ centímetros}$$

A partir de este hecho, se pueden escribir dos factores de conversión de unidades.

$$\frac{1 \text{ m}}{100 \text{ cm}} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}} = 1$$

Para obtener el primer factor de conversión de unidades, divida ambos lados de la ecuación 1 m = 100 cm entre 100 cm. Para obtener el segundo factor de conversión de unidades, divida ambos lados entre 1 m.

Una ventaja del sistema métrico es que la multiplicación o división por un factor de conversión de unidades involucra la multiplicación o división por (entre) una potencia de 10.

Auto-revisión 3

Convierta 860 centímetros a metros.

Ahora intente **Problema 31**

EJEMPLO 3 Convierta 350 centímetros a metros.

Estrategia Se multiplicarán los 350 centímetros por un factor de conversión de unidades elegido de manera cuidadosa.

POR QUÉ Si se multiplica por el factor de conversión de unidades apropiado, se pueden eliminar las unidades no deseadas de centímetros y convertir a metros.

Solución

Para convertir de centímetros a metros se debe elegir un factor de conversión de unidades cuyo numerador contenga las unidades que se desean introducir (metros) y cuyo denominador contenga las unidades que se desean eliminar (centímetros). Dado que hay 1 metro por cada 100 centímetros, se utilizará

$$\frac{1 \text{ m}}{100 \text{ cm}}$$

← Esta es la unidad que se desea introducir.
← Esta es la unidad que se desea eliminar (la unidad original).

Para desarrollar la conversión se multiplican los 350 centímetros por el factor de conversión de unidades $\frac{1\text{ m}}{100\text{ cm}}$.

$$350\text{ cm} = \frac{350\text{ cm}}{1} \cdot \frac{\mathbf{1\text{ m}}}{\mathbf{100\text{ cm}}}$$

Escriba los 350 cm como una fracción: $350\text{ cm} = \frac{350\text{ cm}}{1}$. Multiplique por una forma de 1: $\frac{1\text{ m}}{100\text{ cm}}$.

$$= \frac{350\ \cancel{\text{cm}}}{1} \cdot \frac{1\text{ m}}{100\ \cancel{\text{cm}}}$$

Elimine las unidades comunes de centímetros del numerador y el denominador. Observe que las unidades de metros permanecen.

$$= \frac{350}{100}\text{ m}$$

Multiplique las fracciones.

$$= \frac{350.0}{100}\text{ m}$$

Escriba el número natural 350 como un decimal colocando un punto decimal inmediatamente a su derecha introduciendo un cero: 350 = 350.0.

$$= 3.5\text{ m}$$

Divida el 350.0 entre el 100 moviendo el punto decimal dos posiciones a la izquierda: 3.500.

Por tanto, 350 centímetros = 3.5 metros.

4 Usar una tabla de conversiones para convertir unidades métricas de longitud

En el Ejemplo 5 se convirtieron 350 centímetros a metros utilizando un factor de conversión de unidades. También se puede realizar esta conversión reconociendo que todas las unidades de longitud en el sistema métrico son potencias de 10 de un metro.

Para ver esto, repase la tabla de las unidades métricas de longitud en la página 456. Observe que cada unidad tiene un valor que es $\frac{1}{10}$ del valor de la unidad inmediatamente a su izquierda y 10 veces el valor de la unidad inmediatamente a su derecha. La conversión de una unidad a otra es tan sencilla como multiplicar (o dividir) por la potencia de 10 correcta o, simplemente, mover un punto decimal el número correcto de posiciones a la derecha (o izquierda). Por ejemplo, en la **tabla de conversiones** abajo, se observa que para convertir de centímetros a metros, se mueve 2 posiciones a la izquierda.

Unidad más grande							Unidad más pequeña
	km	hm	dam	**m**	dm	**cm**	mm

Para ir de centímetros a metros, se debe mover 2 posiciones a la izquierda.

Si se escriben los 350 centímetros como 350.0 centímetros, se pueden convertir a metros moviendo el punto decimal 2 posiciones a la izquierda.

350.0 centímetros = 3.500 metros = 3.5 metros

Mueva 2 posiciones a la izquierda.

Con el método del factor de conversión de unidades o el método de la tabla de conversiones, se obtiene 350 cm = 3.5 m.

¡Cuidado! Cuando utilice una tabla como ayuda al realizar una conversión métrica, asegúrese de listar las unidades de *mayor a menor* cuando lea de izquierda a derecha.

EJEMPLO 4 Convierta 2.4 metros a milímetros.

Estrategia En una tabla de conversiones, se contarán las posiciones y se observará la dirección a medida que se mueve de las unidades originales de metros a las unidades de conversión de milímetros.

POR QUÉ El punto decimal en el 2.4 debe moverse el mismo número de posiciones y en esa misma dirección para encontrar la conversión a milímetros.

Auto-revisión 4

Convierta 5.3 metros a milímetros.

Ahora intente **Problema 35**

Solución

Para construir una tabla de conversiones se listan las unidades de longitud métricas de mayor (kilómetros) a menor (milímetros), empezando de izquierda a derecha. Después se localizan las unidades originales de metros y se mueve a las unidades de conversión de milímetros, como se muestra abajo.

km	hm	dam	**m**	dm	cm	**mm**

3 posiciones a la derecha

Se observa que el punto decimal en el 2.4 debe moverse 3 posiciones a la derecha para convertir de metros a milímetros.

2.4 metros = 2 400. milímetros = 2,400 milímetros

Mueva 3 posiciones a la derecha.

Se puede utilizar el método del factor de conversión de unidades para confirmar este resultado. Dado que hay 1,000 milímetros por metro, se multiplican los 2.4 metros por el factor de conversión de unidades $\frac{1{,}000\text{ mm}}{1\text{ m}}$.

$$2.4\text{ m} = \frac{2.4\text{ m}}{1} \cdot \frac{\mathbf{1{,}000\text{ mm}}}{\mathbf{1\text{ m}}}$$

Escriba los 2.4 m como una fracción: $2.4\text{ m} = \frac{2.4\text{ m}}{1}$. Multiplique por una forma de 1: $\frac{1{,}000\text{ mm}}{1\text{ m}}$.

$$= \frac{2.4\ \cancel{\text{m}}}{1} \cdot \frac{1{,}000\text{ mm}}{1\ \cancel{\text{m}}}$$

Elimine las unidades comunes de metros del numerador y el denominador. Observe que las unidades de milímetros permanecen.

$$= 2.4 \cdot 1{,}000\text{ mm}$$

Multiplique las fracciones y simplifique.

$$= 2{,}400\text{ mm}$$

Multiplique el 2.4 por el 1,000 moviendo el punto decimal 3 posiciones a la derecha: 2 400.

Auto-revisión 5

Convierta 5.15 centímetros a kilómetros.

Ahora intente **Problema 39**

EJEMPLO 5

Convierta 3.2 centímetros a kilómetros.

Estrategia En una tabla de conversiones, se contarán las posiciones y se observará la dirección a medida que se mueve de las unidades originales de centímetros a las unidades de conversión de kilómetros.

POR QUÉ El punto decimal en el 3.2 debe moverse el mismo número de posiciones y en esa misma dirección para encontrar la conversión a kilómetros.

Solución

Se localizan las unidades originales de centímetros en una tabla de conversión y después se mueve a las unidades de conversión de kilómetros, como se muestra abajo.

km	hm	dam	m	dm	**cm**	mm

5 posiciones a la izquierda

Se observa que el punto decimal en el 3.2 debe moverse 5 posiciones a la izquierda para convertir de centímetros a kilómetros.

3.2 centímetros = 0.000032 kilómetros = 0.000032 kilómetros

Mueva 5 posiciones a la izquierda.

Se puede utilizar el método del factor de conversión de unidades para confirmar este resultado. Para convertir a kilómetros, se deben utilizar dos factores de conversión de unidades para que se eliminen las unidades de centímetros y per-

manezcan las unidades de kilómetros. Dado que hay 1 metro por cada 100 centímetros y 1 kilómetro por cada 1,000 metros, se multiplica por $\frac{1\text{ m}}{100\text{ cm}}$ y $\frac{1\text{ km}}{1{,}000\text{ m}}$.

$$3.2\text{ cm} = \frac{3.2\text{ cm}}{1} \cdot \frac{1\text{ m}}{100\text{ cm}} \cdot \frac{1\text{ km}}{1{,}000\text{ m}}$$

Elimine las unidades comunes de centímetros y metros. Las unidades de km permanecen.

$$= \frac{3.2}{100 \cdot 1{,}000}\text{ km}$$

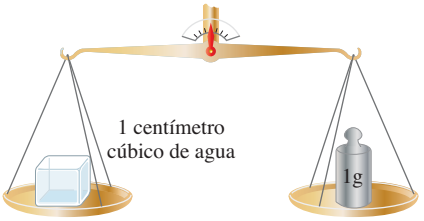
Multiplique las fracciones.

$$= 0.000032\text{ km}$$

Divida el 3.2 entre 1,000 y 100 moviendo el punto decimal 5 posiciones a la izquierda.

5 Definir las unidades métricas de masa

La **masa** de un objeto es una medición de la cantidad de materia en el objeto. Cuando se mueve un objeto alrededor de un espacio, su masa no cambia. Una unidad de masa básica en el sistema métrico es el **gramo** (g). Un gramo se define como la masa de agua contenida en un cubo que tiene lados de 1 centímetro de largo. (Vea la figura abajo.)

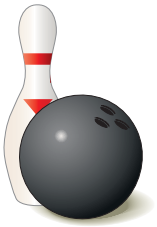


Otras unidades de masa se crean añadiendo prefijos a la unidad básica, el *gramo*.

Unidades métricas de masa

Prefijo	kilo-gramo	hecto-gramo	deca-gramo	gramo	deci-gramo	centi-gramo	mili-gramo
Significado	1,000 gramos	100 gramos	10 gramos	1 gramo	$\frac{1}{10}$ o 0.1 de un gramo	$\frac{1}{100}$ o 0.01 de un gramo	$\frac{1}{1{,}000}$ o 0.001 de un gramo
Abreviación	kg	hg	dag	g	dg	cg	mg

Las unidades métricas de longitud utilizadas con mayor frecuencia son los kilogramos, los gramos y los miligramos. Abajo se muestran algunos ejemplos.



Una bola de boliche promedio pesa alrededor de 6 kilogramos.

Una pasa pesa alrededor de 1 gramo.

Cierta tableta de vitaminas contiene 450 miligramos de calcio.

El **peso** de un objeto está determinado por la fuerza de gravedad de la Tierra sobre el objeto. Dado que la fuerza de gravedad sobre un objeto disminuye a medida que el objeto se aleja de la Tierra, el objeto pesa menos a medida que se aleja de la superficie de la Tierra. Este es el porqué los astronautas experimentan ingravidez en el espacio. Sin embargo, dado que la mayoría de nosotros permanecemos cerca de la superficie de la Tierra, se utilizarán las palabras *masa* y *peso* de manera indistinta. Por tanto, se dice que una masa de 30 gramos pesa 30 gramos.

En la siguiente tabla se muestran las unidades de masa métricas.

Unidades métricas de masa

1 kilogramo (kg) = 1,000 gramos	1 gramo = 10 decigramos (dg)
1 hectogramo (hg) = 100 gramos	1 gramo = 100 centigramos (cg)
1 decagramo (dag) = 10 gramos	1 gramo = 1,000 miligramos (mg)

La abreviación para cada unidad está escrita entre paréntesis.

Se puede utilizar la información en la tabla para escribir los factores de conversión de unidades que pueden utilizarse para convertir las unidades de masa métricas. Por ejemplo, en la tabla se observa que

1 kilogramo = 1,000 gramos

A partir de este hecho, se pueden escribir dos factores de conversión de unidades.

$$\frac{1\text{ kg}}{1{,}000\text{ g}} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{1{,}000\text{ g}}{1\text{ kg}} = 1$$

Para obtener el primer factor de conversión de unidades, divida ambos lados de la ecuación 1 kg = 1,000 g entre 1,000 g. Para obtener el segundo factor de conversión de unidades, divida ambos lados entre 1 kg.

6 Convertir de una unidad métrica de masa a otra

Auto-revisión 6

Convierta 5.83 kilogramos a gramos.

Ahora intente **Problema 43**

EJEMPLO 6 Convierta 7.86 kilogramos a gramos.

Estrategia En una tabla de conversiones se contarán las posiciones y se observará la dirección a medida que se mueve de las unidades originales de kilogramos a las unidades de conversión de gramos.

POR QUÉ El punto decimal en el 7.86 debe moverse el mismo número de posiciones y en esa misma dirección para encontrar la conversión a gramos.

Solución

Para construir una tabla de conversiones, se listan las unidades métricas de masa de mayor (kilogramos) a menor (miligramos), empezando de izquierda a derecha. Después se localizan las unidades originales de kilogramos y se mueve a las unidades de conversión de gramos, como se muestra abajo.

Unidad más grande							Unidad más pequeña
kg	hg	dag	**g**	dg	cg	mg	

3 posiciones a la derecha

Se observa que el punto decimal en el 7.86 debe moverse 3 posiciones a la derecha para cambiar de kilogramos a gramos.

7.86 kilogramos = 7 860. gramos = 7,860 gramos

Mueva 3 posiciones a la derecha.

Se puede utilizar el método del factor de conversión de unidades para confirmar este resultado. Para convertir a gramos, se debe elegir un factor de conversión de unidades para que se eliminen las unidades de kilogramos y permanezcan las unidades de gramos. Dado que hay 1,000 gramos por 1 kilogramo, se multiplican los 7.86 kilogramos por $\frac{1{,}000\text{ g}}{1\text{ kg}}$.

$$7.86\text{ kg} = \frac{7.86\text{ kg}}{1} \cdot \frac{\mathbf{1{,}000\text{ g}}}{\mathbf{1\text{ kg}}}$$

Elimine las unidades comunes de kilogramos en el numerador y el denominador. Las unidades de g permanecen.

$$= 7.86 \cdot 1{,}000\text{ g}$$

Simplifique.

$$= 7{,}860\text{ g}$$

Multiplique el 7.86 por el 1,000 moviendo el punto decimal 3 posiciones a la derecha.

EJEMPLO 7 ***Medicamentos*** Una botella de Verapamil, un fármaco tomado para la presión sanguínea alta, contiene 30 pastillas. Si cada pastilla tiene 180 mg de la sustancia activa, ¿cuántos gramos de la sustancia activa hay en la botella?

Estrategia Se multiplicará el número de pastillas en una botella por el número de miligramos de la sustancia activa en cada pastilla.

POR QUÉ Se necesita conocer el número total de miligramos de la sustancia activa en una botella antes que se pueda convertir ese número a gramos.

Solución

Dado que hay 30 pastillas y cada una contiene 180 mg de la sustancia activa, hay

$$30 \cdot 180\text{ mg} = 5{,}400\text{ mg}$$

de la sustancia activa en la botella. Para utilizar una tabla de conversiones a fin de resolver este problema, se localizan las unidades originales de miligramos y después se mueve a las unidades de conversión de gramos, como se muestra abajo.

kg	hg	dag	**g**	dg	cg	**mg**

3 posiciones a la izquierda

Se observa que el punto decimal en el 5,400.0 debe moverse 3 posiciones a la izquierda para convertir de miligramos a gramos.

$$5{,}400\text{ miligramos} = 5.400\text{ gramos}$$

Mueva 3 posiciones a la izquierda.

Hay 5.4 gramos de la sustancia activa en la botella.

Se puede utilizar el método del factor de conversión de unidades para confirmar este resultado. Para convertir de miligramos a gramos se multiplican los 5,400 miligramos por $\frac{1\text{ g}}{1{,}000\text{ mg}}$.

$$5{,}400\text{ mg} = \frac{5{,}400\text{ mg}}{1} \cdot \frac{\mathbf{1\text{ g}}}{\mathbf{1{,}000\text{ mg}}}$$

Elimine las unidades comunes de miligramos del numerador y el denominador. Las unidades de g permanecen.

$$= \frac{5{,}400}{1{,}000}\text{ g}$$

Multiplique las fracciones.

$$= 5.4\text{ g}$$

Divida el 5,400 entre el 1,000 moviendo el punto decimal implícito en el 5,400 tres posiciones a la izquierda.

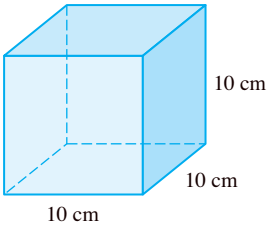
Auto-revisión 7

MEDICAMENTOS Una botella de Isoptin (un fármaco tomado para la presión sanguínea alta) contiene 90 pastillas y cada una tiene 200 mg de la sustancia activa, ¿cuántos gramos de la sustancia activa hay en la botella?

Ahora intente **Problemas 47 y 95**

7 Definir las unidades métricas de capacidad

En el sistema métrico, una unidad de capacidad básica es el **litro** (L), el cual se define como la capacidad de un cubo con lados de 10 centímetros de largo. Otras unidades de capacidad se crean añadiendo prefijos a la unidad básica, el litro.



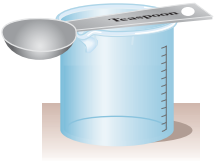
Unidades métricas de capacidad

Prefijo	kilo- litro	hecto- litro	deca- litro	litro	deci- litro	centi- litro	mili- litro
Significado	1,000 litros	100 litros	10 litros	1 litro	$\frac{1}{10}$ o 0.1 de un litro	$\frac{1}{100}$ o 0.01 de un litro	$\frac{1}{1,000}$ o 0.001 de un litro
Abreviación	kL	hL	daL	L	dL	cL	mL

Las unidades métricas de capacidad utilizadas con mayor frecuencia son los litros y los mililitros. Aquí hay algunos ejemplos.

Una bebida se vende en botellas de plástico de 2 litros.

El tanque de combustible de una minivan puede contener alrededor de 75 litros de gasolina.



Una cucharadita contiene alrededor de 5 mililitros.

En la siguiente tabla se muestran las unidades métricas de capacidad.

Unidades métricas de capacidad

1 kilolitro (kL) = 1,000 litros	1 litro = 10 decilitros (dL)
1 hectolitro (hL) = 100 litros	1 litro = 100 centilitros (cL)
1 decalitro (daL) = 10 litros	1 litro = 1,000 mililitros (mL)

La abreviación para cada unidad está escrita entre paréntesis.

Se puede utilizar la información en la tabla para escribir los factores de conversión de unidades que pueden emplearse para convertir las unidades métricas de capacidad. Por ejemplo, en la tabla se observa que

1 litro = 1,000 mililitros

A partir de este hecho se puede escribir dos factores de conversión de unidades.

$$\frac{1\text{ L}}{1{,}000\text{ mL}} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{1{,}000\text{ mL}}{1\text{ L}} = 1$$

8 Convertir de una unidad métrica de capacidad a otra

EJEMPLO 8 ***Bebidas*** ¿Cuántos mililitros hay en *tres* botellas de bebida de cola de 2 litros?

Estrategia Se multiplicará el número de botellas de bebida de cola por el número de litros de bebida de cola en cada botella.

POR QUÉ Se necesita saber el número total de litros de bebida de cola antes de que se pueda convertir ese número a mililitros.

Solución

Dado que hay tres botellas y cada una contiene 2 litros de bebida de cola, hay

$$3 \cdot 2 \text{ L} = 6 \text{ L} = 6.0 \text{ L}$$

de bebida de cola en las botellas. Para construir una tabla de conversiones se listan las unidades métricas de capacidad de mayor (kilolitros) a menor (mililitros), empezando de izquierda a derecha. Después se localizan las unidades originales de litros y se mueve a las unidades de conversión de mililitros, como se muestra abajo.

Unidades más grandes								Unidades más pequeñas
	kL	hL	daL	**L**	dL	cL	**mL**	

3 posiciones a la derecha

Se observa que el punto decimal en el 6.0 debe moverse 3 posiciones a la derecha para convertir de litros a mililitros.

$$6 \text{ litros} = 6000.\text{ mililitros} = 6{,}000 \text{ mililitros}$$

Mueva 3 posiciones a la derecha.

Por tanto, hay 6,000 mililitros en *tres* botellas de bebidas de cola de 2 litros.

Se puede utilizar el método del factor de conversión de unidades para confirmar este resultado. Para convertir a mililitros se debe elegir un factor de conversión de unidades para que se eliminen las unidades de litros y permanezcan las unidades de mililitros. Dado que hay 1,000 mililitros por 1 litro, se multiplican los 6 litros por el factor de conversión de unidades $\frac{1{,}000 \text{ mL}}{1 \text{ L}}$.

$$6 \text{ L} = \frac{6 \cancel{\text{L}}}{1} \cdot \frac{\mathbf{1{,}000 \text{ mL}}}{\mathbf{1 \cancel{\text{L}}}}$$

Elimine las unidades comunes de litros en el numerador y el denominador. Las unidades de mL permanecen.

$$= 6 \cdot 1{,}000 \text{ mL}$$

Simplifique.

$$= 6{,}000 \text{ mL}$$

Multiplique el 6 por el 1,000 moviendo el punto decimal implícito en el 6 tres posiciones a la derecha.

Auto-revisión 8

BEBIDAS ¿Cuántos mililitros hay en una caja de *doce* botellas de bebida de cola de 2 litros?

Ahora intente **Problemas 51 y 97**

9 Definir un centímetro cúbico

Otra unidad métrica de capacidad es el **centímetro cúbico,** el cual se representa por medio de la notación cm^3 o, de manera más sencilla, cc. Un mililitro y un centímetro cúbico representan la misma capacidad.

$$1 \text{ mL} = 1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ cc}$$

Las unidades de centímetros cúbicos se utilizan con frecuencia en la medicina. Por ejemplo, cuando una enfermera administra una inyección que contiene 5 cc de medicamento, la dosis también puede expresarse utilizando mililitros.

$$5 \text{ cc} = 5 \text{ mL}$$

Cuando un doctor ordena que se le coloque a un paciente una disolución de 1,000 cc de dextrosa, la demanda puede expresarse de diferentes maneras.

1,000 cc = 1,000 mL = 1 litro

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. 3 cm **2.** 47 mm **3.** 8.6 m **4.** 5,300 mm **5.** 0.0000515 km **6.** 5,830 g **7.** 1.8 g **8.** 24,000 mL

SECCIÓN 5.4 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Complete los espacios.

1. El metro, el gramo y el litro son las unidades básicas de medición en el sistema _____.

2. a. La unidad básica de longitud en el sistema métrico es el _____.

b. La unidad básica de masa en el sistema métrico es el _____.

c. La unidad básica de capacidad en el sistema métrico es el _____.

3. a. *Deca* significa _____.

b. *Hecto* significa _____.

c. *Kilo* significa _____.

4. a. *Deci* significa _____.

b. *Centi* significa _____.

c. *Mili* significa _____.

5. Se puede convertir de una unidad a otra en el sistema métrico utilizando factores de conversión de _____ o una _____ de conversión como la mostrada abajo.

km	hm	dam	m	dm	cm	mm

6. La _____ de un objeto es una medida de la cantidad de materia en el objeto.

7. El _____ de un objeto está determinado por la fuerza de gravedad de la Tierra sobre el objeto.

8. Otra unidad métrica de capacidad es el _____ cúbico, el cual se representa por medio de la notación cm^3, o de manera más sencilla, cc.

CONCEPTOS

Complete los espacios.

9. a. 1 kilómetro = _____ metros

b. _____ centímetros = 1 metro

c. _____ milímetros = 1 metro

10. a. 1 gramo = _____ miligramos

b. 1 kilogramo = _____ gramos

11. a. _____ mililitros = 1 litro

b. 1 decalitro = _____ litros

12. a. 1 mililitro = _____ centímetro cúbico

b. 1 litro = _____ centímetros cúbicos

13. Escriba un factor de conversión de unidades para convertir

a. metros a kilómetros

b. gramos a centigramos

c. litros a mililitros

14. Use una tabla para determinar cuántas posiciones decimales y en qué dirección mover el punto decimal cuando se convierten los siguientes.

a. Kilómetros a centímetros

km	hm	dam	m	dm	cm	mm

b. Miligramos a gramos

kg	hg	dag	g	dg	cg	mg

c. Hectolitros a centilitros

kL	hL	daL	L	dL	cL	mL

15. Relacione cada objeto con su medición apropiada.

a. El grosor de un directorio telefónico

b. La longitud del Río Amazonas

c. La altura de una portería de futbol soccer

i. 6,275 km

ii. 2 m

iii. 6 cm

16. Relacione cada objeto con su medición apropiada.

a. El peso de una jirafa

b. El peso de un clip para papel

c. La sustancia activa en una pastilla de aspirina

i. 800 kg

ii. 1 g

iii. 325 mg

17. Relacione cada objeto con su medición apropiada.

a. La cantidad de sangre en un adulto — **i.** 290,000 kL

b. La bebida de cola en una lata de aluminio — **ii.** 6 L

c. La producción diaria de petróleo crudo de Kuwait — **iii.** 355 mL

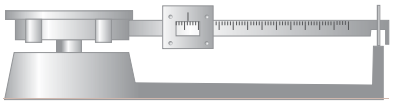
18. De los objetos mostrados abajo, ¿cuál puede utilizarse para medir lo siguiente?

a. Milímetros

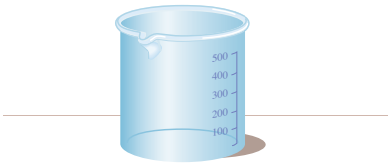
b. Miligramos

c. Mililitros

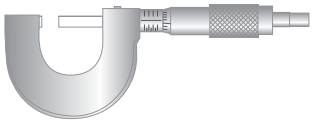
Balanza



Vaso de precipitados



Micrómetro



NOTACIÓN

Complete cada solución.

19. Convierta 20 centímetros a metros.

$$20\text{ cm} = \frac{20\text{ cm}}{1} \cdot \frac{\square\text{ m}}{100\text{ cm}}$$
$$= \frac{20}{\square}\text{ m}$$
$$= \square\text{ m}$$

20. Convierta 3,000 miligramos a gramos.

$$3{,}000\text{ mg} = \frac{3{,}000\text{ mg}}{1} \cdot \frac{1\text{ g}}{1{,}000\ \square}$$
$$= \frac{3{,}000}{1{,}000}\ \square$$
$$= \square\text{ g}$$

21. Convierta 0.2 kilogramos a miligramos.

$$0.2\text{ kg} = \frac{0.2\text{ kg}}{1} \cdot \frac{\square\text{ g}}{1\text{ kg}} \cdot \frac{1{,}000\text{ mg}}{\square\text{ g}}$$
$$= 0.2 \cdot 1{,}000 \cdot 1{,}000\ \square$$
$$= \square\text{ mg}$$

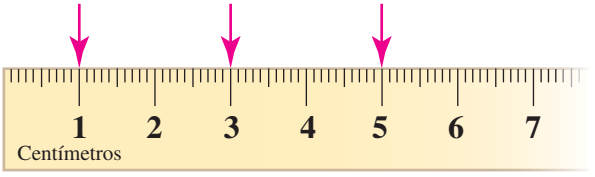
22. Convierta 400 mililitros a kilolitros.

$$400\text{ mL} = \frac{400\text{ mL}}{1} \cdot \frac{1\text{ L}}{\square\text{ mL}} \cdot \frac{1\ \square}{1{,}000\text{ L}}$$
$$= \frac{\square}{1{,}000 \cdot 1{,}000}\text{ kL}$$
$$= 0.0004\text{ kL}$$

PRÁCTICA GUIADA

Refiérase a la regla proporcionada para responder cada pregunta. Vea el Ejemplo 1.

23. Determine a cuáles mediciones en la regla apuntan las flechas.

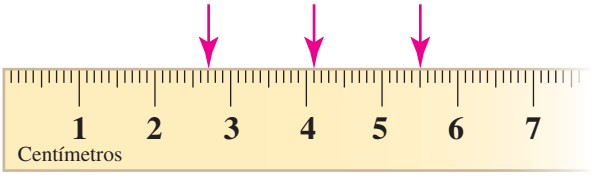


24. Encuentre la longitud de la vela de cumpleaños (incluyendo la mecha).

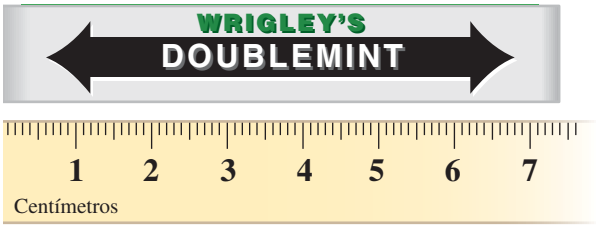
Refiérase a la regla proporcionada para responder cada pregunta. Vea el Ejemplo 2.

25. **a.** Refiérase a la regla métrica mostrada abajo. ¿En cuántas partes iguales está dividido cada centímetro? ¿Cuál es la longitud de una de esas partes?

b. Determine a cuáles mediciones en la regla apuntan las flechas.



26. Encuentre la longitud de la goma de mascar.



Use una regla métrica escalada en milímetros para medir cada objeto. Vea el Ejemplo 2.

27. La longitud de un billete de 1 dólar

28. El ancho de un billete de 1 dólar

29. La longitud (de arriba abajo) de esta página

30. La longitud de la palabra antidisestablishmentarianism.

Desarrolle cada conversión. Vea el Ejemplo 3.

31. 380 centímetros a metros

32. 590 centímetros a metros

33. 120 centímetros a metros

34. 640 centímetros a metros

Desarrolle cada conversión. Vea el Ejemplo 4.

35. 8.7 metros a milímetros

36. 1.3 metros a milímetros

37. 2.89 metros a milímetros

38. 4.06 metros a milímetros

Desarrolle cada conversión. Vea el Ejemplo 5.

39. 4.5 centímetros a kilómetros

40. 6.2 centímetros a kilómetros

41. 0.3 centímetros a kilómetros

42. 0.4 centímetros a kilómetros

Desarrolle cada conversión. Vea el Ejemplo 6.

43. 1.93 kilogramos a gramos

44. 8.99 kilogramos a gramos

45. 4.531 kilogramos a gramos

46. 6.077 kilogramos a gramos

Desarrolle cada conversión. Vea el Ejemplo 7.

47. 6,000 miligramos a gramos

48. 9,000 miligramos a gramos

49. 3,500 miligramos a gramos

50. 7,500 miligramos a gramos

Desarrolle cada conversión. Vea el Ejemplo 8.

51. 3 litros a mililitros

52. 4 litros a mililitros

53. 26.3 litros a mililitros

54. 35.2 litros a mililitros

INTÉNTELO

Desarrolle cada conversión.

55. 0.31 decímetros a centímetros

56. 73.2 metros a decímetros

57. 500 mililitros a litros

58. 500 centilitros a mililitros

59. 2 kilogramos a gramos

60. 4,000 gramos a kilogramos

61. 0.074 centímetros a milímetros

62. 0.125 metros a milímetros

63. 1,000 kilogramos a centigramos

64. 2 kilogramos a centigramos

65. 658.23 litros a kilolitros

66. 0.0068 hectolitros a kilolitros

67. 4.72 cm a dm

68. 0.593 cm a dam

69. 10 mL = _____ cc

70. 2,000 cc = _____ L

71. 500 mg a g

72. 500 mg a cg

73. 5,689 g a kg

74. 0.0579 km a mm

75. 453.2 cm a m

76. 675.3 cm a m

77. 0.325 dL a L

78. 0.0034 mL a L

79. 675 dam = _____ cm

80. 76.8 hm = _____ mm

81. 0.00777 cm = _____ dam

82. 400 litros a hL

83. 134 m a hm

84. 6.77 mm a cm

85. 65.78 km a dam

86. 5 g a cg

APLICACIONES

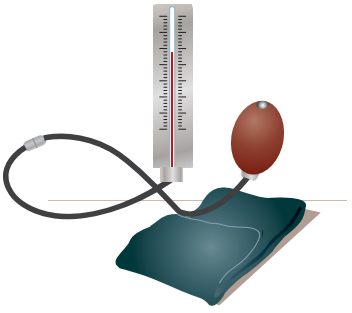
87. PATINAJE DE VELOCIDAD El estadounidense Eric Heiden ganó un sin precedente de cinco medallas de oro al ganar las carreras masculinas de 500 m, 1,000 m, 1,500 m, 5,000 m y 10,000 m en los Juegos Olímpicos de Invierno de 1980 en Lake Placid, Nueva York. Convierta cada longitud de carrera a kilómetros.

88. EL CANAL DE SUEZ El Canal de Suez, de 163 km de largo, conecta el Mar Mediterráneo con el Mar Rojo. Provee un atajo para los barcos que operan en los puertos europeos y americanos. Convierta la longitud del Canal de Suez a metros.

89. RASCACIELOS El Centro John Hancock en Chicago tiene 100 pisos y 343 metros de alto. Dé esta altura en hectómetros.

90. PESO DE UN BEBÉ Un bebé pesa 4 kilogramos. Dé este peso en centigramos.

91. ATENCIÓN MÉDICA La presión sanguínea se mide por medio de un esfigmomanómetro (vea a la derecha). La medición se lee en dos puntos y se expresa, por ejemplo, como 120/80. Esto indica una presión *sistólica* de 120 milímetros de mercurio y una presión *diastólica* de 80 milímetros de mercurio. Convierta cada medición a centímetros de mercurio.



92. JOYERÍA Una cadena de oro pesa 1,500 miligramos. Dé el peso en gramos.

93. GOTAS PARA LOS OJOS Una gota de un gotero para ojos es de 0.05 mL. Convierta la capacidad de una gota a litros.

94. ENCORCHADO ¿Cuántos litros de vino hay en una botella de 750 mL?

95. MEDICINA Una botella de hidroclorotiacina contiene 60 pastillas. Si cada pastilla contiene 50 miligramos de la sustancia activa, ¿cuántos gramos de la sustancia activa hay en una botella?

96. IBUPROFENO ¿Cuál es el peso total, en gramos, de todas las pastillas en la caja mostrada a la derecha?

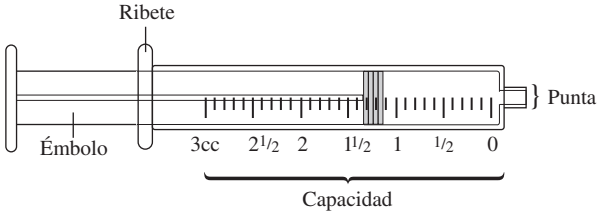
97. SIX PACKS Algunas tiendas venden la bebida de naranja Fanta en botellas de 0.5 litros. ¿Cuántos mililitros hay en un six pack de este tamaño de botella?

98. CONTENEDORES ¿Cuántos decilitros de cerveza de raíz hay en *dos* botellas de dos litros?

99. ACEITUNAS El peso neto de una botella de aceitunas es de 284 gramos. Encuentre el número menor de botellas que deben adquirirse para tener al menos 1 kilogramo de aceitunas.

100. CAFÉ Una lata de Café Viena tiene un peso neto de 133 gramos. Encuentre el número menor de latas que deben empaquetarse para tener al menos 1 tonelada métrica de café. (*Sugerencia:* 1 tonelada métrica = 1,000 kg.)

101. INYECCIONES La ilustración abajo muestra una jeringa de 3 cc. Exprese esta capacidad utilizando unidades de milímetros.



102. SUMINISTROS MÉDICOS Un doctor ordenó 2,000 cc de una disolución salina (sal) de una farmacia. ¿Cuántos litros de disolución salina es esto?

REDACCIÓN

103. Para cambiar 3.452 kilómetros a metros, se puede mover el punto decimal en el 3.452 tres posiciones a la derecha para obtener 3,452 metros. Explique por qué.

104. Para cambiar 7,532 gramos a kilogramos se puede mover el punto decimal en el 7,532 tres posiciones a la izquierda para obtener 7.532 kilogramos. Explique por qué.

105. Un *centímetro* es una centésima de un metro. Haga una lista de otras cinco palabras que comiencen con el prefijo *centi* o *cent* y escriba una definición para cada una.

106. Liste las ventajas del sistema de medición métrico en comparación con el sistema estadounidense. Ha habido varios intentos de llevar el sistema métrico al uso general en Estados Unidos. ¿Por qué piensa que estos esfuerzos no han tenido éxito?

REPASO

Escriba cada fracción como un decimal. Use una barra superior en su respuesta.

107. $\frac{8}{9}$ **108.** $\frac{11}{12}$

109. $\frac{7}{90}$ **110.** $\frac{1}{66}$

Objetivos

1. Usar factores de conversión de unidades para convertir entre unidades estadounidenses y métricas.
2. Convertir entre temperaturas Fahrenheit y Celsius.

SECCIÓN 5.5
Conversión entre unidades estadounidenses y métricas

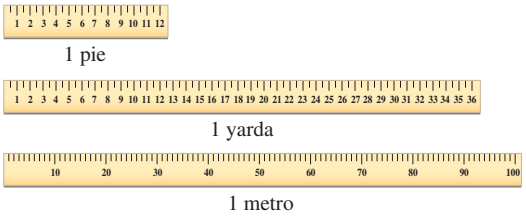
Con frecuencia es necesario convertir entre unidades estadounidenses y unidades métricas. Por ejemplo, se deben convertir unidades para responder las siguientes preguntas.

- ¿Cuál es más alto: el Pico Pikes (elevación de 14,110 pies) o el Monte Cervino (elevación de 4,478 metros)?
- ¿Una barra de mantequilla de 2 libras pesa más que una barra de 1 kilogramo?
- ¿Un cuarto de galón de refresco es mayor o menor que un litro de refresco?

En esta sección se explica cómo responder tales respuestas.

1 Usar factores de conversión de unidades para convertir entre unidades estadounidenses y métricas

La siguiente tabla muestra algunas conversiones entre unidades de longitud estadounidenses y métricas. En todos los casos excepto uno, las conversiones son aproximaciones redondeadas. Se utiliza un símbolo ≈ para mostrar esto. La única conversión exacta en la tabla es 1 pulgada = 2.54 centímetros.



Longitudes equivalentes	
Estadounidense a métrico	**Métrico a estadounidense**
1 pulg. = 2.54 cm	1 cm ≈ 0.39 pulg.
1 pie ≈ 0.30 m	1 m ≈ 3.28 pies
1 yd ≈ 0.91 m	1 m ≈ 1.09 yd
1 mi ≈ 1.61 km	1 km ≈ 0.62 mi

A partir de estos hechos en la tabla se pueden formar factores de conversión de unidades para realizar conversiones específicas entre las unidades de longitud estadounidenses y métricas.

Auto-revisión 1

ETIQUETAS DE ROPA Refiérase a la figura en el Ejemplo 1. ¿Cuál es la longitud del tiro, a la pulgada más cercana?

Ahora intente **Problema 13**

EJEMPLO 1 ***Etiquetas de ropa*** La figura muestra una etiqueta cosida en algunos pantalones hechos en México que se van a vender en Estados Unidos. Exprese el tamaño de la cintura a la pulgada más cercana.

Estrategia Se multiplicarán los 82 centímetros por un factor de conversión de unidades elegido de manera cuidadosa.

POR QUÉ Si se multiplica por el factor de conversión de unidades apropiado, se pueden eliminar las unidades no deseadas de centímetros y convertir a pulgadas.

Solución

Para convertir de centímetros a pulgadas se debe elegir un factor de conversión de unidades cuyo numerador contenga las unidades que se desean introducir (pulgadas) y cuyo denominador contenga las unidades que se desean eliminar (centímetros). En el primer renglón de la columna *Métrico a estadounidense* de la tabla se observa que hay aproximadamente 0.39 pulgadas por centímetro. Por tanto, se utiliza el factor de conversión de unidades:

$$\frac{0.39 \text{ pulg.}}{1 \text{ cm}}$$

← Esta es la unidad que se desea introducir.

← Esta es la unidad que se desea eliminar (la unidad original).

Para desarrollar la conversión, se multiplica.

$$82\text{ cm} \approx \frac{82\text{ cm}}{1} \cdot \frac{\mathbf{0.39\text{ pulg.}}}{\mathbf{1\text{ cm}}}$$ Escriba los 82 cm como una fracción: $82\text{ cm} = \frac{82\text{ cm}}{1}$. Multiplique por una forma de 1: $\frac{0.39\text{ pulg.}}{1\text{ cm}}$.

$$\approx \frac{82\text{ cm}}{1} \cdot \frac{0.39\text{ pulg.}}{1\text{ cm}}$$ Elimine las unidades comunes de centímetros del numerador y el denominador. Las unidades de pulgadas permanecen.

$$\approx 82 \cdot 0.39\text{ pulg.}$$ Simplifique.

$$\approx 31.98\text{ pulg.}$$ Realice la multiplicación.

$$\approx 32\text{ pulg.}$$ Redondee a la pulgada más cercana (columna de las unidades).

$$\begin{array}{r} 0.39 \\ \times\ 82 \\ \hline 78 \\ 3120 \\ \hline 31.98 \end{array}$$

A la pulgada más cercana, el tamaño de la cintura es de 32 pulgadas.

EJEMPLO 2 *Elevaciones de montañas*

El Pico Pikes, uno de los picos más famosos en las Montañas Rocallosas, tiene una elevación de 14,110 pies. El Monte Cervino, en los Alpes Suizos, se alza 4,478 metros. ¿Cuál montaña es más alta?

Estrategia Se convertirá la elevación del Pico Pikes, la cual se proporciona en pies, a metros.

POR QUÉ Entonces se pueden comparar las elevaciones de las montañas en las mismas unidades, metros.

Solución

Para convertir la elevación del Pico Pikes de pies a metros, se debe elegir un factor de conversión de unidades cuyo numerador contenga las unidades que se desean introducir (metros) y cuyo denominador contenga las unidades que se desean eliminar (pies). A partir del segundo renglón de la columna *Estadounidense a métrico* de la tabla, se observa que hay aproximadamente 0.30 metros por pie. Por tanto, se utiliza el factor de conversión de unidades:

$$\frac{0.30\text{ m}}{1\text{ pie}}$$ ← Esta es la unidad que se desea introducir. ← Esta es la unidad que se desea eliminar (la unidad original).

Para desarrollar la conversión, se multiplica.

$$14{,}110\text{ pies} \approx \frac{14{,}110\text{ pies}}{1} \cdot \frac{\mathbf{0.30\text{ m}}}{\mathbf{1\text{ pie}}}$$ Escriba los 14,110 pies como una fracción: $14{,}110\text{ pies} = \frac{14{,}110\text{ pies}}{1}$. Multiplique por una forma de 1: $\frac{0.30\text{ m}}{1\text{ pie}}$.

$$\approx \frac{14{,}110\text{ pies}}{1} \cdot \frac{0.30\text{ m}}{1\text{ pie}}$$ Elimine las unidades comunes de pies del numerador y el denominador. Las unidades de metros permanecen.

$$\approx 14{,}110 \cdot 0.30\text{ m}$$ Simplifique.

$$\approx 4{,}233\text{ m}$$ Realice la multiplicación.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1}\ \ \\ 14{,}110 \\ \times\ 0.30 \\ \hline 000\ 00 \\ 4233\ 00 \\ \hline 4233.00 \end{array}$$

Dado que la elevación del Pico Pikes es de alrededor de 4,233 metros, se puede concluir que el Monte Cervino, con una elevación de 4,478 metros, es más alto.

Auto-revisión 2

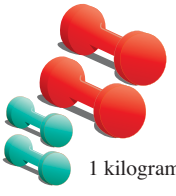
ATLETISMO ¿Cuál es más larga: una carrera de 500 metros o una carrera de 550 yardas?

Ahora intente **Problema 17**

Se puede convertir entre unidades de peso estadounidenses y unidades métricas de masa utilizando las aproximaciones redondeadas en la siguiente tabla.

Pesos y masas equivalentes	
Estadounidense a métrico	**Métrico a estadounidense**
1 oz ≈ 28.35 g	1 g ≈ 0.035 oz
1 lb ≈ 0.45 kg	1 kg ≈ 2.20 lb

1 libra



1 kilogramo

Auto-revisión 3

Convierta 68 libras a gramos. Redondee al gramo más cercano.

Ahora intente **Problema 21**

EJEMPLO 3

Convierta 50 libras a gramos.

Estrategia Se utilizará un proceso de multiplicación en dos partes que convierta las 50 libras a onzas y después convierta ese resultado a gramos.

POR QUÉ Se debe utilizar un proceso en dos partes debido a que la tabla en la página 471 no contiene un factor de conversión de unidades sencillo que convierta de libras a gramos.

Solución

Dado que hay 16 onzas por libra, se pueden convertir las 50 libras a onzas multiplicando por el factor de conversión de unidades $\frac{16\text{ oz}}{1\text{ lb}}$. Dado que hay aproximadamente 28.35 g por onza, se puede convertir ese resultado a gramos multiplicando por el factor de conversión de unidades $\frac{28.35\text{ g}}{1\text{ oz}}$.

$$50\text{ lb} \approx \frac{50\text{ lb}}{1} \cdot \frac{\mathbf{16\text{ oz}}}{\mathbf{1\text{ lb}}} \cdot \frac{\mathbf{28.35\text{ g}}}{\mathbf{1\text{ oz}}}$$

Escriba las 50 lb como una fracción: $50\text{ lb} = \frac{50\text{ lb}}{1}$.
Multiplique por dos formas de 1: $\frac{16\text{ oz}}{1\text{ lb}}$ y $\frac{28.35\text{ g}}{1\text{ oz}}$.

$$\approx \frac{50\,\cancel{\text{lb}}}{1} \cdot \frac{16\,\cancel{\text{oz}}}{1\,\cancel{\text{lb}}} \cdot \frac{28.35\text{ g}}{1\,\cancel{\text{oz}}}$$

Elimine las unidades comunes de libras y onzas del numerador y el denominador. Las unidades de gramos permanecen.

$$\approx 50 \cdot 16 \cdot 28.35\text{ g}$$

Simplifique.

$$\approx 800 \cdot 28.35\text{ g}$$

Multiplique: $50 \cdot 16 = 800$.

$$\approx 22{,}680\text{ g}$$

Realice la multiplicación.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 3}\\ 16\\ \times\ 50\\ \hline 800 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle 6\,2\,4}\\ 28.35\\ \times\ 800\\ \hline 22680.00 \end{array}$$

Por tanto, 50 libras ≈ 22,680 gramos.

Auto-revisión 4

PESO CORPORAL ¿Quién pesa más, una persona que pesa 165 libras o una que pesa 76 kilogramos?

Ahora intente **Problema 25**

EJEMPLO 4 *Empacado*

¿Una barra de mantequilla de 2.5 libras pesa más que una barra de 1.5 kilogramos?

Estrategia Se convertirá el peso de la barra de mantequilla de 1.5 kilogramos a libras.

POR QUÉ Entonces se pueden comparar los pesos de las barras de mantequilla en las mismas unidades, libras.

Solución

Para convertir 1.5 kilogramos a libras se debe elegir un factor de conversión de unidades cuyo numerador contenga las unidades que se desean introducir (libras) y cuyo denominador contenga las unidades que se desean eliminar (kilogramos). En el primer renglón de la columna *Métrico a estadounidense* de la tabla se observa que hay aproximadamente 2.20 libras por kilogramo. Por tanto, se utiliza el factor de conversión de unidades:

$$\frac{2.20\text{ lb}}{1\text{ kg}}$$

← Esta es la unidad que se desea introducir.
← Esta es la unidad que se desea eliminar (la unidad original).

Para desarrollar la conversión se multiplica.

$$1.5\text{ kg} \approx \frac{1.5\text{ kg}}{1} \cdot \frac{\mathbf{2.20\text{ lb}}}{\mathbf{1\text{ kg}}}$$

Escriba los 1.5 kg como una fracción: $1.5\text{ kg} = \frac{1.5\text{ kg}}{1}$.
Multiplique por una forma de 1: $\frac{2.20\text{ lb}}{1\text{ kg}}$.

$$\approx \frac{1.5\,\cancel{\text{kg}}}{1} \cdot \frac{2.20\text{ lb}}{1\,\cancel{\text{kg}}}$$

Elimine las unidades comunes de kilogramos del numerador y el denominador. Las unidades de libras permanecen.

$$\approx 1.5 \cdot 2.20\text{ lb}$$

Simplifique.

$$\approx 3.3\text{ lb}$$

Realice la multiplicación.

$$\begin{array}{r} 2.20\\ \times\ 1.5\\ \hline 1100\\ 2200\\ \hline 3.300 \end{array}$$

Dado que una barra de mantequilla de 1.5 kilogramos pesa alrededor de 3.3 libras, la barra de 1.5 kilogramos pesa más.

Se puede convertir entre unidades de capacidad estadounidenses y unidades de capacidad métricas utilizando las aproximaciones redondeadas en la siguiente tabla.

Capacidades equivalentes	
Estadounidense a métrico	**Métrico a estadounidense**
1 fl oz ≈ 29.57 mL	1 L ≈ 33.81 fl oz
1 pt ≈ 0.47 L	1 L ≈ 2.11 pt
1 qt ≈ 0.95 L	1 L ≈ 1.06 qt
1 gal ≈ 3.79 L	1 L ≈ 0.264 gal

1 litro 1 cuarto de galón

PIENSE DETENIDAMENTE *Estudiar en otros países*

"En la década pasada se ha más que duplicado el número de estudiantes estadounidenses en el extranjero".

Tomado de The Open Doors 2008 Report

En el 2006/2007, un número récord de 241,791 estudiantes universitarios recibieron un crédito para estudiar en el extranjero. Dado que los estudiantes que viajan a otros países es casi seguro que entran en contacto con el sistema de medición métrico, necesitan tener una comprensión básica de las unidades métricas.

Suponga que un estudiante que está estudiando en el extranjero necesita adquirir los siguientes suministros escolares. Para cada artículo en rojo, elija las unidades métricas apropiadas.

1. Un cuaderno de $8\frac{1}{2}$ pulg. × 11 pulg.:

216 metros × 279 metros 216 centímetros × 279 centímetros 216 milímetros × 279 milímetros

2. Una mochila que pueda contener 20 libras de libros:

9 kilogramos 9 gramos 9 miligramos

3. Una botella de corrector líquido Liquid Paper de $\frac{3}{4}$ onzas líquidas:

22.5 hectolitros 2.5 litros 22.2 mililitros

EJEMPLO 5 *Suministros de limpieza*

Una botella de limpiador de ventanas contiene 750 mililitros de una disolución. Convierta esta medida a cuartos de galón. Redondee a la décima más cercana.

Estrategia Se utilizará un proceso de multiplicación en dos partes que convierta los 750 mililitros a litros y después convierta ese resultado a cuartos de galón.

POR QUÉ Se debe utilizar un proceso en dos partes debido a que la tabla en la parte superior de esta página no contiene un factor de conversión de unidades sencillo que convierta de mililitros a cuartos de galón.

Solución

Dado que hay 1 litro por cada 1,000 mL, se pueden convertir los 750 mililitros a litros multiplicando por el factor de conversión de unidades $\frac{1\text{ L}}{1{,}000\text{ mL}}$. Dado que hay

Auto-revisión 5

AGUA POTABLE Un estudiante compró una botella de agua de 360 mL. Convierta esta medida a cuartos de galón. Redondee a la décima más cercana.

Ahora intente **Problema 29**

aproximadamente 1.06 qt por litro, se puede convertir ese resultado a cuartos de galón multiplicando por el factor de conversión de unidades $\frac{1.06\text{ qt}}{1\text{ L}}$.

$$750\text{ mL} \approx \frac{750\text{ mL}}{1} \cdot \frac{\mathbf{1\text{ L}}}{\mathbf{1{,}000\text{ mL}}} \cdot \frac{\mathbf{1.06\text{ qt}}}{\mathbf{1\text{ L}}}$$

Escriba los 750 mL como una fracción: $750\text{ mL} = \frac{750\text{ mL}}{1}$.

Multiplique por dos formas de 1: $\frac{1\text{ L}}{1{,}000\text{ mL}}$ y $\frac{1.06\text{ qt}}{1\text{ L}}$.

$$\approx \frac{750\ \cancel{\text{mL}}}{1} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{L}}}{1{,}000\ \cancel{\text{mL}}} \cdot \frac{1.06\text{ qt}}{1\ \cancel{\text{L}}}$$

Elimine las unidades comunes de mililitros y litros del numerador y el denominador. Las unidades de cuartos de galón permanecen.

$$\approx \frac{750 \cdot 1.06}{1{,}000}\text{ qt}$$

Multiplique las fracciones.

$$\approx \frac{795}{1{,}000}\text{ qt}$$

Multiplique: $750 \cdot 1.06 = 795$.

$$\approx 0.795\text{ qt}$$

Divida el 795 entre el 1,000 moviendo el punto decimal 3 posiciones a la izquierda.

$$\approx 0.8\text{ qt}$$

Redondee a la décima más cercana.

	750
	× 1.06
	4500
	0000
	75000
	795.00

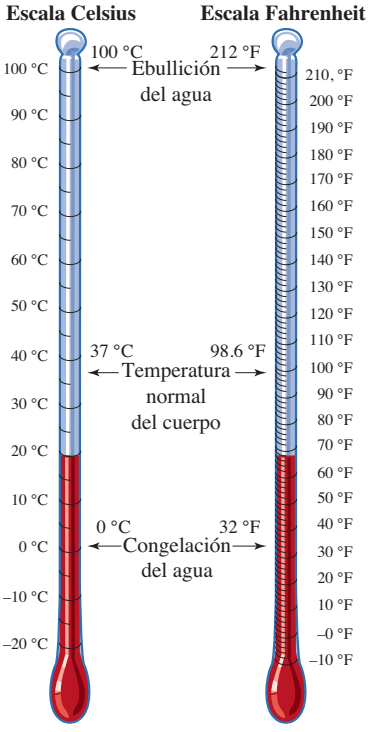
La botella contiene aproximadamente 0.8 qt de disolución limpiadora.

2 Convertir entre temperaturas Fahrenheit y Celsius

En el sistema estadounidense, la temperatura se mide utilizando **grados Fahrenheit** (°F). En el sistema métrico, la temperatura se mide utilizando **grados Celsius** (°C). Estas dos escalas se muestran en los termómetros a la derecha. A partir de las figuras, se puede observar que

- 212 °F ≈ 100 °C — Ebullición del agua
- 32 °F ≈ 0 °C — Congelación del agua
- 5 °F ≈ −15 °C — Un día frío en invierno
- 95 °F ≈ 35 °C — Un día caliente en verano

Existen fórmulas que permiten convertir de grados Fahrenheit a grados Celsius y de grados Celsius a grados Fahrenheit.



Fórmulas de conversión para la temperatura

Si F es la temperatura en grados Fahrenheit y C es la temperatura correspondiente en grados Celsius, entonces

$$C = \frac{5}{9}(F - 32) \qquad \text{y} \qquad F = \frac{9}{5}C + 32$$

EJEMPLO 6 ***Baño*** El agua caliente para bañarse está a 90 °F. Exprese esta temperatura en grados Celsius. Redondee a la décima de grado más cercana.

Estrategia Se sustituirá el 90 para F en la fórmula $C = \frac{5}{9}(F - 32)$.

POR QUÉ Entonces se puede utilizar la regla para el orden de las operaciones para evaluar el lado derecho de la ecuación y encontrar el valor de C, la temperatura en grados Celsius del agua para bañarse.

Solución

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$ Esta es la fórmula para encontrar los grados Celsius.

$$= \frac{5}{9}(90 - 32)$$ Sustituya el 90 para F.

$$= \frac{5}{9}(58)$$ Realice primero la resta dentro de los paréntesis: $90 - 32 = 58$.

$$= \frac{5}{9}\left(\frac{58}{1}\right)$$ Escriba el 58 como una fracción: $58 = \frac{58}{1}$.

$$= \frac{290}{9}$$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$$= 32.222\ldots$$ Realice la división.

$$\approx 32.2$$ Redondee a la décima más cercana.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 4} \\ 58 \\ \times\ 5 \\ \hline 290 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32.22 \\ 9\overline{)290.00} \\ -\ 27 \\ \hline 20 \\ -\ 18 \\ \hline 20 \\ -\ 18 \\ \hline 20 \\ -\ 18 \\ \hline 2 \end{array}$$

A la décima de grado más cercana, la temperatura del agua para bañarse es de 32.2 °C.

Auto-revisión 6

CAFÉ El café caliente está a 110 °F. Exprese esta temperatura en grados Celsius. Redondee a la décima de grado más cercana.

Ahora intente **Problema 33**

EJEMPLO 7 ***Lavaplatos*** Un fabricante de lavaplatos recomienda que los platos se enjuaguen en agua caliente a una temperatura de 60 °C. Exprese esta temperatura en grados Fahrenheit.

Estrategia Se sustituirá el 60 para C en la fórmula $F = \frac{9}{5}C + 32$.

POR QUÉ Entonces se puede utilizar la regla para el orden de las operaciones para evaluar el lado derecho de la ecuación y encontrar el valor de F, la temperatura en grados Fahrenheit del agua.

Solución

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$ Esta es la fórmula para encontrar los grados Fahrenheit.

$$= \frac{9}{5}(60) + 32$$ Sustituya el 60 para C.

$$= \frac{540}{5} + 32$$ Multiplique: $\frac{9}{5}(60) = \frac{9}{5}\left(\frac{60}{1}\right) = \frac{540}{5}$.

$$= 108 + 32$$ Realice la división.

$$= 140$$ Realice la suma.

$$\begin{array}{r} 60 \\ \times\ 9 \\ \hline 540 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 108 \\ 5\overline{)540} \\ -\ 5 \\ \hline 4 \\ -\ 0 \\ \hline 40 \\ -\ 40 \\ \hline 0 \end{array}$$

El fabricante recomienda que los platos se enjuaguen en agua a 140 °F.

Auto-revisión 7

FIEBRES Para determinar si un bebé tiene fiebre, su madre toma su temperatura con un termómetro en grados Celsius. Si la lectura es de 38.8 °C, ¿el bebé tiene fiebre? (*Sugerencia:* La temperatura normal del cuerpo es de 98.6 °F.)

Ahora intente **Problema 37**

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. 30 pulg. **2.** la carrera de 550 yardas **3.** 30,845 g **4.** la persona que pesa 76 kg **5.** 0.4 qt **6.** 43.3 °C **7.** sí

SECCIÓN 5.5 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Complete los espacios.

1. En el sistema estadounidense, las temperaturas se miden en grados _____. En el sistema métrico, las temperaturas se miden en grados _____.

2. **a.** Las pulgadasy los centímetros son unidades utilizadas para medir _____.

b. Las libras y los gramos son unidades utilizadas para medir _____ (peso).

c. Los galones y los litros son unidades utilizadas para medir _____.

CONCEPTOS

3. ¿Qué es más largo:

a. ¿una yarda o un metro?

b. ¿un pie o un metro?

c. ¿una pulgada o un centímetro?

d. ¿una milla o un kilómetro?

4. ¿Qué es más pesado:

a. ¿una onza o un gramo?

b. ¿una libra o un kilogramo?

5. ¿Cuál es la unidad de capacidad más grande:

a. ¿una pinta o un litro?

b. ¿un cuarto de galón o un litro?

c. ¿un galón o un litro?

6. **a.** ¿Qué fórmula se utiliza para cambiar de grados Celsius a grados Fahrenheit?

b. ¿Qué fórmula se utiliza para cambiar de grados Fahrenheit a grados Celsius?

7. Escriba un factor de conversión de unidades para convertir

a. pies a metros

b. libras a kilogramos

c. galones a litros

8. Escriba un factor de conversión de unidades para convertir

a. centímetros a pulgadas

b. gramos a onzas

c. litros a onzas líquidas

NOTACIÓN

Complete cada solución.

9. Convierta 4,500 pies a metros.

$$4{,}500 \text{ pies} \approx \frac{4{,}500 \text{ pies}}{1} \cdot \frac{\quad}{1 \text{ pie}}$$

$$\approx 1{,}350 \quad$$

10. Convierta 8 litros a galones.

$$8 \text{ L} \approx \frac{8 \text{ L}}{1} \cdot \frac{\quad \text{gal}}{1 \text{ L}}$$

$$\approx 2.112 \quad$$

11. Convierta 3 kilogramos a onzas.

$$3 \text{ kg} \approx \frac{3 \text{ kg}}{1} \cdot \frac{1{,}000 \text{ g}}{1 \text{ kg}} \cdot \frac{\quad \text{oz}}{1 \text{ g}}$$

$$\approx 3 \cdot \quad \cdot 0.035 \text{ oz}$$

$$\approx 105 \quad$$

12. Convierta 70 °C a grados Fahrenheit.

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

$$= \frac{9}{5}(\quad) + 32$$

$$= \quad + 32$$

$$= 158$$

Por tanto, 70 °C = 158 ____

PRÁCTICA GUIADA

Desarrolle cada conversión. Redondee a la pulgada más cercana. Vea el Ejemplo 1.

13. 25 centímetros a pulgadas

14. 35 centímetros a pulgadas

15. 88 centímetros a pulgadas

16. 91 centímetros a pulgadas

Desarrolle cada conversión. Vea el Ejemplo 2.

17. 8,400 pies a metros

18. 7,300 pies a metros

19. 25,115 pies a metros

20. 36,242 pies a metros

Desarrolle cada conversión. Vea el Ejemplo 3.

21. 20 libras a gramos

22. 30 libras a gramos

23. 75 libras a gramos

24. 95 libras a gramos

Desarrolle cada conversión. Vea el Ejemplo 4.

25. 6.5 kilogramos a libras

26. 7.5 kilogramos a libras

27. 300 kilogramos a libras

28. 800 kilogramos a libras

Desarrolle cada conversión. Redondee a la décima más cercana. **Vea el Ejemplo 5.**

29. 650 mililitros a cuartos de galón

30. 450 mililitros a cuartos de galón

31. 1,200 mililitros a cuartos de galón

32. 1,500 mililitros a cuartos de galón

Exprese cada temperatura en grados Celsius. Redondee a la décima de grado más cercana. **Vea el Ejemplo 6.**

33. 120 °F

34. 110 °F

35. 35 °F

36. 45 °F

Exprese cada temperatura en grados Fahrenheit. **Vea el Ejemplo 7.**

37. 75 °C

38. 85 °C

39. 10 °C

40. 20 °C

INTÉNTELO

Desarrolle cada conversión. Si es necesario, redondee las respuestas a la décima más cercana. Dado que la mayoría de las conversiones son aproximadas, las respuestas pueden variar ligeramente dependiendo del método empleado.

41. 25 libras a gramos

42. 7.5 onzas a gramos

43. 50 °C a grados Fahrenheit

44. 36.2 °C a grados Fahrenheit

45. 0.75 cuartos de galón a mililitros

46. 3 pintas a mililitros

47. 0.5 kilogramos a onzas

48. 35 gramos a libras

49. 3.75 metros a pulgadas

50. 2.4 kilómetros a millas

51. 3 onzas líquidas a litros

52. 2.5 pintas a litros

53. 12 kilómetros a pies

54. 3,212 centímetros a pies

55. 37 onzas a kilogramos

56. 10 libras a kilogramos

57. −10 °C a grados Fahrenheit

58. −22.5 °C a grados Fahrenheit

59. 17 gramos a onzas

60. 100 kilogramos a libras

61. 7.2 litros a onzas líquidas

62. 5 litros a cuartos de galón

63. 3 pies a centímetros

64. 7.5 yardas a metros

65. 500 mililitros a cuartos de galón

66. 2,000 mililitros a galones

67. 50 °F a grados Celsius

68. 67.7 °F a grados Celsius

69. 5,000 pulgadas a metros

70. 25 millas a kilómetros

71. −5 °F a grados Celsius

72. −10 °F a grados Celsius

APLICACIONES

Dado que la mayoría de las conversiones son aproximadas, las respuestas pueden variar ligeramente dependiendo del método empleado.

73. MEDIO ORIENTE La distancia entre Jerusalén y Belén es de 8 kilómetros. A la milla más cercana, dé la distancia en millas.

74. MAR MUERTO El Mar Muerto tiene 80 kilómetros de largo. A la milla más cercana, dé la longitud en millas.

75. GUEPARDOS Un guepardo puede correr a 112 kilómetros por hora. Exprese esta velocidad en mph. Redondee a la milla más cercana.

76. LEONES Un león puede correr a 50 mph. Exprese esta velocidad en kilómetros por hora.

77. MONTE WASHINGTON El pico más alto de las Montañas Blancas de New Hampshire es el Monte Washington, a 6,288 pies. Dé la altura en kilómetros. Redondee a la décima más cercana.

78. ATLETISMO Las competencias de pista se llevan a cabo en una pista oval. Una vuelta alrededor de la pista por lo regular es de 400 metros. Sin embargo, algunas pistas más viejas en Estados Unidos son óvalos de 440 yardas. ¿Estos dos tipos de pistas son de la misma longitud? Si no, ¿cuál es más larga?

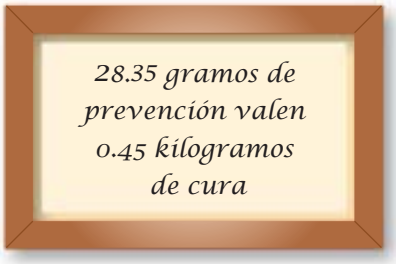
79. CRECIMIENTO DEL CABELLO Cuando el cabello está corto, su tasa de crecimiento promedia alrededor de $\frac{3}{4}$ de pulgada por mes. ¿Cuántos centímetros es esto en un mes? Redondee a la décima de centímetro más cercana.

80. BALLENAS Una orca macho adulta puede pesar hasta 12,000 libras y medir hasta 25 pies de largo. Cambie estas mediciones a kilogramos y metros.

81. LEVANTAMIENTO DE PESAS La tabla lista los mejores récords personales en un banco de pesas para dos de los mejores levantadores de pesas del mundo. Cambie cada peso métrico a libras. Redondee a la libra más cercana.

Nombre	Ciudad natal	Banco de pesas
Liz Willet	Ferndale, Washington	187 kg
Brian Siders	Charleston, W. Virginia	350 kg

82. PALABRAS DE SABIDURÍA Refiérase al tapiz. Convierta el primer peso métrico a onzas y el segundo a libras. ¿Qué dicho famoso resulta?



83. ONZAS Y ONZAS LÍQUIDAS

a. Hay 310 calorías en 8 onzas de pollo hervido. Convierta las 8 onzas a gramos.

b. Hay 112 calorías en un vaso de jugo de naranja fresco Valencia que contiene 8 onzas líquidas. Convierta las 8 onzas líquidas a litros. Redondee a la centésima más cercana.

84. ATLETISMO Una bala pesa 7.264 kilogramos. Convierta este peso a libras. Redondee a la libra más cercana.

85. REGULACIONES POSTALES Puede enviar un paquete que pese hasta 70 libras por medio de correo prioritario. ¿Puede enviar un paquete que pesa 32 kilogramos por medio de correo prioritario?

86. NUTRICIÓN Refiérase a la tabla de nutrición mostrada abajo para un paquete de avena. Cambie a onzas cada peso encerrado en un círculo.

Datos nutricionales
Tamaño de porción: 1 Paquete (46g)
Porciones por contenedor: 10

Cantidad por porción	
Calorías 170 Calorías a partir de grasas 20	
	% del valor diario
Grasas totales 2g	**3%**
Grasas saturadas 0.5g	**2%**
Grasas polisaturadas 0.5g	
Grasas monosaturadas 1g	
Colesterol 0mg	**0%**
Sodio 250mg	**10%**
Carbohidratos totales 35g	**12%**
Fibra alimentaria 3g	**12%**
Fibra soluble 1g	
Azúcares 16g	
Proteína 4g	

87. AGUAS TERMALES Las aguas termales en el Parque nacional Hot Springs en Arkansas emiten agua tan caliente como 143 °F. Cambie esta temperatura a grados Celsius.

88. COCINAR CARNE Las carnes deben cocinarse a temperaturas lo suficientemente altas para matar las bacterias dañinas. De acuerdo con la USDA y la FDA, la temperatura interna para la carne asada y los filetes cocidos debe de ser de al menos 145 °F, y las aves de corral deben estar a 180 °F. Convierta estas temperaturas a grados Celsius. Redondee hacia arriba al grado siguiente.

89. TOMAR UNA DUCHA Cuando toma una ducha, ¿cuál temperatura del agua elegiría: 15 °C, 28 °C o 50 °C?

90. AGUA POTABLE Para tomar un trago de agua fría, ¿cuál temperatura del agua elegiría: −2 °C, 10 °C o 25 °C?

91. CLIMA NEVADO ¿A qué temperaturas podría nevar: −5 °C, 0 °C o 10 °C?

92. AIRE ACONDICIONADO ¿A qué temperatura exterior sería más probable que encendiera el aire acondicionado: 15 °C, 20 °C o 30 °C?

93. COMPARACIÓN AL COMPRAR ¿Cuál es la mejor compra: 3 cuartos de galón de cerveza de raíz por $4.50 o 2 litros de cerveza de raíz por $3.60?

94. COMPARACIÓN AL COMPRAR ¿Cuál es la mejor compra: 3 galones de anticongelante por $10.35 o 12 litros de anticongelante por $10.50?

REDACCIÓN

95. Explique cómo cambiar kilómetros a millas.

96. Explique cómo cambiar 50 °C a grados Fahrenheit.

97. Estados Unidos es el único país industrializado en el mundo que no utiliza de manera oficial el sistema métrico. Algunas personas aseveran que esto le está costando dinero a los negocios estadounidenses. ¿Piensa eso? ¿Por qué?

98. ¿A qué se refiere con la frase *una tabla de medidas equivalentes*?

REPASO

Desarrolle cada operación.

99. $\frac{3}{5} + \frac{4}{3}$

100. $\frac{3}{5} - \frac{4}{3}$

101. $\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{3}$

102. $\frac{3}{5} \div \frac{4}{3}$

103. $3.25 + 4.8$

104. $3.25 - 4.8$

105. $3.25 \cdot 4.8$

106. $4.8\overline{)15.6}$

LISTA DE VERIFICACIÓN DE LAS HABILIDADES DE ESTUDIO

Proporciones y factores de conversión de unidades

Antes de tomar el examen en el Capítulo 5, asegúrese de que tiene una comprensión sólida de cómo escribir proporciones y cómo elegir factores de conversión de unidades. Coloque una marca de verificación en el recuadro si puede responder "sí" al enunciado.

☐ Cuando escribo una proporción, sé que las unidades de los numeradores deben ser iguales y que las unidades de los denominadores deben ser iguales.

Esta proporción está escrita de manera correcta:

$$\begin{matrix}\text{Onzas}\\ \text{Costo}\end{matrix}\rightarrow \frac{150}{x} = \frac{3}{2.75} \leftarrow \begin{matrix}\text{Onzas}\\ \text{Costo}\end{matrix}$$

Esta proporción no está escrita de manera correcta:

$$\begin{matrix}\text{Onzas}\\ \text{Costo}\end{matrix}\rightarrow \frac{50}{x} = \frac{2.75}{3} \leftarrow \begin{matrix}\text{Costo}\\ \text{Onzas}\end{matrix}$$

☐ Cuando convierto de una unidad a otra, sé que debo elegir un factor de conversión de unidades con la siguiente forma:

$$\frac{\text{Unidad que deseo introducir}}{\text{Unidad que deseo eliminar}}$$

Por ejemplo, en la siguiente conversión de 15 pintas a tazas se eliminan las unidades de pintas y se introducen las unidades de tazas eligiendo el factor de conversión de unidades $\frac{2\text{ c}}{1\text{ pt}}$.

$$15\text{ pt} = \frac{15\text{ pt}}{1} \cdot \frac{\mathbf{2\text{ c}}}{\mathbf{1\text{ pt}}} = 30\text{ c}$$

CAPÍTULO 5 RESUMEN Y REPASO

SECCIÓN 5.1 Razones y tasas

DEFINICIONES Y CONCEPTOS	EJEMPLOS
Las **razones** se utilizan con frecuencia para describir relaciones importantes entre dos cantidades. Una **razón** es el cociente de dos números o el cociente de dos cantidades que tienen las mismas unidades. Las razones se escriben de tres maneras: como fracciones, en palabras separadas por la palabra *a* y utilizando dos puntos.	La razón 4 **a** 5 puede escribirse como $\frac{4}{5}$. La razón 5 **:** 12 puede escribirse como $\frac{5}{12}$.
Para **escribir una razón como una fracción,** escriba el primer número (o cantidad) mencionado como el numerador y el segundo número (o cantidad) mencionado como el denominador. Después simplifique la fracción, si es posible.	Escriba la razón 30 a 36 como una fracción en la forma más simple. La palabra *a* separa los números que se van a comparar. $\frac{30}{36} = \frac{5 \cdot \overset{1}{\cancel{6}}}{\underset{1}{\cancel{6}} \cdot 6} = \frac{5}{6}$ Para simplificar factorice el 30 y el 36. Después elimine el factor común de 6 del numerador y el denominador.

Para escribir una **razón en la forma más simple,** elimine cualquier factor común del numerador y el denominador al igual que cualquier unidad común.

Escriba la razón *14 pies: 2 pies* como una fracción en la forma más simple.

Dos puntos separan las cantidades que se van a comparar.

$$\frac{14 \text{ pies}}{2 \text{ pies}} = \frac{\overset{1}{2} \cdot 7 \text{ pies}}{\underset{1}{2} \text{ pies}}$$

Para simplificar, factorice el 14. Después elimine el factor común de 2 y las unidades comunes de pies del numerador y el denominador.

$$= \frac{7}{1}$$

Dado que una razón compara dos números, se deja el resultado en forma fraccional. No simplifique más.

Para **simplificar razones que involucran decimales,** multiplique la razón por una forma de 1 para que el numerador y el denominador se vuelvan números enteros. Después simplifique, si es posible.

Escriba la razón 0.23 a 0.71 como una fracción en la forma más simple.

Para escribir esta como una razón de *números enteros* se necesita mover los puntos decimales en el numerador y el denominador dos posiciones a la derecha. Esto ocurrirá si se multiplican ambos por 100.

$$\frac{0.23}{0.71} = \frac{0.23}{0.71} \cdot \frac{\mathbf{100}}{\mathbf{100}}$$

Multiplique la razón por una forma de 1.

$$= \frac{0.23 \cdot \mathbf{100}}{0.71 \cdot \mathbf{100}}$$

Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$$= \frac{23}{71}$$

Para encontrar el producto de cada decimal y el 100, simplemente mueva el punto decimal dos posiciones a la derecha. La fracción resultante está en la forma más simple.

Para **simplificar razones que involucran números mixtos** utilice el método para la simplificación de fracciones complejas de la Sección 3.7. Desarrolle la división indicada por la barra de fracción principal.

Escriba la razón $3\frac{1}{3}$ a $4\frac{1}{6}$ como una fracción en la forma más simple.

$$\frac{3\frac{1}{3}}{4\frac{1}{6}} = \frac{\frac{10}{3}}{\frac{25}{6}}$$

Escriba $3\frac{1}{3}$ y $4\frac{1}{6}$ como fracciones impropias.

$$= \frac{10}{3} \div \frac{25}{6}$$

Escriba la división indicada por la barra de fracción principal utilizando un símbolo ÷.

$$= \frac{10}{3} \cdot \frac{6}{25}$$

Use la regla para la división de fracciones. Multiplique la primera fracción por el recíproco de $\frac{25}{6}$, el cual es $\frac{6}{25}$.

$$= \frac{10 \cdot 6}{3 \cdot 25}$$

Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$$= \frac{2 \cdot \overset{1}{\cancel{5}} \cdot 2 \cdot \overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{3}} \cdot \underset{1}{\cancel{5}} \cdot 5}$$

Para simplificar la fracción, factorice el 10, el 6 y el 25. Después elimine los factores comunes de 3 y 5.

$$= \frac{4}{5}$$

Multiplique los factores restantes en el numerador. Multiplique los factores restantes en el denominador.

Cuando una razón compara dos cantidades, ambas cantidades deben medirse en las **mismas unidades.** Cuando las unidades son diferentes, por lo regular es más simple escribir la razón utilizando la unidad de medición más pequeña.

Escriba la razón *5 pulgadas a 2 pies* como una fracción en la forma más simple. Dado que las pulgadas son más pequeñas que los pies, compare en pulgadas:

5 **pulgadas** a 24 **pulgadas** Debido a que 2 pies = 24 pulgadas.

Después, escriba la razón en forma de fracción y simplifique.

$$\frac{5 \text{ pulgadas}}{24 \text{ pulgadas}} = \frac{5}{24}$$

Elimine las unidades comunes de pulgadas.

Cuando se comparan dos cantidades que tienen unidades diferentes (y ninguna unidad puede convertirse a otra), a la comparación se le llama **tasa.**

Para **escribir una tasa como una fracción,** escriba la primera cantidad mencionada como el numerador y la segunda cantidad mencionada como el denominador y después simplifique, si es posible. Escriba las unidades como parte de la fracción.

Las palabras como *por, en* y *a partir de* se utilizan para separar las dos cantidades que se comparan en una tasa.

Escriba la tasa *33 millas en 6 horas* como una fracción en la forma más simple.

33 millas **en** 6 horas puede escribirse como $\frac{33 \text{ millas}}{6 \text{ horas}}$

$$\frac{33 \text{ millas}}{6 \text{ horas}} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot 11 \text{ millas}}{2 \cdot \underset{1}{\cancel{3}} \text{ horas}}$$

Para simplificar factorice el 33 y el 6. Después elimine el factor común de 3 del numerador y el denominador.

$$= \frac{11 \text{ millas}}{2 \text{ horas}}$$

Escriba las unidades como parte de la tasa.

La tasa puede escribirse como 11 millas por 2 horas.

Una **tasa unitaria** es una tasa en la que el denominador es de 1.

Para **escribir una tasa como una tasa unitaria,** divida el numerador de la tasa entre el denominador.

Con frecuencia se utiliza una **diagonal**, /, para escribir una tasa unitaria.

Escriba como una tasa unitaria: 2,490 manzanas a partir de 6 árboles.

Para encontrar la tasa unitaria, divida el 2,490 entre el 6.

$$6\overline{)2{,}490}\quad 415$$

La tasa unitaria es $\frac{415 \text{ manzanas}}{1 \text{ árbol}}$. Esta tasa también puede expresarse como: $415\frac{\text{manzanas}}{\text{árbol}}$, 415 manzanas por árbol o 415 manzanas/árbol.

Un **precio unitario** es una tasa que indica cuánto se paga por *una* unidad (o *un* producto). Es el cociente del precio al número de unidades.

$$\text{Precio unitario} = \frac{\text{precio}}{\text{número de unidades}}$$

La comparación al comprar puede hacerse de manera más sencilla encontrando los **precios unitarios.** La mejor compra es el producto que tiene el precio más bajo.

¿Cuál es la mejor compra para un champú?

12 onzas por \$3.84 o 16 onzas por \$4.64

Para encontrar el precio unitario de una botella de champú, escriba el cociente de su precio y su peso y después desarrolle la división indicada. Antes de dividir, convierta cada precio de dólares a centavos para que el precio unitario pueda expresarse en centavos por onza.

$$\frac{\$3.84}{12 \text{ oz}} = \frac{384¢}{12 \text{ oz}} \qquad \frac{\$4.64}{16 \text{ oz}} = \frac{464¢}{16 \text{ oz}}$$

$$= ¢32 \text{ por oz} \qquad = ¢29 \text{ por oz}$$

Una onza de champú por ¢29 es mejor que una onza por ¢32. Por tanto, la botella de 16 onzas es la mejor compra.

EJERCICIOS DE REPASO

Escriba cada razón como una fracción en la forma más simple.

1. 7 a 25

2. 15 : 16

3. 24 a 36

4. 21 : 14

5. 4 pulgadas a 12 pulgadas

6. 63 metros a 72 metros

7. 0.28 a 0.35

8. 5.1 : 1.7

9. $2\frac{1}{3}$ a $2\frac{2}{3}$

10. $4\frac{1}{6} : 3\frac{1}{3}$

11. 15 minutos: 3 horas

12. 8 onzas a 2 libras

Escriba cada tasa como una fracción en la forma más simple.

13. 64 centímetros en 12 años

14. \$15 por 25 minutos

Escriba cada tasa como una tasa unitaria.

15. 600 boletos en 20 minutos

16. 45 pulgadas cada 3 giros

17. 195 pies en 6 carretes

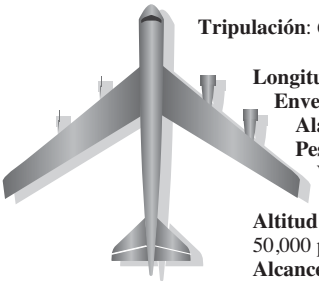
18. 48 calorías en 15 piezas

Encuentre el precio unitario de cada artículo.

19. 5 pares cuestan $11.45.

20. $3 mil millones en un periodo de 12 meses.

21. AVIÓN Abajo se muestran las especificaciones para un Boeing B-52 Stratofortress. ¿Cuál es la razón de la envergadura del avión a su longitud?



Tripulación: 6
Longitud: 160 pies
Envergadura: 185 pies
Alas del avión
Peso máximo al despegue: 488,000
Velocidad máxima: 595 mph
Altitud máxima: más de 50,000 pies
Alcance: 7,500 mi

22. TASAS DE PAGO Encuentre la tasa de pago por hora para un estudiante que gana $333.25 por trabajar 43 horas.

23. CONTROL DE MULTITUDES Después que se acaba un concierto, le toma 48 minutos a la multitud de 54,000 personas salir del estadio. Encuentre la tasa unitaria de la gente que está saliendo del estadio.

24. COMPARACIÓN AL COMPRAR Las nueces mezcladas vienen embasadas en una lata de 12 onzas, la cual se vende por $4.95 o en una lata de 8 onzas, la cual se vende por $3.25. ¿Cuál es la mejor compra?

SECCIÓN 5.2 Proporciones

DEFINICIONES Y CONCEPTOS

Una **proporción** enuncia que dos razones o dos tasas son iguales.

A cada uno de los cuatro miembros en una proporción se le llama **término.** Al primer y al cuarto términos se les llama **extremos** y al segundo y al tercer términos se les llama **medios.**

Dado que una proporción es una ecuación, **una proporción puede ser verdadera o falsa**. Una proporción es verdadera si sus razones (o tasas) son equivalentes y falsa si sus razones (o tasas) no son equivalentes.

Una manera de determinar si una proporción es verdadera o falsa es utilizar las habilidades de simplificación de fracciones del Capítulo 3.

A los dos productos encontrados al multiplicar de manera diagonal en una proporción se les llama **productos cruzados.**

Otra manera de determinar si una proporción es verdadera o falsa involucra los productos cruzados. Si los **productos cruzados son iguales,** la proporción es verdadera. Si los productos cruzados *no son iguales,* la proporción es falsa.

EJEMPLOS

Escriba cada enunciado como una proporción.

$$\underbrace{6 \text{ es } \mathbf{a} \text{ } 10}_{\frac{6}{10}} \ \mathbf{como} \ \underbrace{3 \text{ es } \mathbf{a} \text{ } 5}_{\frac{3}{5}}$$

La palabra "a" se utiliza para separar los números que se van a comparar en una razón (o tasas).

$$\underbrace{\$300 \text{ es } \mathbf{a} \text{ } 500 \text{ minutos}}_{\frac{\$300}{500 \text{ minutos}}} \ \mathbf{como} \ \underbrace{\$3 \text{ es } \mathbf{a} \text{ } 5 \text{ minutos}}_{\frac{\$3}{5 \text{ minutos}}}$$

Primer término (extremo) — Tercer término (medio)

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$

Segundo término (medio) — Cuarto término (extremo)

Determine si la proporción $\frac{3}{5} = \frac{15}{27}$ es verdadera o falsa.

Método 1 Simplifique cualquier razón en la proporción que no esté en la forma más simple. Después compárelas para determinar si son iguales.

$$\frac{15}{27} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot 5}{\underset{1}{\cancel{3}} \cdot 9} = \frac{5}{9}$$

Simplifique la razón en el lado derecho.

Dado que las razones en los lados izquierdo y derecho de la proporción no son iguales, la proporción es falsa.

Método 2 Compruebe para ver si los productos cruzados son iguales.

Productos cruzados

$3 \cdot 27 = 81$ $\qquad$ $5 \cdot 15 = 75$

$$\frac{3}{5} = \frac{15}{27}$$

Dado que los productos cruzados no son iguales, la proporción no es verdadera.

Cuando dos pares de números forman una proporción, se dice que son **proporcionales.**

Determine si 0.7, 0.3 y 2.1, 0.9 son proporcionales.
Escriba las dos razones y forme una proporción. Después encuentre los productos cruzados.

$$\frac{0.7}{0.3} = \frac{2.1}{0.9} \qquad 0.7 \cdot 0.9 = \mathbf{0.63} \qquad 0.3 \cdot 2.1 = \mathbf{0.63}$$

Dado que los productos cruzados son iguales, los números son proporcionales.

Resolver una proporción para encontrar un término desconocido:

1. Iguale entre sí los productos cruzados para formar una ecuación.
2. Despeje la variable en un lado de la ecuación dividiendo ambos lados entre el número que está multiplicado por la variable.
3. Compruebe sustituyendo el resultado en la proporción original y encontrando los productos cruzados.

Resuelva la proporción: $\frac{5}{37.5} = \frac{2}{x}$

$\frac{5}{37.5} = \frac{2}{x}$ Esta es la proporción a resolver.

$5 \cdot x = 37.5 \cdot 2$ Iguale entre sí los productos cruzados para formar una ecuación.

$5 \cdot x = 75$ Para simplificar el lado derecho de la ecuación, multiplique: $37.5 \cdot 2 = 75$.

$\frac{5 \cdot x}{\mathbf{5}} = \frac{75}{\mathbf{5}}$ Para deshacer la multiplicación por 5 y despejar x, divida ambos lados entre 5.

$x = 15$ Para simplificar el lado izquierdo, elimine el factor común de 5. Para simplificar el lado derecho, realice la división: $75 \div 5 = 15$.

Por tanto, x es 15. Compruebe este resultado en la proporción original encontrando los productos cruzados.

Pueden utilizarse proporciones para **resolver problemas de aplicación**. Es fácil ubicar los problemas que pueden resolverse utilizando una proporción. Se le proporcionará una razón (o tasa) y se le pedirá que encuentre la parte faltante de otra razón (o tasa).

Es de utilidad seguir la **estrategia para la resolución de problemas de cinco pasos** vista anteriormente en el texto para resolver problemas de proporciones.

MANTEQUILLA DE CACAHUATE Se requieren 360 cacahuates para preparar 8 onzas de mantequilla de cacahuate. ¿Cuántos cacahuates se requieren para preparar 12 onzas? (Fuente: National Peanut Board)

Analizar

- Se puede expresar el hecho que se requieren 360 cacahuates para preparar 8 onzas de mantequilla de cacahuate como una tasa: $\frac{360 \text{ cacahuates}}{8 \text{ onzas}}$.
- ¿Cuántos cacahuates se requieren para preparar 12 onzas?

Formar La variable p representará el número desconocido de cacahuates.

360 cacahuates es **a** 8 onzas **como** p cacahuates es **a** 12 onzas.

Número de cacahuates → $\frac{360}{8} = \frac{p}{12}$ ← Número de cacahuates
Onzas de cacahuates → Onzas de cacahuates

Resolver Para encontrar el número de cacahuates necesarios, resuelva la proporción para p.

$360 \cdot 12 = 8 \cdot p$ Iguale entre sí los productos cruzados para formar una ecuación.

$4{,}320 = 8 \cdot p$ Para simplificar el lado izquierdo de la ecuación, multiplique: $360 \cdot 12 = 4{,}320$.

$\frac{4{,}320}{\mathbf{8}} = \frac{8 \cdot p}{\mathbf{8}}$ Para deshacer la multiplicación por 8 y despejar p, divida ambos lados entre 8.

$540 = p$ Para simplificar el lado izquierdo, realice la división: $4{,}320 \div 8 = 540$. Para simplificar el lado derecho, elimine el factor común de 8.

Enunciar Se requieren 540 cacahuates para preparar 12 onzas de mantequilla de cacahuate.

Comprobar 16 onzas de mantequilla de cacahuate requeriría el doble de cacahuates que 8 onzas: $2 \cdot 360$ cacahuates $= 720$ cacahuates. Parece razonable que 12 onzas requerirían 540 cacahuates.

EJERCICIOS DE REPASO

25. Escriba cada enunciado como una proporción.

a. 20 es a 30 como 2 es a 3.

b. 6 autobuses reemplazan a 100 automóviles como 36 autobuses reemplazan a 600 automóviles.

26. Complete los productos cruzados.

$\square \cdot 27 = \square \qquad 9 \cdot \square = \square$

$$\frac{2}{9} = \frac{6}{27}$$

Determine si cada proporción es verdadera o falsa simplificando.

27. $\frac{8}{12} = \frac{3}{7}$ **28.** $\frac{4}{18} = \frac{10}{45}$

Determine si cada proporción es verdadera o falsa encontrando los productos cruzados.

29. $\frac{9}{27} = \frac{2}{6}$ **30.** $\frac{17}{7} = \frac{51}{21}$

31. $\frac{3.5}{9.3} = \frac{1.2}{3}$ **32.** $\frac{1\frac{1}{2}}{3\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{4}}{1\frac{1}{7}}$

Determine si los números son proporcionales.

33. 5, 9 y 20, 36 **34.** 7, 13 y 29, 54

Resuelva cada proporción.

35. $\frac{12}{18} = \frac{3}{x}$ **36.** $\frac{4}{x} = \frac{2}{8}$

37. $\frac{4.8}{6.6} = \frac{x}{9.9}$ **38.** $\frac{0.08}{x} = \frac{0.04}{0.06}$

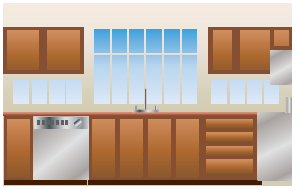
39. $\frac{1\frac{9}{11}}{x} = \frac{3\frac{1}{3}}{2\frac{3}{4}}$ **40.** $\frac{\frac{4}{5}}{1\frac{1}{20}} = \frac{2\frac{2}{3}}{x}$

41. $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{x}{0.25}$ **42.** $\frac{x}{300} = \frac{5{,}000}{1{,}500}$

43. CAMIONETAS Una camioneta Dodge Ram puede circular 35 millas con 2 galones de gas. ¿Qué tan lejos puede ir con 11 galones?

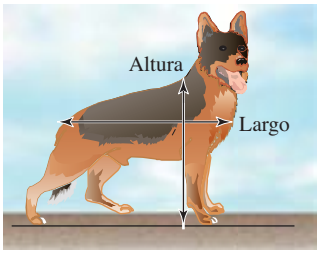
44. CONTROL DE CALIDAD En un proceso de fabricación, se encontró que 12 partes de 66 estaban defectuosas. ¿Cuántas partes defectuosas se esperarán en una tirada de 1,650 partes?

45. DIBUJOS A ESCALA La ilustración de abajo muestra el dibujo de una cocina de un arquitecto utilizando una escala de $\frac{1}{8}$ de pulgada a 1 pie $\left(\frac{1}{8}'' : 1'0''\right)$. En el dibujo, el largo de la cocina es de $1\frac{1}{2}$ pulgadas. ¿Qué tan larga es la cocina real? (El símbolo $''$ significa pulgada, y $'$ significa pies.)

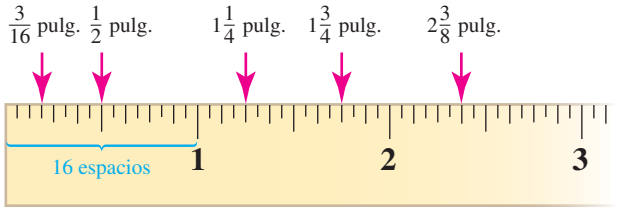


ELEVACIÓN B-B
ESCALA: $\frac{1}{8}''$ a 1'0"

46. PERROS El sitio web del American Kennel Club establece las *proporciones de longitud a altura* ideales para un pastor alemán como $10 : 8\frac{1}{2}$. ¿Cuál es la longitud ideal de un pastor alemán que es de $25\frac{1}{2}$ pulgadas de alto al hombro?



SECCIÓN 5.3 Unidades de medición estadounidenses

DEFINICIONES Y CONCEPTOS	EJEMPLOS
El **sistema de medición estadounidense** utiliza las unidades **pulgada, pie, yarda** y **milla** para medir la **longitud.** Una **regla** es una de las herramientas más comunes para medir longitudes. La mayoría de las reglas son de 12 pulgadas de largo. Cada pulgada está dividida en mitades de una pulgada, cuartos de una pulgada, octavos de una pulgada y dieciseisavos de una pulgada.	1 pie = 12 pulg. 1 yd = 3 pies 1 yd = 36 pulg. 1 mi = 5,280 pies Dado que las marcas gruesas en negro entre el 0 y el 1 en la regla crean dieciséis espacios iguales, la regla está escalada en dieciseisavos. 
Para convertir de una unidad de longitud a otra se utilizan **factores de conversión de unidades.** Se les llama factores de conversión de unidades debido a que su valor es de 1. El multiplicar una medición por un factor de conversión de unidades no cambia la medición, sólo cambia las unidades de la medición. En la página 445 se proporciona una lista de los factores de conversión de unidades para las unidades de longitud estadounidenses.	Convierta 4 yardas a pulgadas. Para convertir de yardas a pulgadas se utiliza un factor de conversión de unidades que introduzca las unidades de pulgadas y se eliminan las unidades de yardas. Dado que hay 36 pulgadas por yarda, se utilizará: $\frac{36 \text{ pulg.}}{1 \text{ yd}}$ ← Esta es la unidad que se desea introducir. ← Esta es la unidad que se desea eliminar (la unidad original). Para desarrollar la conversión, se multiplica. $4 \text{ yd} = \frac{4 \text{ yd}}{1} \cdot \frac{\mathbf{36 \text{ pulg.}}}{\mathbf{1 \text{ yd}}}$ Escriba las 4 yd como una fracción. Después multiplique por una forma de 1: $\frac{36 \text{ pulg.}}{1 \text{ yd}}$. $= \frac{4 \cancel{\text{yd}}}{1} \cdot \frac{36 \text{ pulg.}}{1 \cancel{\text{yd}}}$ Elimine las unidades comunes de yardas del numerador y el denominador. Las unidades de pulgadas permanecen. $= 4 \cdot 36 \text{ pulg.}$ Simplifique. $= 144 \text{ pulg.}$ Realice la multiplicación. Por tanto, 4 yardas = 144 pulgadas.
El sistema de medición estadounidense utiliza las unidades **onza, libra** y **tonelada** para medir el **peso.**	1 lb = 16 oz 1 ton = 2,000 lb
En la página 447 se proporciona una lista de los factores de conversión de unidades para las unidades de peso estadounidenses.	Convierta 9,000 libras a toneladas. Para convertir de libras a toneladas se selecciona un factor de conversión que introduzca las unidades de toneladas y elimine las unidades de libras. Dado que hay 1 tonelada por cada 2,000 libras, se utilizará: $\frac{1 \text{ ton}}{2{,}000 \text{ lb}}$ ← Esta es la unidad que se desea introducir. ← Esta es la unidad que se desea eliminar (la unidad original).

Para desarrollar la conversión, se multiplica.

$$9{,}000 \text{ lb} = \frac{9{,}000 \text{ lb}}{1} \cdot \frac{\mathbf{1 \text{ ton}}}{\mathbf{2{,}000 \text{ lb}}}$$

Escriba las 9,000 lb como una fracción. Después multiplique por una forma de 1: $\frac{1 \text{ ton}}{2{,}000 \text{ lb}}$.

$$= \frac{9{,}000 \cancel{\text{lb}}^{1}}{1} \cdot \frac{1 \text{ ton}}{2{,}000 \cancel{\text{lb}}_{1}}$$

Elimine las unidades comunes de libras del numerador y el denominador. Las unidades de toneladas permanecen.

$$= \frac{9{,}000}{2{,}000} \text{ ton}$$

Multiplique las fracciones.

Hay dos maneras de completar la solución. Primero, se puede eliminar cualquier factor común del numerador y el denominador para simplificar la fracción. Después se puede escribir el resultado como un número mixto.

$$\frac{9{,}000}{2{,}000} \text{ tons} = \frac{9 \cdot \cancel{1{,}000}^{1}}{2 \cdot \cancel{1{,}000}_{1}} \text{ tons} = \frac{9}{2} \text{ tons} = 4\frac{1}{2} \text{ tons}$$

Un segundo método es dividir el numerador entre el denominador y expresar el resultado como un decimal.

$$\frac{9{,}000}{2{,}000} \text{ tons} = 4.5 \text{ tons}$$

Por tanto, 9,000 libras es igual a $4\frac{1}{2}$ tons (o 4.5 toneladas).

El sistema de medición estadounidense utiliza las unidades **onza, taza, pinta, cuarto de galón** y **galón** para medir la **capacidad.**

1 c = 8 fl oz 1 pt = 2 c
1 qt = 2 pt 1 gal = 4 qt

En la página 449 se proporciona una lista de los factores de conversión de unidades para las unidades de capacidad estadounidenses.

Algunas conversiones requieren el uso de **dos** (o más) **factores de conversión de unidades.**

Convierta 5 galones a pintas.

No hay un factor de conversión de unidades sencillo que convierta de galones a pintas. Se deben utilizar dos factores de conversión de unidades.

Dado que hay 4 cuartos de galón en un galón se pueden convertir los 5 galones a cuartos de galón multiplicándolos por el factor de conversión de unidades $\frac{4 \text{ qt}}{1 \text{ gal}}$. Dado que hay 2 pintas por cuarto de galón, se puede convertir ese resultado a pintas multiplicándolo por el factor de conversión de unidades $\frac{2 \text{ pt}}{1 \text{ qt}}$.

$$5 \text{ gal} = \frac{5 \text{ gal}}{1} \cdot \frac{\mathbf{4 \text{ qt}}}{\mathbf{1 \text{ gal}}} \cdot \frac{\mathbf{2 \text{ pt}}}{\mathbf{1 \text{ qt}}}$$

$$= \frac{5 \cancel{\text{gal}}}{1} \cdot \frac{4 \cancel{\text{qt}}}{1 \cancel{\text{gal}}} \cdot \frac{2 \text{ pt}}{1 \cancel{\text{qt}}}$$

Elimine las unidades comunes de galones y cuartos de galón en el numerador y el denominador.
Las unidades de pintas permanecen.

$$= 40 \text{ pt}$$

Realice la multiplicación: $5 \cdot 4 \cdot 2 = 40$.

Por tanto, 5 galones = 40 pintas.

El sistema de medición estadounidense (y el métrico) utiliza las unidades **segundos, minutos, horas** y **días** para medir el tiempo.

1 min = 60 seg 1 hr = 60 min 1 día = 24 hr

En la página 450 se proporciona una lista de los factores de conversión de unidades para las unidades del tiempo.

Convierta 240 minutos a horas.

Para convertir de minutos a horas, se selecciona un factor de conversión que introduzca las unidades de horas y elimine las unidades de minutos. Dado que hay 1 hora por cada 60 minutos, se utilizará:

$$\frac{1\ \text{hr}}{60\ \text{min}}$$

← Esta es la unidad que se desea introducir.
← Esta es la unidad que se desea eliminar (la unidad original).

Para desarrollar la conversión, se multiplica.

$$240\ \text{min} = \frac{240\ \text{min}}{1} \cdot \frac{\mathbf{1\ hr}}{\mathbf{60\ min}}$$

Escriba los 240 min como una fracción. Después multiplique por una forma de 1: $\frac{1\ \text{hr}}{60\ \text{min}}$.

$$= \frac{240\ \cancel{\text{min}}}{1} \cdot \frac{1\ \text{hr}}{60\ \cancel{\text{min}}}$$

Elimine las unidades comunes de minutos del numerador y el denominador. Las unidades de horas permanecen.

$$= \frac{240}{60}\ \text{hr}$$

Multiplique las fracciones.

$$= 4\ \text{hr}$$

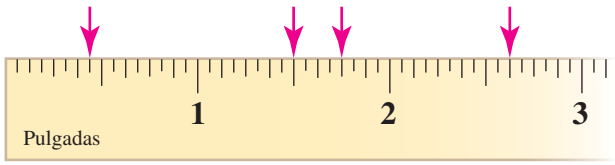
Realice la división.

Por tanto, 240 minutos es igual a 4 horas.

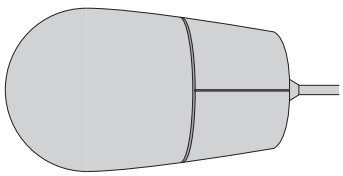
EJERCICIOS DE REPASO

47. a. Refiérase a la regla de abajo. ¿En cuántas partes iguales está dividida cada pulgada?

b. Determine a cuáles mediciones en la regla apuntan las flechas.



48. Use una regla para medir la longitud del ratón para computadora.



49. Escriba dos factores de conversión de unidades utilizando el hecho de que 1 milla = 5,280 pies.

50. Considere la solución mostrada abajo.

$$\frac{100\ \text{min}}{1} \cdot \frac{60\ \text{seg}}{1\ \text{min}}$$

a. ¿Qué unidades pueden eliminarse?

b. ¿Qué unidades permanecen?

Desarrolle cada conversión.

51. 5 yardas a pies

52. 6 yardas a pulgadas

53. 66 pulgadas a pies

54. 9,240 pies a millas

55. $4\frac{1}{2}$ pies a pulgadas

56. 1 milla a yardas

57. 32 onzas a libras

58. 17.2 libras a onzas

59. 3 toneladas a onzas

60. 4,500 libras a toneladas

61. 5 pintas a onzas líquidas

62. 8 tazas a galones

63. 17 cuartos de galón a tazas

64. 176 onzas líquidas a cuartos de galón

65. 5 galones a pintas

66. 3.5 galones a tazas

67. 20 minutos a segundos

68. 900 segundos a minutos

69. 200 horas a días

70. 6 horas a minutos

71. 4.5 días a horas

72. 1 día a segundos

73. Convierta 210 yardas a millas. Dé la respuesta exacta y una aproximación decimal, redondeada a la centésima más cercana.

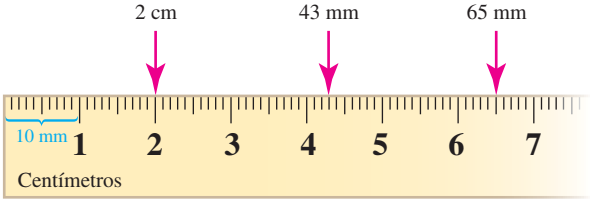
74. TRANSPORTE Los camiones transportadores de concreto grandes pueden transportar aproximadamente 40,500 libras de concreto. Exprese este peso en toneladas.

Imagen copyright Elemental Imaging 2009. Utilizada bajo licencia de Shutterstock.com

75. RASCACIELOS La Torre Sears en Chicago tiene 1,454 pies de alto. Exprese esta altura en yardas.

76. ENCORCHADO Una botella doble es una botella de vino de 2 cuartos de galón. ¿Cuántas botellas dobles se necesitarán para contener 50 galones de vino?

SECCIÓN 5.4 Unidades de medición métricas

DEFINICIONES Y CONCEPTOS	EJEMPLOS
La unidad métrica de medición básica es el **metro,** el cual se abrevia como **m.** Se crean unidades métricas más largas o más cortas añadiendo **prefijos** a la unidad básica, el metro.	*kilo* significa millares *hecto* significa centenas *deca* significa decenas *deci* significa décimas *centi* significa centésimas *mili* significa milésimas
Las unidades métricas de longitud comunes son **kilómetro, hectómetro, decámetro, decímetro, centímetro** y **milímetro.** Con frecuencia se utilizan abreviaciones para escribir estas unidades. Vea la tabla en la página 456.	1 km = 1,000 m 1 hm = 100 m 1 dam = 10 m 1 m = 10 dm 1 m = 100 cm 1 m = 1,000 mm
Puede utilizarse una **regla métrica** para medir longitudes. En la mayoría de las reglas métricas, cada centímetro está dividido en 10 milímetros.	
Para convertir de una unidad métrica de longitud a otra, se utilizan **factores de conversión de unidades.**	Convierta 4 metros a centímetros. Para convertir de metros a centímetros, se selecciona un factor de conversión de unidades que introduzca las unidades de centímetros y elimine las unidades de metros. Dado que hay 100 centímetros por metro, se utilizará: $\frac{100\text{ cm}}{1\text{ m}}$ ← Esta es la unidad que se desea introducir. ← Esta es la unidad que se desea eliminar (la unidad original). Para desarrollar la conversión, se multiplica. $4\text{ m} = \frac{4\text{ m}}{1} \cdot \frac{\mathbf{100\text{ cm}}}{\mathbf{1\text{ m}}}$ Escriba los 4 m como una fracción. Después multiplique por una forma de 1: $\frac{100\text{ cm}}{1\text{ m}}$. $= \frac{4\ \cancel{\text{m}}}{1} \cdot \frac{100\text{ cm}}{1\ \cancel{\text{m}}}$ Elimine las unidades comunes de metros del numerador y el denominador. Las unidades de cm permanecen. $= 400\text{ cm}$ Multiplique las fracciones y simplifique. Por tanto, 4 metros = 400 centímetros.

La **masa** de un objeto es una medida de la cantidad de materia en ese objeto.

Las unidades métricas de masa comunes son **kilogramo, hectogramo, decagramo, decigramo, centigramo** y **miligramo.** Con frecuencia se utilizan abreviaciones para escribir estas unidades. Vea la tabla en la página 461.

1 kg = 1,000 g
1 hg = 100 g
1 dag = 10 g
1 g = 10 dg
1 g = 100 cg
1 g = 1,000 mg

La conversión de una unidad métrica a otra puede realizarse utilizando **factores de conversión de unidades o** una **tabla de conversiones.**

En una tabla de conversiones las unidades están listadas de mayor a menor, leyendo de izquierda a derecha. Se **cuentan las posiciones** y se observa la **dirección** a medida que se mueve de las unidades originales a las unidades de conversión.

Convierta 820 gramos a kilogramos.

Para utilizar la tabla de conversiones localice las unidades originales de gramos y muévase a las unidades de conversión de kilogramos.

Unidad más grande							Unidad más pequeña
kg	hg	dag	**g**	dg	cg	mg	

Para pasar de gramos a kilogramos se debe mover 3 posiciones a la izquierda.

Si se escriben los 820 gramos como 820.0 gramos, se pueden convertir a kilogramos moviendo el punto decimal 3 posiciones a la izquierda.

820.0 gramos = 0.820 0 kilogramos = 0.82 kilogramos

El método del factor de conversión de unidades da el mismo resultado:

$$820\text{ g} = \frac{820\text{ g}}{1} \cdot \frac{\mathbf{1\text{ kg}}}{\mathbf{1{,}000\text{ g}}}$$

$$= \frac{820}{1{,}000}\text{kg}$$

$$= 0.82\text{ kg}$$

Por tanto, 820 gramos = 0.82 kilogramos.

Las unidades métricas de capacidad comunes son **kilolitro, hectolitro, decalitro, decilitro, centilitro** y **mililitro.** Con frecuencia se utilizan abreviaciones para escribir estas unidades. Vea la tabla en la página 464.

1 kL = 1,000 L
1 hL = 100 L
1 daL = 10 L
1 L = 10 dL
1 L = 100 cL
1 L = 1,000 mL

La conversión de una unidad métrica a otra puede realizarse utilizando **factores de conversión de unidades** o una **tabla de conversiones.**

Convierta 0.7 kilolitros a mililitros.

Para utilizar una tabla de conversiones localice las unidades originales de kilolitros y muévase a las unidades de conversión de mililitros.

kL	hL	daL	L	dL	cL	**mL**

Para pasar de kilolitros a mililitros, se debe mover 6 posiciones a la derecha.

Se puede convertir a mililitros moviendo el punto decimal 6 posiciones a la derecha.

0.7 kilolitros = 0 700000. mililitros = 700,000 mililitros

El método del factor de conversión de unidades da el mismo resultado:

$$0.7\ \text{kL} = \frac{0.7\ \text{kL}}{1} \cdot \frac{1{,}000\ \text{L}}{1\ \text{kL}} \cdot \frac{1{,}000\ \text{mL}}{1\ \text{L}}$$
$$= 0.7 \cdot 1{,}000 \cdot 1{,}000\ \text{mL}$$
$$= 700{,}000\ \text{mL}$$

Por tanto, 0.7 kilolitros = 700,000 mililitros.

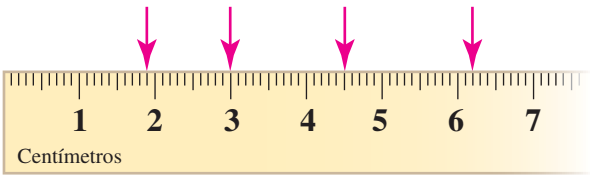
Otra unidad métrica de capacidad es el **centímetro cúbico,** escrito como cm^3, o, simplemente como cc. Las unidades de centímetros cúbicos se utilizan con frecuencia en la medicina.

1 mililitro = 1 cm^3 = 1 cc
5 mililitros = 5 cm^3 = 5 cc
0.6 mililitros = 0.6 cm^3 = 0.6 cc

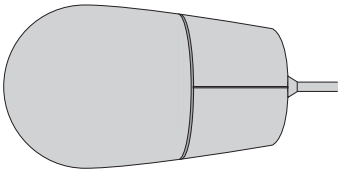
EJERCICIOS DE REPASO

77. a. Refiérase a la regla métrica mostrada abajo. ¿En cuántas partes iguales está dividido cada centímetro? ¿Cuál es la longitud de una de esas partes?

b. Determine a cuáles mediciones en la regla apuntan las flechas.



78. Use una regla métrica para medir la longitud del ratón para computadora al centímetro más cercano.



79. Escriba dos factores de conversión de unidades utilizando el hecho proporcionado.

a. 1 km = 1,000 m

b. 1 g = 100 cg

80. Use la tabla para determinar cuántas posiciones decimales y en qué dirección mover el punto decimal cuando se convierte de centímetros a kilómetros.

km	hm	dam	m	dm	cm	mm

Desarrolle cada conversión.

81. 475 centímetros a metros

82. 8 metros a milímetros

83. 165.7 kilómetros a metros

84. 6,789 centímetros a decímetros

85. 5,000 centigramos a kilogramos

86. 800 centigramos a gramos

87. 5,425 gramos a kilogramos

88. 5,425 gramos a miligramos

89. 150 centilitros a litros

90. 3,250 litros a kilolitros

91. 400 mililitros a centilitros

92. 1 hectolitro a decilitros

93. EL CEREBRO El cerebro humano de un adulto pesa alrededor de 1,350 g. Convierta el peso a kilogramos.

94. TUBOS DE ENSAYO Un anaquel sostiene *una docena* de tubos de ensayo de 20 mL. Encuentre la capacidad total de los tubos de ensayo en el anaquel en litros.

95. TYLENOL Una botella de Tylenol extra fuerte contiene 100 cápsulas de 500 miligramos cada una. ¿Cuántos gramos de Tylenol hay en la botella?

96. CIRUGÍA Se está administrando de manera intravenosa una disolución de dextrosa a un paciente como se muestra a la derecha. ¿Cuántos mililitros de la disolución contiene la bolsa de la IV?

SECCIÓN 5.5 Conversión entre unidades estadounidenses y métricas

DEFINICIONES Y CONCEPTOS

Se **convierte entre unidades de longitud estadounidenses y métricas** utilizando los hechos a la derecha. En todos los casos excepto uno, las conversiones son aproximaciones redondeadas.

Estadounidense a métrico	Métrico a estadounidense
1 pulg. = 2.54 cm	1 cm ≈ 0.39 pulg.
1 pie ≈ 0.30 m	1 m ≈ 3.28 pies
1 yd ≈ 0.91 m	1 m ≈ 1.09 yd
1 mi ≈ 1.61 km	1 km ≈ 0.62 mi

Pueden formarse **factores de conversión de unidades** a partir de los hechos en las tablas a la derecha para realizar conversiones específicas entre las unidades de longitud estadounidenses y métricas.

EJEMPLOS

Convierta 15 pulgadas a centímetros.

Para convertir de pulgadas a centímetros se selecciona un factor de conversión que introduzca las unidades de centímetros y elimine las unidades de pulgadas. Dado que hay 2.54 centímetros por cada pulgada, se utilizará:

$$\frac{2.54\ \text{cm}}{1\ \text{pulg.}}$$

← Esta es la unidad que se desea introducir.
← Esta es la unidad que se desea eliminar (la unidad original).

Para desarrollar la conversión, se multiplica.

$$15\ \text{pulg.} = \frac{15\ \text{pulg.}}{1} \cdot \frac{\mathbf{2.54\ cm}}{\mathbf{1\ pulg.}}$$

Escriba las 15 pulg. como una fracción. Después multiplique por una forma de 1: $\frac{2.54\ \text{cm}}{1\ \text{pulg.}}$.

$$= \frac{15\ \cancel{\text{pulg.}}}{1} \cdot \frac{2.54\ \text{cm}}{1\ \cancel{\text{pulg.}}}$$

Elimine las unidades comunes de pulgadas del numerador y el denominador. Las unidades de cm permanecen.

$$= 15 \cdot 2.54\ \text{cm}$$

Simplifique.

$$= 38.1\ \text{cm}$$

Realice la multiplicación.

Por tanto, 15 pulgadas = 38.1 centímetros.

Se **convierte entre unidades de masa (peso) estadounidenses y métricas** utilizando los hechos a la derecha. Las conversiones son aproximaciones redondeadas.

Estadounidense a métrico	Métrico a estadounidense
1 oz ≈ 28.35 g	1 g ≈ 0.035 oz
1 lb ≈ 0.45 kg	1 kg ≈ 2.20 lb

Pueden formarse **factores de conversión de unidades** a partir de los hechos en las tablas a la derecha para realizar conversiones específicas entre las unidades de masa (peso) estadounidenses y métricas.

Convierta 6 kilogramos a onzas.

No hay un factor de conversión de unidades sencillo que convierta de kilogramos a onzas. Se debe utilizar **dos factores de conversión de unidades.** Uno para convertir de kilogramos a gramos y otro para convertir ese resultado a onzas.

$$6\ \text{kg} \approx \frac{6\ \text{kg}}{1} \cdot \frac{\mathbf{1{,}000\ g}}{\mathbf{1\ kg}} \cdot \frac{\mathbf{0.035\ oz}}{\mathbf{1\ g}}$$

$$\approx \frac{6\ \cancel{\text{kg}}}{1} \cdot \frac{1{,}000\ \cancel{\text{g}}}{1\ \cancel{\text{kg}}} \cdot \frac{0.035\ \text{oz}}{1\ \cancel{\text{g}}}$$

Elimine las unidades comunes de kilogramos y gramos en el numerador y el denominador. Las unidades de oz permanecen.

$$\approx 6 \cdot 1{,}000 \cdot 0.035\ \text{oz}$$

Simplifique.

$$\approx 6 \cdot 35\ \text{oz}$$

Multiplique los últimos dos factores: 1,000 · 0.035 = 35.

$$\approx 210\ \text{oz}$$

Realice la multiplicación.

Por tanto, 6 kilogramos ≈ 210 onzas.

Se **convierte entre unidades de capacidad estadounidenses y métricas** utilizando los hechos a la derecha. Las conversiones son aproximaciones redondeadas.

Estadounidense a métrico	Métrico a estadounidense
1 fl oz ≈ 29.57 mL	1 L ≈ 33.81 fl oz
1 pt ≈ 0.47 L	1 L ≈ 2.11 pt
1 qt ≈ 0.95 L	1 L ≈ 1.06 qt
1 gal ≈ 3.79 L	1 L ≈ 0.264 gal

Pueden formarse **factores de conversión de unidades** a partir de los hechos en las tablas a la derecha para realizar conversiones específicas entre las unidades de capacidad estadounidenses y métricas.

Convierta 5 onzas líquidas a mililitros. Redondee a la décima más cercana.

Para convertir de onzas líquidas a mililitros se selecciona un factor de conversión de unidades que introduzca las unidades de mililitros y elimine las unidades de onzas líquidas. Dado que hay 29.57 mL por cada onza líquida, se utilizará:

$$\frac{29.57\ \text{mL}}{1\ \text{fl oz}}$$

← Esta es la unidad que se desea introducir.
← Esta es la unidad que se desea eliminar (la unidad original).

Para desarrollar la conversión, se multiplica.

$$5\ \text{fl oz} \approx \frac{5\ \text{fl oz}}{1} \cdot \frac{\mathbf{29.57\ mL}}{\mathbf{1\ fl\ oz}}$$

Escriba las 5 oz lq como una fracción. Después multiplique por una forma de 1: $\frac{29.57\ \text{mL}}{1\ \text{fl oz}}$.

$$\approx \frac{5\ \cancel{\text{fl oz}}}{1} \cdot \frac{\mathbf{29.57\ mL}}{\mathbf{1\ \cancel{fl\ oz}}}$$

Elimine las unidades comunes de onzas líquidas del numerador y el denominador. Las unidades de mL permanecen.

$$\approx 5 \cdot 29.57\ \text{mL}$$

Simplifique.

$$\approx 147.85\ \text{mL}$$

Realice la multiplicación.

$$\approx 147.9\ \text{mL}$$

Redondee a la décima más cercana.

Por tanto, 5 onzas líquidas ≈ 147.9 mililitros.

En el sistema estadounidense, la temperatura se mide utilizando **grados Fahrenheit** (°F). En el sistema métrico, la temperatura se mide utilizando **grados Celsius** (°C)**.**

Si F es la temperatura en grados Fahrenheit y C es la temperatura correspondiente en grados Celsius, entonces

$$C = \frac{5}{9}(F - 32) \quad \text{y} \quad F = \frac{9}{5}C + 32$$

Convierta 92 °F a grados Celsius. Redondee a la décima de grado más cercana.

$$C = \frac{5}{9}(\boldsymbol{F} - 32)$$

Esta es la fórmula para encontrar grados Celsius.

$$= \frac{5}{9}(\mathbf{92} - 32)$$

Sustituya el 92 para F.

$$= \frac{5}{9}(60)$$

Realice primero la resta dentro de los paréntesis.

$$= \frac{5}{9}\left(\frac{60}{1}\right)$$

Escriba el 60 como una fracción.

$$= \frac{300}{9}$$

Multiplique los numeradores: 5 · 60 = 300. Multiplique los denominadores.

$$= 33.333\ldots$$

Realice la división.

$$\approx 33.3$$

Redondee a la décima más cercana.

Por tanto, 92 °F ≈ 33.3 °C.

EJERCICIOS DE REPASO

97. NATACIÓN Las piscinas para natación de tamaño olímpico son de 50 metros de largo. Exprese esta distancia en pies.

98. EDIFICIOS DE GRAN ALTURA La Torre Sears tiene 443 metros de alto y el edificio Empire State tiene 1,250 pies de alto. ¿Cuál edificio es el más alto?

99. COLONOS DEL OESTE El camino de Oregón fue una ruta terrestre que utilizaron los pioneros desde la década de 1840 a la de 1870 para alcanzar el territorio de Oregón. Se extiende 1,930 millas desde Independence, Missouri, a Oregón City, Oregón. Encuentre esta distancia al kilómetro más cercano.

100. AIR JORDAN Michael Jordan mide 78 pulgadas de alto (6 pies, 6 pulgadas). Exprese esta altura en centímetros. Redondee al centímetro más cercano.

Desarrolle cada conversión. Dado que la mayoría de las conversiones son aproximadas, las respuestas pueden variar ligeramente dependiendo del método empleado.

101. 30 onzas a gramos

102. 15 kilogramos a libras

103. 50 libras a gramos

104. 2,000 libras a kilogramos

105. OSOS POLARES Al nacer, un cachorro de oso polar pesa menos que los bebés humanos —alrededor de 910 gramos—. Convierta esto a libras.

106. AGUA EMBOTELLADA El agua embotellada LaCroix puede adquirirse en botellas que contienen 17 onzas líquidas. El agua Mountain Valley puede adquirirse en botellas de medio litro. ¿Cuál botella contiene más agua?

107. PETRÓLEO CRUDO Hay 42 galones en un barril de petróleo crudo. ¿A cuántos litros de petróleo crudo equivale?

108. Convierta 105 °C a grados Fahrenheit.

109. Convierta 77 °F a grados Celsius.

110. RECREACIÓN ¿Cuál temperatura es apropiada para nadar: 10 °C, 30 °C, 50 °C o 70 °C?

CAPÍTULO 5 EXAMEN

1. Complete los espacios.

a. Una _____ es el cociente de dos números o el cociente de dos cantidades que tienen las mismas unidades.

b. Una _____ es el cociente de dos cantidades que tienen unidades diferentes.

c. Una _____ enuncia que dos razones (o tasas) son iguales.

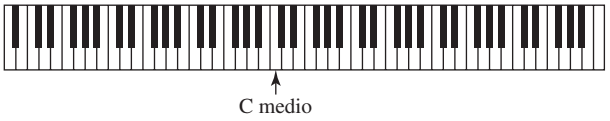
d. Los productos _____ para la proporción $\frac{3}{8} = \frac{6}{16}$ son $3 \cdot 16$ y $8 \cdot 6$.

e. *Deci* significa _____, *centi* significa _____, y *mili* significa _____.

f. El metro, el gramo y el litro son las unidades de medición básicas en el sistema _____.

g. En el sistema estadounidense las temperaturas miden en grados. _____. En el sistema métrico, las temperaturas se miden en _____.

2. PIANOS El teclado de un piano está conformado por un total de 88 teclas, como se muestra abajo. ¿Cuál es la razón del número de teclas negras a las teclas blancas?



Escriba cada razón como una fracción en la forma más simple.

3. 6 pies a 8 pies

4. 8 onzas a 3 libras

5. 0.26 : 0.65

6. $3\frac{1}{3}$ a $3\frac{8}{9}$

7. Escriba la tasa 54 pies en 36 segundos como una fracción en la forma más simple.

8. COMPARACIÓN AL COMPRAR Una lata de café de dos libras se vende por $3.38 y una lata de 5 libras de la misma marca de café se vende por $8.50. ¿Cuál es la mejor compra?

9. COSTOS DE SERVICIOS PÚBLICOS Un hogar utiliza 675 kilowatts-hora de electricidad durante 30 días. Encuentre la tasa del uso de la electricidad en kilowatts-hora por día.

10. Escriba el siguiente enunciado como una proporción: 15 anuncios a 50 millas como 3 anuncios a 10 millas.

11. Determine si cada proporción es verdadera.

a. $\frac{25}{33} = \frac{2}{3}$ **b.** $\frac{2.2}{3.5} = \frac{1.76}{2.8}$

12. ¿Los números 7, 15 y 35, 75 son proporcionales?

Resuelva cada proporción.

13. $\frac{x}{3} = \frac{35}{7}$ **14.** $\frac{15.3}{x} = \frac{3}{12.4}$

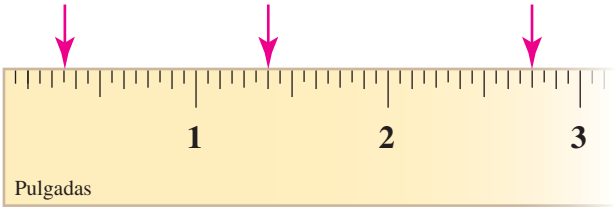
15. $\frac{2\frac{2}{9}}{\frac{4}{3}} = \frac{x}{1\frac{1}{2}}$ **16.** $\frac{\frac{25}{1}}{\frac{1}{10}} = \frac{50}{x}$

17. COMPRAS Si 13 onzas de té cuestan $2.79, ¿cuánto esperaría pagar por 16 onzas de té?

18. REPOSTERÍA Una receta requiere $1\frac{2}{3}$ tazas de azúcar y 5 tazas de harina. ¿Cuánta azúcar debe utilizarse con 6 tazas de harina?

19. **a.** Refiérase a la regla de abajo. ¿En cuántas partes iguales está dividida cada pulgada?

b. Determine a cuáles mediciones en la regla apuntan las flechas.



20. Complete los espacios. En general, un factor de conversión de unidades es una fracción con la siguiente forma:

$$\frac{\text{Unidad que se desea}}{\text{Unidad que se desea}}$$

← Numerador
← Denominador

21. Convierta 180 pulgadas a pies.

22. HERRAMIENTAS Si una cinta para medir de 25 pies se extiende por completo, ¿cuántas yardas se extenderá? Escriba su respuesta como un número mixto.

23. Convierta $10\frac{3}{4}$ libras a onzas.

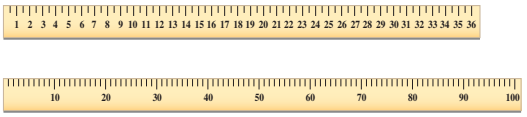
24. AUTOMÓVILES Un automóvil pesa 1.6 toneladas. Encuentre su peso en libras.

25. CONTENEDORES ¿Cuántas onzas líquidas hay en un cartón de leche de 1 galón?

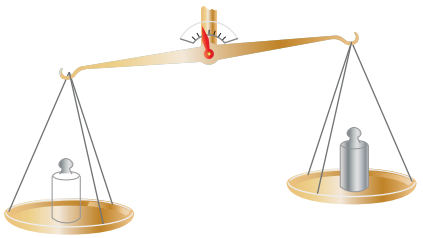
26. LITERATURA Un excelente trabajo de los inicios de la ciencia ficción es el libro *Around the World in 80 Days* por Julio Verne (1828–1905). Convierta 80 días a minutos.

27. **a.** Abajo se muestran un cuarto de galón y 1 litro de ponche de frutas. ¿Cuál es el cartón de 1 litro: el de la izquierda o el de la derecha?

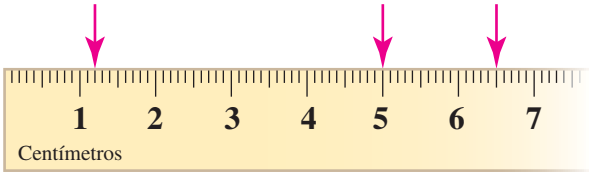
b. Las figuras abajo muestran las longitudes relativas de una regla para medir de 1 yarda con una regla para medir de un metro. ¿Cuál representa a la regla para medir de un metro: la más larga o la más corta?



c. En una balanza se colocan pesos de una onza y un gramo, como se muestra abajo. ¿En qué lado está el gramo: en el lado izquierdo o en el derecho?



28. Determine a cuáles mediciones en la regla métrica mostrada abajo apuntan las flechas.



29. PATINAJE DE VELOCIDAD La estadounidense Bonnie Blair ganó las medallas de oro en las competiciones de patinaje de velocidad de 500 metros femeniles en los Juegos olímpicos de invierno de 1988, 1992 y 1994. Convierta la longitud de la carrera a kilómetros.

30. ¿Cuántos centímetros hay en 5 metros?

31. Convierta 8,000 centigramos a kilogramos.

32. Convierta 70 litros a mililitros.

33. RECETAS MÉDICAS Una botella contiene 50 pastillas, cada una contiene 150 mg de medicina. ¿Cuántos gramos de medicina contiene la botella?

34. ATLETISMO ¿Cuál es la distancia más larga: una carrera de 100 yardas o una carrera de 80 metros?

35. PESO CORPORAL ¿Cuál persona es más pesada: Jim, que pesa 160 libras, o Ricardo, que pesa 71 kilogramos?

36. Convierta 810 mililitros a cuartos. Redondee a la décima más cercana.

37. Convierta 16.5 pulgadas a centímetros. Redondee al centímetro más cercano.

38. COCINAR CARNE La USDA recomienda que el pavo debe cocerse a una temperatura de 83 °C. Cambie ésta a grados Fahrenheit. Para estar seguro, *redondee hacia arriba* al siguiente grado. (*Sugerencia:* $F = \frac{9}{5}C + 32$.)

39. ¿Qué es un dibujo a escala? Dé un ejemplo.

40. Explique los beneficios del sistema de medición métrico en comparación con el sistema estadounidense.

CAPÍTULOS 1–5 REPASO ACUMULATIVO

1. Escriba el 5,764,502:

a. en palabras

b. en notación expandida [Sección 1.1]

2. RÉCORDS EN EL BASQUETBOL El 13 de diciembre de 1983, los Detroit Pistons y los Denver Nuggets jugaron en el partido con la anotación más alta en la historia de la NBA. Vea el resumen del juego abajo. [Sección 1.2]

a. ¿Cuál fue el resultado final?

b. ¿Qué equipo ganó?

c. ¿Cuál fue el número total de puntos anotados en el juego?

	Cuarto				Tiempo extra			
	1	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**Total**
Detroit	38	36	34	37	14	12	15	
Denver	34	40	39	32	14	12	13	

(*Fuente*: ESPN.com)

3. Reste: $70{,}006 - 348$ [Sección 1.3]

4. Multiplique: $504 \cdot 729$ [Sección 1.4]

5. Divida: $37\overline{)743}$ [Sección 1.5]

6. DESCUENTO EN HOSPEDAJE Un hotel está ofreciendo, por sólo $109 la noche, habitaciones que por lo general cuestan $189 por noche . ¿Cuántos dólares ahorraría un turista si permanece en una habitación una semana? [Sección 1.6]

7. Liste los factores del 30, de menor a mayor. [Sección 1.7]

8. Encuentre la factorización de primos del 360. [Sección 1.7]

9. Encuentre el mcm y mfc del 20 y el 28. [Sección 1.8]

10. Evalúe: $81 + 9\left[7^2 - 7(11 - 4)\right]$ [Sección 1.9]

11. Coloque un símbolo $<$ o $>$ en el recuadro para formar un enunciado verdadero:
$-(-10) \square |-11|$ [Sección 2.1]

12. Evalúe: $(-12 + 6) + (-6 + 8)$ [Sección 2.2]

13. GOLF Tiger Woods ganó el 100o Abierto de E.U. en junio del 2000 por el mayor margen en la historia de ese torneo. Hizo 12 bajo par (-12), y el segundo lugar, Miguel Ángel Jiménez, hizo 3 sobre par $(+3)$. ¿Cuál fue el margen de victoria de Tiger? [Sección 2.3]

14. Evalúe: -3^2 y $(-3)^2$ [Sección 2.4]

15. Evalúe cada expresión, si es posible. [Sección 2.5]

a. $0 + (-8)$ **b.** $\dfrac{-8}{0}$

c. $0 - |-8|$ **d.** $\dfrac{0}{-8}$

e. $0 - (-8)$ **f.** $0(-8)$

16. Evalúe: $\dfrac{3 + 3\left[5(-6) - (1 - 10)\right]}{-1 + (-1)}$ [Sección 2.6]

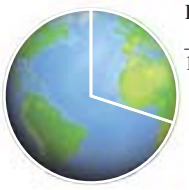
17. Estime el valor de la siguiente expresión redondeando cada número a la centena más cercana. [Sección 2.6]

$$-3{,}887 + (-5{,}806) + 4{,}701$$

18. Simplifique: $-\dfrac{16}{20}$ [Sección 3.1]

19. Exprese $\frac{9}{10}$ como una fracción equivalente con un denominador de 60. [Sección 3.1]

20. GEOGRAFÍA La Tierra tiene un área de superficie de alrededor de 197,000,000 millas cuadradas. Use la información en la gráfica circular abajo para determinar el número de millas cuadradas de la superficie de la Tierra cubiertas por tierra. (Fuente: scienceclarified.com) [Sección 3.2]



La tierra cubre alrededor de $\frac{3}{10}$ de la superficie de la Tierra

El agua cubre alrededor de $\frac{7}{10}$ de la superficie de la Tierra

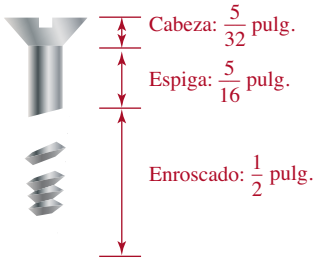
21. ¿Cuál es la fórmula para el área de un triángulo? [Sección 3.2]

22. Divida: $-\dfrac{7}{8} \div \dfrac{7}{8}$ [Sección 3.3]

23. Reste: $\dfrac{11}{12} - \dfrac{7}{15}$ [Sección 3.4]

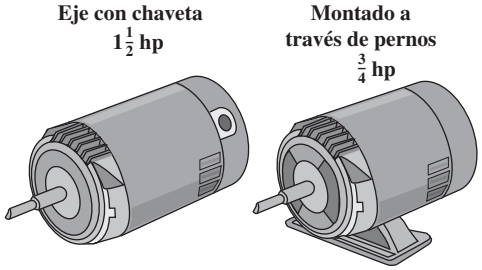
24. Determine cuál fracción es más grande: $\dfrac{19}{15}$ o $\dfrac{5}{4}$ [Sección 3.4]

25. FERRETERÍA Encuentre la longitud del tornillo para madera mostrado abajo. [Sección 3.4]



26. Multiplique: $-15\frac{1}{3}\left(-\frac{9}{20}\right)$ [Sección 3.5]

27. MOTORES ¿Cuál es la diferencia en caballos de fuerza (hp) entre los dos motores mostrados? [Sección 3.6]

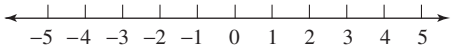


28. Simplifique: $\dfrac{4-\frac{3}{4}}{-1\frac{7}{8}}$ [Sección 3.7]

29. Coloque un símbolo $<$ o $>$ en el recuadro para formar un enunciado verdadero. [Sección 4.1]

$-64.22 \square -64.238$

30. Grafique $-1\frac{3}{4}, 2.25, -0.5, \frac{11}{8}, -3.2$ y $\sqrt{9}$ en una recta numérica. [Sección 4.1]



31. Sume: $-20.04 + 2.4$ [Sección 4.2]

32. Reste: $-8.08 - 15.3$ [Sección 4.2]

33. Multiplique: $2.5 \cdot 100$ [Sección 4.3]

34. ACUARIOS Un galón de agua pesa 8.33 libras. ¿Cuál es el peso del agua en un acuario que contiene 55 galones de agua? [Sección 4.3]

35. Divida: $2.5 \div 100$ [Sección 4.4]

36. Evalúe la fórmula $t = \frac{d}{r}$ para $d = 107.95$ y $r = 8.5$. [Sección 4.4]

37. Escriba $\frac{1}{12}$ como un decimal. [Sección 4.5]

38. CARNES Un comprador adquiere $\frac{3}{4}$ de libra de carne de res a la barbacoa a \$8.60 la libra y $\frac{2}{3}$ de libra de jamón, vendido por \$5.25 la libra. Encuentre el costo total de estos productos. [Sección 4.5]

39. Evalúe: $3\sqrt{25} + 4\sqrt{4}$ [Sección 4.6]

40. Exprese la frase "3 pulgadas a 15 pulgadas" como una razón en la forma más simple. [Sección 5.1]

41. MATERIALES DE CONSTRUCCIÓN ¿Cuál es la mejor compra: un saco de cemento de 94 libras por \$4.48 o un saco de cemento de 100 libras por \$4.80? [Sección 5.1]

42. Determine si la proporción $\frac{25}{33} = \frac{12}{17}$ es verdadera o falsa. [Sección 5.2]

43. CAFEÍNA Hay 55 miligramos de cafeína en un Mountain Dew de 12 onzas. ¿Cuántos miligramos de cafeína hay en un vaso de Mountain Dew extra grande de 44 onzas? Redondee al miligramo más cercano. [Sección 5.2]

44. Resuelva la proporción: $\frac{x}{3} = \frac{35}{7}$ [Sección 5.2]

45. GUÍA DE SOBREVIVENCIA [Sección 5.3]

a. Una persona puede vivir sin comer alrededor de 40 días. ¿Cuántas horas es esto?

b. Una persona puede vivir sin agua alrededor de 3 días. ¿Cuántos minutos es eso?

c. Una persona puede vivir sin respirar oxígeno alrededor de 8 minutos. ¿Cuántos segundos es eso?

46. Convierta 40 onzas a libras. [Sección 5.3]

47. Convierta 2.4 metros a milímetros. [Sección 5.4]

48. Convierta 320 gramos a kilogramos. [Sección 5.4]

49. **a.** ¿Cuál contiene más: una botella de 2 litros o una botella de 1 galón? [Sección 5.5]

b. ¿Cuál es más larga: una regla para medir de un metro o una regla para medir de una yarda?

50. CINTURONES Un cinturón de piel hecho en México es de 92 centímetros de largo. Exprese la longitud del cinturón a la pulgada más cercana. [Sección 5.5]

6

Porcentaje

Ariel Skelley/Getty Images

6.1 Porcentajes, decimales y fracciones

6.2 Resolución de problemas de porcentaje utilizando ecuaciones y proporciones de porcentajes

6.3 Aplicaciones del porcentaje

6.4 Estimación con el porcentaje

6.5 Interés

Resumen y repaso

Examen

Repaso acumulativo

Carreras del campus

Ejecutivo de crédito

Los ejecutivos de crédito ayudan a las personas a solicitar préstamos. Los *ejecutivos de crédito comercial* trabajan con negocios, los *ejecutivos de crédito hipotecario* trabajan con personas que desean adquirir una casa o un bien raíz, y los *ejecutivos de crédito al consumidor* trabajan con personas que desean adquirir un bote, un automóvil o que necesitan un préstamo escolar. Los ejecutivos de crédito analizan el historial financiero de los solicitantes y con frecuencia utilizan fórmulas bancarias para determinar la posibilidad de otorgar un préstamo.

En el **Problema 43** del **Espacio para el estudio 6.5** verá cómo un ejecutivo de crédito calcula el interés a cobrarse sobre un préstamo.

CARGO LABORAL:
Ejecutivo de crédito

EDUCACIÓN: La mayoría posee una licenciatura en finanzas, economía o en un campo similar. Las clases de matemáticas y computación son una buena preparación para este trabajo.

PERSPECTIVA LABORAL: Se espera que las oportunidades de trabajo para los ejecutivos de crédito crezcan casi tan rápido como el promedio para todos los trabajos hasta el 2016.

INGRESOS ANUALES: En el 2009, el salario promedio para un ejecutivo de crédito al consumidor era de alrededor de $39,000 y el salario promedio para un ejecutivo de crédito comercial era de alrededor de $64,000.

PARA MÁS INFORMACIÓN:
www.bls.gov/k12/money03.htm

Objetivos

1. Explicar el significado del porcentaje.
2. Escribir porcentajes como fracciones.
3. Escribir porcentajes como decimales.
4. Escribir decimales como porcentajes.
5. Escribir fracciones como porcentajes.

SECCIÓN 6.1
Porcentajes, decimales y fracciones

Se ven porcentajes en todos lados, todos los días. Las tiendas los utilizan para anunciar descuentos, los fabricantes los utilizan para describir el contenido de sus productos y los bancos los utilizan para listar las tasas de intereses para préstamos y cuentas de ahorro. Los periódicos están llenos de información presentada en forma porcentual. En esta sección se introducen los porcentajes y se muestran cómo se relacionan las fracciones, decimales y porcentajes.

1 Explicar el significado del porcentaje

Un porcentaje indica el número de partes por centena. Puede pensar en un porcentaje como el *numerador* de una fracción (o razón) que tiene un denominador de 100.

Porcentaje

Porcentaje significa partes por centena.

El lenguaje de las matemáticas La palabra *porcentaje* está conformada por el prefijo *per,* que significa razón, y el sufijo *centaje,* que proviene del latín *centum,* que significa 100.

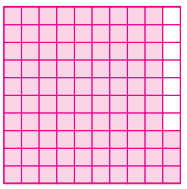
por • centaje
razón — 100

En la figura abajo, hay 100 regiones cuadradas de igual tamaño y 93 de ellas están sombreadas. Por tanto, $\frac{93}{100}$ o 93 por ciento de la figura está sombreada. La palabra *porciento* puede escribirse utilizando el símbolo %, por lo que se dice que 93% de la figura está sombreada.

Numerador

$$\frac{93}{100} = 93\%$$

Por 100



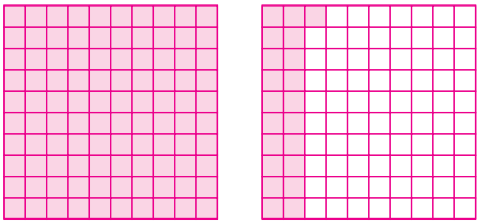
Si toda la figura estuviese sombreada, se diría que 100 de las 100 regiones cuadradas, o 100%, están sombreadas. Utilizando este hecho, se puede determinar qué

porcentaje de la figura *no* está sombreada restando el porcentaje de la figura que está sombreada del 100%.

$$100\% - 93\% = 7\%$$

Por ello, 7% de la figura *no* está sombreada.

Para ilustrar un porcentaje mayor a 100%, por ejemplo 121%, se sombrearía toda una figura y 21 de las 100 regiones cuadradas en un segundo cuadriculado de igual tamaño.



100% + 21% = 121%

EJEMPLO 1 ***Lanzamiento de una moneda*** Se lanzó una moneda 100 veces y salió cara 51 veces.

a. ¿Qué porcentaje de las veces salió cara?

b. ¿Qué porcentaje de las veces salió cruz?

Estrategia Se escribirá una fracción que compare el número de veces que salió cara (o cruz) con el número total de lanzamientos.

POR QUÉ Dado que el denominador en cada caso será de 100, el numerador de la fracción dará el porcentaje.

Solución

a. Si salió cara 51 veces después de lanzar una moneda 100 veces, entonces

$$\frac{51}{100} = 51\%$$

de las veces salió cara.

b. El número de las veces que salió cruz es $100 - 51 = 49$ veces. Si salió cruz 49 veces después que se lanzó una moneda 100 veces, entonces

$$\frac{49}{100} = 49\%$$

de las veces salió cruz.

Auto-revisión 1

JUEGOS DE MESA Un juego de mesa Scrabble estándar contiene 100 piezas. Hay 42 con vocales, 2 blancas y el resto son con consonantes.

a. ¿Qué porcentaje de las piezas son vocales?

b. ¿Qué porcentaje de las piezas son consonantes?

Ahora intente **Problema 13**

2 Escribir porcentajes como fracciones

Se puede utilizar la definición de porcentaje para escribir cualquier porcentaje en una forma de fracción equivalente.

Escritura de porcentajes como fracciones

Para escribir un porcentaje como una fracción, elimine el símbolo % y escriba el número dado sobre 100. Después simplifique la fracción, si es posible.

EJEMPLO 2 ***Tierra*** La conformación química de la atmósfera de la Tierra es de 78% nitrógeno, 21% oxígeno y 1% otros gases. Escriba cada porcentaje como una fracción en la forma más simple.

Estrategia Se eliminará el símbolo % y se escribirá el número proporcionado sobre 100. Después se simplificará la fracción resultante, si es posible.

POR QUÉ *Porcentaje* significa partes por centena y la palabra *por* indica una razón (fracción).

Auto-revisión 2

SANDÍAS Una sandía promedio es 92% agua. Escriba este porcentaje como una fracción en la forma más simple.

Ahora intente **Problemas 17 y 23**

Solución Se comienza con el nitrógeno.

$$78\% = \frac{78}{100}$$ Elimine el símbolo % y escriba el 78 sobre 100.

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot 39}{\underset{1}{\cancel{2}} \cdot 50}$$ Para simplificar la fracción, factorice el 78 como $2 \cdot 39$ y el 100 como $2 \cdot 50$. Después elimine el factor común de 2 del numerador y el denominador.

$$= \frac{39}{50}$$

El nitrógeno conforma $\frac{78}{100}$, o $\frac{39}{50}$, de la atmósfera de la Tierra.

El oxígeno conforma 21%, o $\frac{21}{100}$, de la atmósfera de la Tierra. Otros gases conforman el 1%, o $\frac{1}{100}$, de la atmósfera de la Tierra.

Auto-revisión 3

SINDICATOS En el 2002, el 13.3% de la fuerza laboral de E.U. pertenecía a un sindicato. Escriba este porcentaje como una fracción en la forma más simple.

Ahora intente **Problemas 27 y 31**

EJEMPLO 3 ***Sindicatos*** En el 2007, 12.1% de la fuerza laboral de E.U. pertenecía a un sindicato. Escriba este porcentaje como una fracción en la forma más simple. (*Fuente:* Bureau of Labor Statistics)

Estrategia Se eliminará el símbolo % y se escribirá el número proporcionado sobre 100. Después se multiplicará la fracción resultante por una forma de 1 y se simplificará, si es posible.

POR QUÉ Cuando se escribe un porcentaje como una fracción, el numerador y el denominador de la fracción deben ser números enteros que no tengan factores comunes (diferentes del 1).

Solución

$$12.1\% = \frac{12.1}{100}$$ Elimine el símbolo % y escriba el 12.1 sobre 100.

Para escribir esta como una fracción equivalente de *números enteros* se necesita mover el punto decimal en el numerador una posición a la derecha. (Recuerde que para encontrar el producto de un decimal y el 10, simplemente se mueve el punto decimal una posición a la derecha.) Por tanto, se tiene que $\frac{10}{10}$ es la forma de 1 que se debe utilizar para construir $\frac{12.1}{100}$.

$$\frac{12.1}{100} = \frac{12.1}{100} \cdot \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{10}}$$ Multiplique la fracción por una forma de 1.

$$= \frac{12.1 \cdot \mathbf{10}}{100 \cdot \mathbf{10}}$$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$$= \frac{121}{1{,}000}$$ Dado que el 121 y el 1,000 no tienen algún factor común (diferente del 1), la fracción está en la forma más simple.

Por tanto, $12.1\% = \frac{121}{1{,}000}$. Esto significa que 121 de cada 1,000 trabajadores en la fuerza laboral de E.U. pertenecían a un sindicato en el 2007.

Auto-revisión 4

Escriba $83\frac{1}{3}\%$ como una fracción en la forma más simple.

Ahora intente **Problema 35**

EJEMPLO 4 Escriba $66\frac{2}{3}\%$ como una fracción en la forma más simple.

Estrategia Se eliminará el símbolo % y se escribirá el número proporcionado sobre 100. Después se desarrollará la división indicada por la barra de fracción y se simplificará, si es posible.

POR QUÉ Cuando se escribe un porcentaje como una fracción, el numerador y el denominador de la fracción deben ser números enteros que no tengan factores comunes (diferentes del 1).

Solución

$$66\frac{2}{3}\% = \frac{66\frac{2}{3}}{100}$$ Elimine el símbolo % y escriba $66\frac{2}{3}$ sobre 100.

Para escribir esta como una fracción de números enteros, se desarrollará la división indicada por la barra de fracción.

$$\frac{66\frac{2}{3}}{100} = 66\frac{2}{3} \div 100$$ La barra de fracción indica una división.

$$= \frac{200}{3} \cdot \frac{1}{100}$$ Escriba $66\frac{2}{3}$ como un número mixto y después multiplique por el recíproco de 100.

$$= \frac{200 \cdot 1}{3 \cdot 100}$$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$$= \frac{2 \cdot \overset{1}{\cancel{100}} \cdot 1}{3 \cdot \underset{1}{\cancel{100}}}$$ Para simplificar la fracción, factorice el 200 como $2 \cdot 100$. Después elimine el factor común de 100 del numerador y el denominador.

$$= \frac{2}{3}$$

EJEMPLO 5

a. Escriba 175% como una fracción en la forma más simple.

b. Escriba 0.22% como una fracción en la forma más simple.

Estrategia Se eliminará el símbolo % y se escribirá el número proporcionado sobre 100. Después se simplificará la fracción resultante, si es posible.

POR QUÉ *Porcentaje* significa partes por centena y la palabra *por* indica una razón (fracción).

Solución

a. $175\% = \frac{175}{100}$ Elimine el símbolo % y escriba el 175 sobre 100.

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{5}} \cdot \overset{1}{\cancel{5}} \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot \underset{1}{\cancel{5}} \cdot \underset{1}{\cancel{5}}}$$ Para simplificar la fracción, realice la factorización de primos del 175 y el 100. Elimine los factores comunes de 5 del numerador y el denominador.

$$= \frac{7}{4}$$

$5 \mid 175$	$2 \mid 100$
$5 \mid 35$	$2 \mid 50$
7	$5 \mid 25$
	5

Por tanto, $175\% = \frac{7}{4}$.

b. $0.22\% = \frac{0.22}{100}$ Elimine el símbolo % y escriba el 0.22 sobre 100.

Para escribir esta como una fracción equivalente de *números naturales,* se necesita mover el punto decimal en el numerador dos posiciones a la derecha. (Recuerde que para encontrar el producto de un decimal y el 100, simplemente se mueve el punto decimal dos posiciones a la derecha.) Por tanto, se tiene que $\frac{100}{100}$ es la forma de 1 que se debe utilizar para construir $\frac{0.22}{100}$.

$$\frac{0.22}{100} = \frac{0.22}{100} \cdot \frac{\mathbf{100}}{\mathbf{100}}$$ Multiplique la fracción por una forma de 1.

$$= \frac{0.22 \cdot 100}{100 \cdot 100}$$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$$= \frac{22}{10{,}000}$$

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot 11}{\underset{1}{\cancel{2}} \cdot 5{,}000}$$ Para simplificar la fracción, factorice el 22 y el 10,000. Elimine el factor común de 2 del numerador y el denominador.

$$= \frac{11}{5{,}000}$$

Por tanto, $0.22\% = \frac{11}{5{,}000}$.

Auto-revisión 5

a. Escriba 210% como una fracción en la forma más simple.

b. Escriba 0.54% como una fracción en la forma más simple.

Ahora intente **Problemas 39 y 43**

Consejo útil Cuando los porcentajes mayores a 100% se escriben como fracciones, las fracciones son mayores que 1. Cuando los porcentajes menores a 1% se escriben como fracciones, las fracciones son menores que $\frac{1}{100}$.

3 Escribir porcentajes como decimales

Para escribir un porcentaje como un decimal, recuerde que un porcentaje puede escribirse como una fracción con denominador de 100 y que un denominador de 100 indica una división entre 100.

Por ejemplo, considere el 14%, el cual significa 14 partes por 100.

$$14\% = \frac{14}{100}$$ Use la definición del porcentaje: escriba el 14 sobre 100.

$$= 14 \div 100$$ La barra de fracción indica una división.

$$= 14.0 \div 100$$ Escriba el número natural 14 en notación decimal colocando un punto decimal inmediatamente a su derecha e introduciendo un cero a la derecha del punto decimal.

$$= .14\,0$$ Dado que el divisor de 100 tiene dos ceros, mueva el punto decimal 2 posiciones a la izquierda.

$$= 0.14$$ Escriba un cero a la izquierda del punto decimal.

Se ha encontrado que 14% = 0.14. Este ejemplo sugiere el siguiente procedimiento.

Escritura de porcentajes como decimales

Para escribir un porcentaje como un decimal elimine el símbolo % y divida el número proporcionado entre 100 moviendo el punto decimal 2 posiciones a la izquierda.

Auto-revisión 6

a. Escriba 16.43% como un decimal.

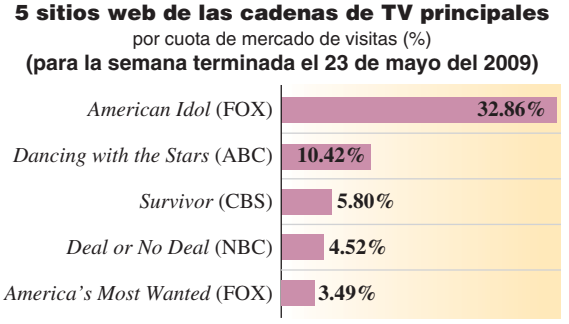
b. Escriba 2.06% como un decimal.

Ahora intente **Problemas 51 y 57**

EJEMPLO 6 ***Sitios web de TV*** La gráfica abajo muestra el porcentaje de la cuota de mercado para los 5 sitios web de las cadenas de TV principales.

a. Escriba el porcentaje de la cuota de mercado para el sitio web de *American Idol* como un decimal.

b. Escriba el porcentaje de la cuota de mercado para el sitio web de *Deal or No Deal* como un decimal.



(Fuente: marketingcharts.com)

Estrategia Se eliminará el símbolo % y se dividirá cada número proporcionado entre 100 moviendo el punto decimal 2 posiciones a la izquierda.

POR QUÉ Recuerde a partir de la Sección 4.4 que para encontrar el cociente de un decimal y el 10, 100, 1,000, etc., mueva el punto decimal a la izquierda el mismo número de posiciones que el número de ceros en la potencia de 10.

Solución

a. A partir de la gráfica se observa que el porcentaje de la cuota de mercado para el sitio web de *American Idol* es del 32.86%. Para escribir este porcentaje como un decimal se procede como a continuación.

$$32.86\% = .32\,86$$ Elimine el símbolo % y divida el 32.86 entre 100 moviendo el punto decimal 2 posiciones a la izquierda.

$$= 0.3286$$ Escriba un cero a la izquierda del punto decimal.

32.86%, escrito como un decimal, es 0.3286.

b. A partir de la gráfica se observa que el porcentaje de la cuota de mercado para el sitio web de *Deal or No Deal* es del 4.52%. Para escribir este porcentaje como un decimal, se procede como a continuación.

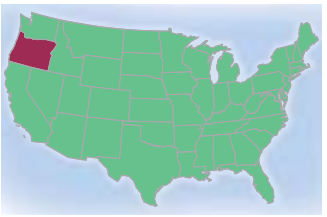
$4.52\% = .04\,52$ Elimine el símbolo % y divida el 4.52 entre 100 moviendo el punto decimal 2 posiciones a la izquierda. Esto requiere que se inserte un cero marcador de posición (mostrado en azul) enfrente del 4.

$= 0.0452$ Escriba un cero a la izquierda del punto decimal.

4.52%, escrito como un decimal, es 0.0452.

EJEMPLO 7

Población La población del estado de Oregón es de aproximadamente el $1\frac{1}{4}\%$ de la población de Estados Unidos. Escriba este porcentaje como un decimal. (Fuente: U.S. Census Bureau)



Estrategia Se escribirá el número mixto $1\frac{1}{4}$ en notación decimal.

POR QUÉ Con $1\frac{1}{4}$ en forma de número mixto, no puede aplicar la regla para escribir un porcentaje como un decimal; no hay punto decimal para moverlo 2 posiciones a la izquierda.

Solución Para cambiar un porcentaje a un decimal, se elimina el símbolo de porcentaje y se divide entre 100 moviendo el punto decimal 2 posiciones a la izquierda. Sin embargo, en este caso no hay punto decimal a mover en $1\frac{1}{4}\%$. Dado que $1\frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4}$ y dado que el equivalente decimal de $\frac{1}{4}$ es el 0.25, se puede escribir $1\frac{1}{4}\%$ en una forma equivalente como 1.25%.

$1\frac{1}{4}\% = 1.25\%$ Escriba $1\frac{1}{4}$ como 1.25.

$= .01\,25$ Elimine el símbolo % y divida el 1.25 entre 100 moviendo el punto decimal 2 posiciones a la izquierda. Esto requiere que se inserte un cero marcador de posición (mostrado en azul) enfrente del 1.

$= 0.0125$ Escriba un cero a la izquierda del punto decimal.

$1\frac{1}{4}\%$, escrito como un decimal, es 0.0125.

Auto-revisión 7

POBLACIÓN La población del estado de Ohio es de aproximadamente $3\frac{3}{4}\%$ de la población de Estados Unidos. Escriba este porcentaje como un decimal. (Fuente: U.S. Census Bureau)

Ahora intente **Problema 59**

EJEMPLO 8

a. Escriba 310% como un decimal. **b.** Escriba 0.9% como un decimal.

Estrategia Se eliminará el símbolo % y se dividirá cada número proporcionado entre 100 moviendo el punto decimal 2 posiciones a la izquierda.

POR QUÉ Recuerde que para encontrar el cociente de un decimal y el 100, se mueve el punto decimal a la izquierda el mismo número de posiciones que el número de ceros en el 100.

Solución

a. $310\% = 310.0\%$ Escriba el número natural 310 en notación decimal: $310 = 310.0$.

$= 3.10\,0$ Elimine al símbolo % y divida el 310 entre 100 moviendo el punto decimal 2 posiciones a la izquierda.

$= 3.1$ Elimine los ceros innecesarios a la derecha del 1.

310%, escrito como un decimal, es 3.1.

b. $0.9\% = .00\,9$ Elimine el símbolo % y divida el 0.9 entre 100 moviendo el punto decimal 2 posiciones a la izquierda. Esto requiere que se inserte un cero marcador de posición (mostrado en azul) enfrente del 0.

$= 0.009$ Escriba un cero a la izquierda del punto decimal.

0.9%, escrito como un decimal, es 0.009.

Auto-revisión 8

a. Escriba 600% como un decimal.

b. Escriba 0.8% como un decimal.

Ahora intente **Problemas 63 y 67**

Consejo útil Cuando los porcentajes mayores a 100% se escriben como decimales, los decimales son mayores que 1.0. Cuando los porcentajes menores a 1% se escriben como decimales, los decimales son menores que 0.01.

4 Escribir decimales como porcentajes

Para escribir un porcentaje como un decimal se elimina el símbolo % y se mueve el punto decimal dos posiciones a la izquierda. Para escribir un decimal como un porcentaje se realiza lo opuesto: se mueve el punto decimal 2 posiciones a la derecha y se inserta un símbolo %.

Escritura de decimales como porcentajes

Para escribir un decimal como un porcentaje se multiplica el decimal por 100 moviendo el punto decimal 2 posiciones a la derecha y se inserta un símbolo %.

Auto-revisión 9
Escriba 0.5343 como un porcentaje.
Ahora intente **Problemas 71 y 75**

EJEMPLO 9 ***Geografía*** Las áreas terrestres conforman el 0.291 de la superficie de la Tierra. Escriba este decimal como un porcentaje.

Estrategia Se multiplicará el decimal por 100 moviendo el punto decimal 2 posiciones a la derecha y después se insertará un símbolo %.

POR QUÉ Para escribir un *decimal como un porcentaje,* se invierten los pasos empleados para escribir un *porcentaje como un decimal.*

Solución

$$0.291 = 0\,29.1\% = 29.1\%$$

Multiplique el 0.291 por 100 moviendo el punto decimal 2 posiciones a la derecha e inserte un símbolo %.

0.291, escrito como un porcentaje, es 29.1%.

5 Escribir fracciones como porcentajes

Se utiliza un proceso de dos pasos para escribir una fracción como un porcentaje. Primero, se escribe la fracción como un decimal. Después se escribe ese decimal como un porcentaje.

Fracción → decimal → porcentaje

Escritura de fracciones como porcentajes

Para escribir una fracción como un porcentaje:

1. Escriba la fracción como un decimal dividiendo su numerador entre su denominador.
2. Multiplique el decimal por 100 moviendo el punto decimal 2 posiciones a la derecha e inserte un símbolo %.

Auto-revisión 10
Escriba 7 de 8 como un porcentaje.
Ahora intente **Problema 79**

EJEMPLO 10 ***Televisión*** El programa de televisión con mayor audiencia de todos los tiempos fue un capítulo especial de *M*A*S*H* que salió al aire el 28 de febrero de 1983. Los sondeos encontraron que tres de cada cinco hogares estadounidenses vieron este programa. Exprese la audiencia como un porcentaje.

Estrategia Primero, se traducirá la frase *tres de cada cinco* a forma de fracción y se escribirá esa fracción como un decimal. Después se escribirá ese decimal como un porcentaje.

POR QUÉ Debe utilizarse un método fracción a decimal a porcentaje para escribir una fracción como un porcentaje.

Solución

Paso 1 La frase *tres de cada cinco* puede expresarse como $\frac{3}{5}$. Para escribir esta fracción como un decimal, se divide el numerador, 3, entre el denominador, 5.

$$\begin{array}{r} 0.6 \\ 5\overline{)3.0} \\ -30 \\ \hline 0 \end{array}$$

Escriba un punto decimal y un cero adicional a la derecha del 3.

← El residuo es 0.

El resultado es un decimal terminal.

Paso 2 Para escribir el 0.6 como un porcentaje se procede como a continuación.

$$\frac{3}{5} = 0.6$$

$0.6 = 0\,60.\,\%$ Escriba un 0 marcador de posición a la derecha del 6 (mostrado en azul). Multiplique el 0.60 por 100 moviendo el punto decimal 2 posiciones a la derecha y después inserte un símbolo %.

$= 60\%$

60% de los hogares estadounidenses vieron el capítulo especial de *M*A*S*H*.

EJEMPLO 11

Escriba $\frac{13}{4}$ como un porcentaje.

Estrategia Se escribirá la fracción $\frac{13}{4}$ como un decimal. Después se escribirá ese decimal como un porcentaje.

POR QUÉ Debe utilizarse un método fracción a decimal a porcentaje para escribir una fracción como un porcentaje.

Solución

Paso 1 Para escribir $\frac{13}{4}$ como un decimal se divide el numerador, 13, entre el denominador, 4.

$$\begin{array}{r} 3.25 \\ 4\overline{)13.00} \\ -12 \\ \hline 10 \\ -8 \\ \hline 20 \\ -20 \\ \hline 0 \end{array}$$

Escriba un punto decimal y dos ceros adicionales a la derecha del 3.

← El residuo es 0.

El resultado es un decimal terminal.

Paso 2 Para escribir el 3.25 como un porcentaje se procede como a continuación.

$3.25 = 325\,\%$ Multiplique el 3.25 por 100 moviendo el punto decimal 2 posiciones a la derecha y después inserte un símbolo %.

$= 325\%$

La fracción $\frac{13}{4}$, escrita como un porcentaje, es 325%.

Consejo útil Cuando las fracciones mayores que 1 se escriben como porcentajes, los porcentajes son mayores al 100%.

En los Ejemplos 10 y 11, el resultado de la división fue un decimal terminal. En ocasiones cuando se escribe una fracción como un decimal, el resultado de la división es un decimal repetitivo.

Auto-revisión 11

Escriba $\frac{5}{2}$ como un porcentaje.

Ahora intente **Problema 85**

Auto-revisión 12

Escriba $\frac{2}{3}$ como un porcentaje. Dé la respuesta exacta y una aproximación a la décima de uno por ciento más cercana.

Ahora intente **Problema 91**

EJEMPLO 12

Escriba $\frac{5}{6}$ como un porcentaje. Dé la respuesta exacta y una aproximación a la décima de uno por ciento más cercana.

Estrategia Se escribirá la fracción $\frac{5}{6}$ como un decimal. Después se escribirá ese decimal como un porcentaje.

POR QUÉ Debe utilizarse un método fracción a decimal a porcentaje para escribir una fracción como un porcentaje.

Solución

Paso 1 Para escribir $\frac{5}{6}$ como un decimal, se divide el numerador, 5, entre el denominador, 6.

$$\begin{array}{r} 0.8333 \\ 6\overline{)5.0000} \\ -4\,8 \\ \hline 20 \\ -18 \\ \hline 20 \\ -18 \\ \hline 20 \\ -18 \\ \hline 2 \end{array}$$

Escriba un punto decimal y varios ceros a la derecha del 5.

Ahora es claro el patrón repetitivo. Se puede detener la división.

El resultado es un decimal repetitivo.

Paso 2 Para escribir el decimal como un porcentaje, se procede como a continuación.

$$\frac{5}{6} = 0.8333\ldots$$

$$0.833\ldots = 0\,83.33\ldots\% = 83.33\ldots\%$$

Multiplique el 0.8333 . . . por 100 moviendo el punto decimal 2 posiciones a la derecha y después inserte un símbolo %.

Ahora se debe decidir si se desea una respuesta exacta o una aproximación. Para una respuesta exacta se puede representar *la parte repetitiva del decimal utilizando una fracción equivalente.* Para una aproximación se puede redondear 83.333 . . .% a un valor posicional específico.

Respuesta exacta:

$$\frac{5}{6} = 83.\underbrace{3333\ldots}\%$$

$$= 83\frac{1}{3}\%$$

Use la fracción $\frac{1}{3}$ para representar .3333 . . . .

Por tanto,

$$\frac{5}{6} = 83\frac{1}{3}\%$$

Aproximación:

$$\frac{5}{6} = 83.33\ldots\%$$

$$\approx 83.3\%$$

Redondee a la décima más cercana.

Por tanto,

$$\frac{5}{6} \approx 83.3\%$$

Algunos porcentajes aparecen con tanta frecuencia que es de utilidad memorizar sus equivalentes fraccionales y decimales.

Porcentaje	Decimal	Fracción
1%	0.01	$\frac{1}{100}$
10%	0.1	$\frac{1}{10}$
$16\frac{2}{3}\%$	0.1666 . . .	$\frac{1}{6}$
20%	0.2	$\frac{1}{5}$
25%	0.25	$\frac{1}{4}$

Percentaje	Decimal	Fracción
$33\frac{1}{3}\%$	0.3333 . . .	$\frac{1}{3}$
50%	0.5	$\frac{1}{2}$
$66\frac{2}{3}\%$	0.6666 . . .	$\frac{2}{3}$
$83\frac{1}{3}\%$	0.8333 . . .	$\frac{5}{6}$
75%	0.75	$\frac{3}{4}$

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. a. 42% **b.** 56% **2.** $\frac{23}{25}$ **3.** $\frac{133}{1{,}000}$ **4.** $\frac{5}{6}$ **5. a.** $\frac{21}{10}$ **b.** $\frac{27}{5{,}000}$ **6. a.** 0.1643 **b.** 0.0206
7. 0.0375 **8. a.** 6 **b.** 0.008 **9.** 53.43% **10.** 87.5% **11.** 250% **12.** $66\frac{2}{3}\% \approx 66.7\%$

SECCIÓN 6.1 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Complete los espacios.

1. _____ significa partes por centena.
2. La palabra *porcentaje* está conformada por el prefijo *per,* que significa _____, y el sufijo *centaje,* que proviene del latín *centum,* y significa _____.

CONCEPTOS

Complete los espacios.

3. Para escribir un porcentaje como una fracción, elimine el símbolo % y escriba el número dado sobre _____. Después _____ la fracción, si es posible.
4. Para escribir un porcentaje como un decimal elimine el símbolo % y divida el número proporcionado entre 100 moviendo el punto decimal 2 posiciones a la _____.
5. Para escribir un decimal como un porcentaje multiplique el decimal por 100 moviendo el punto decimal 2 posiciones a la _____, y después inserte un símbolo %.
6. Para escribir una fracción como un porcentaje primero escriba la fracción como un _____. Después multiplique el decimal por 100 moviendo el punto decimal 2 posiciones a la derecha y después inserte un símbolo _____.

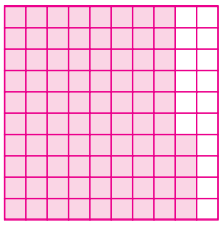
NOTACIÓN

7. ¿Qué significa el símbolo %?
8. Escriba el número natural 45 como un decimal.

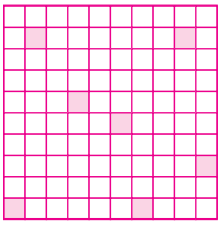
PRÁCTICA GUIADA

¿Qué porcentaje de la figura está sombreada? ¿Qué porcentaje de la figura no está sombreada? Vea el Objetivo 1.

9.

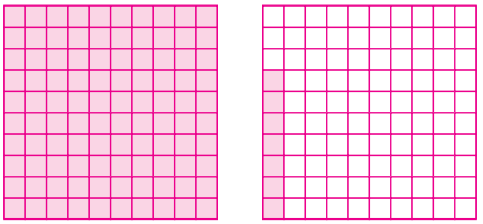


10.

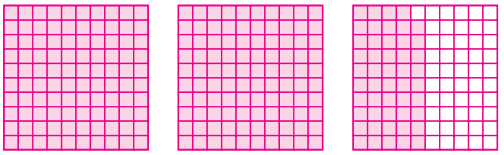


En las siguientes ilustraciones, cada conjunto de 100 regiones cuadradas representa un 100%. ¿Qué porcentaje está sombreado?

11.



12.



Para los problemas 13–16. Vea el Ejemplo 1.

13. INTERNET El siguiente enunciado apareció en un blog sobre tecnología: "Pregúntele a los usuarios de internet qué desean de su servicio, y en 99 veces de 100 la respuesta será la misma: más velocidad". De acuerdo con el blog, ¿qué porcentaje de las veces los usuarios darán esa respuesta?
14. RÉCORDS EN EL BASQUETBOL En 1962, Wilt Chamberlain, de los Philadelphia Warriors, anotó un total de 100 puntos en un partido de la NBA. Si veintiocho de sus puntos provinieron de tiros libres, ¿qué porcentaje del total de puntos provino de tiros libres?
15. EDREDONES Un edredón está conformado por 100 cuadrados tejidos de colores.
    a. Si quince de los cuadrados son azules, ¿qué porcentaje de los cuadrados en el edredón son azules?
    b. ¿Qué porcentaje de los cuadrados no son azules?
16. DIVISIBILIDAD De los números enteros del 1 al 100, sólo catorce de ellos son divisibles entre el 7.
    a. ¿Qué porcentaje de los números son divisibles entre el 7?
    b. ¿Qué porcentaje de los números no son divisibles entre el 7?

Escriba cada porcentaje como una fracción. Simplifique, si es posible. Vea el Ejemplo 2.

17. 17%
18. 31%
19. 91%
20. 89%
21. 4%
22. 5%
23. 60%
24. 40%

Escriba cada porcentaje como una fracción. Simplifique, si es posible. Vea el Ejemplo 3.

25. 1.9%
26. 2.3%
27. 54.7%
28. 97.1%
29. 12.5%
30. 62.5%
31. 6.8%
32. 4.2%

Escriba cada porcentaje como una fracción. Simplifique, si es posible. Vea el Ejemplo 4.

33. $1\frac{1}{3}\%$
34. $3\frac{1}{3}\%$
35. $14\frac{1}{6}\%$
36. $10\frac{5}{6}\%$

Escriba cada porcentaje como una fracción. Simplifique, si es posible. Vea el Ejemplo 5.

37. 130%
38. 160%
39. 220%
40. 240%
41. 0.35%
42. 0.45%
43. 0.25%
44. 0.75%

Escriba cada porcentaje como un decimal. Vea el Objetivo 3.

45. 16%
46. 11%
47. 81%
48. 93%

Escriba cada porcentaje como un decimal. Vea el Ejemplo 6.

49. 34.12%
50. 27.21%
51. 50.033%
52. 40.083%
53. 6.99%
54. 4.77%
55. 1.3%
56. 8.6%

Escriba cada porcentaje como un decimal. Vea el Ejemplo 7.

57. $7\frac{1}{4}\%$
58. $9\frac{3}{4}\%$
59. $18\frac{1}{2}\%$
60. $25\frac{1}{2}\%$

Escriba cada porcentaje como un decimal. Vea el Ejemplo 8.

61. 460%
62. 230%
63. 316%
64. 178%
65. 0.5%
66. 0.9%
67. 0.03%
68. 0.06%

Escriba cada decimal o número natural como un porcentaje. Vea el Ejemplo 9.

69. 0.362
70. 0.245
71. 0.98
72. 0.57
73. 1.71
74. 4.33
75. 4
76. 9

Escriba cada fracción como un porcentaje. Vea el Ejemplo 10.

77. $\frac{2}{5}$
78. $\frac{1}{5}$
79. $\frac{4}{25}$
80. $\frac{9}{25}$
81. $\frac{5}{8}$
82. $\frac{3}{8}$
83. $\frac{7}{16}$
84. $\frac{9}{16}$

Escriba cada fracción como un porcentaje. Vea el Ejemplo 11.

85. $\frac{9}{4}$
86. $\frac{11}{4}$
87. $\frac{21}{20}$
88. $\frac{33}{20}$

Escriba cada fracción como un porcentaje. Dé la respuesta exacta y una aproximación a la décima de uno por ciento más cercana. Vea el Ejemplo 12.

89. $\frac{1}{6}$
90. $\frac{2}{9}$
91. $\frac{5}{3}$
92. $\frac{4}{3}$

INTÉNTELO

Complete la tabla. Dé una respuesta exacta y una aproximación a la décima de uno por ciento más cercana cuando sea necesario. Redondee los decimales a la centésima más cercana cuando sea necesario.

	Fracción	Decimal	Porcentaje
93.		0.0314	
94.		0.0021	
95.			40.8%
96.			34.2%
97.			$5\frac{1}{4}\%$
98.			$6\frac{3}{4}\%$
99.	$\frac{7}{3}$		
100.	$\frac{7}{9}$		

APLICACIONES

101. CRUZ ROJA Una hoja informativa publicada por la Cruz Roja de Estados Unidos en el 2008 citaba: "Un promedio de 91 centavos de cada dólar donado a la Cruz Roja se gasta en servicios y programas". ¿Qué porcentaje del dinero donado a la Cruz Roja iba a servicios y programas?

102. AHORRO DE DINERO De acuerdo con un artículo en el sitio web de CNN, en 1970 los estadounidenses ahorraron 14 centavos por cada dólar ganado. (Fuente: CNN.com/living, 21 de mayo del 2009).

a. Exprese la cantidad ahorrada por cada dólar ganado como una fracción en la forma más simple.

b. Escriba su respuesta para el inciso a como un porcentaje.

103. REGIONES DE UN PAÍS Los estados internos de Estados Unidos se dividen en siete regiones como se muestra abajo.

a. ¿Qué porcentaje de los 50 estados están en la región de las Montañas Rocallosas?

b. ¿Qué porcentaje de los 50 estados están en la región del Medio Oeste?

c. ¿Qué porcentaje de los 50 estados no se localizan en ninguna de las siete regiones mostradas aquí?

104. SEÑALAMIENTOS DE CARRETERAS En ocasiones, los señalamientos como el mostrado abajo se colocan para prevenir a los camioneros cuando se están aproximando a una pendiente pronunciada en la carretera.

a. Escriba la inclinación mostrada en el señalamiento como una fracción.

b. Escriba como un decimal la inclinación mostrada en el señalamiento.

105. TASAS DE INTERÉS Escriba como un decimal cada tasa de interés para las siguientes cuentas.

a. Préstamo hipotecario: 7.75%

b. Cuenta de ahorros: 5%

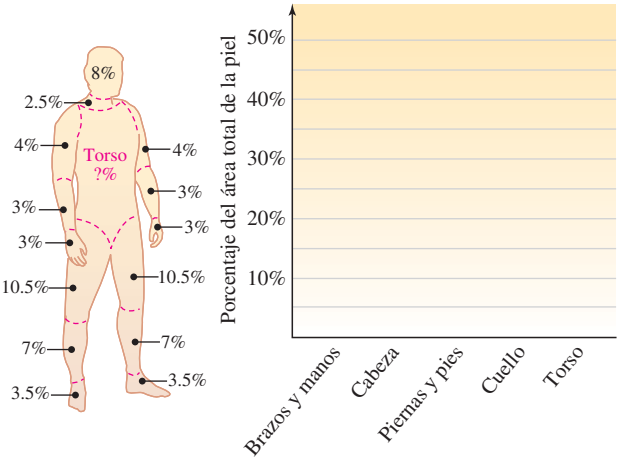
c. Tarjeta de crédito: 14.25%

106. MANEJO ALCOHOLIZADO En la mayoría de los estados es ilegal conducir con una concentración de alcohol en la sangre de 0.08% o mayor.

a. Escriba este porcentaje como una fracción. No simplifique.

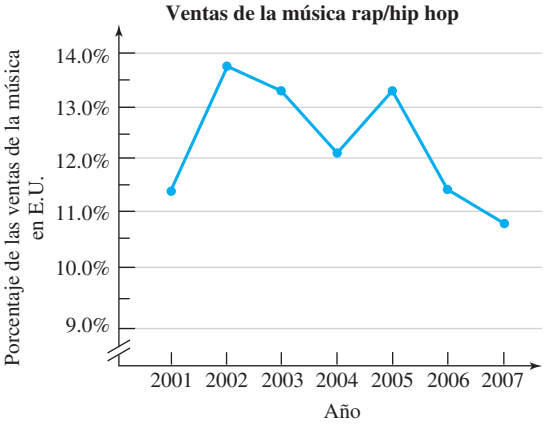
b. Use su respuesta para el inciso a para completar los espacios: Una concentración de alcohol en la sangre de 0.08% significa ____ partes de alcohol a ____ partes de sangre.

107. PIEL HUMANA La ilustración de abajo muestra qué porcentaje del área total de la piel cubre cada sección del cuerpo. Encuentre el porcentaje faltante para el torso y después complete la gráfica de barras (Fuente: Burn Center at Sherman Oaks Hospital, American Medical Assn. Encyclopedia of Medicine)



108. MÚSICA RAP La tabla de abajo muestra qué porcentaje de las ventas totales en dólares americanos de la música grabada para los años 2001-2007 fueron ventas de la música rap/hip hop. Use la información para construir una gráfica de líneas.

2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
11.4%	13.8%	13.3%	12.1%	13.3%	11.4%	10.8%



Fuente: Recording Industry Association of America

109. CONSEJO DE SEGURIDAD DE LA ONU La Organización de las Naciones Unidas tiene 192 miembros. Estados Unidos, Rusia, Reino Unido, Francia y China, junto con otras 10 naciones,

conforman el Consejo de Seguridad. (Fuente: *The World Almanac and Book of Facts,* 2009)

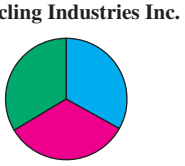
a. ¿Qué fracción de los miembros de la Organización de las Naciones Unidas pertenecen al Consejo de Seguridad? Escriba su respuesta en la forma más simple.

b. Escriba su respuesta para el inciso a como un decimal. (*Sugerencia:* Divida a seis decimales. El resultado es un decimal terminal.)

c. Escriba su respuesta para el inciso b como un porcentaje.

110. JABÓN El jabón Ivory asevera ser $99\frac{44}{100}\%$ puro. Escriba este porcentaje como un decimal.

111. LOGOTIPOS En la ilustración, ¿qué parte del logotipo de la compañía está sombreada en rojo? Exprese su respuesta como un porcentaje (exacto), una fracción y un decimal (utilizando una barra superior).

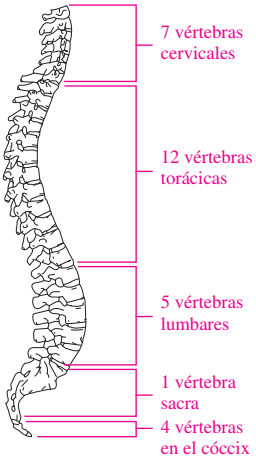


112. ESPINA DORSAL HUMANA La espina dorsal humana consiste en un grupo de huesos (vértebras) como se muestra.

a. ¿Qué fracción de las vértebras son lumbares?

b. ¿Qué porcentaje de las vértebras son lumbares? (Redondee al uno por ciento más cercano.)

c. ¿Qué porcentaje de las vértebras son cervicales? (Redondee al uno por ciento más cercano.)



113. BOXEO Óscar de la Hoya ganó 39 de 45 peleas profesionales.

a. ¿Qué fracción de sus peleas ganó?

b. ¿Qué porcentaje de sus peleas ganó? Dé la respuesta exacta y una aproximación a la decena de uno por ciento más cercana.

114. LIGA MAYOR DE BEISBOL En el 2008, los Milwaukee Brewers ganaron 90 juegos y perdieron 72 durante la temporada regular.

a. ¿Cuál fue el número total de partidos que jugaron los Brewers en el 2008?

b. ¿Qué porcentaje de los partidos jugados ganaron los Brewers en el 2008? Dé la respuesta exacta y una aproximación a la decena de uno por ciento más cercana.

115. PRONÓSTICOS ECONÓMICOS Un indicador económico de la economía nacional es el número de pedidos realizados por los fabricantes. Un mes, el número de órdenes se elevó *un cuarto de 1 porciento.*

a. Escriba esto utilizando un símbolo %.

b. Expréselo como una fracción.

c. Expréselo como un decimal.

116. IMPUESTOS En agosto del 2008, los votantes de Springfield, Missouri, aprobaron impuestos sobre la venta de *un octavo de uno por ciento* para financiar proyectos de transporte en la ciudad.

a. Escriba el porcentaje como un decimal.

b. Escriba el porcentaje como una fracción.

117. NACIMIENTOS Si el día de su cumpleaños representa $\frac{1}{365}$ de un año, ¿qué porcentaje del año es esto? Redondee a la centésima más cercana de uno por ciento.

118. POBLACIÓN Como una fracción, cada residente de Estados Unidos representa aproximadamente $\frac{1}{305{,}000{,}000}$ de la población de E.U. Exprese esto como un porcentaje. Redondee a un dígito diferente del cero.

REDACCIÓN

119. Si estuviese escribiendo un anuncio, ¿cuál forma piensa que atraería más clientes: "25% de descuento" o "$\frac{1}{4}$ de descuento"? Explique su razonamiento.

120. Varios entrenadores les piden a sus jugadores que den un esfuerzo del 110% durante las prácticas y los juegos. ¿Qué piensa que significa esto? ¿Es esto posible?

121. Explique cómo un parque de diversiones pudiera tener una asistencia que sea del 103% de su capacidad.

122. RÉCORDS VICTORIAS-DERROTAS En los deportes, cuando un equipo gana tantos juegos como pierde, se dice que están jugando "a 500". Suponga que en sus primeros 40 juegos, un equipo gana 20 juegos y pierde 20 juegos. Use los conceptos en esta sección para explicar cómo se le pudiera llamar "a 500" a tal récord.

REPASO

123. El ancho de un rectángulo es de 6.5 centímetros y su longitud es de 10.5 centímetros.

a. Encuentre su perímetro.

b. Encuentre su área.

124. La longitud de un lado de un cuadrado es de 9.8 metros.

a. Encuentre su perímetro.

b. Encuentre su área.

SECCIÓN 6.2

Resolución de problemas de porcentaje utilizando ecuaciones y proporciones de porcentajes

Objetivos

ECUACIONES DE PORCENTAJE

1. Traducir enunciados de porcentaje a ecuaciones del porcentaje.
2. Resolver ecuaciones de porcentaje para encontrar la cantidad.
3. Resolver ecuaciones de porcentaje para encontrar el porcentaje.
4. Resolver ecuaciones de porcentaje para encontrar la base.

PROPORCIONES DE PORCENTAJE

1. Escribir proporciones de porcentaje.
2. Resolver proporciones de porcentaje para encontrar la cantidad.
3. Resolver proporciones de porcentaje para encontrar el porcentaje.
4. Resolver proporciones de porcentaje para encontrar la base.
5. Leer gráficas circulares

Los artículos en la primera página del periódico a la derecha ilustran tres tipos de problemas de porcentaje.

Tipo 1 En el artículo laboral, si se desea conocer cuántos miembros del sindicato votaron para aceptar la nueva oferta, se preguntaría:

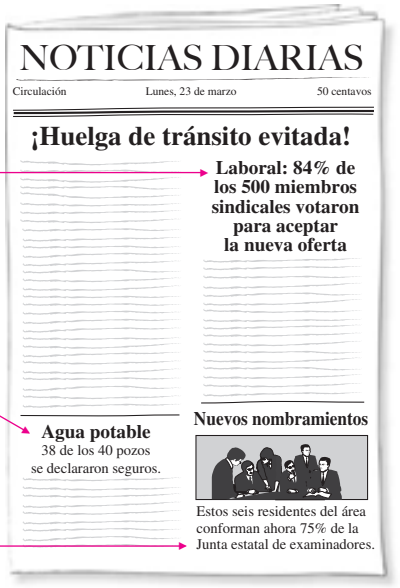
Qué número es 84% de 500?

Tipo 2 En el artículo sobre agua potable, si se desea conocer qué porcentaje de los pozos son seguros, se preguntaría:

¿38 es qué porcentaje de 40?

Tipo 3 En el artículo sobre los nuevos nombramientos, si se desea conocer cuántos miembros hay en la Junta de Examinadores Estatal, se preguntaría:

¿6 es 75% de qué número?



NOTICIAS DIARIAS

Circulación Lunes, 23 de marzo 50 centavos

¡Huelga de tránsito evitada!

Laboral: 84% de los 500 miembros sindicales votaron para aceptar la nueva oferta

Agua potable
38 de los 40 pozos se declararon seguros.

Nuevos nombramientos

Estos seis residentes del área conforman ahora 75% de la Junta estatal de examinadores.

Esta sección introduce dos métodos que pueden utilizarse para resolver los problemas de porcentaje mostrados arriba. El primer método involucra escribir y resolver *ecuaciones de porcentaje.* El segundo método involucra escribir y resolver *proporciones de porcentaje.* Si su profesor sólo requiere que aprenda el método de proporciones, entonces vaya a la página 520 y comience leyendo el Objetivo 1.

MÉTODO 1: ECUACIONES DE PORCENTAJE

1 Traducir enunciados de porcentaje a ecuaciones de porcentaje

Los **enunciados de porcentaje** remarcados en azul en la introducción arriba tienen tres cosas en común.

- Cada uno contiene la palabra *es.* Aquí, *es* puede traducirse como un símbolo =.
- Cada uno contiene la palabra *de.* En este caso, *de* significa multiplicar.
- Cada uno contiene una frase como *qué número* o *qué porcentaje.* En otras palabras, hay un número desconocido que puede representarse por medio de una variable.

Estas observaciones sugieren que cada enunciado de porcentaje contiene palabras clave que pueden traducirse para formar una ecuación. La ecuación, llamada **ecuación de porcentaje,** contendrá tres números (dos conocidos y uno desconocido representado por una variable), la operación de multiplicación y, por supuesto, un símbolo =.

El lenguaje de las matemáticas Las palabras clave en un enunciado de porcentaje se traducen como a continuación:

- ***es*** se traduce a un símbolo = .
- ***de*** se traduce a una multiplicación que se muestra con un punto elevado ·
- ***qué número*** o ***qué porcentaje*** se traducen a un número desconocido que se representa por medio de una variable.

Auto-revisión 1

Traduzca cada enunciado de porcentaje a una ecuación de porcentaje.

a. ¿Qué número es 33% de 80?

b. ¿Qué porcentaje de 55 es 6?

c. ¿172% de qué número es 4?

Ahora intente **Problema 17**

EJEMPLO 1 Traduzca cada enunciado del porcentaje a una ecuación del porcentaje.

a. ¿Qué número es 12% de 64?

b. ¿Qué porcentaje de 88 es 11?

c. ¿165% de qué número es 366?

Estrategia Se buscarán las palabras clave *es, de* y *qué número* (o *qué porcentaje*) en cada enunciado de porcentaje.

POR QUÉ Estas palabras clave se traducen a los símbolos matemáticos que forman la ecuación de porcentaje.

Solución En cada caso, la variable x representará el número desconocido. Sin embargo, puede utilizarse cualquier letra.

a. ¿Qué número es 12% de 64? — Este es el enunciado de porcentaje proporcionado

$x = 12\% \cdot 64$ — Esta es la ecuación de porcentaje.

b. ¿Qué porcentaje de 88 es 11? — Este es el enunciado de porcentaje proporcionado

$x \cdot 88 = 11$ — Esta es la ecuación de porcentaje.

c. 165% de qué número es 366? — Este es el enunciado de porcentaje proporcionado

$165\% \cdot x = 366$ — Esta es la ecuación de porcentaje.

2 Resolver ecuaciones de porcentaje para encontrar la cantidad

Para resolver el problema de porcentaje del sindicato laboral (Tipo 1 del periódico), se traduce el enunciado de porcentaje a una ecuación de porcentaje y después se encuentra el número desconocido.

Auto-revisión 2

¿Qué número es 36% de 400?

Ahora intente **Problemas 19 y 71**

EJEMPLO 2 ¿Qué número es 84% de 500?

NOTICIAS DIARIAS

Circulación Lunes, 23 de marzo 50 centavos

¡Huelga de tránsito evitada!

Laboral: 84% de los 500 miembros sindicales votaron para aceptar la nueva oferta

Agua potable

38 de los 40 pozos se declararon seguros.

Nuevos nombramientos

Estos seis residentes del área conforman ahora 75% de la Junta estatal de examinadores.

Estrategia Se buscarán las palabras clave *es, de* y *qué número* en el enunciado de porcentaje y se traducirán a símbolos matemáticos para formar una ecuación de porcentaje.

POR QUÉ Después será claro qué operación debe desarrollarse para encontrar el número desconocido.

Solución Primero, se traduce.

¿Qué número es 84% de 500?

$x = 84\% \cdot 500$ — Traduzca a una ecuación de porcentaje.

Ahora se desarrolla la multiplicación en el lado derecho de la ecuación.

$x = 0.84 \cdot 500$ — Escriba el 84% como un decimal: 84% = 0.84.

$x = 420$ — Realice la multiplicación.

Se ha encontrado que 420 es el 84% de 500. Es decir, 420 miembros sindicales en el artículo del periódico votaron para aceptar la nueva oferta.

El lenguaje de las matemáticas Cuando se encuentra el valor de la variable que hace verdadera una ecuación de porcentaje, se dice que se ha **resuelto la ecuación.** En el Ejemplo 2, se *resolvió* $x = 84\% \cdot 500$ para encontrar que la variable x es el 420.

¡Cuidado! Cuando resuelva ecuaciones de porcentaje, siempre escriba el porcentaje como un decimal (o una fracción) antes de desarrollar cualquier cálculo. En el Ejemplo 2 se escribió 84% como 0.84 antes de multiplicar por 500.

Los enunciados de porcentaje involucran una comparación de números. En el enunciado "420 es 84% de 500", al número 420 se le llama **cantidad,** al 84% se le llama **porcentaje** y al 500 se le llama **base.** Piense en la base como el estándar de comparación —que representa el **todo** de alguna cantidad—. La cantidad es una **parte** de la base, pero puede exceder la base cuando el porcentaje es mayor a 100%. El porcentaje, por supuesto, tiene el símbolo %.

42	es	84%	de	500.
↓		↓		↓
cantidad (parte)		**porcentaje**		**base** (el todo)

En cualquier problema de porcentaje, la relación entre la cantidad, el porcentaje y la base es la siguiente: *La cantidad es el porcentaje de la base.* Esta relación se muestra abajo como la **ecuación de porcentaje** (también llamada **fórmula de porcentaje**).

Ecuación (fórmula) del porcentaje

Cualquier enunciado de porcentaje puede traducirse a una ecuación del porcentaje que tenga la forma:

$$\text{Cantidad} = \text{porcentaje} \cdot \text{base} \quad \text{o} \quad \text{Parte} = \text{porcentaje} \cdot \text{el todo}$$

EJEMPLO 3 ¿Qué número es 160% de 15.8?

Estrategia Se buscarán las palabras clave *es, de* y *qué número* en el enunciado del porcentaje y se traducirán a símbolos matemáticos para formar una ecuación del porcentaje.

POR QUÉ Después será claro qué operación debe desarrollarse para encontrar el número desconocido.

Solución Primero, se traduce.

¿Qué número	es	160%	de	15.8?
↓	↓	↓	↓	↓
x	=	160%	·	15.8

x es la cantidad, 160% es el porcentaje y 15.8 es la base.

Ahora se resuelve la ecuación desarrollando la multiplicación en el lado derecho.

$x = 1.6 \cdot 15.8$ *Escriba el 160% como un decimal: 160% = 1.6.*

$x = 25.28$ *Realice la multiplicación.*

$$\begin{array}{r} 15.8 \\ \times\ 1.6 \\ \hline 948 \\ 1580 \\ \hline 25.28 \end{array}$$

Por tanto, 25.28 es 160% de 15.8. En este caso, la cantidad excede la base debido a que el porcentaje es mayor a 100%.

Auto-revisión 3

¿Qué número es 240% de 80.3?

Ahora intente **Problema 23**

3 Resolver ecuaciones de porcentaje para encontrar el porcentaje

En el problema del agua potable (Tipo 2 del periódico) se debe encontrar el porcentaje. De nuevo se traducen las palabras del problema a una ecuación de porcentaje y se resuelve.

El lenguaje de las matemáticas Las ecuaciones de porcentaje se resuelven escribiendo una serie de pasos que resultan en una ecuación de la forma $x =$ **un número** o **un número** $= x$. Se dice que la variable x está *despejada* en un lado de la ecuación. *Despejada* significa sola o por sí misma.

Auto-revisión 4

¿4 es qué porcentaje de 80?

Ahora intente **Problemas 27 y 79**

EJEMPLO 4

¿38 es qué porcentaje de 40?

NOTICIAS DIARIAS

Circulación Lunes, 23 de marzo 50 centavos

¡Huelga de tránsito evitada!

Laboral: 84% de los 500 miembros sindicales votaron para aceptar la nueva oferta

Agua potable
38 de los 40 pozos se declararon seguros.

Nuevos nombramientos

Estos seis residentes del área conforman ahora el 75% de la Junta de examinadores estatal.

Estrategia Se buscarán las palabras clave *es, de* y *qué porcentaje* en el enunciado del porcentaje y se traducirán a símbolos matemáticos para formar una ecuación de porcentaje.

POR QUÉ Entonces se puede resolver la ecuación para encontrar el porcentaje desconocido.

Solución Primero, se traduce.

38	es	qué porcentaje	de	40?
↓	↓	↓	↓	↓
38	=	x	·	40

38 es la cantidad, x es el porcentaje y 40 es la base.

$$38 = x \cdot 40$$

Esta es la ecuación a resolver.

En el lado derecho de la ecuación, la cantidad desconocida x es multiplicada por 40. Para deshacer la multiplicación por 40 y despejar x, se dividen ambos lados entre 40.

$$\frac{38}{\mathbf{40}} = \frac{x \cdot 40}{\mathbf{40}}$$

Se puede simplificar la fracción en el lado derecho de la ecuación eliminando el factor común de 40 del numerador y el denominador. En el lado izquierdo se desarrolla la división indicada por la barra de fracción.

$$0.95 = \frac{x \cdot \cancel{40}^{1}}{\cancel{40}_{1}}$$

Para simplificar el lado izquierdo, divida el 38 entre 40.

$$0.95 = x$$

$$\begin{array}{r} 0.95 \\ 40\overline{)\,38.00} \\ -\,36\,0 \\ \hline 2\,00 \\ -\,2\,00 \\ \hline 0 \end{array}$$

Dado que se desea encontrar el porcentaje, se necesita escribir el decimal 0.95 como un porcentaje.

$$0\,95\% = x$$

Para escribir el 0.95 como un porcentaje multiplíquelo por 100 moviendo el punto decimal dos posiciones a la derecha y después inserte un símbolo %.

$$95\% = x$$

Se ha encontrado que el 38 es 95% de 40. Es decir, 95% de los pozos mencionados en el artículo del periódico se declararon seguros.

Auto-revisión 5

¿9 es qué porcentaje de 16?

Ahora intente **Problema 31**

EJEMPLO 5

¿14 es qué porcentaje de 32?

Estrategia Se buscarán las palabras clave *es, de* y *qué porcentaje* en el enunciado de porcentaje y se traducirán a símbolos matemáticos para formar una ecuación de porcentaje.

POR QUÉ Entonces se puede resolver la ecuación para encontrar el porcentaje desconocido.

Solución Primero, se traduce.

¿14	es	qué porcentaje	de	32?
↓	↓	↓	↓	↓
14	=	x	·	32

14 es la cantidad, x es el porcentaje y 32 es la base.

$$14 = x \cdot 32$$ Esta es la ecuación a resolver.

$$\frac{14}{32} = \frac{x \cdot 32}{32}$$ Para deshacer la multiplicación por 32 y despejar x en el lado derecho de la ecuación, divida ambos lados entre 32.

$$0.4375 = \frac{x \cdot \overset{1}{\cancel{32}}}{\underset{1}{\cancel{32}}}$$ Para simplificar la fracción en el lado derecho de la ecuación, elimine el factor común de 32 del numerador y el denominador. En el lado izquierdo, divida el 14 entre 32.

$$0.4375 = x$$

$$0\,43.75\% = x$$ Para escribir el decimal 0.4375 como un porcentaje, multiplíquelo por 100 moviendo el punto decimal dos posiciones a la derecha y después inserte un símbolo %.

$$43.75\% = x$$

$$\begin{array}{r} 0.4375 \\ 32\overline{)\,14.0000} \\ -\,12\,8 \\ \hline 1\,20 \\ -\,96 \\ \hline 240 \\ -\,224 \\ \hline 160 \\ -\,160 \\ \hline 0 \end{array}$$

Por tanto, 14 es el 43.75% de 32.

Utilizando su CALCULADORA Costo de una bolsa de aire

Se estima que una bolsa de aire añade unos $500 adicionales al costo de un automóvil. ¿Qué porcentaje del precio de lista de $16,295 es el costo de la bolsa de aire?

Primero, se traducen las palabras de problema a una ecuación de porcentaje.

¿Qué porcentaje	del	precio de lista de $16,295	es	el costo de la bolsa de aire?
x	$\cdot$	16,295	$=$	500

500 es la cantidad, x es el porcentaje y 16,295 es la base.

Después se resuelve la ecuación.

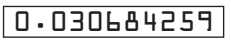
$$x \cdot 16{,}295 = 500$$

$$\frac{x \cdot 16{,}295}{16{,}295} = \frac{500}{16{,}295}$$ Para deshacer la multiplicación por 16,295 y despejar x en el lado izquierdo, divida ambos lados de la ecuación entre 16,295.

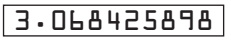
$$x = \frac{500}{16{,}295}$$ Para simplificar la fracción en el lado izquierdo elimine el factor común del 16,295 del numerador y el denominador.

Para desarrollar la división en el lado derecho utilizando una calculadora científica, introduzca lo siguiente:

500 [÷] 16295 [=]



Esta pantalla da la respuesta en forma decimal. Para cambiarla a un porcentaje se multiplica el resultado por 100. Esto mueve el punto decimal 2 posiciones a la derecha. (Vea la pantalla.) Después se inserta un símbolo %. Si se redondea a la décima más cercana de un porcentaje, el costo de la bolsa de aire es de alrededor del 3.1% del precio de lista.



EJEMPLO 6 ¿Qué porcentaje de 6 es 7.5?

Estrategia Se buscarán las palabras clave *es, de* y *qué porcentaje* en el enunciado de porcentaje y se traducirán a símbolos matemáticos para formar una ecuación de porcentaje.

POR QUÉ Entonces se puede resolver la ecuación para encontrar el porcentaje desconocido.

Auto-revisión 6

¿Qué porcentaje de 5 es 8.5?

Ahora intente **Problema 35**

Solución Primero, se traduce.

¿Qué porcentaje de 6 es 7.5

$x \quad \cdot \quad 6 \quad = \quad 7.5$

$x \cdot 6 = 7.5$ Esta es la ecuación a resolver.

$\frac{x \cdot 6}{6} = \frac{7.5}{6}$ Para deshacer la multiplicación por 6 y despejar x en el lado izquierdo de la ecuación, divida ambos lados entre 6.

$\frac{x \cdot \overset{1}{\cancel{6}}}{\underset{1}{\cancel{6}}} = 1.25$ Para simplificar la fracción en el lado izquierdo de la ecuación, elimine el factor común de 6 del numerador y el denominador. En el lado derecho, divida el 7.5 entre 6.

$x = 1.25$

$x = 1.25\%$ Para escribir el decimal 1.25 como un porcentaje, multiplíquelo por 100 moviendo el punto decimal dos posiciones a la derecha y después inserte un símbolo %.

$x = 125\%$

$$\begin{array}{r} 1.25 \\ 6\overline{)7.50} \\ -6 \\ \hline 15 \\ -12 \\ \hline 30 \\ -30 \\ \hline 0 \end{array}$$

Por tanto, 7.5 es 125% de 6.

4 Resolver ecuaciones de porcentaje para encontrar la base

En el problema de porcentaje acerca de la Junta estatal de examinadores (Tipo 3 del periódico), se debe encontrar la base. Como anteriormente, se traduce el enunciado de porcentaje a una ecuación de porcentaje y después se encuentra el número desconocido.

Auto-revisión 7

¿3 es 5% de qué número?

Ahora intente **Problema 39**

EJEMPLO 7 ¿6 es 75% de qué número?

NOTICIAS DIARIAS

Circulación Lunes, 23 de marzo 50 centavos

¡Huelga de tránsito evitada!

Laboral: 84% de los 500 miembros sindicales votaron para aceptar la nueva oferta

Agua potable 38 de los 40 pozos se declararon seguros

Nuevos nombramientos

Estos seis residentes del área conforman ahora 75% de la Junta estatal de examinadores.

Estrategia Se buscarán las palabras clave *es*, *de* y *qué número* en el enunciado de porcentaje y se traducirán a símbolos matemáticos para formar una ecuación de porcentaje.

POR QUÉ Entonces se puede resolver la ecuación para encontrar el porcentaje desconocido.

Solución Primero se traduce.

6 es 75% de qué número?

$6 \quad = \quad 75\% \quad \cdot \quad x$

6 es la cantidad, 75% es el porcentaje, y x es la base.

Ahora se resuelve la ecuación.

$6 = 0.75 \cdot x$ Escriba el 75% como un decimal: 75% = 0.75.

$\frac{6}{0.75} = \frac{0.75 \cdot x}{0.75}$ Para deshacer la multiplicación por 0.75 y despejar x en el lado derecho, divida ambos lados de la ecuación entre 0.75.

$8 = \frac{\overset{1}{\cancel{0.75}} \cdot x}{\underset{1}{\cancel{0.75}}}$ Para simplificar la fracción en el lado derecho de la ecuación, elimine el factor común de 0.75. En el lado izquierdo, divida el 6 entre 0.75.

$8 = x$

$$\begin{array}{r} 8 \\ 75\overline{)600} \\ -600 \\ \hline 0 \end{array}$$

Por tanto, 6 es 75% de 8. Es decir, hay 8 miembros en la Junta estatal de examinadores mencionada en el artículo del periódico.

Consejo útil En ocasiones los cálculos para resolver un problema de porcentaje se realizan con facilidad si se escribe el porcentaje como una fracción en vez de como un decimal. Este es el caso con los porcentajes que tienen equivalentes decimales *repetitivos* como $33\frac{1}{3}\%$, $66\frac{2}{3}\%$ y $16\frac{2}{3}\%$. Puede desear repasar la tabla de porcentajes y sus equivalentes fraccionales en la página 508.

EJEMPLO 8

¿31.5 es $33\frac{1}{3}\%$ de qué número?

Estrategia Se buscarán las palabras clave *es, de* y *qué número* en el enunciado de porcentaje y se traducirán a símbolos matemáticos para formar una ecuación de porcentaje.

POR QUÉ Entonces se puede resolver la ecuación para encontrar el número desconocido.

Solución Primero se traduce.

31.5	es	$33\frac{1}{3}\%$	de	qué número?
↓	↓	↓	↓	↓
31.5	=	$33\frac{1}{3}\%$	·	x

31.5 es la cantidad, $33\frac{1}{3}\%$ es el porcentaje y x es la base.

En este caso, los cálculos pueden realizarse con mayor facilidad escribiendo $33\frac{1}{3}\%$ como una fracción en vez de como un decimal repetitivo.

$31.5 = \frac{1}{3} \cdot x$ Recuerde a partir de la Sección 6.1 que $33\frac{1}{3}\% = \frac{1}{3}$.

$\frac{31.5}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot x}{\frac{1}{3}}$ Para deshacer la multiplicación por $\frac{1}{3}$ y despejar x en el lado derecho de la ecuación, divida ambos lados entre $\frac{1}{3}$.

$\frac{31.5}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{\cancel{1}^{1}}{\cancel{3}} \cdot x}{\frac{1}{\cancel{3}_{1}}}$ Para simplificar la fracción en el lado derecho de la ecuación, elimine el factor común de $\frac{1}{3}$ del numerador y el denominador.

$31.5 \div \frac{1}{3} = x$ En el lado izquierdo, la barra de fracción indica una división.

$\frac{31.5}{1} \cdot \frac{3}{1} = x$ En el lado izquierdo, escriba el 31.5 como una fracción: $\frac{31.5}{1}$. Después utilice la regla para la división de fracciones: Multiplique por el recíproco de $\frac{1}{3}$, el cual es $\frac{3}{1}$.

$94.5 = x$ Realice la multiplicación.

$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 31.5 \\ \times\ 3 \\ \hline 94.5 \end{array}$$

Por tanto, 31.5 es $33\frac{1}{3}\%$ de 94.5.

Auto-revisión 8

¿150 es $66\frac{2}{3}\%$ de qué número?

Ahora intente **Problemas 43 y 83**

Para resolver problemas de aplicación de porcentaje, con frecuencia se tienen que reescribir los hechos del problema en forma de enunciado del porcentaje antes que se puedan traducir a una ecuación.

EJEMPLO 9

Rentas En un complejo de departamentos, 198 de las unidades están ocupadas actualmente. Si esto representa una tasa de ocupación de 88%, ¿cuántas unidades hay en el complejo?

Estrategia Se leerá con cuidado el problema y se utilizarán los hechos proporcionados para escribirlos en la forma de un enunciado de porcentaje.

Auto-revisión 9

CAPACIDAD DE UN GIMNASIO Un total de 784 personas asistieron a una graduación en el gimnasio de una preparatoria. Si estaba a 98% de su capacidad, ¿cuál es la capacidad total del gimnasio?

Ahora intente **Problema 81**

POR QUÉ Entonces se puede traducir el enunciado en una ecuación de porcentaje y resolverla para encontrar el número desconocido de unidades en el complejo.

Solución Una tasa de ocupación de 88% significa que 88% de las unidades están ocupadas. Por tanto, las 198 unidades que están actualmente ocupadas son 88% de un número desconocido de unidades en el complejo y se puede escribir:

198 es 88% de qué número?

$198 = 88\% \cdot x$

198 es la cantidad, 88% es el porcentaje y x es la base.

Ahora se resuelve la ecuación.

$$198 = 88\% \cdot x$$

$$198 = 0.88 \cdot x$$

Escriba el 88% como un decimal: 88% = 0.88.

$$\frac{198}{0.88} = \frac{0.88 \cdot x}{0.88}$$

Para deshacer la multiplicación por 0.88 y despejar x en el lado derecho, divida ambos lados de la ecuación entre 0.88.

$$\frac{198}{0.88} = \frac{\overset{1}{\cancel{0.88}} \cdot x}{\underset{1}{\cancel{0.88}}}$$

Para simplificar la fracción en el lado derecho de la ecuación, elimine el factor común de 0.88 del numerador y el denominador. En el lado izquierdo divida el 198 entre 0.88.

$$225 = x$$

$$\begin{array}{r} 225 \\ 88\overline{)\,19800} \\ -176 \\ \hline 220 \\ -176 \\ \hline 440 \\ -440 \\ \hline 0 \end{array}$$

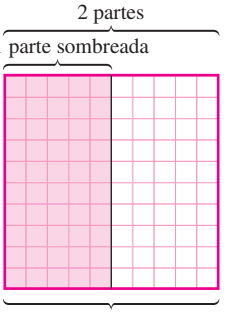
El complejo de departamentos tiene 225 unidades, de las cuales 198, u 88%, están ocupadas.

Si sólo está aprendiendo el método de la ecuación de porcentaje para resolver problemas de porcentaje, vaya a la página 527 y reanude su lectura en el Objetivo 5.

MÉTODO 2: PROPORCIONES DE PORCENTAJE

1 Escribir proporciones de porcentaje

Otro método para resolver problemas de porcentaje involucra escribir y después resolver una proporción. Para introducir este método, considere la figura a la derecha. La línea vertical a la mitad divide la figura en dos partes de igual tamaño. Dado que 1 de las 2 partes está sombreada de rojo, la porción sombreada de la figura puede describirse por medio de la razón $\frac{1}{2}$. A esta se le llama **razón cantidad a base** (o **parte al todo**).



50 de las 100 partes sombreadas: 50% sombreada

Ahora se consideran las 100 regiones cuadradas de igual tamaño dentro de la figura. Dado que 50 de ellas están sombreadas, se dice que $\frac{50}{100}$, o 50% de la figura está sombreada. A la razón $\frac{50}{100}$ se le llama **razón del porcentaje.**

Dado que la razón cantidad a base, $\frac{1}{2}$, y la razón del porcentaje, $\frac{50}{100}$, representan la misma porción sombreada de la figura, deben ser iguales y se puede escribir

La razón cantidad a base $\frac{1}{2} = \frac{50}{100}$ La razón del porcentaje

Recuerde a partir de la Sección 5.2 que a los enunciados de este tipo que declaran que dos razones son iguales se les llama *proporciones*. A $\frac{1}{2} = \frac{50}{100}$ se le llama **proporción de porcentaje.** En la siguiente página se muestran los cuatro términos de una proporción de porcentaje.

Proporción del porcentaje

Para traducir un enunciado de porcentaje a una **proporción de porcentaje,** utilice la siguiente forma:

La cantidad es a la base como el porcentaje es a 100.

$$\frac{\text{cantidad}}{\text{base}} = \frac{\text{porcentaje}}{100}$$

Este siempre es el 100 debido a que porcentaje significa partes por centena.

o

La parte es al todo como el porcentaje es al 100

$$\frac{\text{parte}}{\text{todo}} = \frac{\text{porcentaje}}{100}$$

Para escribir una proporción de porcentaje debe identificar 3 de los términos a medida que lee el problema. (Recuerde, el cuarto término de la proporción siempre es el 100.) Aquí hay algunas maneras de identificar estos términos.

- El **porcentaje** es fácil de encontrar. Busque el símbolo % o las palabras *qué porcentaje.*
- La **base** (o **el todo**) por lo regular sigue de la palabra *de*.
- La **cantidad** (o **parte**) es comparada con la base (o el todo).

EJEMPLO 1 Traduzca cada enunciado de porcentaje a una proporción de porcentaje.

a. ¿Qué número es 12% de 64?

b. ¿Qué porcentaje de 88 es 11?

c. ¿165% de qué número es 366?

Estrategia Una proporción de porcentaje tiene la forma $\frac{\text{cantidad}}{\text{base}} = \frac{\text{porcentaje}}{100}$. Dado que uno de los términos de la proporción de porcentaje siempre es el 100, sólo se necesitan identificar tres términos para escribir la proporción. Se comenzará identificando el porcentaje y la base en el enunciado proporcionado.

POR QUÉ El número restante (o desconocido) debe ser la cantidad.

Solución

a. Se identificarán los términos en este orden:

- *Primero:* el porcentaje (al lado del símbolo %)
- *Segundo:* la base (por lo regular después de la palabra *de*)
- *Tercero:* la cantidad (el número que queda)

¿Qué es 12% de 64?

cantidad, porcentaje, base

$$\frac{x}{64} = \frac{12}{100}$$

b. ¿Qué de 88 es 11?

porcentaje, base, cantidad

$$\frac{11}{88} = \frac{x}{100}$$

Auto-revisión 1

Traduzca cada enunciado de porcentaje a una proporción de porcentaje.

a. ¿Qué número es 33% de 80?

b. ¿Qué porcentaje de 55 es 6?

c. ¿172% de qué número es 4?

Ahora intente **Problema 17**

c. 165% de qué número es 366?

porcentaje — base — cantidad

$$\frac{366}{x} = \frac{165}{100}$$

2 Resolver proporciones de porcentaje para encontrar la cantidad

Recuerde el problema del sindicato laboral del ejemplo del periódico en la introducción para esta sección. Se puede escribir y resolver una proporción del porcentaje para encontrar la cantidad desconocida.

Auto-revisión 2

¿Qué número es 36% de 400?

Ahora intente **Problemas 19 y 71**

EJEMPLO 2 ¿Qué número es 84% de 500?

NOTICIAS DIARIAS

¡Huelga de tránsito evitada!

Laboral: 84% de los 500 miembros sindicales votaron para aceptar la nueva oferta

Agua potable

38 de los 40 pozos se declararon seguros.

Nuevos nombramientos

Estos seis residentes del área conforman ahora 75% de la Junta estatal de examinadores.

Estrategia Se identificará el porcentaje, la base y la cantidad y se escribirá una proporción de porcentaje de la forma $\frac{\text{cantidad}}{\text{base}} = \frac{\text{porcentaje}}{100}$.

POR QUÉ Entonces se puede resolver la proporción para encontrar el número desconocido.

Solución Primero, se escribe la proporción de porcentaje.

¿Qué número es 84% de 500?

cantidad — porcentaje — base

$$\frac{x}{500} = \frac{84}{100}$$

Esta es la proporción a resolver.

Para hacer los cálculos más sencillos es de utilidad simplificar la razón $\frac{84}{100}$ en este momento.

$$\frac{x}{500} = \frac{21}{25}$$

En el lado derecho, simplifique: $\frac{84}{100} = \frac{\overset{1}{\cancel{4}} \cdot 21}{\underset{1}{\cancel{4}} \cdot 25} = \frac{21}{25}$.

Recuerde a partir de la Sección 5.2 que para resolver una proporción se utilizan los productos cruzados.

$x \cdot 25 = 500 \cdot 21$ Encuentre los productos cruzados: $\frac{x}{500} = \frac{21}{25}$. Después iguálelos.

$x \cdot 25 = 10{,}500$ Para simplificar el lado derecho de la ecuación, realice la multiplicación: $500 \cdot 21 = 10{,}500$.

$\frac{x \cdot \overset{1}{\cancel{25}}}{\underset{1}{\cancel{25}}} = \frac{10{,}500}{25}$ Para deshacer la multiplicación por 25 y despejar x en el lado izquierdo, divida ambos lados de la ecuación entre 25. Después elimine el factor común de 25 del numerador y el denominador.

$x = 420$ En el lado derecho divida el 10,500 entre 25.

$$\begin{array}{r} 500 \\ \times\ 21 \\ \hline 500 \\ 10\,000 \\ \hline 10{,}500 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 420 \\ 25\overline{)10{,}500} \\ -\,10\,0 \\ \hline 50 \\ -\,50 \\ \hline 00 \\ -\,0 \\ \hline 0 \end{array}$$

Se ha encontrado que el 420 es 84% de 500. Es decir, 420 miembros del sindicato mencionados en el artículo del periódico votaron para aceptar la nueva oferta.

El lenguaje de las matemáticas Cuando se encuentra el valor de la variable que hace verdadera una proporción de porcentaje, se dice que se ha **resuelto la proporción.** En el Ejemplo 2 se *resolvió* $\frac{x}{500} = \frac{84}{100}$ para encontrar que la variable x es el 420.

EJEMPLO 3 ¿Qué número es 160% de 15.8?

Estrategia Se identificará el porcentaje, la base y la cantidad y se escribirá una proporción de porcentaje de la forma $\frac{\text{cantidad}}{\text{base}} = \frac{\text{porcentaje}}{100}$.

POR QUÉ Entonces se puede resolver la proporción para encontrar el número desconocido.

Solución Primero, se escribe la proporción de porcentaje.

¿Qué número (cantidad) es 160% (porcentaje) de 15.8? (base)

$$\frac{x}{15.8} = \frac{160}{100}$$

Esta es la proporción a resolver.

Para hacer los cálculos más sencillos, es de utilidad simplificar la razón $\frac{160}{100}$ en este momento.

$\frac{x}{15.8} = \frac{8}{5}$ En el lado derecho, simplifique: $\frac{160}{100} = \frac{8 \cdot \overset{1}{\cancel{20}}}{5 \cdot \cancel{20}} = \frac{8}{5}$.

$x \cdot 5 = 15.8 \cdot 8$ Encuentre los productos cruzados: $\frac{x}{15.8} = \frac{8}{5}$. Después iguálelos.

$x \cdot 5 = 126.4$ Para simplificar el lado derecho de la ecuación, realice la multiplicación: $15.8 \cdot 8 = 126.4$.

$\frac{x \cdot \overset{1}{\cancel{5}}}{\cancel{5}} = \frac{126.4}{5}$ Para deshacer la multiplicación por 5 y despejar x en el lado izquierdo, divida ambos lados de la ecuación entre 5. Después elimine el factor común de 5 del numerador y el denominador.

$x = 25.28$ En el lado derecho, divida el 126.4 entre 5.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 4\,6} \\ 15.8 \\ \times\ \ 8 \\ \hline 126.4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25.28 \\ 5\overline{)126.40} \\ -10 \\ \hline 26 \\ -25 \\ \hline 14 \\ -10 \\ \hline 40 \\ -40 \\ \hline 0 \end{array}$$

Por tanto, el 25.28 es el 160% de 15.8.

Auto-revisión 3

¿Qué número es 240% de 80.3?

Ahora intente **Problema 23**

3 Resolver proporciones de porcentaje para encontrar el porcentaje

Recuerde el problema del agua potable del ejemplo del periódico en la introducción para esta sección. Se puede escribir y resolver una proporción de porcentaje para encontrar el porcentaje desconocido.

EJEMPLO 4 ¿38 es qué porcentaje de 40?

NOTICIAS DIARIAS

Circulación — Lunes, 23 de marzo — 50 centavos

¡Huelga de tránsito evitada!

Laboral: 84% de los 500 miembros sindicales votaron para aceptar la nueva oferta

Agua potable
38 de los 40 pozos se declararon seguros.

Nuevos nombramientos

Estos seis residentes del área conforman ahora 75% de la Junta estatal de examinadores.

Estrategia Se identificará el porcentaje, la base y la cantidad y se escribirá una proporción de porcentaje de la forma $\frac{\text{cantidad}}{\text{base}} = \frac{\text{porcentaje}}{100}$.

POR QUÉ Entonces se puede resolver la proporción para encontrar el número desconocido.

Solución Primero, se escribe la proporción de porcentaje.

38 (cantidad) es qué porcentaje (porcentaje) de 40? (base)

$$\frac{38}{40} = \frac{x}{100}$$

Esta es la proporción a resolver.

Auto-revisión 4

¿4 es qué porcentaje de 80?

Ahora intente **Problemas 27 y 79**

Para hacer los cálculos más sencillos, es de utilidad simplificar la razón $\frac{38}{40}$ en este momento.

$$\frac{19}{20} = \frac{x}{100}$$ En el lado izquierdo, simplifique: $\frac{38}{40} = \frac{\overset{1}{2} \cdot 19}{2 \cdot \underset{1}{20}} = \frac{19}{20}$.

$19 \cdot 100 = 20 \cdot x$ Para resolver la proporción encuentre los productos cruzados: $\frac{19}{20} = \frac{x}{100}$. Después iguálelos.

$1{,}900 = 20 \cdot x$ Para simplificar el lado izquierdo de la ecuación realice la multiplicación: $19 \cdot 100 = 1{,}900$.

$\frac{1{,}900}{20} = \frac{\overset{1}{\cancel{20}} \cdot x}{\underset{1}{\cancel{20}}}$ Para deshacer la multiplicación por 20 y despejar x en el lado derecho, divida ambos lados de la ecuación entre 20. Después elimine el factor común de 20 del numerador y el denominador.

$95 = x$ En el lado izquierdo divida el 1,900 entre 20.

$$\begin{array}{r} 95 \\ 20\overline{)1{,}900} \\ -180 \\ \hline 100 \\ -100 \\ \hline 0 \end{array}$$

Se ha encontrado que el 38 es el 95% de 40. Es decir, el 95% de los pozos mencionados en el artículo del periódico se declararon seguros.

Auto-revisión 5

¿9 es qué porcentaje de 16?

Ahora intente **Problema 31**

EJEMPLO 5

¿14 es qué porcentaje de 32?

Estrategia Se identificará el porcentaje, la base y la cantidad y se escribirá una proporción de porcentaje de la forma $\frac{\text{cantidad}}{\text{base}} = \frac{\text{porcentaje}}{100}$.

POR QUÉ Entonces se puede resolver la proporción para encontrar el número desconocido.

Solución Primero, se escribe la proporción del porcentaje.

¿14 es qué porcentaje de 32?

cantidad, porcentaje, base

$$\frac{14}{32} = \frac{x}{100}$$

Esta es la proporción a resolver.

Para hacer los cálculos más sencillos, es de utilidad simplificar la razón $\frac{14}{32}$ en este momento.

$$\frac{7}{16} = \frac{x}{100}$$ En el lado izquierdo, simplifique: $\frac{14}{32} = \frac{\overset{1}{2} \cdot 7}{2 \cdot 16} = \frac{7}{16}$.

$7 \cdot 100 = 16 \cdot x$ Para resolver la proporción encuentre los productos cruzados: $\frac{7}{16} = \frac{x}{100}$. Después iguálelos.

$700 = 16 \cdot x$ Para simplificar el lado izquierdo de la ecuación realice la multiplicación: $7 \cdot 100 = 700$.

$\frac{700}{16} = \frac{\overset{1}{\cancel{16}} \cdot x}{\underset{1}{\cancel{16}}}$ Para deshacer la multiplicación por 16 y despejar x en el lado derecho, divida ambos lados de la ecuación entre 16. Después elimine el factor común de 16 del numerador y el denominador.

$43.75 = x$ En el lado izquierdo divida el 700 entre 16.

$$\begin{array}{r} 43.75 \\ 16\overline{)700.00} \\ -64 \\ \hline 60 \\ -48 \\ \hline 120 \\ -112 \\ \hline 80 \\ -80 \\ \hline 0 \end{array}$$

Por tanto, el 14 es el 43.75% de 32.

Auto-revisión 6

¿Qué porcentaje de 5 es 8.5?

Ahora intente **Problema 35**

EJEMPLO 6

¿Qué porcentaje de 6 es 7.5?

Estrategia Se identificará el porcentaje, la base y la cantidad y se escribirá una proporción de porcentaje de la forma $\frac{\text{cantidad}}{\text{base}} = \frac{\text{porcentaje}}{100}$.

POR QUÉ Entonces se puede resolver la proporción para encontrar el porcentaje desconocido.

Solución Primero, se escribe la proporción de porcentaje.

¿Qué porcentaje de 6 es 7.5?

porcentaje — base — cantidad

$$\frac{7.5}{6} = \frac{x}{100}$$

Esta es la proporción a resolver.

$7.5 \cdot 100 = 6 \cdot x$ Para resolver la proporción encuentre los productos cruzados: $\frac{7.5}{6} = \frac{x}{100}$. Después iguálelos.

$750 = 6 \cdot x$ Para simplificar el lado izquierdo de la ecuación realice la multiplicación: $7.5 \cdot 100 = 750$.

$\frac{750}{6} = \frac{6 \cdot x}{6}$ Para deshacer la multiplicación por 6 y despejar x en el lado derecho, divida ambos lados de la ecuación entre 6. Después elimine el factor común de 6 del numerador y el denominador.

$125 = x$ En el lado izquierdo divida el 750 entre 6.

$$\begin{array}{r} 125 \\ 6\overline{)750} \\ -6 \\ \hline 15 \\ -12 \\ \hline 30 \\ -30 \\ \hline 0 \end{array}$$

Por tanto, el 7.5 es 125% de 6.

4 Resolver proporciones de porcentaje para encontrar la base

Recuerde el problema de la Junta estatal de examinadores del ejemplo del periódico en la introducción para esta sección. Se puede escribir y resolver una proporción de porcentaje para encontrar la base desconocida.

EJEMPLO 7 ¿6 es 75% de qué número?

NOTICIAS DIARIAS
Circulación Lunes, 23 de marzo 50 centavos
¡Huelga de tránsito evitada!
Laboral: 84% de los 500 miembros sindicales votaron para aceptar la nueva oferta
Agua potable
38 de los 40 pozos se declararon seguros
Nuevos nombramientos
Estos seis residentes del área conforman ahora 75% de la Junta estatal de examinadores.

Estrategia Se identificará el porcentaje, la base y la cantidad y se escribirá una proporción de porcentaje de la forma $\frac{\text{cantidad}}{\text{base}} = \frac{\text{porcentaje}}{100}$.

POR QUÉ Entonces se puede resolver la proporción para encontrar el número desconocido.

Solución Primero, se escribe la proporción de porcentaje.

¿6 es 75% de qué número?

cantidad — porcentaje — base

$$\frac{6}{x} = \frac{75}{100}$$

Para hacer los cálculos más sencillos, es de utilidad simplificar la razón $\frac{75}{100}$ en este momento.

$\frac{6}{x} = \frac{3}{4}$ Simplifique: $\frac{75}{100} = \frac{3 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{3}{4}$.

$6 \cdot 4 = x \cdot 3$ Para resolver la proporción encuentre los productos cruzados: $\frac{6}{x} = \frac{3}{4}$. Después iguálelos.

$24 = x \cdot 3$ Para simplificar el lado izquierdo de la ecuación realice la multiplicación: $6 \cdot 4 = 24$.

Auto-revisión 7

¿3 es 5% de qué número?

Ahora intente **Problema 39**

$$\frac{24}{3} = \frac{x \cdot \overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{3}}}$$ Para deshacer la multiplicación por 3 y despejar x en el lado derecho, divida ambos lados de la ecuación entre 3. Después elimine el factor común de 3 del numerador y el denominador.

$$8 = x$$ En el lado izquierdo divida el 24 entre 3.

Por tanto, el 6 es el 75% de 8. Es decir, hay 8 miembros en la Junta estatal de examinadores mencionada en el artículo del periódico.

Auto-revisión 8

¿150 es $66\frac{2}{3}\%$ de qué número?

Ahora intente **Problemas 43 y 83**

EJEMPLO 8 ¿31.5 es $33\frac{1}{3}\%$ de qué número?

Estrategia Se identificará el porcentaje, la base y la cantidad y se escribirá una proporción de porcentaje de la forma $\frac{\text{cantidad}}{\text{base}} = \frac{\text{porcentaje}}{100}$.

POR QUÉ Entonces se puede resolver la proporción para encontrar el número desconocido.

Solución Primero, se escribe la proporción de porcentaje.

¿31.5 es $33\frac{1}{3}\%$ de qué número?

cantidad porcentaje base

$$\frac{31.5}{x} = \frac{33\frac{1}{3}}{100}$$

Para hacer los cálculos más sencillos es de utilidad escribir el número mixto $33\frac{1}{3}$ como la fracción impropia $\frac{100}{3}$.

$$\frac{31.5}{x} = \frac{\frac{100}{3}}{100}$$ Escriba $33\frac{1}{3}$ como $\frac{100}{3}$.

$$31.5 \cdot 100 = x \cdot \frac{100}{3}$$ Para resolver la proporción encuentre los productos cruzados: $\frac{31.5}{x} = \frac{\frac{100}{3}}{100}$. Después iguálelos.

$$3{,}150 = x \cdot \frac{100}{3}$$ Para simplificar el lado izquierdo de la ecuación realice la multiplicación: $31.5 \cdot 100 = 3{,}150$.

$$\frac{3{,}150}{\frac{100}{3}} = \frac{x \cdot \overset{1}{\cancel{100}}/3}{\underset{1}{\cancel{100}}/\cancel{3}}$$ Para deshacer la multiplicación por $\frac{100}{3}$ y despejar x en el lado derecho, divida ambos lados de la ecuación entre $\frac{100}{3}$. Después elimine el factor común de $\frac{100}{3}$ del numerador y el denominador.

$$3{,}150 \div \frac{100}{3} = x$$ En el lado izquierdo, la barra de fracción indica una división.

$$\frac{3{,}150}{1} \cdot \frac{3}{100} = x$$ En el lado izquierdo, escriba el 3,150 como una fracción: $\frac{3{,}150}{1}$. Después utilice la regla para la división de fracciones: Multiplique por el recíproco de $\frac{100}{3}$, el cual es $\frac{3}{100}$.

$$\frac{9{,}450}{100} = x$$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$$94.50 = x$$ Divida el 9,450 entre 100 moviendo el punto decimal implícito en el 9,450 dos posiciones a la izquierda.

Por tanto, el 31.5 es $33\frac{1}{3}\%$ de 94.5.

Para resolver problemas de aplicación de porcentaje, con frecuencia se tienen que reescribir los hechos del problema en el enunciado de porcentaje antes que se puedan traducir a una ecuación.

EJEMPLO 9 ***Rentas*** En un complejo de departamentos, 198 de las unidades están ocupadas actualmente. Si esto representa una tasa de ocupación de 88%, ¿cuántas unidades hay en el complejo?

Estrategia Se leerá con cuidado el problema y se utilizarán los hechos proporcionados para escribirlos en la forma de un enunciado de porcentaje.

POR QUÉ Entonces se puede traducir y resolver una proporción de porcentaje para encontrar el número desconocido de unidades en el complejo.

Solución Una tasa de ocupación de 88% significa que 88% de las unidades están ocupadas. Por tanto, las 198 unidades que están actualmente ocupadas son 88% de un número desconocido de unidades en el complejo y se puede escribir:

¿198 (cantidad) es 88% (porcentaje) de qué número? (base)

$$\frac{198}{x} = \frac{88}{100}$$

Esta es la proporción a resolver.

Para hacer los cálculos más sencillos es de utilidad simplificar la razón $\frac{88}{100}$ en este momento.

$$\frac{198}{x} = \frac{22}{25}$$

En el lado derecho simplifique: $\frac{88}{100} = \frac{4 \cdot 22}{4 \cdot 25} = \frac{22}{25}$.

$$198 \cdot 25 = x \cdot 22$$

Encuentre los productos cruzados. Después iguálelos.

$$4{,}950 = x \cdot 22$$

Para simplificar el lado izquierdo realice la multiplicación: $198 \cdot 25 = 4{,}950$.

$$\frac{4{,}950}{22} = \frac{x \cdot 22}{22}$$

Para deshacer la multiplicación por 22 y despejar x en el lado derecho, divida ambos lados de la ecuación entre 22. Después elimine el factor común de 22 del numerador y el denominador.

$$225 = x$$

En el lado izquierdo divida el 4,950 entre 22.

$$\begin{array}{r} 198 \\ \times 25 \\ \hline 990 \\ 3960 \\ \hline 4{,}950 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 225 \\ 22\overline{)4{,}950} \\ -44 \\ \hline 55 \\ -44 \\ \hline 110 \\ -110 \\ \hline 0 \end{array}$$

El complejo de departamentos tiene 225 unidades, de las cuales 198, u 88%, están ocupadas.

Auto-revisión 9

CAPACIDAD DE UN GIMNASIO Un total de 784 personas asistieron a una graduación en el gimnasio de una preparatoria. Si estaba al 98% de su capacidad, ¿cuál es la capacidad total del gimnasio?

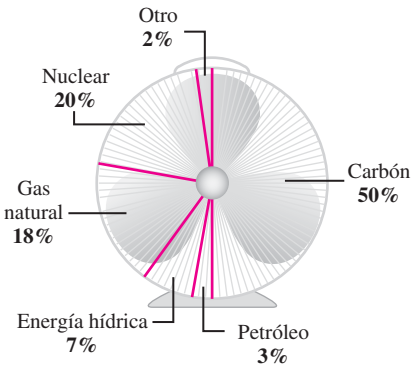
Ahora intente **Problema 81**

5 Leer gráficas circulares

Los porcentajes se utilizan con **gráficas circulares,** o **gráficas de pastel,** como una manera de representar información para comparación. En la figura de abajo, el círculo completo representa la cantidad total de electricidad generada en Estados Unidos en el 2008. Las piezas con forma de rebanada de pastel de la gráfica muestran los tamaños relativos de las fuentes de energía utilizadas para generar la electricidad. Por ejemplo, se observa que la mayor cantidad de electricidad (50%) fue generada a partir del carbón. Observe que si se suman los porcentaje de todas las categorías (50% + 3% + 7% + 18% + 20% + 2%), la suma es del 100%.

Las 100 marcas gruesas igualmente espaciadas alrededor del círculo sirven como una ayuda visual cuando se construye una gráfica circular. Por ejemplo, para representar la energía hídrica como 7%, se trazó una línea desde el centro del círculo a una marca gruesa. Después se contaron 7 marcas y se trazó una segunda línea del centro a esa marca para completar la cuña con forma de rebanada de pastel.

Fuente de electricidad en Estados Unidos, 2008

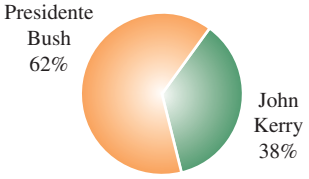


Fuente: Energy Information Administration

Auto-revisión 10

ELECCIONES PRESIDENCIALES

En la gráfica circular de abajo se muestran los resultados de la elección presidencial de Estados Unidos del 2004. Encuentre el número de estados que ganó el presidente Bush.

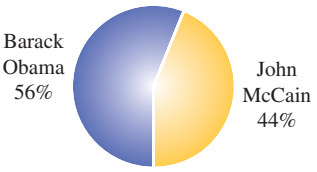


Elección presidencial del 2004
Estados ganados por cada candidato

Ahora intente **Problema 85**

EJEMPLO 10 *Elecciones presidenciales*

En la gráfica circular a la derecha se muestran los resultados de la elección presidencial de Estados Unidos del 2008. Encuentre el número de estados que ganó Barack Obama.



Elección presidencial del 2008
Estados ganados por cada candidato

Estrategia Se rescribirán los datos del problema en la forma de un enunciado de porcentaje.

POR QUÉ Entonces se puede traducir el enunciado a una ecuación de porcentaje (o proporción de porcentaje) para encontrar el número de estados ganados por Barack Obama.

Solución La gráfica circular muestra que Barack Obama ganó 56% de los 50 estados. Por tanto, el porcentaje es 56% y la base es el 50. Una manera de encontrar la cantidad desconocida es escribir y después resolver una ecuación de porcentaje.

¿Qué número	es	56%	de	50?	
x	$=$	56%	$\cdot$	50	Traduzca a una ecuación de porcentaje.

Ahora se desarrolla la multiplicación en el lado derecho de la ecuación.

$x = 0.56 \cdot 50$ Escriba el 56% como un decimal: 56% = 0.56.

$x = 28$ Realice la multiplicación.

$$\begin{array}{r} 50 \\ \times 0.56 \\ \hline 3\,00 \\ 25\,00 \\ \hline 28.00 \end{array}$$

Por tanto, Barack Obama ganó 28 de los 50 estados en la elección presidencial de Estados Unidos del 2008.

Otra manera de encontrar la cantidad desconocida es escribir y después resolver una proporción de porcentaje.

¿Qué número	es	56%	de	50?
cantidad		porcentaje		base

$$\frac{x}{50} = \frac{56}{100}$$

Esta es la proporción a resolver.

Para hacer los cálculos más sencillos es de utilidad simplificar la razón $\frac{56}{100}$ en este momento.

$\frac{x}{50} = \frac{14}{25}$ En el lado derecho simplifique: $\frac{56}{100} = \frac{\overset{1}{\cancel{4}} \cdot 14}{\underset{1}{\cancel{4}} \cdot 25} = \frac{14}{25}$.

$x \cdot 25 = 50 \cdot 14$ Encuentre los productos cruzados: $\frac{x}{50} = \frac{14}{25}$. Después iguálelos.

$x \cdot 25 = 700$ Para simplificar el lado derecho de la ecuación realice la multiplicación: $50 \cdot 14 = 700$.

$\frac{x \cdot \overset{1}{\cancel{25}}}{\underset{1}{\cancel{25}}} = \frac{700}{25}$ Para deshacer la multiplicación por 25 y despejar x en el lado izquierdo, divida ambos lados de la ecuación entre 25. Después elimine el factor común de 25 del numerador y el denominador.

$x = 28$ En el lado derecho divida el 700 entre 25.

$$\begin{array}{r} 50 \\ \times 14 \\ \hline 200 \\ 500 \\ \hline 700 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ 25\overline{)700} \\ -50 \\ \hline 200 \\ -200 \\ \hline 0 \end{array}$$

Como se esperaría, el método de la proporción de porcentaje da la misma respuesta que el método de la ecuación de porcentaje. Barack Obama ganó 28 de los 50 estados en la elección presidencial de Estados Unidos del 2008.

PIENSE DETENIDAMENTE *Estudiantes en colegios comunitarios*

"Cuando la historia de la educación superior estadounidense se actualice en los años venideros a partir de ahora, la historia de los tiempos actuales resaltará la función fundamental que desempeñaron los colegios comunitarios en el desarrollo del capital humano y en el apuntalamiento del sistema educativo nacional".

Community College Survey of Student Engagement, 2007

Más de 310,000 estudiantes respondieron la encuesta del compromiso de los estudiantes de colegios comunitarios del 2007. Abajo se muestran algunos resultados. Estudie cada gráfica circular y después complete su leyenda.

Matriculación en colegios comunitarios

- 64% se matricularon en el colegio a tiempo parcial.
- ?

Estudiantes de colegios comunitarios que trabajan más de 20 horas por semana

- 57% de los estudiantes trabajan más de 20 horas por semana.
- ?

Estudiantes de colegios comunitarios que debaten sus calificaciones o asignaciones con un profesor

- 45% con frecuencia o con mucha frecuencia
- 45% en ocasiones
- ?

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. a. $x = 33\% \cdot 80$ o $\frac{x}{80} = \frac{33}{100}$ **b.** $x \cdot 55 = 6$ o $\frac{6}{55} = \frac{x}{100}$ **c.** $172\% \cdot x = 4$ o $\frac{4}{x} = \frac{172}{100}$
2. 144 **3.** 192.72 **4.** 5% **5.** 56.25% **6.** 170% **7.** 60 **8.** 225 **9.** 800 personas
10. 31 estados

SECCIÓN 6.2 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Complete los espacios.

1. A "¿qué número es 15% de 25?" se le llama un _____ de porcentaje. Se traduce a la _____ de porcentaje $x = 15\% \cdot 25$.
2. Las palabras clave en un enunciado del porcentaje se traducen como a continuación:
   - _____ se traduce a un símbolo =.
   - _____ se traduce a una multiplicación que se muestra con un punto elevado, · .
   - _____ *número* o _____ *porcentaje* se traducen a un número desconocido que se representa por medio de una variable.
3. Cuando se encuentra el valor de la variable que hace verdadera una ecuación de porcentaje, se dice que se ha _____ la ecuación.
4. En el enunciado de porcentaje "45 es 90% de 50", 45 es la _____, 90% es el porcentaje y 50 es la _____.
5. La cantidad es una _____ de la base. La base es el estándar de comparación —representa el _____ de alguna cantidad.
6. **a.** *La cantidad es a la base como el porcentaje es a 100:*

$$\frac{\quad}{\text{base}} = \frac{\text{porcentaje}}{\quad}$$

b. *La parte es al todo como el porcentaje es a 100:*

$$\frac{\text{parte}}{\quad} = \frac{\quad}{100}$$

7. Los productos _____ para la proporción $\frac{24}{x} = \frac{36}{100}$ son $24 \cdot 100$ y $x \cdot 36$.
8. En una gráfica _____ se utilizan cuñas con formas de rebanada de pastel para mostrar la división de una cantidad total en sus partes componentes.

CONCEPTOS

9. Llene los espacios para completar la ecuación (fórmula) de porcentaje:

$$\square = \text{porcentaje} \cdot \square$$

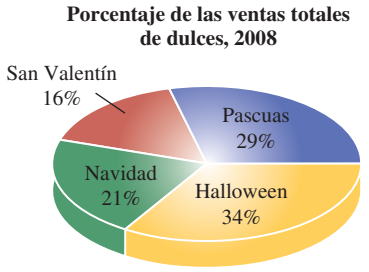
o

$$\text{Parte} = \square \cdot \square$$

10. **a.** Sin realizar el cálculo, diga si 12% de 55 es mayor que 55 o menor que 55.

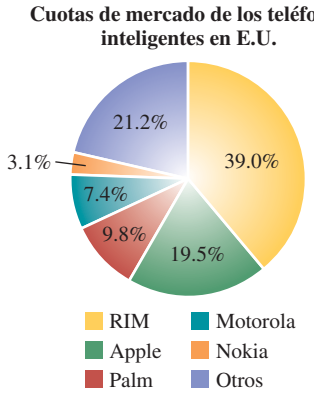
b. Sin realizar el cálculo, diga si 120% de 55 es mayor que 55 o menor que 55.

11. VENTAS DE DULCES La gráfica circular muestra el porcentaje de las ventas totales de dulces para cada una de las cuatro temporadas de celebraciones en el 2008. ¿Cuál es la suma de todos los porcentajes?



Fuente: National Confectioners Association, Annual Industry Review, 2009

12. TELÉFONOS INTELIGENTES La gráfica circular muestra el porcentaje de la cuota de mercado para las compañías líderes de teléfonos inteligentes. ¿Cuál es la suma de todos los porcentajes?



NOTACIÓN

13. Cuando se realizan cálculos con porcentajes, se debe cambiar el porcentaje a un decimal o a una fracción. Cambie cada porcentaje a un decimal.

a. 12%

b. 5.6%

c. 125%

d. $\frac{1}{4}\%$

14. Cuando se realizan cálculos con porcentajes se debe cambiar el porcentaje a un decimal o a una fracción. Cambie cada porcentaje a una fracción.

a. $33\frac{1}{3}\%$ **b.** $66\frac{2}{3}\%$

c. $16\frac{2}{3}\%$ **d.** $83\frac{1}{3}\%$

PRÁCTICA GUIADA

Traduzca cada enunciado de porcentaje a una ecuación de porcentaje o a una proporción de porcentaje. No resuelva. Vea el Ejemplo 1.

15. **a.** ¿Qué número es 7% de 16?

b. ¿125 es qué porcentaje de 800?

c. ¿1 es 94% de qué número?

16. **a.** ¿Qué número es 28% de 372?

b. ¿9 es qué porcentaje de 21?

c. ¿4 es 17% de qué número?

17. **a.** ¿5.4% de 99 es qué número?

b. ¿75.1% de qué número es 15?

c. ¿Qué porcentaje de 33.8 es 3.8?

18. **a.** ¿1.5% de 3 es qué número?

b. ¿49.2% de qué número es 100?

c. ¿Qué porcentaje de 100.4 es 50.2?

Traduzca a una ecuación de porcentaje o a una proporción de porcentaje y después resuelva para encontrar el número desconocido. Vea el Ejemplo 2.

19. ¿Qué es 34% de 200?

20. ¿Qué es 48% de 600?

21. ¿Qué es 88% de 150?

22. ¿Qué número es 52% de 350?

Traduzca a una ecuación de porcentaje o a una proporción de porcentaje y después resuelva para encontrar el número desconocido. Vea el Ejemplo 3.

23. ¿Qué número es 224% de 7.9?

24. ¿Qué número es 197% de 6.3?

25. ¿Qué número es 105% de 23.2?

26. ¿Qué número es 228% de 34.5?

Traduzca a una ecuación de porcentaje o a una proporción de porcentaje y después resuelva para encontrar el número desconocido. **Vea el Ejemplo 4.**

27. ¿8 es qué porcentaje de 32?

28. ¿9 es qué porcentaje de 18?

29. ¿51 es qué porcentaje de 60?

30. ¿52 es qué porcentaje de 80?

Traduzca a una ecuación de porcentaje o a una proporción de porcentaje y después resuelva para encontrar el número desconocido. **Vea el Ejemplo 5.**

31. ¿5 es qué porcentaje de 8?

32. ¿7 es qué porcentaje de 8?

33. ¿7 es qué porcentaje de 16?

34. ¿11 es qué porcentaje de 16?

Traduzca a una ecuación de porcentaje o a una proporción de porcentaje y después resuelva para encontrar el número desconocido. **Vea el Ejemplo 6.**

35. ¿Qué porcentaje de 60 es 66?

36. ¿Qué porcentaje de 50 es 56?

37. ¿Qué porcentaje de 24 es 84?

38. ¿Qué porcentaje de 14 es 63?

Traduzca a una ecuación de porcentaje o a una proporción de porcentaje y después resuelva para encontrar el número desconocido. **Vea el Ejemplo 7.**

39. ¿9 es 30% de qué número?

40. ¿8 es 40% de qué número?

41. ¿36 es 24% de qué número?

42. ¿24 es 16% de qué número?

Traduzca a una ecuación de porcentaje o a una proporción de porcentaje y después resuelva para encontrar el número desconocido. **Vea el Ejemplo 8.**

43. 19.2 es $33\frac{1}{3}\%$ de qué número?

44. 32.8 es $33\frac{1}{3}\%$ de qué número?

45. 48.4 es $66\frac{2}{3}\%$ de qué número?

46. 56.2 es $16\frac{2}{3}\%$ de qué número?

INTÉNTELO

Traduzca a una ecuación de porcentaje o a una proporción de porcentaje y después resuelva para encontrar el número desconocido.

47. ¿Qué porcentaje de 40 es 0.5?

48. ¿Qué porcentaje de 15 es 0.3?

49. ¿7.8 es 12% de qué número?

50. ¿39.6 es 44% de qué número?

51. $33\frac{1}{3}\%$ de qué número es 33?

52. $66\frac{2}{3}\%$ de qué número es 28?

53. ¿Qué número es 36% de 250?

54. ¿Qué número es 82% de 300?

55. ¿16 es qué porcentaje de 20?

56. ¿13 es qué porcentaje de 25?

57. ¿Qué número es 0.8% de 12?

58. ¿Qué número es 5.6% de 40?

59. ¿3.3 es 7.5% de qué número?

60. ¿8.4 es 20% de qué número?

61. ¿Qué porcentaje de 0.05 es 1.25?

62. ¿Qué porcentaje de 0.06 es 2.46?

63. ¿102% de 105 es qué número?

64. ¿210% de 66 es qué número?

65. $9\frac{1}{2}\%$ de qué número es 5.7?

66. $\frac{1}{2}\%$ de qué número es 5,000?

67. ¿Qué porcentaje de 8,000 es 2,500?

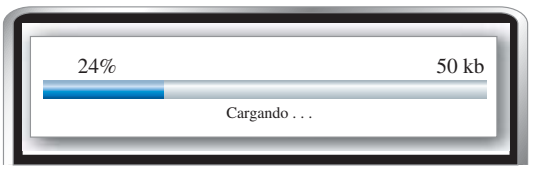
68. ¿Qué porcentaje de 3,200 es 1,400?

69. Encuentre $7\frac{1}{4}\%$ de 600.

70. Encuentre $1\frac{3}{4}\%$ de 800.

APLICACIONES

71. DESCARGAR El mensaje en la pantalla de un monitor de computadora mostrado abajo indica que 24% de los 50kb de información que el usuario ha decidido ver se han descargado a la computadora en ese momento. Encuentre el número de bytes de información que se han descargado. (50kb significa 50,000.)



72. MADERA La tasa de crecimiento del árbol de nogal es de alrededor de 3% por año. Si un nogal tiene 400 pies de tabla de madera que puede cortarse de él, ¿Cuántos más pies de tabla se producirán en un año? (Fuente: Iowa Department of Natural Resources)

73. REBAJAS Una compañía telefónica ofreció a sus clientes una rebaja de 20% del costo de las llamadas de larga distancia en el mes de julio. Abajo se muestran las llamadas de larga distancia de un cliente.

a. Encuentre la cantidad total de los cargos por llamadas de larga distancia del cliente para el mes de julio.

b. ¿Cuánto recibirá de rebaja este cliente por estas llamadas?

Fecha	Hora	Lugar llamado	Min.	Cantidad
Julio 4	3:48 P.M.	Denver	47	$3.80
Julio 9	12:00 P.M.	Detroit	68	$7.50
Julio 20	8:59 A.M.	San Diego	70	$9.45
Totales de julio			185	?

74. GARANTÍAS DE PRECIOS Para asegurarle a sus clientes precios bajos, Home Club ofrece una garantía de "10% adicional". Si sus clientes encuentran el mismo artículo vendido por menos en algún otro lugar, reciben la diferencia en el precio, más 10% de la diferencia. Una mujer compró unas persianas en Home Club por $120 pero después vio las mismas persianas a la venta por $98 en otra tienda.

a. ¿Cuál es la diferencia en los precios de las persianas?

b. ¿Cuál es el 10% de la diferencia en el precio?

c. ¿Cuánto dinero puede esperar recibir la mujer si aprovecha la garantía de "10% adicional" de Home Club?

75. AMPLIACIONES La característica de ampliación de una copiadora está configurada al 180% y se va a copiar una imagen de 1.5 pulgadas de ancho. ¿Cuál será el ancho de la imagen ampliada?

76. MÁQUINAS COPIADORAS La característica de reducción en una copiadora está configurada al 98% y se va a copiar una imagen de 2 pulgadas de ancho. ¿Cuál será el ancho de la imagen reducida?

77. LICENCIAS PARA CONDUCIR En la parte escrita de su prueba de conducir, un hombre respondió 28 de las 40 preguntas de manera correcta. Si se aprueba con el 70% correcto, ¿aprobó la prueba?

78. HOGAR Una regla de oro del presupuesto general es que su renta o pago hipotecario debe ser menor que el 30% de su ingreso. En conjunto, una pareja gana $4,500 al mes y pagan $1,260 en renta. ¿Están siguiendo la regla de oro del presupuesto para el hogar?

79. SEGURO El costo para reparar un automóvil después de un choque fue de $4,000. La póliza del seguro del automóvil pagó toda la factura excepto por un deducible de $200, el cual pagó el conductor. ¿Qué porcentaje del costo pagó el conductor?

80. SUPERFICIE HABITABLE Una casa tiene 1,200 pies cuadrados en el primer piso y 800 pies cuadrados en el segundo piso.

a. ¿Cuál es el total de pies cuadrados total de la casa?

b. ¿Qué porcentaje del total de pies cuadrados de la casa está en el primer piso?

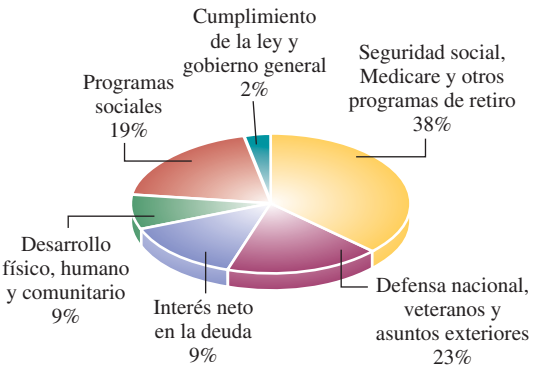
81. CUIDADO INFANTIL Después del primer día de registro, se han matriculado 84 niños en una nueva guardería. Eso representó el 70% de los lugares disponibles. ¿Cuál es el número máximo de niños que se pudieran matricular en la guardería?

82. PROGRAMAS DE CARRERAS Un mes antes de una carrera de automóviles, la venta de anuncios para el programa de la carrera oficial fue lenta. Sólo se habían vendido 12 páginas, o el 60% de las páginas disponibles. ¿Cuál era el número total de páginas destinadas a publicidad en el programa?

83. CONTAMINACIÓN DEL AGUA En el 2007 un estudio encontró que alrededor de 4,500 kilómetros, o $33\frac{1}{3}\%$ del Río Amarillo en China y sus afluentes no eran aptos para algún uso. ¿Cuál es la longitud combinada del río y sus afluentes? (Fuente: Discovermagazine.com)

84. AYUDA FINANCIERA El estudio nacional de la ayuda para los estudiantes de postsecundaria encontró que en el 2008 alrededor de 14 millones, o $66\frac{2}{3}\%$, de los estudiantes universitarios del país recibían algún tipo de ayuda financiera. ¿Cuántos estudiantes universitarios había en el 2008?

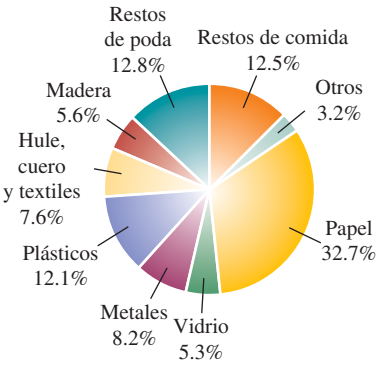
85. GASTOS GUBERNAMENTALES La gráfica circular de abajo muestra el análisis del gasto federal para el año fiscal 2007. Si el gasto total fue de aproximadamente $2.7 billones, ¿cuántos dólares se gastaron en Seguridad social, Medicare y otros programas de retiro?



Fuente: 2008 Federal Income Tax Form 1040

86. DESPERDICIOS La gráfica circular de abajo muestra los tipos de basura de los habitantes, negocios e instituciones de E.U. generados en el 2007. Si la cantidad total de basura producida ese año fue de 254 millones de toneladas, ¿cuántos millones de toneladas de restos de poda hubo?

Generación de basura en E.U. por material antes del reciclaje, 2007 (254 millones de toneladas)



Fuente: Environmental Protection Agency

87. PROMOCIÓN DE PRODUCTOS Para promover las ventas se empaquetó una botella gratis de 6 onzas de champú con cada botella grande. Use la información en el paquete para encontrar cuántas onzas de champú contiene la botella grande.

88. NUTRICIONALES Se muestra la etiqueta nutricional en un paquete de hojuelas de maíz.

a. ¿Cuántos miligramos de sodio hay en una porción de hojuelas?

b. De acuerdo con la etiqueta, ¿qué porcentaje del valor diario de sodio es esto?

c. ¿Qué valor diario de la ingesta de sodio se considera saludable?

Datos nutricionales

Tamaño de porción: 1 oz (alrededor de 29 hojuelas)
Porciones por contenedor: Alrededor de 11

Cantidad por porción	
Calorías 160	Calorías a partir de grasas 90
	% del valor diario
Grasa total 10g	**15%**
Grasa saturada 1.5 g	**7%**
Colesterol 0mg	**0%**
Sodio 240mg	**12%**
Carbohidratos totales 15g	**5%**
Fibra dietética 1g	**4%**
Azúcares menos de 1g	
Proteína 2g	

89. MEZCLAS Complete la tabla para encontrar el número de galones de ácido sulfúrico en cada uno de los tanques de almacenamiento.

	Galones de disolución en el tanque	% de ácido sulfúrico	Galones de ácido sulfúrico en el tanque
Tanque 1	60	50%	
Tanque 2	40	30%	

90. ALFABETO Qué porcentaje del alfabeto inglés conforman las vocales a, e, i, o y u? (Redondee al 1 por ciento más cercano.)

91. PROPINAS En agosto del 2006, un cliente le dejó a la empleada de Applebee Cindy Kienow de Hutchinson, Kansas, una propina de $10,000 para una cuenta que era de aproximadamente $25. ¿Qué porcentaje de propina es esto? (*Fuente:* cbsnews.com)

92. ELECCIONES En las elecciones para el concejo municipal de Los Ángeles, si ningún candidato recibe más del 50% de los votos, se lleva a cabo una segunda vuelta entre el primer y el segundo lugar.

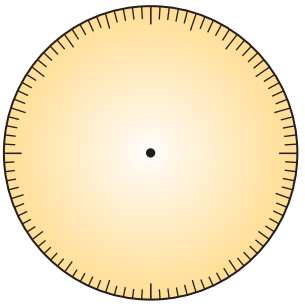
a. ¿Cuántos votos totales se emitieron?

b. Determine si debe haber una segunda vuelta para el Distrito 10.

Concejo municipal	Distrito 10
Nate Holden	8,501
Madison T. Shockley	3,614
Scott Suh	2,630
Marsha Brown	2,432

Use una gráfica circular para ilustrar la información proporcionada. Se provee un círculo dividido en 100 secciones para ayudarle en el proceso de graficación.

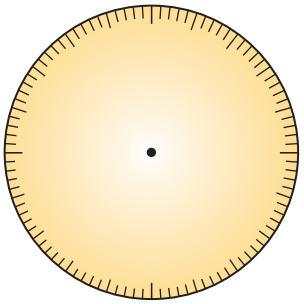
93. ENERGÍA Dibuje una gráfica circular para mostrar qué porcentaje de la energía total producida en E.U. fue provista por cada fuente.



Renovable	10%
Nuclear	12%
Carbón	32%
Gas natural	32%
Petróleo	14%

Fuente: Energy Information Administration

94. GASES INVERNADERO Dibuje una gráfica circular para mostrar qué porcentaje de las emisiones totales de gases invernadero en Estados Unidos en el 2007 provino de cada sector económico.



Energía eléctrica	34%
Transporte	28%
Industria	20%
Agricultura	7%
Comercio	6%
Residencial	5%

Fuente: Environmental Protection Agency, *Time Magazine,* 8 de junio de 2009.

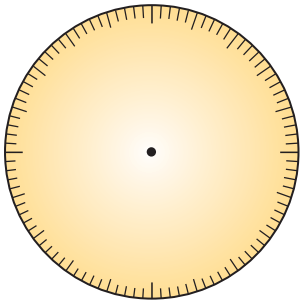
95. INGRESO GUBERNAMENTAL Complete la siguiente tabla encontrando qué porcentaje del ingreso gubernamental federal en el 2007 proveyó cada fuente. Después dibuje una gráfica circular para la información.

Ingreso total, año fiscal 2007: $2 mil millones

Fuente de ingreso	Cantidad	Porcentaje del total
Impuestos de Seguridad social, Medicare y desempleo	$832 mil millones	
Impuestos sobre ingresos personales	$1 billón 118 mil millones	
Impuestos sobre ingresos corporativos	$338 mil millones	
Impuestos de consumo, sobre propiedad, aduanales	$156 mil millones	
Préstamos para cubrir el déficit	$156 mil millones	

Fuente: 2008 Federal Income Tax Form

Fuentes del ingreso gubernamental del 2007

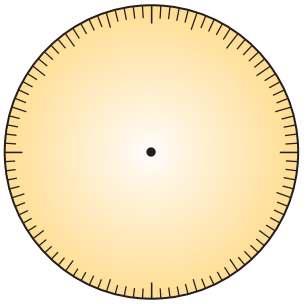


96. USO DEL AGUA El uso de agua por persona en el interior en un hogar de una sola familia común es de alrededor de 70 galones por día. Complete la siguiente tabla. Después dibuje una gráfica circular para la información.

Uso	Galones por persona por día	Porcentaje del uso diario total
Duchas	11.9	
Lavadora	15.4	
Lavaplatos	0.7	
Inodoros	18.9	
Baños	1.4	
Fugas	9.8	
Grifos	10.5	
Otros	1.4	

Fuente: American Water Works Association

Uso diario de agua por persona



REDACCIÓN

97. Escriba una situación en la vida real que pueda describirse por medio de "¿9 es qué porcentaje de 20?".

98. Escriba una situación en la vida real que pueda traducirse a $15 = 25\% \cdot x$.

99. Explique por qué el 150% de un número es mayor que el número.

100. Explique por qué cada uno de los siguientes problemas es fácil de resolver.

a. ¿Qué es 9% de 100?

b. ¿16 es 100% de qué número?

c. ¿27 es qué porcentaje de 27?

101. Al resolver problemas de porcentaje, ¿cuándo es mejor escribir un porcentaje proporcionado como una fracción en vez de como un decimal?

102. Explique cómo identificar la cantidad, el porcentaje y la base en un problema de porcentaje.

REPASO

103. Sume: $2.78 + 6 + 9.09 + 0.3$

104. Evalúe: $\sqrt{64} + 3\sqrt{9}$

105. En la recta numérica, ¿cuál está más cercano al 5: el número 4.9 o el número 5.001?

106. Multiplique: $34.5464 \cdot 1{,}000$

107. Evalúe: $(0.2)^3$

108. Evalúe la fórmula $d = 4t$ para $t = 25$.

SECCIÓN 6.3
Aplicaciones del porcentaje

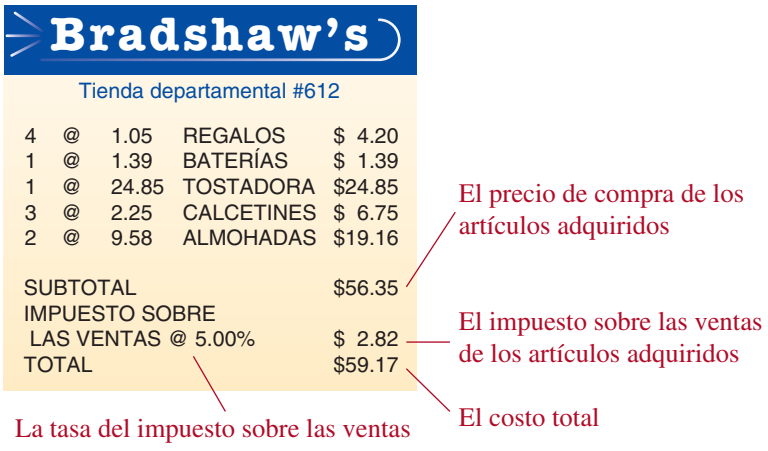
Objetivos

1. Calcular impuestos sobre las ventas, el costo total y tasas de impuestos.
2. Calcular comisiones y tasas de comisiones.
3. Encontrar el porcentaje de incremento o decremento.
4. Calcular la cantidad del descuento, el precio en rebaja y la tasa de descuento.

En esta sección se explican las aplicaciones del porcentaje. Tres de ellas (impuestos, comisiones y descuentos) están relacionadas de manera directa con las compras. Una comprensión sólida de estos conceptos le harán un mejor comprador y consumidor. La cuarta utiliza el porcentaje para describir incrementos o decrementos de temas como población y desempleo.

1 Calcular impuestos sobre las ventas, el costo total y tasas de impuestos

El recibo de las ventas de una tienda departamental abajo proporciona una cuenta detallada de qué artículos se compraron, cuántos de cada uno se adquirieron y el precio de cada artículo.



El recibo muestra que el precio de compra de $56.35 (etiquetado como *subtotal*) fue gravado a una tasa de 5%. Se cargó un impuesto sobre las ventas de $2.82.

Este ejemplo ilustra la siguiente fórmula del impuesto sobre las ventas. Observe que la fórmula está basada en la ecuación de porcentaje explicada en la Sección 6.2.

Encontrar el impuesto sobre las ventas

El impuesto sobre las ventas es un porcentaje del precio de compra del artículo.

Impuesto sobre las ventas = tasa del impuesto sobre las ventas · precio de compra

cantidad = porcentaje · base

Las tasas del impuesto sobre las ventas se expresan por lo regular como un porcentaje y, cuando es necesario, las cantidades en dólares del impuesto sobre las ventas se redondean al centavo más cercano.

Auto-revisión 1

IMPUESTO SOBRE LAS VENTAS
¿Cuál sería el impuesto sobre las ventas si la compra de $56.35 se realizó en un estado que tiene impuesto sobre las ventas estatal del 6.25%?

Ahora intente **Problema 13**

EJEMPLO 1 ***Impuesto sobre las ventas*** Encuentre el impuesto sobre las ventas en una compra de $56.35 si la tasa de impuesto sobre las ventas es de 5%. (Esta es la compra en el recibo de venta mostrado en la página anterior.)

Estrategia Se identificará la tasa del impuesto sobre las ventas y el precio de compra.

POR QUÉ Entonces se puede utilizar la fórmula del impuesto sobre las ventas para encontrar el impuesto sobre las ventas desconocido.

Solución La tasa del impuesto sobre las ventas es del 5% y el precio de compra es de $56.35.

Impuesto sobre las ventas = **tasa del impuesto sobre las ventas** · **precio de compra** — Esta es la fórmula del impuesto sobre las ventas.

= **5%** · **$56.35** — Sustituya el 5% para la tasa del impuesto sobre las ventas y el $56.35 para el precio de compra.

= 0.05 · $56.35 — Escriba el 5% como un decimal: 5% = 0.05.

= $2.8175 — Realice la multiplicación.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 3\,1\ \ 2} \\ 56.35 \\ \times\ 0.05 \\ \hline 2.8175 \end{array}$$

El dígito a redondear en la columna de las centésimas es el 1.

= $2.8175 — Prepare para redondear el impuesto sobre las ventas al centavo (centésima) más cercano identificando el dígito a redondear y el dígito a examinar.

El digito a examinar es el 7.

≈ $2.82 — Dado que el dígito a examinar es 5 o mayor, redondee hacia arriba.

El impuesto sobre las ventas sobre la compra de $56.35 es de $2.82. El recibo de la venta mostrado en la página anterior es correcto.

Consejo útil Es de utilidad ver el problema del impuesto sobre las ventas en el Ejemplo 1 como un tipo de problema de porcentaje de la Sección 6.2.

¿Qué número es 5% de $56.35?

$x = 5\% \cdot \$56.35$

Vea de nuevo el recibo de venta de la tienda departamental. Observe que el impuesto sobre las ventas se le sumó al precio de compra para obtener el costo total. Este ejemplo ilustra la siguiente fórmula para el costo total.

Encontrar el costo total

El costo total de un artículo es la suma de su precio de compra y el impuesto sobre las ventas del artículo.

Costo total = precio de compra + impuesto sobre las ventas

EJEMPLO 2 ***Costo total*** Encuentre el costo total de la silla de seguridad infantil mostrada a la derecha si la tasa del impuesto sobre las ventas es de 7.2%.

Estrategia Primero se encontrará el impuesto sobre las ventas de la silla de seguridad infantil.

POR QUÉ Entonces se pueden sumar el precio de compra y el impuesto sobre las ventas para encontrar el costo total de la silla de seguridad.

Solución La tasa del impuesto sobre las ventas es de 7.2% y el precio de compra es de $249.50.

Impuesto sobre las ventas = **tasa del impuesto sobre las ventas** · **precio de compra** — Esta es la fórmula del impuesto sobre las ventas.

= **7.2%** · **$249.50** — Sustituya 7.2 para la tasa del impuesto sobre las ventas y el $249.50 para el precio de compra.

= 0.072 · $249.50 — Escriba 7.2% como un decimal: 7.2% = 0.072.

$$\begin{array}{r} 249.50 \\ \times\ 0.072 \\ \hline 49900 \\ 1746500 \\ \hline 17.96400 \end{array}$$

= $17.964 — Realice la multiplicación.

El dígito a redondear en la columna de las centésimas es el 6.

= $17.964 — Prepare para redondear el impuesto sobre las ventas al centavo (centésima) más cercano identificando el dígito a redondear y el dígito a examinar.

El dígito a examinar es el 4.

≈ $17.96 — Dado que el dígito a examinar es menor que 5, redondee hacia abajo.

Por tanto, el impuesto sobre las ventas para la compra de $249.50 es de $17.96. El costo total de la silla de seguridad es la suma de su precio de compra y el impuesto sobre las ventas.

Costo total = **precio de compra** + **impuesto sobre las ventas** — Esta es la fórmula del costo total.

= $249.50 + $17.96 — Sustituya el $249.50 para el precio de compra y el $17.96 para el impuesto sobre las ventas.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 249.50 \\ +\ 17.96 \\ \hline 267.46 \end{array}$$

= $267.46 — Realice la suma.

Además del impuesto sobre las ventas, se pagan varios otros impuestos en la vida diaria. El impuesto sobre la renta, el impuesto a la gasolina y el impuesto a la seguridad social son sólo unos cuantos. Para encontrar tales tasas de impuestos se puede utilizar un método parecido al explicado en la Sección 6.2.

Auto-revisión 2

COSTO TOTAL Encuentre el costo total de una caminadora para bebé de $179.95 si la tasa del impuesto sobre la venta sobre la compra es del 3.2%.

Ahora intente **Problema 17**

EJEMPLO 3 ***Retención de impuestos*** Una mesera encontró que se dedujeron $11.04 de sus ingresos brutos semanales de $240 para el impuesto sobre la renta federal. ¿Qué tasa de retención de impuesto se utilizó?

Estrategia Se leerá con cuidado el problema y se utilizarán los datos proporcionados para escribirlos en la forma de un enunciado de porcentaje.

POR QUÉ Entonces se puede traducir el enunciado a una ecuación de porcentaje (o proporción de porcentaje) y resolverla para encontrar la tasa de la retención de impuestos desconocida.

Solución Hay dos métodos que pueden utilizarse para resolver este problema.

Método de la ecuación de porcentaje: Dado que la retención de impuestos de $11.04 es algún porcentaje desconocido de sus ingresos brutos semanales de $240, el enunciado de porcentaje es:

¿$11.04	es	qué porcentaje	de	$240?
11.04	=	x	·	240

Esta es la ecuación de porcentaje a resolver.

Auto-revisión 3

IMPUESTO SOBRE LA HERENCIA Se pagó un impuesto de $5,250 sobre una herencia de $15,000. ¿Cuál fue la tasa del impuesto sobre la herencia?

Ahora intente **Problema 21**

$$\frac{11.04}{240} = \frac{x \cdot 240}{240}$$

Para despejar x en el lado derecho de la ecuación, divida ambos lados entre 240.

$$0.046 = \frac{x \cdot \cancel{240}^{1}}{\cancel{240}_{1}}$$

Para simplificar la fracción en el lado derecho de la ecuación, elimine el factor común de 240 del numerador y el denominador. En el lado izquierdo divida el 11.04 entre 240.

$$\begin{array}{r} 0.046 \\ 240\overline{)\,11.0400} \\ -\ 0 \\ \hline 11\,04 \\ -\,9\,60 \\ \hline 1\,440 \\ -\,1\,440 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$0.046 = x$$

$$0\,04.6\% = x$$

Para escribir el decimal 0.046 como un porcentaje, multiplíquelo por 100 moviendo el punto decimal dos posiciones a la derecha y después inserte un símbolo %.

$$4.6\% = x$$

La tasa de la retención de impuestos fue de 4.6%.

Método de la proporción de porcentaje: Dado que la retención de impuestos de \$11.04 es algún porcentaje desconocido de sus ingresos brutos semanales de \$240, el enunciado de porcentaje es:

\$11.04 es qué porcentaje de \$240?

cantidad — porcentaje — base

$$\frac{11.04}{240} = \frac{x}{100}$$

Esta es la proporción del porcentaje a resolver

$$11.04 \cdot 100 = 240 \cdot x$$

Para resolver la proporción encuentre los productos cruzados e iguálelos.

$$1{,}104 = 240 \cdot x$$

Para simplificar el lado izquierdo de la ecuación realice la multiplicación: $11.04 \cdot 100 = 1{,}104$.

$$\frac{1{,}104}{240} = \frac{\cancel{240}^{1} \cdot x}{\cancel{240}_{1}}$$

Para despejar x en el lado derecho, divida ambos lados de la ecuación entre 240. Después elimine el factor común de 240 del numerador y el denominador.

$$\begin{array}{r} 4.6 \\ 240\overline{)\,1{,}104.0} \\ -\,960 \\ \hline 144\,0 \\ -\,144\,0 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$4.6 = x$$

En el lado izquierdo divida el 1,104 entre 240.

La tasa de la retención de impuestos fue del 4.6%.

2 Calcular comisiones y tasas de comisiones

En vez de trabajar por un salario o de que se les pague a una tasa por hora, a varios vendedores se les paga por **comisión.** Ganan un cierto porcentaje de la cantidad en dólares total de los bienes y servicios que venden. La siguiente fórmula para calcular una comisión está basada en la ecuación del porcentaje explicada en la Sección 6.2.

Encontrar la comisión

La cantidad del pago de la comisión es un porcentaje de las ventas totales en dólares de los bienes o servicios.

$$\text{Comisión} = \text{tasa de comisión} \cdot \text{venta}$$

cantidad = porcentaje · base

EJEMPLO 4 ***Ventas de electrodomésticos*** La tasa de la comisión para un vendedor en una tienda de electrodomésticos es de 16.5%. Encuentre la comisión de la venta de un refrigerador que cuesta $500.

Estrategia Se identificará la tasa de la comisión y la cantidad en dólares de la venta.

POR QUÉ Entonces se puede utilizar la fórmula de la comisión para encontrar la cantidad desconocida de la comisión.

Solución La tasa de la comisión es del 16.5% y la cantidad en dólares de la venta es de $500.

$$\text{Comisión} = \textbf{tasa de la comisión} \cdot \textbf{venta}$$ Esta es la fórmula de la comisión.

$$= \quad 16.5\% \quad \cdot \$500$$ Sustituya el 16.5% para la tasa de la comisión y el $500 para la venta.

$$= 0.165 \cdot \$500$$ Escriba el 16.5% como un decimal: 16.5% = 0.165.

$$= \$82.50$$ Realice la multiplicación.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 3\ 2} \\ 0.165 \\ \times\ 500 \\ \hline 82.500 \end{array}$$

La comisión ganada de la venta de un refrigerador que cuesta $500 es de $82.50.

Auto-revisión 4

VENTA DE SEGUROS Un agente de seguros recibe una comisión de 4.1% sobre cada prima de $120 pagada por un cliente. ¿Cuál es la cantidad de la comisión sobre la prima?

Ahora intente **Problema 25**

EJEMPLO 5 ***Ventas de joyería*** Un vendedor de joyería gana una comisión de $448 por la venta de un anillo de diamantes con un precio de $5,600. Encuentre la tasa de la comisión.

Estrategia Se identificará la tasa de la comisión y la cantidad en dólares de la venta.

POR QUÉ Entonces se puede utilizar la fórmula de la comisión para encontrar la tasa desconocida de la comisión.

Solución La comisión es de $448 y la cantidad en dólares de la venta es de $5,600.

$$\textbf{Comisión} = \text{tasa de la comisión} \cdot \textbf{venta}$$ Esta es la fórmula de la comisión.

$$\$448 \quad = \quad x \quad \cdot \$5{,}600$$ Sustituya el $448 para la comisión y el $5,600 para la venta. x representa la tasa desconocida de la comisión.

$$\frac{448}{5{,}600} = \frac{x \cdot 5{,}600}{5{,}600}$$ Se pueden eliminar los signos de dólares. Para deshacer la multiplicación por 5,600 y despejar x en el lado derecho de la ecuación, divida ambos lados entre 5,600.

$$0.08 = \frac{x \cdot \overset{1}{\cancel{5{,}600}}}{\underset{1}{\cancel{5{,}600}}}$$ En el lado derecho, elimine el factor común de 5,600 del numerador y el denominador. En el lado izquierdo, divida el 448 entre 5,600.

$$\begin{array}{r} 0.08 \\ 5{,}600\overline{)\,448.00} \\ -\,448\ 00 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$0\underset{\frown}{0}8\% = x$$ Para escribir el decimal 0.08 como un porcentaje, multiplíquelo por 100 moviendo el punto decimal dos posiciones a la derecha y después inserte un símbolo %.

$$8\% = x$$

La tasa de la comisión pagada al vendedor sobre la venta del anillo de diamante fue de 8%.

Auto-revisión 5

VENTA DE ELECTRÓNICOS Si la comisión sobre una videocámara digital de $430 es de $21.50, ¿cuál es la tasa de la comisión?

Ahora intente **Problema 29**

3 Encontrar el porcentaje de incremento o decremento

Los porcentajes pueden utilizarse para describir cómo ha cambiado una cantidad. Por ejemplo, considere la tabla a la derecha, la cual muestra el número de canales de televisión que recibió el hogar promedio en E.U. en los años 2000 y 2007.

Año	Número de canales de televisión que recibió el hogar promedio en E.U.
2000	61
2007	119

Fuente: The Nielsen Company

A partir de la tabla se observa que el número de canales de televisión recibidos aumentó de manera considerable del 2000 al 2007. Para describir este incremento utilizando un porcentaje, primero se resta para encontrar la **cantidad del incremento.**

$119 - 61 = 58$ Reste el número de canales de TV recibidos en el 2000 del número recibido en el 2007.

Por tanto, el número de canales recibidos aumentó en 58 del 2000 al 2007.

Después, se encuentra qué porcentaje de los 61 canales *originales* recibidos en el 2000 representa el incremento de 58 canales. Para hacer esto, se traduce el problema a una ecuación de porcentaje (o proporción de porcentaje) y se resuelve.

Método de la ecuación de porcentaje:

¿58 es qué porcentaje de 61?

$58 = x \cdot 61$ Traduzca.

$58 = x \cdot 61$ Esta es la ecuación a resolver.

$\frac{58}{\mathbf{61}} = \frac{x \cdot \cancel{61}^{1}}{\cancel{\mathbf{61}}_{1}}$ Para despejar x en el lado derecho divida ambos lados de la ecuación entre 61. Después elimine el factor común de 61 del numerador y el denominador.

$\frac{58}{61} = x$

$0.9508 \approx x$ En el lado izquierdo de la ecuación divida el 58 entre 61. La división no es terminal.

$95.08\% \approx x$ Para escribir el decimal 0.9508 como un porcentaje multiplíquelo por 100 moviendo el punto decimal dos posiciones a la derecha y después inserte un símbolo %.

$95\% \approx x$ Redondee al uno por ciento más cercano.

```
      0.9508
61)58.0000
  -54 9
    3 10
   -3 05
      50
      -0
     500
    -488
      12
```

Método de la proporción de porcentaje:

¿58 es qué porcentaje de 61?

cantidad — porcentaje — base

$\frac{58}{61} = \frac{x}{\mathbf{100}}$ Esta es la proporción a resolver.

$58 \cdot 100 = 61 \cdot x$ Para resolver la proporción encuentre los productos cruzados. Después iguálelos.

$5{,}800 = 61 \cdot x$ Para simplificar el lado izquierdo realice la multiplicación: $58 \cdot 100 = 5{,}800$.

$\frac{5{,}800}{\mathbf{61}} = \frac{\cancel{61}^{1} \cdot x}{\cancel{\mathbf{61}}_{1}}$ Para despejar x en el lado derecho, divida ambos lados de la ecuación entre 61. Después elimine el factor común de 61 del numerador y el denominador.

$95.08 \approx x$ En el lado izquierdo divida el 5,800 entre 61.

$95 \approx x$ Redondee al uno por ciento más cercano.

```
      95.08
61)5,800.00
  -5 49
     310
    -305
      5 0
      -0
     5 00
    -4 88
      12
```

Con cualquier método se observa que hubo un incremento de 95% en el número de canales de televisión recibidos por el hogar estadounidense promedio del 2000 al 2007.

EJEMPLO 6 ***JFK*** Una subasta en 1996 incluía una mecedora de roble utilizada por el presidente John F. Kennedy en la Oficina oval. La silla, originalmente con un valor de $5,000, se vendió por $453,500. Encuentre el porcentaje de incremento en el valor de la mecedora.

Paul Schutzer/Time & Life Pictures/Getty Images

Estrategia Se comenzará encontrando la cantidad del incremento en el valor de la mecedora.

POR QUÉ Entonces se puede calcular qué porcentaje del valor original de $5,000 de la silla representa ese incremento.

Solución Primero, se encuentra la cantidad del incremento en el valor de la mecedora.

$453{,}500 - 5{,}000 = 448{,}500$ Reste el valor original del precio pagado en la subasta.

La mecedora incrementó de valor en $448,500. Después, se encuentra qué porcentaje del valor original de $5,000 de la mecedora representa el incremento de $448,500 traduciendo el problema a una ecuación de porcentaje (o proporción de porcentaje) y resolviéndola.

Método de la ecuación de porcentaje:

¿$448,500 es qué porcentaje de $5,000?

$448{,}500 = x \cdot 5{,}000$ Traduzca.

$448{,}500 = x \cdot 5{,}000$ Esta es la ecuación a resolver.

$\dfrac{448{,}500}{\mathbf{5{,}000}} = \dfrac{x \cdot \cancel{5{,}000}^{1}}{\cancel{\mathbf{5{,}000}}_{1}}$ Para despejar x en el lado derecho divida ambos lados de la ecuación entre 5,000. Después elimine el factor de 5,000 del numerador y el denominador.

$\dfrac{4{,}485}{50} = x$ Antes de desarrollar la división en el lado izquierdo de la ecuación, recuerde que existe un atajo para dividir un dividendo entre un divisor cuando ambos terminan con ceros. Elimine dos de los ceros terminales en el divisor de 5,000 y elimine el mismo número de ceros terminales en el dividendo de 448,500.

$89.7 = x$ Divida el 4,485 entre 50.

$89\underbrace{70}\% = x$ Para escribir el decimal 89.7 como un porcentaje, multiplíquelo por 100 moviendo el punto decimal dos posiciones a la derecha y después inserte un símbolo %.

$8{,}970\% = x$

$$\begin{array}{r} 89.7 \\ 50\overline{)4{,}485.0} \\ -4\,00 \\ \hline 485 \\ -450 \\ \hline 35\,0 \\ -35\,0 \\ \hline 0 \end{array}$$

Método de la proporción de porcentaje:

¿$448,500 es qué porcentaje de $5,000?

cantidad porcentaje base

$\dfrac{448{,}500}{5{,}000} = \dfrac{x}{\mathbf{100}}$ Esta es la proporción a resolver.

$448{,}500 \cdot 100 = 5{,}000 \cdot x$ Para resolver la proporción encuentre los productos cruzados. Después iguálelos.

$44{,}850{,}000 = 5{,}000 \cdot x$ Para simplificar el lado izquierdo de la ecuación realice la multiplicación: $448{,}500 \cdot 100 = 44{,}850{,}000$.

Auto-revisión 6

EDUCACIÓN EN EL HOGAR En un distrito escolar, el número de niños que recibían educación en el hogar aumentó de 15 a 150 en 4 años. Encuentre el porcentaje de incremento.

Ahora intente **Problema 33**

$$\frac{44{,}850{,}000}{5{,}000} = \frac{\overset{1}{\cancel{5{,}000}} \cdot x}{\underset{1}{\cancel{5{,}000}}}$$

Para despejar x en el lado derecho, divida ambos lados de la ecuación entre 5,000 Después elimine el factor común de 5,000 del numerador y el denominador.

$$\frac{44{,}850{,}000}{5{,}000} = x$$

$$\begin{array}{r} 8970 \\ 5\overline{)44{,}850} \\ -40 \\ \hline 48 \\ -45 \\ \hline 35 \\ -35 \\ \hline 0 \\ -0 \\ \hline 0 \end{array}$$

Antes de desarrollar la división en el lado izquierdo de la ecuación, recuerde que existe un atajo para dividir un dividendo entre un divisor cuando ambos terminan con ceros.

$$\frac{44{,}850}{5} = x$$

Elimine los tres ceros terminales en el divisor de 5,000 y elimine el mismo número de ceros terminales en el dividendo de 44,850,000.

$$8{,}970 = x$$

Divida el 44,850 entre 5.

Con cualquier método se observa que hay un incremento sorprendente del 8,970% en el valor de la mecedora de Kennedy.

¡Cuidado! El porcentaje de incremento (o decremento) es un porcentaje del *número original,* es decir, el número antes de que ocurriera el cambio. Por tanto, en el Ejemplo 6, sería incorrecto escribir un enunciado de porcentaje que compare el incremento al *nuevo valor* de la mecedora de Kennedy.

¿$448,500 es qué porcentaje de ~~$453,500?~~

Encontrar el porcentaje de incremento o decremento

Para encontrar el porcentaje de incremento o decremento:

1. Reste el número más pequeño del más grande para encontrar la cantidad de incremento o decremento.
2. Encuentre qué porcentaje es de la cantidad original la cantidad del incremento o decremento.

Auto-revisión 7

REDUCCIÓN DE LA INGESTA DE GRASAS Una porción de la mantequilla de maní *Jif* original tiene 16 gramos de grasa por porción. El nuevo producto *Jif reducida en grasas* contiene 12 gramos de grasa por porción. ¿Cuál es el porcentaje de decremento en el número de gramos de grasa por porción?

Ahora intente **Problema 37**

EJEMPLO 7 ***Comerciales*** Jared Fogle atribuyó su increíble pérdida de peso al ejercicio y a una dieta de sándwiches Subway bajos en grasas. Su peso máximo (alcanzado en marzo de 1998) era de 425 libras. Su peso actual es de alrededor de 187 libras. Encuentre el porcentaje de decremento en su peso.

Zack Seckler/Getty Images

Estrategia Se comenzará encontrando la cantidad del decremento en el peso de Jared Fogle.

POR QUÉ Entonces se puede calcular qué porcentaje de su peso original de 425 libras representa ese decremento.

Solución Primero, se encuentra la cantidad del decremento en su peso.

$$425 - 187 = 238$$

Reste su nuevo peso de su peso antes de llevar el programa de pérdida de peso.

Su peso disminuyó en 238 libras.

Después se encuentra qué porcentaje de su peso original de 425 libras representa el decremento de 238 libras traduciendo el problema a una ecuación de porcentaje (o proporción de porcentaje) y resolviéndola.

Método de la ecuación de porcentaje:

¿238 es qué porcentaje de 425?

$238 = x \cdot 425$ Traduzca.

$238 = x \cdot 425$ Esta es la ecuación a resolver.

$\frac{238}{425} = \frac{x \cdot \cancel{425}^{1}}{\cancel{425}_{1}}$ Para despejar x en el lado derecho divida ambos lados de la ecuación entre 425. Después elimine el factor común de 425 del numerador y el denominador.

$0.56 = x$ Divida el 238 entre 425.

$056\% = x$ Para escribir el decimal 0.56 como un porcentaje multiplíquelo por 100 moviendo el punto decimal dos posiciones a la derecha y después inserte un símbolo %.

$56\% = x$

$$\begin{array}{r} 0.56 \\ 425\overline{)238.00} \\ -212\,5 \\ \hline 25\,50 \\ -25\,50 \\ \hline 0 \end{array}$$

Método de la proporción de porcentaje:

¿238 es qué porcentaje de 425?

cantidad, porcentaje, base

$\frac{238}{425} = \frac{x}{100}$ Esta es la proporción a resolver.

$238 \cdot 100 = 425 \cdot x$ Para resolver la proporción encuentre los productos cruzados. Después iguálelos.

$23{,}800 = 425 \cdot x$ Para simplificar el lado izquierdo de la ecuación realice la multiplicación: $238 \cdot 100 = 23{,}800$.

$\frac{23{,}800}{425} = \frac{\cancel{425}^{1} \cdot x}{\cancel{425}_{1}}$ Para despejar x en el lado derecho divida ambos lados de la ecuación entre 425. Después elimine el factor común de 425 del numerador y el denominador.

$56 = x$ Divida el 23,800 entre 425.

$$\begin{array}{r} 56 \\ 425\overline{)23{,}800} \\ -21\,25 \\ \hline 2\,550 \\ -2\,550 \\ \hline 0 \end{array}$$

Con cualquier método se observa que hubo un decremento del 56% en el peso de Jared Fogle.

PIENSE DETENIDAMENTE *Estudiar matemáticas*

"Todos los estudiantes, sin importar sus características, antecedentes o discapacidades físicas personales, deben tener oportunidad de estudiar —y apoyo para aprender— matemáticas".

National Council of Teachers of Mathematics

La tabla de abajo muestra el número de estudiantes matriculados en las clases de matemáticas básicas en universidades de dos años.

Año	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005
Matriculación	57,000	100,000	146,000	142,000	147,000	134,000	122,000	104,000

Fuente: 2005 CBMS Survey of Undergraduate Programs.

1. ¿En qué periodo de 5 años hubo el mayor porcentaje de incremento en la matriculación en las clases de matemáticas básicas? ¿Cuál fue el porcentaje de incremento?
2. ¿En qué periodo de 5 años hubo el mayor porcentaje de decremento en la matriculación en las clases de matemáticas básicas? ¿Cuál fue el porcentaje de decremento?

4 Calcular la cantidad del descuento, el precio en rebaja y la tasa de descuento

Mientras compra, probablemente ha notado que varias tiendas muestran anuncios de baratas. Los gerentes de tiendas han encontrado que el ofrecer descuentos atrae más clientes. Para ser un comprador inteligente, es importante conocer el vocabulario de las ventas con descuento.

A la diferencia entre el **precio original** y el **precio en rebaja** de un artículo se le llama **cantidad del descuento** o simplemente **descuento.** Si el descuento se expresa como un porcentaje del precio de venta, se le llama **tasa de descuento.**

Si se conoce el precio original y el precio en rebaja de un artículo, se puede utilizar la siguiente fórmula para encontrar la cantidad del descuento.

Encontrar el descuento

La cantidad del descuento es la diferencia entre el precio original y el precio en rebaja.

Cantidad del descuento = precio original − precio en rebaja

Si se conoce el precio original de un artículo y la tasa de descuento, se puede utilizar la siguiente fórmula para encontrar la cantidad del descuento. Como otras varias fórmulas en esta sección, está basada en la ecuación de porcentaje explicada en la Sección 6.2.

Encontrar el descuento

La cantidad del descuento es un porcentaje del precio original.

Cantidad del descuento = tasa de descuento · precio original

cantidad = porcentaje · base

Se puede utilizar la siguiente fórmula para encontrar el precio en rebaja de un artículo que se está descontando.

Encontrar el precio en rebaja

Para encontrar el precio en rebaja de un artículo, reste el descuento del precio original.

Precio en rebaja = precio original − descuento

EJEMPLO 8 ***Rebajas en tenis*** Use la información en el anuncio mostrado en la página anterior para encontrar la cantidad del descuento en el par de tenis de basquetbol para caballero. Después encuentre el precio en rebaja.

Estrategia Se identificará la tasa de descuento y el precio original de los tenis y se utilizará una fórmula para encontrar la cantidad del descuento.

POR QUÉ Entonces se puede restar el descuento del precio original para encontrar el precio en rebaja de los tenis.

Solución A partir del anuncio, se observa que la tasa de descuento sobre los tenis para caballero es de 25% y el precio original es de \$89.80.

Cantidad del descuento = **tasa de descuento** · **precio original** Esta es la fórmula de la cantidad del descuento.

= **25%** · **\$89.80** Sustituya el 25% para la tasa de descuento y el \$89.80 para el precio original.

= 0.25 · \$89.80 Escriba el 25% como un decimal: 25% = 0.25.

= \$22.45 Realice la multiplicación.

$$\begin{array}{r} 89.80 \\ \times 0.25 \\ \hline 44900 \\ 179600 \\ \hline 22.4500 \end{array}$$

El descuento sobre los tenis para caballero es de \$22.45. Para encontrar el precio en rebaja, se utiliza una resta.

Precio en rebaja = **precio original** − **descuento** Esta es la fórmula del precio en rebaja.

= **\$89.80** − **\$22.45** Sustituya el \$89.80 para el precio original y el \$22.45 para el descuento.

= \$67.35 Realice la resta.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 7\,10} \\ 89.\not{8}\not{0} \\ -\,22.45 \\ \hline 67.35 \end{array}$$

El precio en rebaja de los tenis para basquetbol para caballero es de \$67.35.

Auto-revisión 8

VENTAS DE LENTES PARA EL SOL Unos lentes para el sol, por lo regular vendidos por \$15.40, tienen un descuento de 15%. Encuentre la cantidad del descuento. Después encuentre el precio en rebaja.

Ahora intente **Problema 41**

EJEMPLO 9 ***Descuentos*** Encuentre la tasa de descuento sobre los tenis para entrenamiento interdisciplinario para dama mostrados en el anuncio en la página anterior. Redondee al uno por ciento más cercano.

Estrategia Se pensará en éste como un problema de porcentaje de decremento.

POR QUÉ Se desea encontrar qué porcentaje del precio original de \$59.99 representa la cantidad del descuento.

Solución A partir del anuncio, se observa que el precio original de los tenis para dama es de \$59.99 y el precio en rebaja es de \$33.99. El descuento (decremento en el precio) se encuentra utilizando una resta.

\$59.99 − \$33.99 = \$26 Use la fórmula: Cantidad del descuento = precio original − precio en rebaja.

Los tenis tienen un descuento de \$26. Ahora se encuentra qué porcentaje del precio original representa el descuento de \$26.

Cantidad del descuento = **tasa de descuento** · **precio original** Esta es la fórmula de la cantidad del descuento.

26 = x · **\$59.99** Sustituya el 26 para la cantidad del descuento y el \$59.99 para el precio original. x representa la tasa de descuento desconocida.

$$\frac{26}{\mathbf{59.99}} = \frac{x \cdot 59.99}{\mathbf{59.99}}$$

Se pueden eliminar los signos de dinero. Para deshacer la multiplicación por 59.99 y despejar x en el lado derecho de la ecuación, divida ambos lados entre 59.99.

Auto-revisión 9

CENAR FUERA Un descuento especial en un restaurante ofrece una cena de costillas de primera de \$10.99 por sólo \$7.95 si se ordena antes de las 6 P.M. Encuentre la tasa de descuento. Redondee al uno por ciento más cercano.

Ahora intente **Problema 45**

$$0.433 \approx \frac{x \cdot \cancel{59.99}^{1}}{\cancel{59.99}_{1}}$$

Para simplificar la fracción en el lado derecho de la ecuación, elimine el factor común de 59.99 del numerador y el denominador. En el lado izquierdo, divida el 26 entre 59.99.

$$043.3\% \approx x$$

Para escribir el decimal 0.433 como un porcentaje, multiplíquelo por 100 moviendo el punto decimal dos posiciones a la derecha y después inserte un símbolo %.

$$43\% \approx x$$

Redondee al uno por ciento más cercano.

$$\begin{array}{r} 0.433 \\ 5999\overline{)2600.000} \\ -23996 \\ \hline 20040 \\ -17997 \\ \hline 20430 \\ -17997 \\ \hline 2433 \end{array}$$

Al uno por ciento más cercano, la tasa de descuento en los tenis para dama es del 43%.

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. \$3.52 **2.** \$185.71 **3.** 35% **4.** \$4.92 **5.** 5% **6.** 900% **7.** 25% **8.** \$2.31, \$13.09 **9.** 28%

SECCIÓN 6.3 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Complete los espacios.

1. En vez de trabajar por un salario o de que se les pague a una tasa por hora, a algunos vendedores se les paga por _____. Ganan cierto porcentaje de la cantidad en dólares total de los bienes y servicios que venden.

2. La _____ del impuesto sobre las ventas por lo regular se expresa como un porcentaje.

3. **a.** Cuando se utiliza un porcentaje para describir cómo ha aumentado una cantidad en comparación con su valor original, se está encontrado el porcentaje de _____.

b. Cuando se utiliza un porcentaje para describir cómo ha disminuido una cantidad en comparación con su valor _____ se está encontrado el porcentaje de decremento.

4. Refiérase al anuncio abajo para un ventilador de techo en rebaja.

a. El precio _____ del ventilador de techo era de \$199.99.

b. La cantidad del _____ es de \$40.00.

c. La _____ de descuento es de 20%.

d. El precio en _____ del ventilador de techo es de \$159.99.

CONCEPTOS

Complete los espacios en cada una de las siguientes fórmulas.

5. Impuesto sobre las ventas = tasa del impuesto sobre la venta · _____

6. Costo total = _____ + impuesto sobre las ventas

7. Comisión = Tasa de la comisión · _____

8. **a.** Cantidad del descuento = precio original − _____

b. Cantidad del descuento = _____ · precio original

c. Precio en rebaja = _____ − descuento

9. **a.** El impuesto sobre las ventas sobre un artículo con un precio de \$59.32 es de \$4.75. ¿Cuál es el costo total del artículo?

b. El precio original de un artículo es de \$150.99. La cantidad del descuento es de \$15.99. ¿Cuál es el precio en rebaja del artículo?

10. Redondee cada cantidad en dólares al centavo más cercano.

a. \$168.257

b. \$57.234

c. \$3.396

11. Complete los espacios: Para encontrar el porcentaje de decremento, _____ el número más pequeño del más grande para encontrar la cantidad de decremento. Después encuentre qué porcentaje es de la cantidad _____ esa diferencia.

12. PERIÓDICOS La tabla abajo muestra cómo han cambiado las circulaciones de dos diarios del 2003 al 2007.

Circulación diaria

	Miami Herald	*USA Today*
2003	315,850	2,154,539
2007	255,844	2,293,137

Fuente: *The World Almanac,* 2009

a. ¿Cuál fue la *cantidad de decremento* de la circulación del *Miami Herald*?

b. ¿Cuál fue la *cantidad de incremento* de la circulación del *USA Today*?

PRÁCTICA GUIADA

Resuelva cada problema para encontrar el impuesto sobre las ventas. **Vea el Ejemplo 1.**

13. Encuentre el impuesto sobre las ventas sobre una compra de $92.70 si la tasa del impuesto sobre las ventas es de 4%.

14. Encuentre el impuesto sobre las ventas sobre una compra de $33.60 si la tasa del impuesto sobre las ventas es de 8%.

15. Encuentre el impuesto sobre las ventas sobre una compra de $83.90 si la tasa del impuesto sobre las ventas es de 5%.

16. Encuentre el impuesto sobre las ventas sobre una compra de $234.80 si la tasa del impuesto sobre las ventas es de 2%.

Resuelva cada problema para encontrar el costo total. **Vea el Ejemplo 2.**

17. Encuentre el costo total de una compra de $68.24 si la tasa del impuesto sobre las ventas es de 3.8%.

18. Encuentre el costo total de una compra de $86.56 si la tasa del impuesto sobre las ventas es de 4.3%.

19. Encuentre el costo total de una compra de $60.18 si la tasa del impuesto sobre las ventas es de 6.4%.

20. Encuentre el costo total de una compra de $70.73 si la tasa del impuesto sobre las ventas es de 5.9%.

Resuelva cada problema para encontrar la tasa del impuesto. **Vea el Ejemplo 3.**

21. IMPUESTO SOBRE LAS VENTAS El precio de compra para una licuadora es de $140. Si el impuesto sobre la venta es de $7.28, ¿cuál es la tasa del impuesto sobre la venta?

22. IMPUESTO SOBRE LA VENTA El precio de compra para una tienda de campaña es de $180. Si el impuesto sobre la venta es de $8.64, ¿cuál es la tasa del impuesto sobre la venta?

23. IMPUESTOS DE AUTOEMPLEO El propietario de un negocio paga impuestos de autoempleo de $4,590 en un ingreso gravable de $30,000. ¿Cuál es la tasa del impuesto de autoempleo?

24. IMPUESTO SOBRE LAS GANANCIAS DE CAPITAL Una pareja paga $3,000 en impuesto sobre las ganancias de capital sobre una utilidad de $20,000 procedente de la venta de algunas acciones. ¿Cuál es la tasa del impuesto sobre las ganancias de capital?

Resuelva cada problema para encontrar la comisión. **Vea el Ejemplo 4.**

© iStockphoto.com/Cameron Pashak

25. VENTA DE ZAPATOS Una vendedora de zapatos gana una comisión de 12% sobre todas las ventas. Encuentre su comisión si vende un par de zapatos de vestir por $95.

26. VENTA DE AUTOMÓVILES Un vendedor de automóviles usados gana una comisión de 11% sobre todas las ventas. Encuentre su comisión si vende un Chevy Malibú 2001 por $4,800.

27. AGENCIAS DE EMPLEO Una agente de empleo recibe una comisión de 35% sobre el primer salario semanal de alguien que coloque en un nuevo empleo. Encuentre su comisión si una de sus clientes es contratada como secretaria a $480 por semana.

28. VENTAS DE PRODUCTOS FARMACÉUTICOS A una representante de ventas de medicamentos se le paga una comisión de 18% sobre todas las ventas. Encuentre su comisión si vende $75,000 de Coumadina, un fármaco adelgazante de la sangre, a una cadena farmacéutica.

Resuelva cada problema para encontrar la tasa de la comisión. **Vea el Ejemplo 5.**

29. SUBASTAS Un subastador ganó una comisión de $15 en la venta de una silla antigua por $750. ¿Cuál es la tasa de la comisión?

30. VENTA DE NEUMÁTICOS A un vendedor de neumáticos se le pagó una comisión de $28 después que uno de sus clientes comprara un conjunto de neumáticos nuevos por $560. ¿Cuál es la tasa de la comisión?

31. VENTA DE ELECTRÓNICOS Si la comisión sobre una laptop de $500 es de $20, ¿cuál es la tasa de la comisión?

32. VENTA DE RELOJES Si la comisión sobre un reloj de caja de $600 es de $54, ¿cuál es la tasa de la comisión?

Resuelva cada problema para encontrar el porcentaje de incremento. **Vea el Ejemplo 6.**

33. CLUBES El número de miembros de un club de servicios aumentó de 80 a 88. ¿Cuál fue el porcentaje de incremento en la membresía del club?

34. CUENTAS DE AHORRO La cantidad de dinero en una cuenta de ahorros aumentó de $2,500 a $3,000. ¿Cuál fue el porcentaje de incremento en la cantidad de dinero ahorrado?

35. AUMENTOS Después de recibir un aumento, el salario de una secretaria aumentó de $300 a $345 dólares por semana. ¿Cuál fue el porcentaje de incremento en su salario?

36. COLEGIATURA La colegiatura en un colegio comunitario aumentó de $2,500 a $2,650 por semestre. ¿Cuál fue el porcentaje de incremento en la colegiatura?

Resuelva cada problema para encontrar el porcentaje de decremento. **Vea el Ejemplo 7.**

37. TIEMPO DE VIAJE Después que se completara una nueva carretera, el tiempo de viaje al trabajo de un pasajero disminuyó de 30 minutos a 24 minutos. ¿Cuál fue el porcentaje de decremento en el tiempo de viaje?

38. LIQUIDACIONES Una compañía de impresión redujo el número de trabajadores de 300 a 246. ¿Cuál fue el porcentaje de decremento en el número de trabajadores?

39. MATRICULACIÓN Treinta y seis de los 40 estudiantes matriculados originalmente en una clase de álgebra completaron el curso. ¿Cuál fue el porcentaje de decremento en el número de estudiantes en la clase?

40. DISMINUCIÓN DE VENTAS Un año, un sembradío de calabazas vendió 1,200 calabazas. Al siguiente año, sólo vendió 900. ¿Cuál fue el porcentaje de decremento en el número de calabazas vendidas?

Imagen Copyright Eye for Africa, 2009. Utilizada bajo licencia de Shutterstock.com

Resuelva cada problema para encontrar la cantidad del descuento y el precio en rebaja. **Vea el Ejemplo 8.**

41. VENTAS DE VAJILLAS Encuentre la cantidad del descuento en un juego de vajilla para seis personas si regularmente se vende por $90, pero está en rebaja con 33% de descuento. Después encuentre el precio en rebaja del juego de vajilla.

42. VENTAS DE ROPA DE CAMA Encuentre la cantidad del descuento en un cobertor de $130 que está ahora a la venta con 20% de descuento. Después encuentre el precio en rebaja del cobertor.

43. VENTAS DE ROPA PARA CABALLERO Los jeans Levi 501 que por lo regular se venden por $58 ahora tienen un descuento de 15%. Encuentre la cantidad del descuento. Después encuentre el precio en rebaja de los jeans.

44. VENTAS DE LIBROS En una librería, el precio de lista de $23.50 para el *Diccionario colegial Merriam-Webster's* está tachado y se pegó una calcomanía de 30% de descuento. Encuentre la cantidad del descuento. Después halle el precio en rebaja del diccionario.

Resuelva cada problema para encontrar la tasa del descuento. **Vea el Ejemplo 9.**

45. VENTAS DE ESCALERAS Encuentre la tasa del descuento sobre una escalera de aluminio que tiene por lo regular un precio de $79.95 que está ahora en venta por $64.95. Redondee al uno por ciento más cercano.

46. VENTAS DE SUMINISTROS PARA OFICINA Encuentre la tasa del descuento sobre un sacapuntas eléctrico que tiene por lo regular un precio de $49.99 que está ahora en venta por $45.99. Redondee al uno por ciento más cercano.

47. BOLETOS CON DESCUENTO El precio de ida del boleto de una aerolínea de Atlanta a la ciudad de Nueva York se redujo de $209 a $179. Encuentre la tasa del descuento. Redondee al uno por ciento más cercano.

48. HOTELES CON DESCUENTO El costo de una estancia de una noche en un hotel se redujo de $245 a $200. Encuentre la tasa del descuento. Redondee al uno por ciento más cercano.

APLICACIONES

49. IMPUESTO SOBRE LAS VENTAS La tasa del impuesto sobre la venta del estado de Utah es de 5.95%. Encuentre el impuesto sobre las ventas sobre un comedor que se vende por $900.

50. IMPUESTO SOBRE LAS VENTAS Encuentre el impuesto sobre las ventas de un par de jeans que cuestan $40 si se adquieren en Missouri, el cual tiene una tasa de impuesto sobre las ventas estatal de 4.225%.

51. RECIBO DE LAS VENTAS Complete el recibo de la venta de abajo encontrando el subtotal, el impuesto sobre las ventas y el costo total de la compra.

NURSERY CENTER

Su suministro de jardinería en una parada

3	@ 2.99	MEZCLA DE PLANTACIÓN	$ 8.97
1	@ 9.87	MALEZA	$ 9.87
2	@ 14.25	ARBUSTOS	$28.50
		SUBTOTAL	$
		IMPUESTO SOBRE LAS VENTAS @ 6.00%	$
		TOTAL	$

52. RECIBO DE LAS VENTAS Complete el recibo de venta de abajo encontrando los tres precios, el subtotal, el impuesto sobre la venta y el costo total de la compra.

McCOY'S FURNITURE

1	@ 450.00	SOFÁ	$
2	@ 90.00	MESA DE ESQUINA	$
1	@ 350.00	SOFÁ DOS PLAZAS	$
		SUBTOTAL	$
		IMPUESTO SOBRE LAS VENTAS @ 4.20%	$
		TOTAL	$

53. IMPUESTO A LA HABITACIÓN Después de salir de un hotel, un hombre observó que la factura del hotel incluía un cargo adicional etiquetado como *impuesto a la habitación.* Si el precio de la habitación era de $129 más un impuesto a la habitación de $10.32, encuentre la tasa del impuesto a la habitación.

54. IMPUESTO DE CONSUMO Mientras examinaba su factura telefónica mensual, una mujer observó un cargo adicional de $1.24 etiquetado como *impuesto al consumo federal.* Si el cargo por servicio básico para el periodo facturado era de $42, ¿cuál es la tasa del impuesto al consumo federal? Redondee al uno por ciento más cercano.

55. APUESTAS Para las apuestas autorizadas estatales colocadas con casas y operadores de lotería legales, hay un impuesto al consumo federal sobre la apuesta. ¿Cuál es la tasa del impuesto al consumo si hay un impuesto al consumo de $5 sobre una apuesta de $2,000?

56. COMPRA DE EQUIPO DE PESCA Hay impuestos federales al consumo sobre el precio al consumidor cuando se compra equipo de pesca. Los impuestos están destinados a ayudar a pagar los parques y la conservación. ¿Cuál es la tasa del impuesto federal al consumo si hay un impuesto al consumo de $17.50 sobre una caña de pescar y un carrete que tienen un precio al consumidor de $175?

57. AUMENTOS TRIBUTARIOS Para tener mayores ingresos, algunos estados elevan la tasa del impuesto sobre las ventas. ¿Cuánto dinero adicional se recolectará sobre la venta de un automóvil de $15,000 si el impuesto sobre las ventas se eleva en 1%?

58. VIAJES AL EXTRANJERO El impuesto al valor agregado (IVA) es un impuesto al consumo sobre bienes y servicios. En la actualidad, los sistemas de IVA existen en todas partes del mundo. (Estados Unidos es una de las pocas naciones que no utilizan un sistema de impuesto al valor agregado.) Complete la tabla determinando el IVA que pagaría un viajero en cada país sobre una cena que cuesta $25. Redondee al centavo más cercano.

País	Tasa del IVA	Impuesto sobre una cena de $25
México	16%	
Alemania	19%	
Irlanda	21.5%	
Suecia	25%	

Fuente: www.worldwide-tax.com

59. RECIBO DE NÓMINA Use la información en el recibo de nómina para encontrar la tasa de los impuesto federales, a la compensación del trabajador, Medicare y Seguridad social que se dedujeron del sueldo bruto.

6286244

Fecha de emisión: 03-27-10

SUELDO BRUTO	$360.00
IMPUESTOS	
IMPUESTO FED.	$ 28.80
COMP. AL TRAB.	$ 13.50
MEDICARE	$ 4.32
SEGURIDAD SOCIAL	$ 22.32
SUELDO NETO	$291.06

60. IMPUESTO A LA GASOLINA En un estado, un galón de gasolina sin plomo se vende por $3.05. Este precio incluye los impuestos federal y estatal que en total son de aproximadamente $0.64. Por tanto, el precio de un galón de gasolina, antes de impuestos, es de $2.41. ¿Cuál es la tasa de impuesto sobre la gasolina? Redondee al 1% más cercano.

61. FUERZA POLICIAL Un departamento de policía planea aumentar su fuerza de 80 personas a 84 personas. Encuentre el porcentaje de incremento en el tamaño de la fuerza policial.

62. AUMENTOS EN LOS COSTOS DE VIDA Una mujer que gana $32,000 al año recibe un aumento por el costo de vida que eleva su salario a $32,768 por año. Encuentre el porcentaje de incremento en su salario anual.

© iStockphoto.com

63. RIBERA DE LAGOS Debido a una escorrentía de primavera pesada, la ribera de un lago aumentó de 5.8 millas a 7.6 millas. ¿Cuál fue el porcentaje de incremento en la longitud de la ribera? Redondee al uno por ciento más cercano.

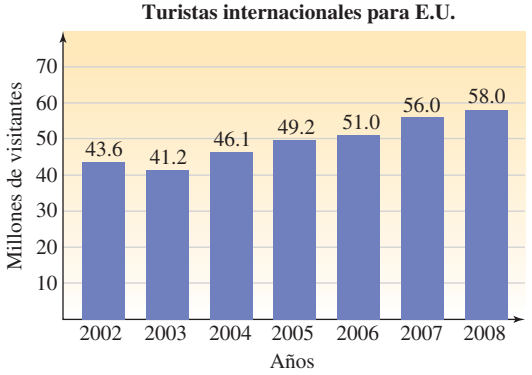
64. DAÑO A CULTIVOS Después que una inundación dañara gran parte de los cultivos, el costo de una cabeza de lechuga saltó de $0.99 a $2.20. ¿Qué porcentaje de incremento es esto? Redondee al uno por ciento más cercano.

65. TIEMPO EXTRA De mayo a junio, el número de horas extra para los empleados de una compañía de impresión aumentó de 42 a 106. ¿Cuál es el porcentaje de incremento en el número de horas extra? Redondee al uno por ciento más cercano.

66. TURISMO La gráfica abajo muestra el número de visitantes internacionales (turistas) para Estados Unidos cada año del 2002 al 2008.

a. El mayor porcentaje de incremento en el número de turistas fue entre el 2003 y el 2004. Encuentre el porcentaje de incremento. Redondee al uno por ciento más cercano.

b. La única disminución en el número de turistas fue entre el 2002 y el 2003. Encuentre el porcentaje de decremento. Redondee al uno por ciento más cercano.



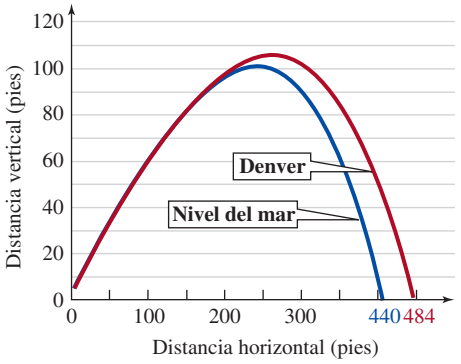
Fuente: U.S. Department of Commerce

67. CALORÍAS REDUCIDAS Una compañía anunció sus papas nuevas y mejoradas como de 96 calorías por porción. El estilo original contenía 150 calorías. ¿Qué porcentaje de decremento en el número de calorías por porción es esto?

68. SEGURO DE AUTOMÓVILES Una estudiante pagaba una prima de seguro de automóvil de $420 cada tres meses. Después la prima disminuyó a $370, debido a que calificaba para un descuento por buena estudiante. ¿Cuál fue el porcentaje de decremento en la prima? Redondee al uno por ciento más cercano.

69. PASES DE AUTOBÚS Para aumentar el número de pasajeros, una compañía de autobuses redujo el precio de un pase mensual de $112 a $98. ¿Cuál fue el porcentaje de decremento en el costo de un pase de autobús?

70. BEISBOL La ilustración de abajo muestra la trayectoria de un hit de beisbol a 110 mph, con un ángulo de lanzamiento de 35 grados, al nivel del mar y en el Coors Field, hogar de los Colorado Rockies. ¿Cuál es el porcentaje de incremento en la distancia que recorre la pelota en el Coors Field?

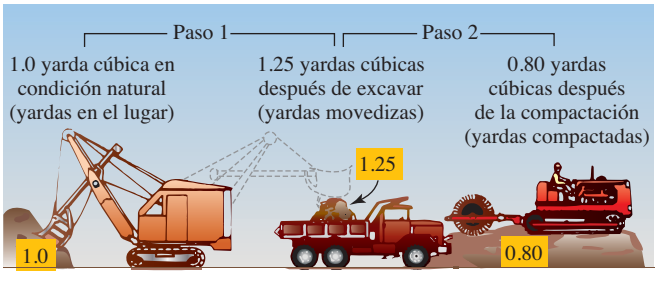


Fuente: *Los Angeles Times,* 16 de septiembre de 1996.

71. DESPLAZAMIENTO DE TIERRA La ilustración de abajo muestra el cambio común en el volumen del suelo durante un desplazamiento de tierra. (Una yarda cúbica de suelo cabe en un cubo que sea de 1 yarda de largo, de 1 yarda de ancho y de 1 yarda de alto).

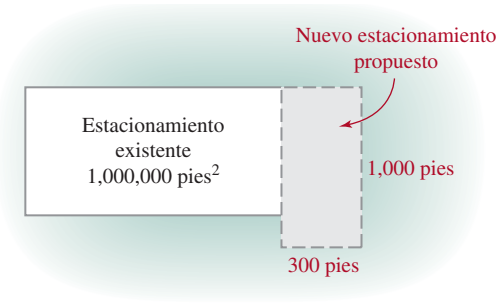
a. Encuentre el porcentaje de incremento en el volumen del suelo a medida que pasa a través del paso 1 del proceso.

b. Encuentre el porcentaje de decremento en el volumen del suelo a medida que pasa a través del paso 2 del proceso.



Fuente: U.S. Department of the Army.

72. ESTACIONAMIENTO El gerente de un centro comercial ha decidido aumentar el área de estacionamiento. Los planes se muestran en la siguiente columna. ¿Cuál será el porcentaje de incremento en el área de estacionamiento cuando se complete el proyecto?



73. BIENES RAÍCES Después de vender una casa por $98,500, un agente de bienes raíces divide la comisión de 6% con otro agente. ¿Cuánto recibió cada persona?

74. COMISIONES A una vendedora de una compañía de suministros médicos se le paga una comisión de 9% por pedidos menores de $8,000. Para pedidos que exceden $8,000, recibe 2% en la comisión sobre la cantidad total. ¿Cuál es su comisión sobre una venta de $14,600?

75. AGENTES DEPORTIVOS Una agente deportivo cobra a sus clientes una cuota por representarlos durante las negociaciones contractuales. La cuota se basa en un porcentaje de la cantidad del contrato. Si la agente ganó $37,500 cuando su cliente firmó un contrato de futbol profesional de $2,500,000, ¿qué tasa cobró por sus servicios?

76. GALERÍAS DE ARTE Una galería de arte exhibe las pinturas de artistas y recibe una comisión del artista cuando se vende una pintura. ¿Cuál es la tasa de la comisión si una galería recibió $135.30 cuando se vendió una pintura por $820?

77. SEGURO DE VIDA VITALICIO Para los primeros 12 meses, los agentes de seguros ganan una comisión muy grande sobre la prima mensual de cualquier póliza de vida vitalicia que vendan. Después de eso, la tasa de comisión disminuye de manera significativa. Suponga que sobre una póliza nueva con primas mensuales de $160, a un agente se le paga mensualmente comisiones de $144. Encuentre la tasa de la comisión.

78. SEGURO TEMPORAL Para los primeros 12 meses, los agentes de seguros ganan una comisión grande sobre la prima mensual de cualquier póliza de vida temporal que vendan. Después de eso, la tasa de comisión disminuye de manera significativa. Suponga que sobre una póliza nueva con primas mensuales de $180, a un agente se le paga mensualmente comisiones de $81. Encuentre la tasa de la comisión.

79. ESTACIONAMIENTO EN CONCIERTOS Un promotor de conciertos obtiene una comisión de $33\frac{1}{3}\%$ de los ingresos que recibe una arena a partir del estacionamiento la noche de la actuación. ¿Cuánto puede ganar el promotor si se esperan 6,000 automóviles y el estacionamiento cuesta $6 por automóvil?

80. DEMOSTRACIONES Una ama de casa invitó a sus vecinos a una demostración de utensilios de cocina. Como anfitriona de la demostración, recibió 12% de las ventas totales. ¿Cuánto se adquirió si recibió $41.76 por ser anfitriona de la demostración?

81. OFERTA DE RELOJES Refiérase al anuncio de abajo.

a. Encuentre la cantidad del descuento sobre el reloj.

b. Encuentre el precio en rebaja del reloj.

82. OFERTA DE MONOPATINES Refiérase al anuncio abajo.

a. Encuentre la cantidad del descuento sobre el monopatín.

b. Encuentre el precio en rebaja del monopatín.

83. SEGWAYS Encuentre la tasa del descuento sobre un Segway PT mostrado en el anuncio. Redondee al 1% más cercano.

84. MÁQUINAS DE FAX Una máquina de fax HP 3180, con un precio regular de $160, está en oferta por $116. ¿Cuál es la tasa del descuento?

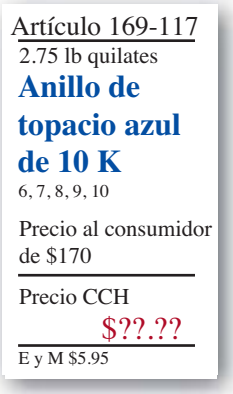
85. REPRODUCTORES DE DISCOS ¿Cuáles son el precio en rebaja y la tasa del descuento para un reproductor de discos Blu-ray que por lo regular se vende por $399.97 y tiene un descuento de $50? Redondee al uno por ciento más cercano.

86. OFERTA DE VIDEOCÁMARAS ¿Cuáles son el precio en rebaja y la tasa del descuento para una videocámara que por lo regular se vende a $559.97 y que tiene un descuento de $80? Redondee al uno por ciento más cercano.

87. REBAJAS Encuentre la tasa del descuento y el nuevo precio para una caja de aceite para motor si un comprador recibe la rebaja del fabricante mencionada en el anuncio. Redondee al 1% más cercano.

88. CUPONES DOBLES Encuentre el descuento, la tasa del descuento y el precio reducido para una caja de cereal que por lo regular se vende por $3.29 si un comprador presenta el cupón en una tienda que duplica el valor del cupón.

89. COMPRAS POR TV Determine el precio de la Cadena de compras desde el hogar (CCH) del anillo descrito en la ilustración si se vende con un 55% de descuento del precio al consumidor. Ignore los costos de envío y manejo.



90. INFOMERCIALES El presentador de un infomercial de TV dice que el precio al consumidor sugerido de una parrilla para asar es de $249.95 y que está en oferta "por sólo 4 cómodos pagos de sólo $39.95". ¿Cuál es el descuento y cuál es la tasa del descuento?

91. OFERTA DE ANILLOS ¿En cuánto se vende por lo regular un anillo si se le ha descontado 20% y ahora está en rebaja por $149.99? (*Sugerencia:* El anillo se está vendiendo a 80% de su precio regular.)

92. OFERTA DE PERSIANAS ¿En cuánto se venden por lo regular unas persianas de vinil si se les ha descontado 55% y ahora están en rebaja por $49.50? (*Sugerencia:* Las persianas se están vendiendo al 45% de su precio regular.)

REDACCIÓN

93. Explique la diferencia entre un impuesto sobre las ventas y una tasa al impuesto sobre las ventas.

94. Liste las ventajas y las desventajas de trabajar sobre comisión.

95. Suponga que el precio de un artículo aumenta $25 de $75 a $100. Explique por qué *no puede* utilizarse el siguiente enunciado de porcentaje para encontrar el porcentaje de incremento en el precio del artículo

¿25 es que porcentaje de 100?

96. Explique cómo encontrar el precio en rebaja de un artículo si conoce el precio regular y la tasa del descuento.

REPASO

97. Multiplique: $-5(-5)(-2)$

98. Divida: $\frac{-320}{40}$

99. Reste: $-4 - (-7)$

100. Sume: $-17 + 6 + (-12)$

101. Evalúe: $|-5 - 8|$

102. Evalúe: $\sqrt{25} - \sqrt{16}$

Objetivos

1. Estimar respuestas para problemas de porcentaje que involucran el 1% y 10%.
2. Estimar respuestas para problemas de porcentaje que involucran el 50%, 25%, 5% y 15%.
3. Estimar respuestas para problemas de porcentaje que involucran el 200%.
4. Usar la estimación para resolver problemas de aplicación de porcentaje.

SECCIÓN 6.4
Estimación con el porcentaje

Puede utilizarse una **estimación** para encontrar aproximaciones cuando no son necesarias respuestas exactas. Por ejemplo, cuando cena en un restaurante, es de utilidad el ser capaz de estimar la cantidad de la propina. Al comprar, la habilidad de estimar un descuento o el precio en rebaja de un artículo también resulta útil. En esta sección, se explicarán algunos métodos de estimación que pueden utilizarse para realizar cálculos rápidos que involucran porcentajes.

1 Estimar respuestas para problemas de porcentaje que involucran el 1% y 10%

Existe una manera sencilla de encontrar el 1% de un número que no requiere algún cálculo. Primero, recuerde que $1\% = \frac{1}{100} = 0.01$. Por tanto, para encontrar el 1% de un número se multiplica por 0.01, y una manera rápida de multiplicar el número por 0.01 es mover su punto decimal *dos posiciones a la izquierda.*

Encontrar el 1% de un número

Para encontrar el 1% de un número mueva el punto decimal en el número dos posiciones a la izquierda.

Auto-revisión 1

¿Cuál es el 1% de 519.3? Encuentre la respuesta exacta y un estimado utilizando el redondeo por la izquierda.

Ahora intente **Problema 11**

EJEMPLO 1 ¿Cuál es el 1% de 423.1? Encuentre la respuesta exacta y un estimado utilizando el redondeo por la izquierda.

Estrategia Para encontrar la respuesta exacta, se moverá el punto decimal en el 423.1 dos posiciones a la izquierda. Para encontrar un estimado, se moverá el punto decimal en una aproximación del 423.1 dos posiciones a la izquierda.

POR QUÉ Se mueve el punto decimal *dos* posiciones a la izquierda debido a que el 1% de un número significa 0.01 del (por el) número.

Solución

Respuesta exacta:

1% de 423.1 = 4.231 Mueva el punto decimal en el 423.1 dos posiciones a la izquierda.

Estimado: Recuerde a partir del Capítulo 1 que con el **redondeo por la izquierda** se redondea un número a su valor posicional más grande para que todos excepto su primer dígito sean de cero. Para estimar el 1% de 423.1, se puede redondear por la izquierda el 423.1 a 400 y encontrar el 1% de 400. Si se mueve el punto decimal implícito en el 400 dos posiciones a la izquierda, se obtiene 4. Por tanto,

1% de 423.1 $\approx$ 4 debido a que el 1% de 400 = 4.

Consejo útil Para encontrar rápido el 2% de un número, encuentre el 1% del número moviendo el punto decimal dos posiciones a la izquierda y después duplique (multiplique por 2) el resultado. En el Ejemplo 1 se encontró que el 1% de 423.1 es **4.231**. Por tanto, el 2% de 423.1 es $2 \cdot$ **4.231** $= 8.462$. Puede utilizarse un método similar para encontrar el 3% de un número, el 4% de un número, etcétera.

También existe una manera fácil de encontrar el 10% de un número que no requiere algún cálculo. Primero, recuerde que $10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$. Por tanto, para encontrar el 10% de un número, se multiplica el número por 0.1 y una manera rápida de multiplicar el número por 0.1 es mover su punto decimal *una posición a la izquierda.*

Encontrar el 10% de un número

Para encontrar el 10% de un número mueva el punto decimal en el número una posición a la izquierda.

EJEMPLO 2 ¿Cuánto es el 10% de 6,872 pies? Encuentre la respuesta exacta y un estimado utilizando el redondeo por la izquierda.

Estrategia Para encontrar la respuesta exacta se moverá el punto decimal en el 6,872 una posición a la izquierda. Para encontrar un estimado se moverá el punto decimal en una aproximación del 6,872 una posición a la izquierda.

POR QUÉ Se mueve el punto decimal *una* posición a la izquierda debido a que el 10% de un número significa 0.10 del (por el) número.

Solución

Respuesta exacta:

10% de 6,872 pies = 687.2 pies Mueva el punto decimal implícito en el 6,872 una posición a la izquierda.

Estimado: Para estimar el 10% de 6,872 pies, se puede redondear por la izquierda el 6,872 a 7,000 y encontrar el 10% de 7,000 pies. Si se mueve el punto decimal implícito en el 7,000 una posición a la izquierda, se obtiene 700. Por tanto,

10% de 6,872 pies ≈ 700 pies Debido a que el 10% de 7,000 = 700.

Auto-revisión 2

¿Cuál es el 10% de 3,536 libras? Encuentre la respuesta exacta y un estimado utilizando el redondeo por la izquierda.

Ahora intente **Problema 15**

¡Cuidado! En los ejemplos 1 y 2 se utilizó el *redondeo por la izquierda* para encontrar estimados de respuestas para problemas de porcentaje. Dado que existen otras maneras de aproximar (redondear) los números involucrados en un problema de porcentaje, las respuestas para los problemas de estimación pueden variar.

La regla para encontrar el 10% de un número puede extenderse para ayudar a encontrar de manera rápida múltiplos del 10% de un número.

Encontrar el 20%, 30%, 40%, . . . de un número

Para encontrar el 20% de un número encuentre el 10% del número moviendo el punto decimal una posición a la izquierda y después duplique (multiplique por 2) el resultado. Puede utilizarse un método similar para encontrar el 30% de un número, el 40% de un número, etcétera.

EJEMPLO 3 Estime la respuesta: ¿Cuánto es 20% de 416?

Estrategia Se estimará el 10% de 416 y se duplicará (multiplicará por 2) el resultado.

POR QUÉ El 20% de un número es el doble del 10% de un número.

Solución Dado que el 10% de 416 es 41.6 (o alrededor de **42**), se tiene que el 20% de 416 es alrededor de 2 · **42**, el cual es 84. Por tanto,

20% de 416 ≈ 84 Debido a que el 10% de 416 = 41.6 ≈ 42 y 2 · 42 = 84.

Auto-revisión 3

Estime la respuesta: ¿Cuánto es 20% de 129?

Ahora intente **Problema 19**

2 Estimar respuestas para problemas de porcentaje que involucran el 50%, 25%, 5% y 15%

Existe una manera sencilla de encontrar el 50% de un número. Primero, recuerde que $50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$. Por tanto, hallar el 50% de un número significa encontrar $\frac{1}{2}$ de ese número y para encontrar el $\frac{1}{2}$ de un número simplemente se divide entre 2.

Encontrar el 50% de un número

Para encontrar el 50% de un número, divida el número entre 2.

Auto-revisión 4

Estime la respuesta: ¿Cuánto es 50% de 14,272,549?

Ahora intente **Problema 23**

EJEMPLO 4 Estime la respuesta: ¿Cuánto es 50% de 2,595,603?

Estrategia Se dividirá una aproximación del 2,595,603 entre 2.

POR QUÉ Para encontrar el 50% de un número, se divide el número entre 2.

Solución Para estimar el 50% del 2,595,603, se encontrará el 50% de 2,600,000. Se utiliza el 2,600,000 como una aproximación debido a que es cercano a 2,595,603, debido a que es par y por tanto, divisible entre 2 y debido a que termina con varios ceros.

50% de 2,595,603 ≈ 1,300,000 *Debido a que el 50% de* $2{,}600{,}000 = \frac{2{,}600{,}000}{2} = 1{,}300{,}000$

También existe una manera sencilla de encontrar el 25% de un número. Primero, encuentre el 50% del número dividiendo el número entre 2. Después, dado que el 25% es la mitad del 50%, divida ese resultado entre 2. O, para ahorrar tiempo, simplemente divida el número original entre 4.

Encontrar el 25% de un número

Para encontrar el 25% de un número, divida el número entre 4.

Auto-revisión 5

Estime la respuesta: ¿Cuánto es 25% de 27.16?

Ahora intente **Problema 27**

EJEMPLO 5 Estime la respuesta: ¿Cuánto es 25% de 43.02?

Estrategia Se dividirá una aproximación del 43.02 entre 4.

POR QUÉ Para encontrar el 25% de un número, se divide el número entre 4.

Solución Para estimar el 25% del 43.02, se encontrará el 25% de 44. Se utiliza el 44 como una aproximación debido a que es cercano a 43.02, y debido a que es divisible entre 4.

25% de 43.02 ≈ 11 *Debido a que el 25% de* $44 = \frac{44}{4} = 11$.

Existe una manera rápida de encontrar el 5% de un número. Primero, encuentre el 10% de un número moviendo el punto decimal en el número una posición a la izquierda. Después, como 5% es la mitad de 10%, divida ese resultado entre 2.

Encontrar el 5% de un número

Para encontrar el 5% de un número, encuentre el 10% del número moviendo el punto decimal en el número una posición a la izquierda. Después, divida ese resultado entre 2.

EJEMPLO 6 ***Uso de la electricidad*** El hogar promedio en E.U. utiliza 10,656 kilowatts-hora de electricidad cada año. A varios grupos de conservación de energía les gustaría que cada hogar tome medidas para reducir su uso eléctrico un 5%. Estime el 5% de 10,656 kilowatts-hora. (*Fuente:* U.S. Department of Energy)

Garry Wade/Getty Images

Estrategia Se encontrará el 10% de 10,656. Después, se dividirá una aproximación de ese resultado entre 2.

POR QUÉ El 5% de un número es la mitad del 10% de un número.

Solución Primero, se encuentra el 10% de 10,656.

$$10\% \text{ de } 10{,}656 = 1{,}065.6$$

Mueva el punto decimal implícito en el 10,656 una posición a la izquierda.

Se utilizará el 1,066 como una aproximación de este resultado debido a que es cercano a 1,065.6 y debido a que es par y por tanto, divisible entre 2. Después, se divide la aproximación entre 2 para estimar el 5% de 10,656.

$$\frac{1{,}066}{2} = 533$$

Divida la aproximación del 10% de 10,656 entre 2.

Por tanto, el 5% de 10,656 $\approx$ 533. Una reducción de 5% en el uso de electricidad por el hogar promedio en E.U. es de alrededor de 533 kilowatts-hora.

Auto-revisión 6

Estime la respuesta: ¿Cuánto es 5% de 24,198?

Ahora intente **Problemas 31**

Se pueden utilizar los atajos para encontrar el 10% y el 5% de un número para encontrar el 15% de un número.

Encontrar el 15% de un número

Para encontrar el 15% de un número, encuentre la suma del 10% del número y el 5% del número.

EJEMPLO 7 ***Propinas*** Como regla general, si el servicio en un restaurante es aceptable, debe dejársele al camarero una propina de 15% de la factura total. Estime la propina de 15% sobre la factura de una cena de $77.55.

tetra images/First Light

Estrategia Se encontrarán el 10% y el 5% de una aproximación de $77.55. Después se sumarán esos resultados.

POR QUÉ Para encontrar el 15% de un número, encuentre la suma del 10% del número y el 5% del número.

Solución Para simplificar los cálculos, se estimará el costo de la cena de $77.55 como de $80. Después, para estimar la propina, se encuentra el 10% de $80 y el 5% de $80 y se suman.

10% de $80 es $8	$8
5% de $80 (la mitad de 10% de $80)	+ $4
	$12

Sume para obtener la propina estimada.

La propina debe ser de $12.

Auto-revisión 7

PROPINAS Estime la propina de 15% sobre la factura de un desayuno de $29.55.

Ahora intente **Problemas 35 y 75**

3 Estimar respuestas para problemas de porcentaje que involucran el 200%

Dado que el 100% de un número es el mismo número, se tiene que el 200% sería el doble del número. Se puede extender esta regla para encontrar de manera rápida múltiplos de 100% de un número.

Encontrar el 200%, 300%, 400%, . . . de un número

Para encontrar el 200% de un número, multiplique el número por 2. Puede utilizarse un método similar para encontrar el 300% de un número, el 400% de un número, etcétera.

Auto-revisión 8

Estime la respuesta: ¿Cuánto es 200% de 12.437?

Ahora intente **Problema 43**

EJEMPLO 8 Estime la respuesta: ¿Cuánto es 200% de 5.673?

Estrategia Se multiplicará una aproximación del 5.673 por 2.

POR QUE Para encontrar el 200% de un número multiplique el número por 2.

Solución Para estimar el 200% de 5.673 se encontrará el 200% de 6. Se utiliza el 6 como una aproximación debido a que es cercano a 5.673 y hace sencilla la multiplicación por 2.

200% de 5.673 ≈ 12 *Debido a que el 200% de 6 = 2 · 6 = 12.*

4 Usar la estimación para resolver problemas de aplicación de porcentaje

En los ejemplos anteriores de esta sección se proporcionó el porcentaje (1%, 10%, 50%, 25%, 5%, 15% o 200%), se aproximó la base y después se estimó la cantidad. En ocasiones se desea aproximar el porcentaje y también estimar una respuesta.

Auto-revisión 9

ESTUDIANTES QUE CONDUCEN
De los 1,550 estudiantes que asisten a una preparatoria, 26% de ellos conducen a la escuela. Estime el número de estudiantes que conducen a la escuela.

Ahora intente **Problema 85**

EJEMPLO 9 ***Educación musical*** De los 350 niños que asisten a una escuela primaria, 24% de ellos están matriculados en el programa de música instrumental. Estime el número de niños que toman música instrumental.

Estrategia Se utilizará la regla de esta sección para encontrar el 25% de un número.

POR QUÉ El 24% es aproximadamente 25% y hay una manera rápida de encontrar el 25% de un número.

Solución El 24% de los 350 niños en la escuela están tomando música instrumental. Para estimar el 24% de 350, se encontrará el 25% de 360. Se utiliza el 360 como una aproximación debido a que es cercano a 350 y es divisible entre 4.

24% de 350 ≈ 90 *Debido a que el 25% de 360 = $\frac{360}{4}$ = 90.*

Hay aproximadamente 90 niños en la escuela que toman música instrumental.

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. 5.193, 5 **2.** 353.6 lb, 400 lb **3.** 26 **4.** 7,000,000 **5.** 7 **6.** 1,210 **7.** $4.50 **8.** 24 **9.** 400 estudiantes

SECCIÓN 6.4 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Complete los espacios.

1. Puede utilizarse una _____ para encontrar aproximaciones cuando no son necesarias respuestas exactas.
2. Con el redondeo por la _____, se redondea un número a su mayor valor posicional para que todos sus dígitos excepto el primero sean de cero.

CONCEPTOS

Complete los espacios.

3. Para encontrar el 1% de un número, mueva el punto decimal en el número _____ posiciones a la izquierda.
4. Para encontrar el 10% de un número, mueva el punto decimal en el número _____ posición a la izquierda.
5. Para encontrar el 20% de un número, encuentre el 10% del número moviendo el punto decimal una posición a la izquierda y después duplique (multiplique por _____) el resultado.
6. Para encontrar el 50% de un número, divida el número entre _____.
7. Para encontrar el 25% de un número, divida el número entre _____.
8. Para encontrar el 5% de un número, encuentre el 10% del número moviendo el punto decimal en el número una posición a la izquierda. Después, divida ese resultado entre _____.
9. Para encontrar el 15% de un número, encuentre la suma del _____% del número y el _____% del número.
10. Para encontrar el 200% de un número, multiplique el número por _____.

PRÁCTICA GUIADA

¿Cuál es el 1% del número proporcionado? Encuentre la respuesta exacta y un estimado utilizando el redondeo por la izquierda. Vea el Ejemplo 1.

11. 275.1
12. 460.9
13. 12.67
14. 92.11

¿Cuál es el 10% del número proporcionado? Encuentre la respuesta exacta y un estimado utilizando el redondeo por la izquierda. Vea el Ejemplo 2.

15. 4,059 libras
16. 7,435 horas
17. 691.4 minutos
18. 881.2 kilómetros

Estime cada respuesta. (Las respuestas pueden variar.) Vea el Ejemplo 3.

19. ¿Cuánto es 20% de 346?
20. ¿Cuánto es 20% de 409?
21. ¿Cuánto es 20% de 67?
22. ¿Cuánto es 20% de 32?

Estime cada respuesta. (Las respuestas pueden variar.) Vea el Ejemplo 4.

23. ¿Cuánto es 50% de 4,195,898?
24. ¿Cuánto es 50% de 6,802,117?
25. ¿Cuánto es 50% de 397,020?
26. ¿Cuánto es 50% de 793,288?

Estime cada respuesta. (Las respuestas pueden variar.) Vea el Ejemplo 5.

27. ¿Cuánto es 25% de 15.49?
28. ¿Cuánto es 25% de 7.02?
29. ¿Cuánto es 25% de 49.33?
30. ¿Cuánto es 25% de 39.74?

Estime cada respuesta. (Las respuestas pueden variar debido a la aproximación utilizada.) Vea el Ejemplo 6.

31. ¿Cuánto es 5% de 16,359?
32. ¿Cuánto es 5% de 44,191?
33. ¿Cuánto es 5% de 394.182?
34. ¿Cuánto es 5% de 176.001?

Estime una propina del 15% sobre cada cantidad en dólares. (Las respuestas pueden variar.) Vea el Ejemplo 7.

35. $58.99
36. $38.60
37. $27.16
38. $49.05
39. $115.75
40. $135.88
41. $9.74
42. $11.75

Estime cada respuesta. (Las respuestas pueden variar.) Vea el Ejemplo 8.

43. ¿Cuánto es 200% de 4.212?
44. ¿Cuánto es 200% de 5.189?
45. ¿Cuánto es 200% de 35.77?
46. ¿Cuánto es 200% de 80.32?

INTÉNTELO

Encuentre la respuesta exacta utilizando los métodos de esta sección.

47. ¿Cuánto es 2% de 600?
48. ¿Cuánto es 3% de 700?
49. ¿Cuánto es 30% de 18?
50. ¿Cuánto es 40% de 45?

Estime cada respuesta. (Las respuestas pueden variar).

51. ¿Cuánto es 300% de 59.2?
52. ¿Cuánto es 400% de 203.77?
53. ¿Cuánto es 5% de 4,605?
54. ¿Cuánto es 5% de 8,401?

55. ¿Cuánto es 1% de 628.21?

56. ¿Cuánto es 1% de 12,847.9?

57. ¿Cuánto es 15% de 119?

58. ¿Cuánto es 15% de 237?

59. ¿Cuánto es 10% de 67.0056?

60. ¿Cuánto es 10% de 94.2424?

61. ¿Cuánto es 25% de 275?

62. ¿Cuánto es 25% de 313?

63. ¿Cuánto es 50% de 23,898?

64. ¿Cuánto es 25% de 56,716?

65. ¿Cuánto es 200% de 0.9123?

66. ¿Cuánto es 200% de 0.4189?

Encuentre la respuesta exacta.

67. ¿Cuánto es 1% de 50% de 98?

68. ¿Cuánto es 10% de 25% de 20?

69. ¿Cuánto es 15% de 20% de 400?

70. ¿Cuánto es 5% de 10% de 30?

APLICACIONES

Estime cada respuesta a menos que se indique lo contrario. (Las respuestas pueden variar.)

71. CURSOS UNIVERSITARIOS El 20% de los 815 estudiantes que asisten a una universidad pequeña se matricularon en un curso de ciencia. ¿Cuántos estudiantes es esto?

72. OFERTAS ESPECIALES En la tienda de abarrotes, una botella de 65 onzas de limpiador de ventanas se marcó con "25% gratis". ¿Cuántas son las onzas gratis?

73. DESCUENTOS ¿En cuánto se rebaja el precio de un abrigo si el precio regular de $196.88 se reduce en 30%?

74. LETREROS El anuncio electrónico más grande de E.U. está en la intersección sur de Times Square en la ciudad de Nueva York. Tiene 12,000,000 luces de LED. Si se fundiese sólo 1% de estos LED, ¿cuántos LEDs tendrían que reemplazarse? Dé la respuesta exacta.

75. PROPINAS La propina en un restaurante por lo regular es de 15% del costo de la comida. Encuentre la propina sobre un costo de cena de $38.64.

76. RECIBOS DE VISA Refiérase al recibo a la derecha. Calcule la propina de 15% y después encuentre el total.

CLARK'S SEAFOOD
OKLAHOMA CITY, OK

Fecha:	
Tipo de tarjeta:	VISA
Núm. Cta.:	**********0241
Fecha de exp:	**/**
Cliente:	WONG/TOM
Mesero:	209 Colleen
Cantidad:	$58.47
Propina:	?
Total:	?

77. CENAR FUERA Una pareja salió a comer a un restaurante. La comida que ordenaron costó $28.55 y las bebidas que ordenaron costaron $19.75. Estime una propina de 15% sobre la factura total.

78. DIVIDIR LA PROPINA La factura total para tres hombres de negocios que fueron a comer a un restaurante chino fue de $121.10. Si dividieron la propina de manera equitativa, estime la parte de cada persona.

79. DAÑO POR INCENDIO Una compañía de seguros pagó 25% del costo de $118,000 para reconstruir una casa que fue destruida por un incendio. ¿Cuánto pagó la compañía de seguros?

80. INSPECCIONES DE SEGURIDAD De los 2,513 vehículos inspeccionados en un puesto de seguridad, 10% tenía violaciones al código. ¿Cuántos automóviles tenían violaciones al código?

81. LEVANTAMIENTO DE PESAS Un levantador de pesas cuyo peso es de 158 libras puede levantar pesas desde un banco que son de 200% de su peso corporal. ¿Cuántas libras puede levantar en el banco?

82. EXÁMENES En un examen de falso/verdadero con 60 preguntas, estuvieron equivocadas 5% de las respuestas de una estudiante. ¿En cuántas preguntas se equivocó?

83. ESTUDIOS DEL TRÁFICO De acuerdo con un monitor de tráfico electrónico, 30% de los 690 conductores que pasaban iban a exceso de velocidad. ¿Cuántos de estos conductores iban a exceso de velocidad?

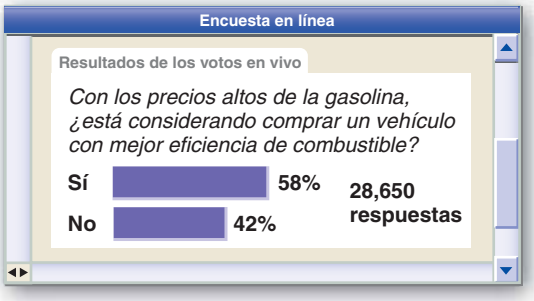
84. VENDER UNA CASA A la dueña de una casa se le ha dicho que recuperará 50% de su inversión de $6,125 si pinta su casa antes de venderla. ¿Cuánto recuperará si pinta su casa?

Aproxime el porcentaje y después estime cada respuesta. (Las respuestas pueden variar.)

85. SIN ASISTENCIA La asistencia a un seminario sólo fue de 24% de lo que los organizadores habían anticipado. Si se esperaban 875 personas, ¿cuántas atendieron en realidad al seminario?

86. CUADRO DE HONOR De los 900 estudiantes en la escuela, 16% estaba en el cuadro de honor principal. ¿Cuántos estudiantes estaban en el cuadro de honor?

87. ENCUESTAS POR INTERNET La ilustración muestra una pregunta de una encuesta en línea. ¿Cuántas personas votaron sí?



88. IMPUESTO SOBRE LAS VENTAS La tasa del impuesto sobre las ventas estatal en Kansas es de 5.3%. Estime el impuesto sobre las ventas sobre una compra de $596.

89. VOTACIÓN El día de la elección, 48% de los 6,200 trabajadores en los sitios de votación fueron voluntarios. ¿Cuántos voluntarios ayudaron con la elección?

90. PRESUPUESTOS A cada departamento en una universidad se le pidió que recortara su presupuesto en 21%. ¿En qué cantidad de dinero debe reducirse el presupuesto del departamento de matemáticas si en la actualidad es de $4,715?

REDACCIÓN

91. Explique por qué el 200% de un número es el doble del número.

92. Si conoce el 10% de un número, explique cómo puede encontrar el 30% del mismo número.

93. Si conoce el 10% de un número, explique cómo puede encontrar el 5% del mismo número.

94. Explique por qué el 25% de un número es lo mismo que $\frac{1}{4}$ del número.

REPASO

Desarrolle cada operación y simplifique, si es posible.

95. a. $\frac{5}{6} + \frac{1}{2}$ **b.** $\frac{5}{6} - \frac{1}{2}$

c. $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2}$ **d.** $\frac{5}{6} \div \frac{1}{2}$

96. a. $\frac{7}{15} + \frac{7}{18}$ **b.** $\frac{7}{15} - \frac{7}{18}$

c. $\frac{7}{15} \cdot \frac{7}{18}$ **d.** $\frac{7}{15} \div \frac{7}{18}$

SECCIÓN 6.5
Interés

Objetivos
1. Calcular el interés simple.
2. Calcular el interés compuesto.

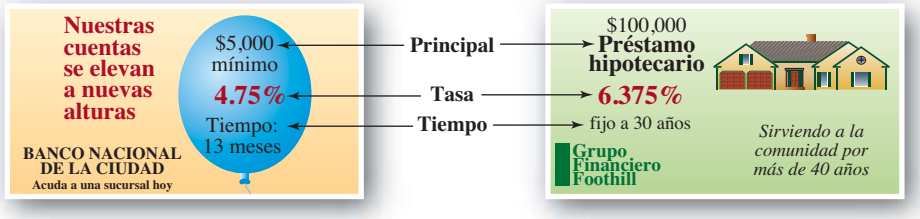
Cuando se pide prestado dinero, el prestamista espera que se le pague la cantidad del préstamo más un cargo adicional por el uso del dinero. Al cargo adicional se le llama **interés.** Cuando se deposita dinero en un banco, al depositante se le paga por el uso del dinero. Al dinero que gana el depósito también se le llama interés. En general, *el interés es el dinero que se paga por el uso del dinero.*

1 Calcular el interés simple

El interés se calcula de una de dos maneras: como **interés simple** o como **interés compuesto.** Se comienza explicando el interés simple. Primero se necesita introducir algunos términos clave asociados con la solicitud o préstamos de dinero.

- **Principal:** la cantidad de dinero que se está invirtiendo, depositando, prestando o solicitando.
- **Tasa de interés:** un porcentaje que se utiliza para calcular la cantidad del interés a pagarse. La tasa de interés se asume como anual (interés anual) a menos que se indique lo contrario.
- **Tiempo:** la duración del tiempo que se invierte, deposita o presta el dinero.

La cantidad de interés a pagarse depende del principal, la tasa y el tiempo. Este es el porqué por lo regular se mencionan los tres en los anuncios de cuentas de banco, inversiones y préstamos, como se muestra abajo.



El **interés simple** es el interés ganado únicamente sobre el principal original. Se encuentra utilizando la siguiente regla.

Fórmula del interés simple

$$\text{Interés} = \text{principal} \cdot \text{tasa} \cdot \text{tiempo} \quad \text{o} \quad I = P \cdot r \cdot t$$

donde la tasa r se expresa como una tasa anual y el tiempo t se expresa en años. Esta fórmula puede escribirse de manera más sencilla sin los puntos de multiplicación como

$$I = Prt$$

Auto-revisión 1

Si se invierten $4,200 por 2 años a una tasa de 4%, ¿cuánto interés simple se gana?

Ahora intente **Problema 17**

EJEMPLO 1 Si se invierten $3,000 por 1 año a una tasa de 5%, ¿cuánto interés simple se gana?

Estrategia Se identificará el principal, la tasa y el tiempo para la inversión.

POR QUÉ Entonces se puede utilizar la fórmula $I = Prt$ para encontrar la cantidad desconocida del interés simple ganado.

Solución El principal es de $3,000, la tasa del interés es de 5% y el tiempo es de 1 año.

$P = \$3{,}000 \qquad r = 5\% = 0.05 \qquad t = 1$

$I = Prt$ Esta es la fórmula del interés simple.

$I = \$3{,}000 \cdot 0.05 \cdot 1$ Sustituya los valores para P, r y t. Recuerde escribir la tasa r como un decimal.

$$\begin{array}{r} 3{,}000 \\ \times 0.05 \\ \hline 150.00 \end{array}$$

$I = \$3{,}000 \cdot 0.05$ Multiplique: $0.05 \cdot 1 = 0.05$.

$I = \$150$ Realice la multiplicación.

El interés simple ganado en 1 año es de $150.

La información proporcionada en este problema y el resultado pueden presentarse en una tabla.

Principal	Tasa	Tiempo	Interés ganado
$3,000	5%	1 año	$150

Si no se retira dinero de una inversión, el inversor recibe el principal y el interés al final del periodo de tiempo. De manera similar, un prestatario debe reembolsar el principal y el interés cuando saca un préstamo. En cada caso, la **cantidad total** de dinero involucrada está dada por la siguiente fórmula.

Encontrar la cantidad total

La cantidad total a pagar en una cuenta de inversión o la cantidad total a reembolsar en un préstamo es la suma del principal y el interés.

$$\text{Cantidad total} = \text{principal} + \text{interés}$$

Auto-revisión 2

Si se invierten $600 a un interés simple de 2.5% por 4 años, ¿cuál será la cantidad total de dinero en la cuenta de inversión al final de los 4 años?

Ahora intente **Problema 21**

EJEMPLO 2 Si se invierten $800 a un interés simple de 4.5% por 3 años, ¿cuál será la cantidad total de dinero en la cuenta de inversión al final de los 3 años?

Estrategia Se encontrará el interés simple ganado en la inversión y se sumará al principal.

POR QUÉ Al final de los 3 años, la cantidad total de dinero en la cuenta es la suma del principal y el interés ganado.

Solución El principal es de \$800, la tasa de interés es de 4.5% y el tiempo es de 3 años. Para encontrar el interés que gana la inversión se utiliza una multiplicación.

$P = \$800 \qquad r = 4.5\% = 0.045 \qquad t = 3$

$I = Prt$ — Esta es la fórmula del interés simple.

$I = \$800 \cdot 0.045 \cdot 3$ — Sustituya los valores para P, r y t. Recuerde escribir la tasa r como un decimal.

$I = \$36 \cdot 3$ — Multiplique: \$800 · 0.045 = \$36.

$I = \$108$ — Realice la multiplicación.

$$\begin{array}{r} \overset{4}{0.045} \\ \times\ 800 \\ \hline 36.000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \overset{1}{36} \\ \times 3 \\ \hline 108 \end{array}$$

El interés simple ganado en 3 años es de \$108. Para encontrar la cantidad total de dinero en la cuenta, se suma.

Cantidad total = **principal** + **interés** — Esta es la fórmula de la cantidad total.

= **\$800** + **\$108** — Sustituya el \$800 para el principal y el \$108 para el interés.

= \$908 — Realice la suma.

Al final de los 3 años, la cantidad total de dinero en la cuenta será de \$908.

¡Cuidado! Cuando se utiliza la fórmula $I = Prt$, el tiempo debe expresarse en años. Si el tiempo se proporciona en días o meses, se rescribe como una parte fraccional de un año. Por ejemplo, una inversión por 30 días dura $\frac{30}{365}$ de un año, dado que hay 365 días en un año. Para un préstamo por 6 meses, el tiempo se expresa como $\frac{6}{12}$ o $\frac{1}{2}$ de un año, dado que hay 12 meses en un año.

EJEMPLO 3 ***Costos de la educación*** Un estudiante pidió prestado \$920 a 3% por 9 meses para pagar algunas colegiaturas universitarias. Encuentre el interés simple que debe pagarse sobre el préstamo.

Estrategia Se rescribirán los 9 meses como una parte fraccional de un año y después se utilizará la fórmula $I = Prt$ para encontrar la cantidad desconocida del interés simple a pagarse sobre el préstamo.

POR QUÉ Para utilizar la fórmula $I = Prt$, el tiempo debe expresarse en años o como una parte fraccional de un año.

Solución Dado que hay 12 meses en un año, se tiene

$$9 \text{ meses} = \frac{9}{12} \text{ de año} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot 3}{\underset{1}{\cancel{3}} \cdot 4} \text{ de año} = \frac{3}{4} \text{ de año}$$

Simplifique la fracción $\frac{9}{12}$ eliminando un factor común de 3 del numerador y el denominador.

El tiempo del préstamo es de $\frac{3}{4}$ de año. Para encontrar la cantidad del interés, se multiplica.

$P = \$920 \qquad r = 3\% = 0.03 \qquad t = \frac{3}{4}$

$I = Prt$ — Esta es la fórmula del interés simple.

$I = \$920 \cdot 0.03 \cdot \frac{3}{4}$ — Sustituya los valores para P, r y t. Recuerde escribir la tasa r como un decimal.

$I = \frac{\$920}{1} \cdot \frac{0.03}{1} \cdot \frac{3}{4}$ — Escriba el \$920 y el 0.03 como fracciones.

$I = \frac{\$82.80}{4}$ — Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$I = \$20.70$ — Realice la división.

$$\begin{array}{r} 920 \\ \times 0.03 \\ \hline 27.60 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \overset{2\,1}{27.60} \\ \times\ \ 3 \\ \hline 82.80 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20.70 \\ 4\overline{)82.80} \\ -8 \\ \hline 02 \\ -0 \\ \hline 2\,8 \\ -2\,8 \\ \hline 00 \\ -0 \\ \hline 00 \end{array}$$

El interés simple a pagarse sobre el préstamo es de \$20.70.

Auto-revisión 3

PRÉSTAMOS A CORTO PLAZO
Encuentre el interés simple sobre un préstamo de \$810 a 9% por 8 meses.

Ahora intente **Problema 25**

Auto-revisión 4

CONTABILIDAD Para cubrir los gastos de nómina, el dueño de un negocio pequeño pidió prestado $3,200 a una tasa de interés simple de 15%. Encuentre la cantidad total que debe reembolsar al final de 120 días.

Ahora intente **Problema 29**

EJEMPLO 4 ***Préstamos a corto plazo para negocios*** Para comenzar un negocio, una pareja pidió prestado $5,500 por 90 días para adquirir equipo y suministros. Si el préstamo tiene una tasa de interés simple de 14%, encuentre la cantidad total que deben reembolsar al final del periodo de 90 días.

Estrategia Se rescribirán los 90 días como una parte fraccional de un año y después se utilizará la fórmula $I = Prt$ para encontrar la cantidad desconocida del interés simple a pagarse sobre el préstamo.

POR QUÉ Para utilizar la fórmula $I = Prt$, el tiempo debe expresarse en años o como una parte fraccional de un año.

Solución Dado que hay 365 días en un año, se tiene

$$90 \text{ días} = \frac{9}{365} \text{ de año} = \frac{\overset{1}{\cancel{5}} \cdot 18}{\underset{1}{\cancel{5}} \cdot 73} \text{ de año} = \frac{18}{73} \text{ de año}$$

Simplifique la fracción $\frac{90}{365}$ eliminando un factor común de 5 del numerador y el denominador.

El tiempo del préstamo es de $\frac{18}{73}$ de año. Para encontrar la cantidad del interés, se multiplica.

$$P = \$5{,}500 \qquad r = 14\% = 0.14 \qquad t = \frac{90}{365} = \frac{18}{73}$$

$I = Prt$ Esta es la fórmula del interés simple.

$I = \$5{,}500 \cdot 0.14 \cdot \frac{18}{73}$ Sustituya los valores para P, r y t.

$I = \frac{\$5{,}500}{1} \cdot \frac{0.14}{1} \cdot \frac{18}{73}$ Escriba el $5,500 y el 0.14 como fracciones.

$I = \frac{\$13{,}860}{73}$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$I \approx \$189.86$ Realice la división. Redondee al centavo más cercano.

5,500	770
×0.14	×18
22000	6160
55000	7700
770.00	13,860

El interés del préstamo es de $189.86. Para encontrar cuánto deben reembolsar, se suma.

Cantidad total = **principal** + **interés** Esta es la fórmula de la cantidad total.

= **$5,500** + **$189.86** Sustituya el $5,500 para el principal y el $189.86 para el interés.

= $5,689.86 Realice la suma.

La pareja debe reembolsar $5,689.86 al final de los 90 días.

2 Calcular el interés compuesto

La mayoría de las cuentas de ahorros e inversiones pagan *interés compuesto* en vez de interés simple. Se ha visto que el interés simple se paga sólo sobre el principal original. El **interés compuesto** se paga sobre el principal y el *interés previamente ganado*. Para ilustrar este concepto, suponga que se depositaron $2,000 en una cuenta de ahorros a una tasa de 5% por 1 año. Se puede utilizar la fórmula $I = Prt$ para calcular el interés ganado al final del primer año.

$I = Prt$ Esta es la fórmula del interés simple.

$I = \$2{,}000 \cdot 0.05 \cdot 1$ Sustituya para P, r y t.

$I = \$100$ Realice la multiplicación.

Se ganó un interés de $100. Al final del primer año, la cuenta contiene el interés ($100) más el principal original ($2,000), para un saldo de $2,100.

Suponga que el dinero permanece en la cuenta de ahorros por otro año a la misma tasa de interés. Para el segundo año, el interés se pagará sobre el principal de $2,100. Es decir, durante el segundo año se gana un *interés sobre el interés* al igual que

sobre el principal de \$2,000. Utilizando $I = Prt$ se puede encontrar el interés ganado en el segundo año.

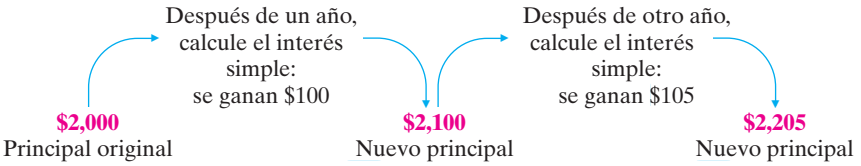
$I = Prt$ Esta es la fórmula del interés simple.

$I = \$2{,}100 \cdot 0.05 \cdot 1$ Sustituya para P, r y t.

$I = \$105$ Realice la multiplicación.

En el segundo año se gana \$105 de interés. La cuenta contiene ahora ese interés más el principal de \$2,100, para un total de \$2,205.

Como la figura abajo muestra, el interés simple se calcula dos veces para encontrar el interés compuesto.



Si sólo se calcula el *interés simple* sobre \$2,000, a 5% por 2 años, el interés ganado es $I = \$2{,}000 \cdot 0.05 \cdot 2 = \$200$. Por tanto, el saldo de la cuenta sería de \$2,200. Al comparar los saldos, se encuentra que la cuenta que gana un interés compuesto contendrá \$5 más que la cuenta que gana un interés simple.

En el ejemplo anterior, se calculó el interés al final de cada año o **anual.** Cuando se compone, se puede calcular el interés en otros periodos de tiempo, como **semestral** (dos veces al año), **trimestral** (cuatro veces al año) o incluso **diario.**

EJEMPLO 5 ***Interés compuesto*** Como regalo especial para su nieta recién nacida, una abuela abre una cuenta de ahorros de \$1,000 a nombre de la bebé. La tasa de interés es del 4.2% compuesto de manera trimestral. Encuentre la cantidad de dinero que tendrá la niña en el banco en su primer cumpleaños.

Estrategia Se utilizará la fórmula $I = Prt$ cuatro veces en una serie de pasos para encontrar la cantidad de dinero en la cuenta después de 1 año. En cada ocasión, el tiempo t es $\frac{1}{4}$.

POR QUÉ El interés está compuesto de *manera trimestral.*

Solución Si el interés se compone de manera trimestral, el interés se calculará cuatro veces en un año. Para encontrar la cantidad del interés que ganarán \$1,000 en el primer trimestre del año, se utiliza la fórmula del interés simple, donde t es de $\frac{1}{4}$ de un año.

Interés ganado en el primer trimestre:

$P_{\text{1er trimestre}} = 1{,}000 \qquad r = 4.2\% = 0.042 \qquad t = \frac{1}{4}$

$I = Prt$ Esta es la fórmula del interés simple.

$I = \$1{,}000 \cdot 0.042 \cdot \frac{1}{4}$ Sustituya para P, r y t.

$I = \$42 \cdot \frac{1}{4}$ Multiplique: $\$1{,}000 \cdot 0.042 = \$42$.

$I = \frac{\$42}{4}$ Realice la multiplicación.

$I = \$10.50$ Realice la división.

$$\begin{array}{r} 10.5 \\ 4\overline{)\,42.0} \\ -4 \\ \hline 02 \\ -0 \\ \hline 20 \\ -20 \\ \hline 0 \end{array}$$

El interés ganado en el primer trimestre es de \$10.50. Este se vuelve ahora parte del principal para el segundo trimestre.

$P_{\text{2o trimestre}} = 1{,}000 + \$10.50 = \$1{,}010.50$ Sume el principal original y el interés que se ganó para encontrar el principal del segundo trimestre.

Auto-revisión 5

INTERÉS COMPUESTO Suponga que se depositan \$8,000 en una cuenta que gana 2.3% compuesto de manera trimestral. Encuentre la cantidad de dinero en la cuenta al final del primer año.

Ahora intente **Problema 33**

Para encontrar la cantidad de interés que ganarán \$1,010.50 en el segundo trimestre del año, se utiliza la fórmula del interés simple, donde t es de nuevo de $\frac{1}{4}$ de un año.

Interés ganado en el segundo trimestre:

$P_{2\text{o trimestre}} = \$1{,}010.50 \qquad r = 0.042 \qquad t = \frac{1}{4}$

$I = Prt$ Esta es la fórmula del interés simple.

$I = \mathbf{\$1{,}010.50} \cdot \mathbf{0.042} \cdot \mathbf{\frac{1}{4}}$ Sustituya para P, r y t.

$I = \dfrac{\$1{,}010.50 \cdot 0.042 \cdot 1}{4}$ Multiplique.

$I \approx \$10.61$ Use una calculadora. Redondee al centavo (centésima) más cercano.

El interés ganado en el segundo trimestre es de \$10.61. Éste se vuelve parte del principal para el tercer trimestre.

$P_{3\text{er trimestre}} = \$1{,}010.50 + \$10.61 = \$1{,}021.11$ Sume el principal del segundo trimestre y el interés que se ganó para encontrar el principal del tercer trimestre.

Para encontrar el interés que ganarán \$1,021.11 en el tercer trimestre del año, se procede como a continuación.

Interés ganado en el tercer trimestre:

$P_{3\text{er trimestre}} = \$1{,}021.11 \qquad r = 0.042 \qquad t = \frac{1}{4}$

$I = Prt$ Esta es la fórmula del interés simple.

$I = \mathbf{\$1{,}021.11} \cdot \mathbf{0.042} \cdot \mathbf{\frac{1}{4}}$ Sustituya para P, r y t.

$I = \dfrac{\$1{,}021.11 \cdot 0.042 \cdot 1}{4}$ Multiplique.

$I \approx \$10.72$ Use una calculadora. Redondee al centavo (centésima) más cercano.

El interés ganado en el tercer trimestre es de \$10.72. Este se vuelve ahora parte del principal para el cuarto trimestre.

$P_{4\text{o trimestre}} = \$1{,}021.11 + \$10.72 = \$1{,}031.83$ Sume el principal del tercer trimestre y el interés que se ganó para encontrar el principal del cuarto trimestre.

Para encontrar el interés que ganarán \$1,031.83 en el cuarto trimestre del año, se utiliza de nuevo la fórmula del interés simple.

Interés ganado en el cuarto trimestre:

$P_{4\text{o trimestre}} = \$1{,}031.83 \qquad r = 0.042 \qquad t = \frac{1}{4}$

$I = Prt$ Esta es la fórmula del interés simple.

$I = \mathbf{\$1{,}031.83} \cdot \mathbf{0.042} \cdot \mathbf{\frac{1}{4}}$ Sustituya para P, r y t.

$I = \dfrac{\$1{,}031.83 \cdot 0.042 \cdot 1}{4}$ Multiplique.

$I \approx \$10.83$ Use una calculadora. Redondee al centavo (centésima) más cercano.

El interés ganado en el cuarto trimestre es de \$10.83. Al sumar este al principal existente, se obtiene

Cantidad total $= \$1{,}031.83 + \$10.83 = \$1{,}042.66$ Sume el principal del cuarto trimestre y el interés que se ganó.

La cantidad total en la cuenta después de cuatro trimestres, o 1 año, es de \$1,042.66.

Calcular el interés compuesto a mano puede tomar mucho tiempo. Puede utilizarse la **fórmula del interés compuesto** para encontrar con rapidez la cantidad total de dinero que contendrá una cuenta al final del periodo.

Fórmula de interés compuesto

La cantidad total A en una cuenta puede encontrarse utilizando la fórmula

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

donde P es el principal, r es la tasa de interés anual expresada como un decimal, t es la longitud del tiempo en años y n es el número de compuestos en un año.

Una calculadora es de mucha utilidad en el desarrollo de las operaciones en el lado derecho de la fórmula del interés compuesto.

Utilizando su CALCULADORA Interés compuesto

Una persona de negocios invierte \$9,250 a un interés de 7.6%, compuesto de manera mensual. Para encontrar el valor de la inversión en 3 años, se utiliza la fórmula del interés compuesto con los siguientes valores.

$P = \$9{,}250 \quad r = 7.6\% = 0.076 \quad t = 3$ años $\quad n = 12$ veces al año (mensual)

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$ Esta es la fórmula del interés compuesto.

$$A = 9{,}250\left(1 + \frac{0.076}{12}\right)^{12(3)}$$ Sustituya los valores para P, r, t y n. En el exponente, nt significa $n \cdot t$.

$$A = 9{,}250\left(1 + \frac{0.076}{12}\right)^{36}$$ Evalúe el exponente: $12(3) = 36$.

Para evaluar la expresión en el lado derecho de la ecuación utilizando una calculadora, se introducen estos números y se presionan estas teclas.

9250 [×] [(] 1 [+] .076 [÷] 12 [)] [y^x] 36 [=] 11610.43875

En algunos modelos de calculadoras se utiliza la tecla [^] en lugar de la tecla [y^x]. También, se presiona la tecla [ENTER] en vez de la tecla [=] para que se muestre el resultado.

Redondeado al centavo más cercano, la cantidad de dinero en la cuenta después de 3 años será de \$11,610.44.

Si su calculadora no tiene teclas de paréntesis, calcule primero la suma dentro de los paréntesis. Después encuentre la potencia. Por último, multiplique por 9,250.

EJEMPLO 6 ***Compuesto a diario*** Un inversor depositó \$50,000 en una cuenta a largo plazo a un interés de 6.8%, compuesto a diario. ¿Cuánto dinero será capaz de retirar en 7 años si el principal va a permanecer en el banco?

Estrategia Se utilizará la fórmula del interés compuesto para encontrar la *cantidad total* en la cuenta después de 7 años. Después se restará el principal original de ese resultado.

POR QUÉ Cuando el inversor retira el dinero, no desea tocar el principal original de \$50,000 en la cuenta.

Auto-revisión 6

COMPUESTO A DIARIO
Encuentre la cantidad del interés que ganarán \$25,000 en 10 años si se depositan en una cuenta a un interés de 5.99%, compuesto a diario.

Ahora intente **Problema 37**

Solución "Compuesto a diario" significa que el compuesto se realizará 365 veces en un año por 7 años.

$P = \$50{,}000 \qquad r = 6.8\% = 0.068 \qquad t = 7 \qquad n = 365$

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$ Esta es la fórmula del interés compuesto.

$$A = 50{,}000\left(1 + \frac{0.068}{365}\right)^{365(7)}$$ Sustituya los valores de P, r, t y n. En el exponente, nt significa n · t.

$$A = 50{,}000\left(1 + \frac{0.068}{365}\right)^{2{,}555}$$ Evalúe el exponente: 365 · 7 = 2,555.

$$A \approx 80{,}477.58$$ Use una calculadora. Redondee al centavo más cercano.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 4\ 3} \\ 365 \\ \times\ \ 7 \\ \hline 2{,}555 \end{array}$$

La cuenta contendrá \$80,477.58 al final de los 7 años. Para encontrar cuánto dinero puede retirar el hombre se debe restar el principal original de \$50,000 de la cantidad total en la cuenta.

$$80{,}477.58 - 50{,}000 = 30{,}477.58$$

El hombre puede retirar \$30,477.58 sin tener que tocar el principal de \$50,000.

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. \$336 **2.** \$660 **3.** \$48.60 **4.** \$3,357.81 **5.** \$8,185.59 **6.** \$20,505.20

SECCIÓN 6.5 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Complete los espacios.

1. En general, el _____ es dinero que se paga por el uso de dinero.
2. En las actividades bancarias, a la cantidad original de dinero invertida, depositada, prestada o solicitada se le conoce como _____.
3. El porcentaje que se utiliza para calcular la cantidad de interés a pagarse se le llama _____ de interés.
4. El interés _____ es el interés ganado sólo sobre el principal original.
5. La cantidad _____ en una cuenta de inversión es la suma del principal y el interés.
6. El interés _____ es el interés pagado sobre el principal y el interés ganado con anterioridad.

CONCEPTOS

7. Refiérase al anuncio de préstamo hipotecario de abajo.

   a. ¿Cuál es el principal?
   b. ¿Cuál es la tasa de interés?
   c. ¿Cuál es el tiempo?

8. Refiérase al anuncio de inversión abajo.

   a. ¿Cuál es el principal?
   b. ¿Cuál es la tasa de interés?
   c. ¿Cuál es el tiempo?

9. Cuando se realizan cálculos que involucran porcentajes, deben escribirse como decimales o fracciones. Cambie cada porcentaje a un decimal.
   a. 7% **b.** 9.8% **c.** $6\frac{1}{4}\%$

10. Exprese cada uno de los siguientes como una fracción de un año. Simplifique la fracción.
   a. 6 meses **b.** 90 días
   c. 120 días **d.** 1 mes

11. Complete la tabla encontrando el interés simple ganado.

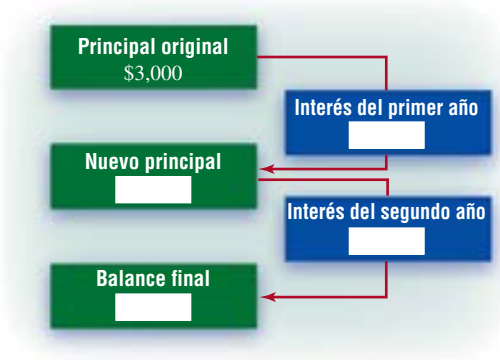
Principal	Tasa	Tiempo	Interés ganado
$10,000	6%	3 años	

12. Determine cuántas veces al año se calcula el interés sobre una cuenta de ahorros si el interés es compuesto de manera

a. anual **b.** semestral
c. trimestral **d.** diaria
e. mensual

13. a. ¿Qué concepto estudiado en esta sección se ilustra por medio del diagrama abajo?
b. ¿Cuál fue el principal original?
c. ¿Cuántas veces se encontró el interés?
d. ¿Cuánto interés se ganó en el primer compuesto?
e. ¿Por cuánto tiempo se invirtió el dinero?

14. Se depositan $3,000 en una cuenta de ahorros que gana un interés compuesto anual del 10%. Complete la serie de cálculos en la ilustración abajo para encontrar cuánto dinero habrá en la cuenta al final de 2 años.



NOTACIÓN

15. Escriba la fórmula del interés simple $I = P \cdot r \cdot t$ sin los puntos de multiplicación.

16. En la fórmula $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$, ¿cuántas operaciones deben desarrollarse para encontrar A?

PRÁCTICA GUIADA

Calcule el interés simple ganado. Vea el Ejemplo 1.

17. Si se invierten $2,000 por 1 año a una tasa de 5%, ¿cuánto interés simple se gana?

18. Si se invierten $6,000 por 1 año a una tasa de 7%, ¿cuánto interés simple se gana?

19. Si se invierten $700 por 4 años a una tasa de 9%, ¿cuánto interés simple se gana?

20. Si se invierten $800 por 5 años a una tasa de 8%, ¿cuánto interés simple se gana?

Calcule la cantidad total en cada cuenta. Vea el Ejemplo 2.

21. Si se invierten $500 a un interés simple de 2.5% por 2 años, ¿cuál será la cantidad total de dinero en la cuenta de inversión al final de 2 años?

22. Si se invierten $400 a un interés simple de 6.5% por 6 años, ¿cuál será la cantidad total de dinero en la cuenta de inversión al final de 6 años?

23. Si se invierten $1,500 a un interés simple de 1.2% por 5 años, ¿cuál será la cantidad total de dinero en la cuenta de inversión al final de 5 años?

24. Si se invierte $2,500 a un interés simple de 4.5% por 8 años, ¿cuál será la cantidad total de dinero en la cuenta de inversión al final de 8 años?

Calcule el interés simple. Vea el Ejemplo 3.

25. Encuentre el interés simple sobre un préstamo de $550 a 4% por 9 meses.

26. Encuentre el interés simple sobre un préstamo de $460 a 9% por 9 meses.

27. Encuentre el interés simple sobre un préstamo de $1,320 a 7% por 4 meses.

28. Encuentre el interés simple sobre un préstamo de $1,250 a 10% por 3 meses.

Calcule la cantidad total que debe reembolsarse al final de cada préstamo a corto plazo. Vea el Ejemplo 4.

29. Se prestaron $12,600 a una tasa de interés simple de 18% por 90 días. Encuentre la cantidad total que debe reembolsarse al final del periodo de 90 días.

© iStockphoto.com/Winston Davidian

30. Se prestaron $45,000 a una tasa de interés simple de 12% por 90 días. Encuentre la cantidad total que debe reembolsarse al final del periodo de 90 días.

31. Se prestaron $40,000 a una tasa de interés simple de 10% por 45 días. Encuentre la cantidad total que debe reembolsarse al final del periodo de 45 días.

32. $Se prestaron $30,000 a una tasa de interés simple de 20% por 60 días. Encuentre la cantidad total que debe reembolsarse al final del periodo de 60 días.

Calcule la cantidad total en cada cuenta. **Vea el Ejemplo 5.**

33. Suponga que se depositan $2,000 en una cuenta de ahorros que paga un interés de 3%, compuesto de manera trimestral, ¿cuánto dinero habrá en la cuenta en un año?

34. Suponga que se depositan $3,000 en una cuenta de ahorros que paga un interés de 2%, compuesto de manera trimestral, ¿cuánto dinero habrá en la cuenta en un año?

35. Si $5,400 ganan un interés de 4%, compuesto de manera trimestral, ¿cuánto dinero habrá en la cuenta al final de un año?

36. Si $10,500 ganan un interés de 8%, compuesto de manera trimestral. ¿Cuánto dinero habrá en la cuenta al final de un año?

Use una calculadora para resolver los siguientes problemas. **Vea el Ejemplo 6.**

37. Se coloca un depósito de $30,000 en una cuenta de ahorros que paga un interés de 4.8%, compuesto a diario. ¿Cuánto dinero puede retirarse al final de 6 años si el principal va a permanecer en el banco?

38. Se coloca un depósito de $12,000 en una cuenta de ahorros que paga un interés de 5.6%, compuesto a diario. ¿Cuánto dinero puede retirarse al final de 8 años si el principal va a permanecer en el banco?

39. Si se paga un interés de 8.55%, compuesto a diario, sobre un depósito de $55,250, ¿cuánto dinero habrá en la cuenta al final de 4 años?

40. Si se paga un interés de 4.09%, compuesto a diario, sobre un depósito de $39,500, ¿cuánto dinero habrá en la cuenta al final de 9 años?

APLICACIONES

41. INGRESOS PARA LA JUBILACIÓN un jubilado invierte $5,000 en un plan de ahorros que paga una tasa de interés simple de 6%. ¿Cuál será el saldo de la cuenta al final del primer año?

42. INVERSIONES Una desarrolladora prometió un retorno del interés simple de 8% sobre una inversión de $15,000 en su compañía. ¿Cuánto pudiera esperar ganar un inversor en el primer año?

43. A un miembro de una unión de crédito se le prestó $1,200 para pagar reparaciones vehiculares. El préstamo se hizo por 3 años a una tasa de interés simple de 5.5%. Encuentre el interés debido al préstamo.

Carreras de campus

Ejecutivo de crédito

Ariel Skelley/Getty Images

44. REMODELACIÓN El dueño de una casa solicita $8,000 para pagar un proyecto de remodelación de la cocina. Los términos del préstamo son un interés simple de 9.2% y el reembolso en 2 años. ¿Cuánto interés pagará sobre el préstamo?

45. DAÑO POR HUMO El dueño de un café solicitó $4,500 por 2 años a un interés simple de 12% para pagar la limpieza después de un incendio en la cocina. Encuentre la cantidad total debida sobre el préstamo.

46. COMBUSTIBLES ALTERNOS Para financiar la compra de una flotilla de vehículos impulsados con gas natural, una ciudad solicitó $200,000 por 4 años a una tasa de interés simple de 3.5%. Encuentre la cantidad total debida sobre el préstamo.

47. PRÉSTAMOS A CORTO PLAZO Un préstamo de $1,400 a un interés simple de 12.5% se paga en 3 meses. ¿Cuál es el interés cobrado?

48. PRÉSTAMOS PARA GRANJAS El dueño de un huerto de manzanas solicitó $7,000 de un banco de una cooperativa de granjeros. El dinero se prestó a un interés simple de 8.8% por 18 meses. ¿Cuánto dinero le cobró la cooperativa por el uso del dinero?

49. CUMPLIMIENTO DE NÓMINAS Para cumplir con las obligaciones de nómina al final del mes, un negocio pequeño tuvo que solicitar $4,200 por 30 días. ¿Cuánto tuvo que reembolsar el negocio si la tasa de interés simple fue de 18%?

50. PRÉSTAMOS PARA AUTOMÓVILES Para adquirir un automóvil, un hombre solicita un préstamo por $2,000 por 120 días. Si la tasa de interés simple es de 9% por año, ¿cuánto interés tendrá que pagar al final del periodo de préstamo de 120 días?

51. CUENTAS DE AHORROS Encuentre el interés ganado sobre $10,000 a $7\frac{1}{4}$% por 2 años. Use la tabla para organizar su trabajo.

P	r	t	I

52. COLEGIATURAS Un estudiante solicita $300 de una fundación educativa para pagar los libros para el semestre de primavera. Si el préstamo es por 45 días a un interés anual de $3\frac{1}{2}$%, ¿cuál será la deuda del estudiante al final del periodo del préstamo?

53. SOLICITUDES DE PRÉSTAMO Complete la siguiente solicitud de préstamo.

Hoja de solicitud de préstamo

1. Cantidad del préstamo (principal) $1,200.00
2. Duración del préstamo (tiempo) 2 AÑOS
3. Tasa de porcentaje anual (interés simple) 8%
4. Interés cobrado _____
5. Cantidad total a pagar _____
6. Seleccione el método de pago:
   ☐ 1 solo pago ☑ mensualidades

   El solicitante acepta pagar 24 pagos iguales de _____ para reembolsar el préstamo.

54. SOLICITUDES DE PRÉSTAMO Complete la siguiente solicitud de préstamo.

Hoja de solicitud de préstamo

1. Cantidad del préstamo (principal) $810.00
2. Duración del préstamo (tiempo) 9 meses.
3. Tasa de porcentaje anual (interés simple) 12%
4. Interés cobrado _____
5. Cantidad total a pagar _____
6. Seleccione el método de pago:
   ☐ 1 solo pago ☑ mensualidades
   El solicitante acepta pagar 9 pagos iguales de _____ para reembolsar el préstamo.

55. PRÉSTAMOS A INTERÉS BAJO Un país subdesarrollado recibe un préstamo a interés bajo de un banco para financiar la construcción de una planta para el tratamiento del agua. ¿Cuánto debe pagar el país al final de $3\frac{1}{2}$ años si el préstamo es por $18 millones a un interés simple de 2.3%?

56. REURBANIZACIÓN Una ciudad es premiada con un préstamo a interés bajo para ayudar a renovar el distrito de negocios en el centro. El préstamo de $40 millones, a un interés simple de 1.75%, debe pagarse en $2\frac{1}{2}$ años. ¿Cuánto interés tendrá que pagar la ciudad?

Una calculadora le será de utilidad en la resolución de los siguientes problemas.

57. COMPUESTO DE MANERA ANUAL Si se invierten $600 en una cuenta que gana 8%, compuesto de manera anual, ¿cuál será el saldo de la cuenta después de 3 años?

58. COMPUESTO DE MANERA SEMESTRAL Si se invierten $600 en una cuenta que gana un interés anual de 8%, compuesto de manera semestral, ¿cuál será el saldo de la cuenta al final de 3 años?

59. FONDOS UNIVERSITARIOS Una estudiante de tercero de secundaria abre una cuenta de ahorros que guarda su dinero por 4 años a una tasa anual de 6%, compuesto a diario. Si el depósito inicial es de $1,000, ¿cuánto dinero habrá en la cuenta cuando comience la universidad en 4 años?

60. CERTIFICADO DE DEPÓSITOS Un certificado de depósito de 3 años paga una tasa anual de 5%, compuesto a diario. El depósito máximo permitido es de $90,000. ¿Cuál es el mayor interés que puede ganar un depositante a partir del CD?

61. DEVOLUCIONES DE IMPUESTOS Una pareja deposita un cheque de una devolución del impuesto sobre la renta de $545 en una cuenta que paga una tasa anual de 4.6%, compuesto a diario. ¿Cuál será el tamaño de la cuenta al final de 1 año?

62. HERENCIAS Después de recibir una herencia de $11,000, un hombre deposita el dinero en una cuenta que paga una tasa anual de 7.2%, compuesto a diario. ¿Cuánto dinero habrá en la cuenta al final de 1 año?

63. LOTERÍAS Suponga que ganó $500,000 en la lotería y depositó el dinero en una cuenta de ahorros que paga una tasa de interés anual de 6%, compuesto a diario. ¿Cuánto interés ganará cada año?

64. REGALOS DE EFECTIVO Después de recibir un regalo de efectivo de $250,000, una universidad decide depositar el dinero en una cuenta que paga una tasa anual de 5.88%, compuesto de manera trimestral. ¿Cuánto dinero contendrá la cuenta en 5 años?

Imagen Copyright Richard Seymour, 2009. Utilizada bajo licencia de Shutterstock.com

65. RETIRO DE SÓLO EL INTERÉS Una asesora financiera invirtió $90,000 en una cuenta a largo plazo a un interés de 5.1%, compuesto a diario. ¿Cuánto dinero será capaz de retirar en 20 años si el principal va a permanecer en la cuenta?

66. VIVIR DEL INTERÉS Una pareja vendió su casa e invirtió la ganancia de $490,000 en una cuenta a un interés de 6.3%, compuesto a diario. ¿Cuánto dinero será capaz de retirar en 2 años si no desea tocar el principal?

REDACCIÓN

67. ¿Cuál es la diferencia entre el interés simple y el compuesto?

68. Explique este enunciado: *El interés es la cantidad de dinero pagada por el uso del dinero.*

69. En algunas cuentas, el banco cobra una multa si el depositante sustrae el dinero antes del final del plazo. ¿Por qué hará un banco esto?

70. Explique por qué es mejor para un depositante abrir una cuenta de ahorros que paga un interés de 5%, compuesto a diario, que una que paga un interés de 5%, compuesto de manera mensual.

REPASO

71. Evalúe: $\sqrt{\frac{1}{4}}$

72. Evalúe: $\left(\frac{1}{4}\right)^2$

73. Sume: $\frac{3}{7} + \frac{2}{5}$

74. Reste: $\frac{3}{7} - \frac{2}{5}$

75. Multiplique: $2\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{3}$

76. Divida: $-12\frac{1}{2} \div 5$

77. Evalúe: -6^2

78. Evalúe: $(0.2)^2 - (0.3)^2$

LISTA DE VERIFICACIÓN DE LAS HABILIDADES DE ESTUDIO

Porcentajes, decimales y fracciones

Antes de tomar el examen en el Capítulo 6 lea la siguiente lista de verificación. Estas habilidades en ocasiones son incomprendidas por los estudiantes. Coloque una marca de verificación en el recuadro si puede responder "sí" al enunciado.

☐ Sé que para escribir un decimal como un porcentaje, el punto decimal se mueve dos posiciones *a la derecha* y se inserta un símbolo %.

Decimal	Porcentaje
0.23	23%
0.768	76.8%
1.50	150%
0.9	90%

☐ Sé que para escribir un porcentaje como un decimal, se elimina el símbolo % y se mueve el punto decimal dos posiciones *a la izquierda.*

Porcentaje	Decimal
44%	0.44
98.7%	0.987
0.5%	0.005
178.3%	1.783

☐ Sé que para escribir una fracción como un porcentaje se utiliza un *proceso de dos pasos*:

Fracción → decimal → porcentaje

Divida el numerador entre el denominador

Mueva el punto decimal dos posiciones a la derecha

$$\frac{3}{4} \longrightarrow \begin{array}{r} 0.75 \\ 4\overline{)3.00} \\ -28 \\ \hline 20 \\ -20 \\ \hline 0 \end{array} \longrightarrow 75\%$$

☐ Sé que para encontrar el porcentaje de incremento (o decremento) se encuentra qué porcentaje de la *cantidad original* es la cantidad de incremento (o decremento)

El número de llamadas telefónicas aumentó de 10 a 18 por día.

Cantidad original

Cantidad de incremento: 18 − 10 = 8

CAPÍTULO 6 RESUMEN Y REPASO

SECCIÓN 6.1 Porcentajes, decimales y fracciones

DEFINICIONES Y CONCEPTOS

El **porcentaje** significa partes por centena.

La palabra *por ciento* puede escribirse utilizando el símbolo **%**.

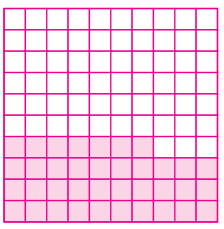
EJEMPLOS

En la figura de abajo hay 100 regiones cuadradas de igual tamaño y 37 de ellas están sombreadas. Se dice que $\frac{37}{100}$, o 37%, de la figura está sombreada.

Numerador

$$\frac{37}{100} = 37\%$$

Por 100



Para **escribir un porcentaje como una fracción,** elimine el símbolo % y escriba el número dado sobre 100. Después simplifique la fracción, si es posible.

Escriba 22% como una fracción.

$$22\% = \frac{22}{100}$$ Elimine el símbolo % y escriba el 22 sobre 100.

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot 11}{\underset{1}{\cancel{2}} \cdot 50}$$ Para simplificar la fracción, factorice el 22 y el 100. Después elimine el factor común de 2 del numerador y el denominador.

Por tanto, $22\% = \frac{11}{50}$.

Los porcentajes como 9.1% y 36.23% pueden escribirse como fracciones de números enteros multiplicando el numerador y el denominador por una potencia de 10.

Escriba 9.1% como una fracción.

$$9.1\% = \frac{9.1}{100}$$ Elimine el símbolo % y escriba el 9.1 sobre 100.

$$= \frac{9.1}{100} \cdot \frac{10}{10}$$ Para obtener una fracción equivalente de números enteros, se necesita mover el punto decimal en el numerador una posición a la derecha. Elija $\frac{10}{10}$ como la forma de 1 para construir la fracción.

$$= \frac{91}{1{,}000}$$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

Por tanto, $9.1\% = \frac{91}{1{,}000}$.

Los porcentajes de números mixtos, como $2\frac{1}{3}\%$ y $23\frac{5}{6}\%$, pueden escribirse como fracciones de números enteros desarrollando la división indicada.

Escriba $2\frac{1}{3}\%$ como una fracción.

$$2\frac{1}{3}\% = \frac{2\frac{1}{3}}{100}$$ Elimine el símbolo % y escriba $2\frac{1}{3}$ sobre 100.

$$= 2\frac{1}{3} \div 100$$ La barra de fracción indica una división.

$$= \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{100}$$ Escriba $2\frac{1}{3}$ como una fracción impropia y después multiplique por el recíproco de 100.

$$= \frac{7}{300}$$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

Por tanto, $2\frac{1}{3}\% = \frac{7}{300}$.

Cuando **porcentajes que son mayores a 100%** se escriben como fracciones, las fracciones son mayores que el 1.

Escriba 170% como una fracción.

$$170\% = \frac{170}{100}$$ Elimine el símbolo % y escriba el 170 sobre 100.

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{10}} \cdot 17}{\underset{1}{\cancel{10}} \cdot 10}$$ Para simplificar la fracción, factorice el 170 y el 100. Después elimine el factor común de 10 del numerador y el denominador.

Por tanto, $170\% = \frac{17}{10}$.

Cuando **porcentajes que son menores a 1%** se escriben como fracciones, las fracciones son menores que $\frac{1}{100}$.

Escriba 0.03% como una fracción.

$$0.03\% = \frac{0.03}{100}$$ Elimine el símbolo % y escriba el 0.03 sobre 100.

$$= \frac{0.03}{100} \cdot \frac{100}{100}$$ Para obtener una fracción equivalente de números enteros se necesita mover el punto en el numerador dos posiciones a la derecha. Elija $\frac{100}{100}$ como la forma de 1 para construir la fracción.

$$= \frac{3}{10{,}000}$$ Multiplique los numeradores y multiplique los denominadores. Dado que el numerador y el denominador no tienen factores comunes (diferentes del 1), la fracción está en forma simplificada.

Por tanto, $0.03\% = \frac{3}{10{,}000}$.

Para **escribir un porcentaje como un decimal** elimine el símbolo % y divida el número proporcionado entre 100 moviendo el punto decimal 2 posiciones a la izquierda.

Escriba cada porcentaje como un decimal.

$14\% = 14.0\% = 0.14$ Escriba un punto decimal y un 0 a la derecha del 4 en el 14%.

$9.35\% = 0.0935$ Escriba un 0 marcador de posición (mostrado en azul) a la izquierda del 9.

$198\% = 198.0\% = 1.98$ Escriba un punto decimal y un 0 a la derecha del 8 en el 198%.

$0.75\% = 0.0075$

Los **porcentajes de números mixtos,** como $1\frac{3}{4}\%$ y $10\frac{1}{2}\%$, pueden escribirse como decimales escribiendo la parte fraccional del número mixto en su forma decimal equivalente.

Escriba $1\frac{3}{4}\%$ como un decimal.

No hay un punto decimal a mover en $1\frac{3}{4}\%$. Dado que $1\frac{3}{4} = 1 + \frac{3}{4}$ y dado que el equivalente decimal de $\frac{3}{4}$ es el 0.75, se puede escribir $1\frac{3}{4}\%$ como 1.75%

$1\frac{3}{4}\% = 1.75\% = 0.0175$ Escriba un cero marcador de posición (mostrado en azul) a la izquierda del 1.

Para **escribir un decimal como un porcentaje,** multiplique el decimal por 100 moviendo el punto decimal 2 posiciones a la derecha y después inserte un símbolo %.

Escriba cada decimal como un porcentaje.

$0.501 = 50.1\%$ $3.66 = 366\%$ $0.002 = 000.2\% = 0.2\%$

Para **escribir una fracción como un porcentaje,**

1. Escriba la fracción como un decimal dividiendo su numerador entre su denominador.
2. Multiplique el decimal por 100 moviendo el punto decimal 2 posiciones a la derecha y después inserte un símbolo %.

Fracción ⟶ decimal ⟶ porcentaje

Escriba $\frac{3}{4}$ como un porcentaje.

Paso 1 Divida el numerador entre el denominador.

$$\begin{array}{r} 0.75 \\ 4\overline{)3.00} \\ -28 \\ \hline 20 \\ -20 \\ \hline 0 \end{array}$$

Escriba un punto decimal y algunos ceros adicionales a la derecha del 3.

El residuo es 0.

Paso 2 Escriba el decimal 0.75 como un porcentaje.

$\frac{3}{4} = 0.75 = 75\%$

En ocasiones, cuando se desea escribir una fracción como un porcentaje, el resultado de la división es un **decimal repetitivo.** En tales casos se puede dar una **respuesta exacta** o una **respuesta aproximada.**

Escriba $\frac{2}{3}$ como un porcentaje.

Paso 1 Divida el numerador entre el denominador.

$$\begin{array}{r} 0.666 \\ 3\overline{)2.000} \\ -18 \\ \hline 20 \\ -18 \\ \hline 20 \\ -18 \\ \hline 2 \end{array}$$

Escriba un punto decimal y algunos ceros adicionales a la derecha del 2.

El patrón repetitivo es ahora claro. Se puede detener la división.

Paso 2 Escriba el decimal 0.6666 . . . como un porcentaje.

$0.6666 = 66.66\ldots\%$

Respuesta exacta:

Use $\frac{2}{3}$ para representar el 0.666. . . .

$\frac{2}{3} = 66.66\ldots\% = 66\frac{2}{3}\%$

Aproximación:

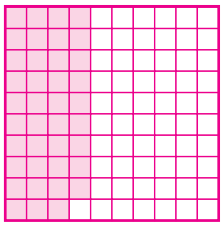
Redondee a la décima más cercana.

$\frac{2}{3} = 66.66\ldots\% \approx 66.7\%$

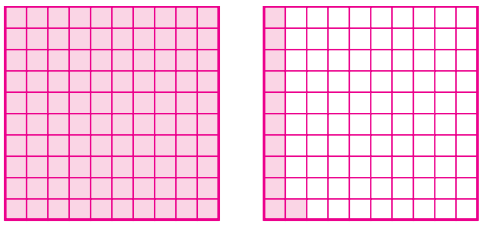
EJERCICIOS DE REPASO

Exprese la cantidad de cada figura que está sombreada como un porcentaje, como un decimal y como una fracción. Cada conjunto de cuadrados representa 100%.

1.



2.



3. En el Problema 1, ¿qué porcentaje de la figura no está sombreado?

4. INTERNET El siguiente enunciado aparece en un blog sobre tecnología: "54 de los 100 principales sitios web fallaron en la prueba de desempeño de Yahoo".

a. ¿Qué porcentaje de los sitios web fallaron la prueba?

b. ¿Qué porcentaje de los sitios web aprobaron la prueba?

Escriba cada porcentaje como una fracción.

5. 15% **6.** 120% **7.** $9\frac{1}{4}\%$ **8.** 0.2%

Escriba cada porcentaje como un decimal.

9. 27% **10.** 8% **11.** 655% **12.** $1\frac{4}{5}\%$

13. 0.75% **14.** 0.23%

Escriba cada decimal o número natural como un porcentaje.

15. 0.83 **16.** 1.625 **17.** 0.051 **18.** 6

Escriba cada fracción como un porcentaje.

19. $\frac{1}{2}$ **20.** $\frac{4}{5}$ **21.** $\frac{7}{8}$ **22.** $\frac{1}{16}$

Escriba cada fracción como un porcentaje. Dé la respuesta exacta y una aproximación a la décima de uno por ciento más cercana.

23. $\frac{1}{3}$ **24.** $\frac{5}{6}$ **25.** $\frac{11}{12}$ **26.** $\frac{15}{9}$

27. DISTRIBUCIÓN DEL AGUA Los océanos contienen 97.2% del agua en la Tierra. (Fuente: National Ground Water Association)

a. Escriba el porcentaje como un decimal.

b. Escriba el porcentaje como una fracción en la forma más simple.

28. CARTA DE DERECHOS Existen 27 enmiendas a la Constitución de Estados Unidos. A las primeras diez se les conocen como Carta de Derechos. ¿Qué porcentaje de las enmiendas se adoptaron después de la Carta de Derechos? (Redondee al uno por ciento más cercano.)

29. IMPUESTOS La ciudad de Grand Prairie, Texas, tiene un impuesto sobre las ventas de *un cuarto de uno por ciento* para ayudar a financiar mejoras a parques.

a. Escriba este porcentaje como un decimal.

b. Escriba el porcentaje como una fracción.

30. SEGURIDAD SOCIAL Si su jubilación es a la edad de 66, sus beneficios de Seguridad social se reducen en $\frac{1}{15}$ si se jubila a la edad de 65. Escriba esta fracción como un porcentaje. Dé la respuesta exacta y una aproximación a la décima de uno por ciento más cercana. (Fuente: Social Security Administration)

SECCIÓN 6.2 Resolución de problemas de porcentaje utilizando ecuaciones y proporciones de porcentajes

DEFINICIONES Y CONCEPTOS

Las palabras clave en un **enunciado de porcentaje** pueden traducirse a una ecuación de porcentaje.

- Cada ***es*** se traduce a un símbolo =
- ***de*** se traduce a una multiplicación que se muestra con un punto elevado ·
- ***qué*** *número o* ***qué*** *porcentaje* se traduce a un número desconocido que se representa por medio de una variable.

EJEMPLOS

Traduzca el enunciado de porcentaje a una ecuación de porcentaje.

¿Qué número es 26% de 180?

$x = 26\% \cdot 180$

Esta es la ecuación de porcentaje.

Los enunciados de porcentaje involucran una comparación de números. La relación entre la **base** (el estándar de la comparación, el todo), la **cantidad** (una parte de la base) y el **porcentaje** es:

Cantidad = porcentaje · base

o

Parte = porcentaje · el todo

8 es 12.5% de 64.

Cantidad (parte) — **porcentaje** — **base** (el todo)

Método de la ecuación de porcentaje
Se pueden traducir los enunciados de porcentaje a ecuaciones de porcentaje y resolver para **encontrar la cantidad.**

¡Cuidado! Cuando resuelva ecuaciones de porcentaje, siempre escriba el porcentaje como un decimal (o fracción) antes de desarrollar algún cálculo.

¿Qué número es 45% de 120?

$x = 45\% \cdot 120$ Traduzca.

Ahora, resuelva la ecuación de porcentaje.

$x = 0.45 \cdot 120$ Escriba el 45% como un decimal.

$x = 54$ Realice la multiplicación.

Por tanto, 54 es 45% del 120.

Se pueden traducir los enunciados de porcentaje a ecuaciones de porcentaje y resolver para **encontrar el porcentaje.**

¿12 es qué porcentaje de 192?

$12 = x \cdot 192$ Traduzca.

Ahora, resuelva la ecuación del porcentaje.

$12 = x \cdot 192$

$\frac{12}{192} = \frac{x \cdot \cancel{192}^{1}}{\cancel{192}_{1}}$ Para despejar x en el lado derecho de la ecuación, divida ambos lados entre 192. Después elimine el factor común de 192 en el numerador y el denominador.

$0.0625 = x$ En el lado izquierdo, divida el 12 entre 192.

$06.25\% = x$ Para escribir el 0.0625 como un porcentaje, multiplíquelo por 100 moviendo el punto decimal dos posiciones a la derecha y después inserte un símbolo %.

Por tanto, 12 es 6.25% del 192.

Se pueden traducir los enunciados de porcentaje a ecuaciones de porcentaje y resolver para **encontrar la base.**

¡Cuidado! En ocasiones los cálculos para resolver un problema de porcentaje son más sencillos de hacer si se **escribe el porcentaje como una fracción en vez de como un decimal.** Este es el caso con porcentajes que tienen equivalentes decimales *repetitivos* como $33\frac{1}{3}\%$, $66\frac{2}{3}\%$ y $16\frac{2}{3}\%$.

¿8.2 es $33\frac{1}{3}\%$ de qué número?

$8.2 = 33\frac{1}{3}\% \cdot x$ Traduzca.

Ahora, resuelva la ecuación de porcentaje.

$8.2 = \frac{1}{3} \cdot x$ Escriba el porcentaje como una fracción: $33\frac{1}{3}\% = \frac{1}{3}$.

$\frac{8.2}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot x}{\frac{1}{3}}$ Para despejar x en el lado derecho de la ecuación, divida ambos lados entre $\frac{1}{3}$. Después elimine el factor común de $\frac{1}{3}$ en el numerador y el denominador.

$8.2 \div \frac{1}{3} = x$ En el lado izquierdo, la barra de fracción indica una división.

$\frac{8.2}{1} \cdot \frac{3}{1} = x$ En el lado izquierdo, escriba el 8.2 como una fracción. Después utilice la regla para la división de fracciones: Multiplique por el recíproco de $\frac{1}{3}$, el cual es $\frac{3}{1}$.

$24.6 = x$ Realice la multiplicación.

Por tanto, 8.2 es $33\frac{1}{3}\%$ de 24.6.

Se pueden traducir los enunciados de porcentaje a **proporciones de porcentaje** y resolver para **encontrar la cantidad.**

Para traducir un enunciado de porcentaje a una **proporción de porcentaje,** use la siguiente forma:

La cantidad es a la base como el porcentaje es a 100:

$$\frac{\text{cantidad}}{\text{base}} = \frac{\text{porcentaje}}{100}$$

o

La parte es al todo como el porcentaje es a 100:

$$\frac{\text{parte}}{\text{todo}} = \frac{\text{porcentaje}}{100}$$

¿Qué número (cantidad) es 45% (porcentaje) de 120? (base)

$$\frac{x}{120} = \frac{45}{100}$$

Esta es la proporción a resolver.

Para hacer los cálculos más sencillos, simplifique la razón $\frac{45}{100}$.

$$\frac{x}{120} = \frac{9}{20}$$

Simplifique: $\frac{45}{100} = \frac{\overset{1}{\cancel{5}} \cdot 9}{\underset{1}{\cancel{5}} \cdot 20} = \frac{9}{20}$.

Para resolver la proporción se utilizan los productos cruzados.

$x \cdot 20 = 120 \cdot 9$ Encuentre los productos cruzados e iguálelos.

$x \cdot 20 = 1{,}080$ Para simplificar el lado derecho, realice la multiplicación: $120 \cdot 9 = 1{,}080$.

$\frac{x \cdot \overset{1}{\cancel{20}}}{\underset{1}{\cancel{20}}} = \frac{1{,}080}{20}$ Para despejar x en el lado izquierdo, divida ambos lados de la ecuación entre 20. Después elimine el factor común del 20 del numerador y el denominador.

$x = 54$ En el lado derecho divida el 1,080 entre 20.

Por tanto, 54 es 45% del 120.

Se pueden traducir los enunciados de porcentaje a **proporciones de porcentaje** y resolver para **encontrar el porcentaje.**

¿12 (cantidad) es qué porcentaje (porcentaje) de 192? (base)

$$\frac{12}{192} = \frac{x}{100}$$

Esta es la proporción a resolver.

Para realizar los cálculos más fácilmente, simplifique la relación $\frac{12}{192}$.

$$\frac{1}{16} = \frac{x}{100}$$

Simplifique: $\frac{12}{192} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{2}} \cdot \underset{1}{\cancel{2}} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \underset{1}{\cancel{3}}} = \frac{1}{16}$.

$1 \cdot 100 = 16 \cdot x$ Encuentre los productos cruzados e iguálelos.

$100 = 16 \cdot x$ En el lado izquierdo, realice la multiplicación: $1 \cdot 100 = 100$.

$\frac{100}{16} = \frac{\overset{1}{\cancel{16}} \cdot x}{\underset{1}{\cancel{16}}}$ Para despejar x en el lado derecho, divida ambos lados de la ecuación entre 16. Después elimine el factor común de 16 del numerador y el denominador.

$6.25 = x$ En el lado izquierdo divida el 100 entre 16.

Por tanto, 12 es el 6.25% de 192.

Se pueden traducir los enunciados de porcentaje a **proporciones de porcentaje** y resolver para **encontrar la base.**

¿8.2 (cantidad) es $33\frac{1}{3}\%$ (porcentaje) de qué número? (base)

$$\frac{8.2}{x} = \frac{33\frac{1}{3}}{100}$$

Esta es la proporción a resolver.

Para hacer los cálculos más sencillos, escriba el número mixto $33\frac{1}{3}$ como la fracción impropia $\frac{100}{3}$.

$$\frac{8.2}{x} = \frac{100}{\frac{3}{100}}$$ Escriba $33\frac{1}{3}$ como $\frac{100}{3}$.

$$8.2 \cdot 100 = x \cdot \frac{100}{3}$$ Para resolver la proporción encuentre los productos cruzados e iguálelos.

$$820 = x \cdot \frac{100}{3}$$ Para simplificar el lado izquierdo realice la multiplicación: $8.2 \cdot 100 = 820$.

$$\frac{820}{\frac{100}{3}} = \frac{x \cdot \frac{100}{3}}{\frac{100}{3}}$$ Para despejar x en el lado derecho de la ecuación, divida ambos lados entre $\frac{100}{3}$. Después elimine el factor común de $\frac{100}{3}$ en el numerador y el denominador.

$$820 \div \frac{100}{3} = x$$ En el lado izquierdo, la barra de fracción indica una división.

$$\frac{820}{1} \cdot \frac{3}{100} = x$$ En el lado izquierdo escriba el 820 como una fracción. Después utilice la regla para la división de fracciones: Multiplique por el recíproco de $\frac{100}{3}$.

$$\frac{2{,}460}{100} = x$$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$$24.6 = x$$ Divida el 2,460 entre 100 moviendo el punto decimal implícito en el 2,460 dos posiciones a la izquierda.

Por tanto, 8.2 es $33\frac{1}{3}\%$ de 24.6.

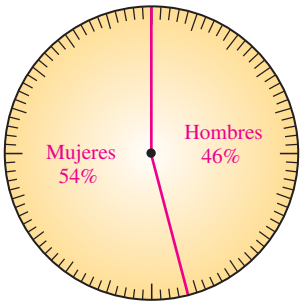
Una **gráfica circular** es una manera de representar información para su comparación. Las piezas en forma de rebanada de pastel de la gráfica muestran los tamaños relativos de cada categoría.

Las 100 marcas gruesas espaciadas de manera equitativa alrededor del círculo sirven como una ayuda visual cuando se construye una gráfica circular.

FACEBOOK Hasta abril del 2009, Facebook tenía 195 millones de usuarios a nivel mundial. Use la información en la gráfica circular para encontrar cuántos de ellos eran hombres.

La gráfica circular muestra que el 46% de los 195 millones de usuarios de Facebook eran hombres.

Usuarios de Facebook a nivel mundial



(Fuente: O'Reilly Radar)

Método 1: Encontrar la cantidad desconocida escrita y después resolver una **ecuación de porcentaje.**

¿Qué número	es	46%	de	195 millones?
x	$=$	46%	$\cdot$	195

Traduzca.

Para resolver problemas de aplicación de porcentaje, con frecuencia se tienen que **rescribir los hechos** del problema en el enunciado de porcentaje antes de que se puedan traducir a una ecuación.

Ahora, resuelva la ecuación de porcentaje.

$x = 0.46 \cdot 195$ Escriba el 46% como un decimal: $46\% = 0.46$.

$x = 89.7$ Realice la multiplicación. La respuesta está en millones.

En abril del 2009, había aproximadamente 89.7 millones de usuarios hombres de Facebook a nivel mundial.

Método 2: Encontrar la cantidad desconocida escrita y después resolver una **proporción de porcentaje.**

¿Qué número es 46% de 195 millones?

cantidad, porcentaje, base

$$\frac{x}{195} = \frac{46}{100}$$

Esta es la proporción a resolver.

$$\frac{x}{195} = \frac{23}{50}$$ Simplifique la razón: $\frac{46}{100} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot 23}{\underset{1}{\cancel{2}} \cdot 50} = \frac{23}{50}$.

$x \cdot 50 = 195 \cdot 23$ Encuentre los productos cruzados e iguálelos.

$x \cdot 50 = 4{,}485$ En el lado derecho realice la multiplicación.

$$\frac{x \cdot \overset{1}{\cancel{50}}}{\underset{1}{\cancel{50}}} = \frac{4{,}485}{50}$$ Para despejar x en el lado izquierdo, divida ambos lados de la ecuación entre 50. Después elimine el factor común de 50 del numerador y el denominador.

$x = 89.7$ En el lado derecho divida el 4,485 entre 50. La respuesta está en millones.

En abril del 2009 había aproximadamente 89.7 millones de usuarios hombres de Facebook a nivel mundial.

EJERCICIOS DE REPASO

31. a. Identifique la cantidad, la base y el porcentaje en el enunciado "15 es $33\frac{1}{3}\%$ de 45".

b. En los espacios complete la ecuación (fórmula) de porcentaje:

$$\square = \text{porcentaje} \cdot \square$$

o

$$\text{Parte} = \square \cdot \text{el todo}$$

32. Cuando se calcula con porcentajes, se debe cambiar el porcentaje a un decimal o a una fracción. Cambie cada porcentaje a un decimal.

a. 13% **b.** 7.1%

c. 195% **d.** $\frac{1}{4}\%$

Cuando se calcula con porcentajes, se debe cambiar el porcentaje a un decimal o a una fracción. Cambie cada porcentaje a una fracción.

e. $33\frac{1}{3}\%$

f. $66\frac{2}{3}\%$

g. $16\frac{2}{3}\%$

33. Traduzca cada enunciado de porcentaje a una *ecuación de porcentaje.* **No resuelva.**

a. ¿Qué número es 32% de 96?

b. ¿64 es qué porcentaje de 135?

c. ¿9 es 47.2% de qué número?

34. Traduzca cada enunciado de porcentaje a una *proporción de porcentaje.* **No resuelva.**

a. ¿Qué número es 32% de 96?

b. ¿64 es qué porcentaje de 135?

c. ¿9 es 47.2% de qué número?

Traduzca a una ecuación de porcentaje o proporción de porcentaje y después resuelva para encontrar el número desconocido.

35. ¿Qué número es 40% de 500?

36. ¿16% de qué número es 20?

37. ¿1.4 es qué porcentaje de 80?

38. ¿$66\frac{2}{3}\%$ de 3,150 es qué número?

39. Encuentre el 220% de 55.

40. ¿Cuánto es 0.05% de 60,000?

41. ¿43.5 es $7\frac{1}{4}\%$ de qué número?

42. ¿Qué porcentaje de 0.08 es 4.24?

43. AUTOMOVILISMO La mezcla de combustible nitro-metano utilizado para impulsar algunos automóviles experimentales es 96% nitro y 4% metano. ¿Cuántos galones de metano se necesitan para llenar un tanque de combustible de 15 galones?

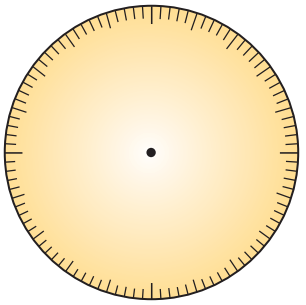
44. VENTA DE CASAS Después del primer día en el mercado, ya se habían vendido 51 casas en una nueva subdivisión. Esto era 75% del número total de casas disponibles. ¿Cuántas casas se vendían originalmente?

45. DAÑO POR HURACANES En un parque de casas móviles, 96 de los 110 tráileres fueron dañados o destruidos por vientos huracanados. ¿Qué porcentaje es esto? (Redondee al 1 por ciento más cercano.)

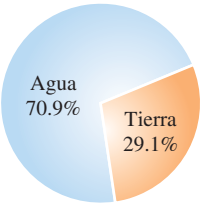
46. PROPINAS El costo de una cena para una familia de cinco en un restaurante fue de $36.20. Encuentre la cantidad de la propina si debe ser de 15% del costo de la cena.

47. GASTOS UNIVERSITARIOS En el 2008, Survey.com preguntó a 500 estudiantes universitarios y padres de estudiantes que necesitaban un préstamo, en dónde buscaban primero para pagar los costos universitarios. Los resultados de la encuesta se muestran abajo en la tabla. Dibuje una gráfica circular para la información.

Universidad	57%
Familia/amigos	5%
Banco local	18%
Internet	15%
Otro	5%



48. SUPERFICIE DE LA TIERRA La superficie de la Tierra es de aproximadamente 196,800,000 millas cuadradas. Use la información en la gráfica circular para determinar el número de millas cuadradas de la superficie de la Tierra que están cubiertas con agua.



SECCIÓN 6.3 Aplicaciones del porcentaje

DEFINICIONES Y CONCEPTOS

El **impuesto sobre las ventas** sobre un producto es un porcentaje del precio de compra del producto.

$$\text{Impuesto sobre las ventas} = \text{tasa del impuesto sobre las ventas} \cdot \text{precio de compra}$$

$$\uparrow \quad = \quad \uparrow \quad \cdot \quad \uparrow$$

$$\text{Cantidad} = \text{porcentaje} \cdot \text{base}$$

Observe que la fórmula está basada en la ecuación del porcentaje explicada en la Sección 6.2.

Las **cantidades en dólares** se redondean al centavo (centésima) más cercano.

El **costo total** de un producto es la suma de su precio de compra y el impuesto sobre las ventas sobre el producto.

$$\text{Costo total} = \text{precio de compra} + \text{impuesto sobre las ventas}$$

Las **tasas del impuesto sobre las ventas** se expresan por lo regular como un porcentaje.

EJEMPLOS

COMPRAS Encuentre el impuesto sobre las ventas y el costo total de una compra de $50.95 si la tasa del impuesto sobre las ventas es de 8%.

$$\begin{aligned}
\text{Impuesto sobre las ventas} &= \text{tasa del impuesto sobre las ventas} \cdot \text{precio de compra} \\
&= 8\% \cdot \$50.95 \\
&= 0.08 \cdot \$50.95 && \text{Escriba el 8\% como un decimal: } 8\% = 0.08. \\
&= \$4.076 && \text{Realice la multiplicación.} \\
&\approx \$4.08 && \text{Redondee el impuesto sobre las ventas al centavo (centésima) más cercano.}
\end{aligned}$$

Por tanto, el impuesto sobre las ventas es de $4.08. El costo total es la suma de su precio de compra y el impuesto sobre las ventas.

$$\begin{aligned}
\text{Costo total} &= \text{precio de compra} + \text{impuesto sobre la venta} \\
&= \$50.95 + \$4.08 \\
&= \$55.03 && \text{Realice la suma.}
\end{aligned}$$

El costo total de la compra es de $55.03.

ELECTRODOMÉSTICOS El precio de compra de una tostadora es de $82. Si el impuesto sobre las ventas es de $5.33, ¿cuál es la tasa del impuesto sobre las ventas?

El impuesto sobre las ventas de $5.33 es algún porcentaje desconocido del precio de compra de $82. Existen dos métodos que pueden utilizarse para resolver este problema.

Existen dos métodos que pueden utilizarse para encontrar la tasa desconocida del impuesto sobre las ventas:

- El método de la ecuación de porcentaje
- El método de la proporción de porcentaje

Método de la ecuación de porcentaje:

¿\$5.33 es qué porcentaje de 82?

$5.33 = x \cdot 82$ Traduzca.

Ahora, resuelva la ecuación de porcentaje.

$\frac{5.33}{82} = \frac{x \cdot 82}{82}$ Para despejar x en el lado derecho de la ecuación, divida ambos lados entre 82.

$0.065 = \frac{x \cdot \cancel{82}^{1}}{\cancel{82}_{1}}$ En el lado derecho de la ecuación elimine el factor común de 82 del numerador y el denominador. En el lado izquierdo divida el 5.33 entre 82.

$0.065 = x$

$006.5\% = x$ Escriba el decimal 0.065 como un porcentaje.

$6.5\% = x$

La tasa del impuesto sobre las ventas es de 6.5%.

Método de la proporción de porcentaje:

¿5.33 (cantidad) es qué porcentaje (porcentaje) de 82? (base)

$\frac{5.33}{82} = \frac{x}{100}$ Esta es la proporción de porcentaje a resolver.

$5.33 \cdot 100 = 82 \cdot x$ Para resolver la proporción encuentre los productos cruzados e iguálelos.

$533 = 82 \cdot x$ Realice la multiplicación en el lado izquierdo de la ecuación.

$\frac{533}{82} = \frac{\cancel{82}^{1} \cdot x}{\cancel{82}_{1}}$ Para despejar x en el lado derecho divida ambos lados de la ecuación entre el 82. Después elimine el factor común de 82 del numerador y el denominador.

$6.5 = x$ En el lado izquierdo divida el 533 entre 82.

La tasa del impuesto sobre las ventas es del 6.5%.

En vez de trabajar por un salario o de que se les pague a una tasa por hora, a varios vendedores se les paga por **comisión.**

La **cantidad de la comisión** pagada es un porcentaje de la venta total en dólares de bienes y servicios.

Comisión = tasa de comisión · ventas

COMISIONES Una vendedora gana una comisión del 11% sobre todos los electrodomésticos que vende. Si vende un lavaplatos de \$450, ¿cuál es su comisión?

Comisión = **tasa de la comisión** · **ventas**

= **11%** · **\$450**

= 0.11 · \$450 Escriba 11% como un decimal.

= \$49.50 Realice la multiplicación.

La comisión ganada sobre la venta del lavaplatos de \$450 es de \$49.50.

La **tasa de la comisión** por lo regular se expresa como un porcentaje.

TELEMERCADEO Un vendedor por teléfono gana una comisión de \$600 en una semana sobre ventas de \$4,000. ¿Cuál es la tasa de la comisión?

Comisión = Tasa de la comisión · **ventas**

\$600 = x · **\$4,000** x representa la tasa desconocida de la comisión.

$\frac{600}{4{,}000} = \frac{x \cdot 4{,}000}{4{,}000}$ Se pueden eliminar los signos de dólares. Para despejar x en el lado derecho de la ecuación, divida ambos lados entre 4,000.

$$0.15 = \frac{x \cdot \overset{1}{\cancel{4{,}000}}}{\underset{1}{\cancel{4{,}000}}}$$ Elimine el factor común de 4,000 del numerador y el denominador. En el lado izquierdo, divida el 600 entre 4,000.

$015\% = x$ Escriba el decimal 0.15 como un porcentaje.

La tasa de la comisión es de 15%.

Para encontrar el **porcentaje de incremento o decremento:**

1. Reste el número más pequeño del más grande para encontrar la cantidad de incremento o decremento.
2. Encuentre qué porcentaje es de la cantidad original la cantidad del incremento o decremento.

Existen dos métodos que pueden utilizarse para encontrar el porcentaje de incremento (o decremento) desconocido:

- El método de la ecuación de porcentaje
- El método de la proporción de porcentaje

¡Cuidado! El porcentaje de incremento (o decremento) es un porcentaje del *número original,* es decir, el número antes que ocurriera el cambio.

VER TELEVISIÓN De acuerdo con la compañía Nielsen, el estadounidense promedio vio 145 horas de TV al mes en el 2007. Eso se incrementó a 151 horas por mes en el 2008. Encuentre el porcentaje de incremento. Redondee al uno por ciento más cercano

Primero, reste para encontrar la cantidad del incremento.

$151 - 145 = 6$ Reste el número más pequeño del número más grande.

El número de horas vistas por mes aumentó en 6.

Después, encuentre qué porcentaje de las 145 horas *originales* representa el incremento de 6 horas.

Método de la ecuación del porcentaje:

¿6	es	qué porcentaje	de	145?
6	=	x	·	145

Traduzca.

Ahora, resuelva la ecuación del porcentaje.

$6 = x \cdot 145$

$\frac{6}{145} = \frac{x \cdot \overset{1}{\cancel{145}}}{\underset{1}{\cancel{145}}}$ Para despejar x en el lado derecho, divida ambos lados de la ecuación entre 145. Después elimine el factor común de 145 del numerador y el denominador.

$0.041 \approx x$ En el lado izquierdo divida 6 entre 145.

$004.1\% \approx x$ Escriba el decimal 0.041 como un porcentaje.

$4\% \approx x$ Redondee al 1% más cercano.

Entre el 2007 y el 2008, el número de horas de televisión vistas por el estadounidense promedio cada mes aumentó en 4%.

Si se utiliza el ***método de la* proporción de porcentaje**, resuelva la siguiente proporción para x para encontrar el porcentaje de incremento.

¿6	es	qué porcentaje	de	145?
cantidad		porcentaje		base

$$\frac{6}{145} = \frac{x}{100}$$

Esta es la proporción a resolver.

La **cantidad del descuento** es un porcentaje del precio original.

Cantidad del descuento	=	tasa del descuento	·	precio original
cantidad	=	porcentaje	·	base

Observe que la fórmula está basada en la ecuación de porcentaje explicada en la Sección 6.2.

VENTA DE HERRAMIENTAS Encuentre la cantidad del descuento sobre un juego de herramientas si por lo regular se vende a $89.95, pero actualmente está rebajado en 35%. Después encuentre el precio en rebaja.

Cantidad del descuento = **tasa del descuento** · **precio original**

= **35%** · **$89.95**

$= 0.35 \cdot \$89.95$ Escriba el 35% como un decimal.

$= \$31.4825$ Realice la multiplicación.

$\approx \$31.48$ Redondee al centavo (centésima) más cercano.

Para encontrar el **precio en rebaja** de un producto, reste el descuento del precio original.

Precio en rebaja = precio original − descuento

El descuento del juego de herramientas es de $31.48. Para encontrar el precio en rebaja, se utiliza una resta.

Precio en rebaja = **precio original** − **descuento**
= **$89.95** − **$31.48**
= $58.47 Realice la resta.

El precio en rebaja del juego de herramientas es de $58.47.

La diferencia entre el precio original y el precio en rebaja es la **cantidad del descuento.**

Cantidad del descuento = precio original − precio en rebaja

VENTA DE MUEBLES Encuentre la tasa de descuento sobre una sala que por lo regular tiene un precio de $2,500 que está en rebaja por $1,870. Redondee al uno por ciento más cercano.

Se pensará en esto como un *problema de porcentaje de decremento.* El descuento (decremento en el precio) se encuentra utilizando una resta.

$2,500 − $1,870 = $630 Descuento = precio original − precio de venta

La sala tiene un descuento de $630. Ahora se encuentra qué porcentaje del precio original representa el descuento de $630.

Cantidad del descuento = tasa del descuento − **precio original**
$630 = x − **$2,500**

$$\frac{630}{2{,}500} = \frac{x \cdot 2{,}500}{2{,}500}$$ Elimine los signos de dinero. Para despejar x en el lado derecho de la ecuación, divida ambos lados entre 2,500.

$$0.252 = \frac{x \cdot \cancel{2{,}500}^{1}}{\cancel{2{,}500}_{1}}$$ En el lado derecho de la ecuación elimine el factor común de 2,500 del numerador y el denominador. denominator. En el lado izquierdo divido 630 entre 2,500.

025.2% = x Escriba el decimal 0.252 como un porcentaje.
25% ≈ x Redondee al uno por ciento más cercano.

Al uno por ciento más cercano, la tasa del descuento sobre la sala es de 25%.

EJERCICIOS DE REPASO

49. RECIBOS DE LAS VENTAS Complete el recibo de la venta mostrado abajo encontrando el impuesto sobre las ventas y el costo total de la cámara.

CENTRO FOTOGRÁFICO

Cámara Canon 35 mm	$59.99
SUBTOTAL	$59.99
IMPUESTO SOBRE LAS VENTAS @ 5.5%	?
TOTAL	?

50. TASAS DEL IMPUESTO SOBRE LAS VENTAS Encuentre la tasa del impuesto sobre la venta si el impuesto sobre las ventas es de $492 sobre la compra de un automóvil con un precio de $12,300.

51. COMISIONES Si la tasa de la comisión es de 6%, encuentre la comisión ganada por un vendedor de electrodomésticos que vende un lavaplatos por $369.97 y una secadora por $299.97.

52. VENTA DE SUMINISTROS MÉDICOS Una vendedora gana una comisión de $646 sobre un pedido de $15,200 de antibióticos. ¿Cuál es su tasa de la comisión?

53. VENTAS DE CAMISETAS El dueño de un estadio gana una comisión de $33\frac{1}{3}\%$ de las ventas de las camisetas de cualquier concierto o evento deportivo. ¿Cuánto puede ganar el dueño si se venden 12,000 camisetas por $25 en un partido de futbol?

54. Complete el espacio: El porcentaje de incremento (o decremento) es un porcentaje del número _____, es decir, el número antes que ocurriera el cambio.

55. NACIONES UNIDAS En el 2008, el Consejo de Seguridad de la ONU votó para aumentar el tamaño de una fuerza de paz de 17,000 a 20,000 tropas. Encuentre el porcentaje de incremento en el número de tropas. Redondee al uno por ciento más cercano. (Fuente: Reuters)

56. RENDIMIENTO DE GASOLINA Una mujer encontró que el rendimiento de gasolina cayó de 18.8 a 17.0 millas por galón cuando experimentó con una nueva marca de gasolina en su camioneta. Encuentre el porcentaje de decremento en su rendimiento. Redondee a la décima de uno por ciento más cercana.

57. Complete los espacios.

a. Impuesto sobre las ventas = tasa del impuesto sobre las ventas · _____

b. Costo total = precio de compra + _____

c. Comisión = _____ · ventas

58. Complete los espacios.

a. Cantidad del descuento = precio original − _____

b. Cantidad del descuento = tasa del descuento · _____

c. Precio en rebaja = precio original − _____

59. CAJAS DE HERRAMIENTAS Use la información en el anuncio de abajo para encontrar el descuento, el precio original y la tasa del descuento sobre la caja de herramientas.

60. RENTAS Encuentre la tasa del descuento si la renta mensual para un departamento se redujo de $980 a $931 por mes.

SECCIÓN 6.4 Estimación con porcentajes

DEFINICIONES Y CONCEPTOS	EJEMPLOS
Puede utilizarse una **estimación** para encontrar aproximaciones cuando no se necesitan respuestas exactas. Para encontrar el **1% de un número,** mueva el punto decimal en el número dos posiciones a la izquierda.	¿Cuánto es 1% de 291.4? Encuentre la respuesta exacta y un estimado utilizando el redondeo por la izquierda. **Respuesta exacta:** 1% de 291.4 = 2.914 *Mueva el punto decimal dos posiciones a la izquierda.* **Estimado:** El 291.4 se redondea por la izquierda a 300. Si se mueve el punto decimal implícito en el 300 dos posiciones a la izquierda, se obtiene 3. Por tanto, 1% de 291.4 ≈ 3 *Debido a que el 1% de 300 = 3.*
Para encontrar el **10% de un número,** mueva el punto decimal en el número una posición a la izquierda.	¿Cuánto es 10% de 40,735 libras? Encuentre la respuesta exacta y un estimado utilizando el redondeo por la izquierda. **Respuesta exacta:** 10% de 40,735 = 4,073.5 *Mueva el punto decimal una posición a la izquierda.* **Estimado:** El 40,735 se redondea por la izquierda a 40,000. Si se mueve el punto decimal implícito en el 40,000 una posición a la izquierda, se obtiene 4,000. Por tanto, 1% de 40,735 ≈ 4,000 *Debido a que el 10% de 40,000 = 4,000.*
Para encontrar el **20% de un número,** encuentre el 10% del número moviendo el punto decimal una posición a la izquierda y después duplique (multiplique por 2) el resultado. Puede utilizarse un método similar para encontrar el 30% de un número, el 40% de un número, etcétera.	Estime la respuesta: ¿Cuánto es 20% de 809? Dado que 10% de 809 es 80.9 (o alrededor de **81**), se tiene que 20% de 809 es de alrededor de 2 · **81**, el cual es 162. Por tanto, 20% de 809 ≈ 162 *Debido a que 10% de 809 ≈ 81.*

Para encontrar el **50% de un número,** divida el número entre 2.	Estime la respuesta: ¿Cuánto es 50% de 1,442,957? Se utiliza el 1,400,000 como una aproximación de 1,442,957 debido a que es par, divisible entre 2 y termina con varios ceros. 50% de 1,442,957 ≈ 700,000 Debido a que el 50% de 1,400,000 = $\frac{1,400,000}{2}$ = 700,000.
Para encontrar el **25% de un número,** divida el número entre 4.	Estime la respuesta: ¿Cuánto es 25% de 21.004? Se utilizara el 20 como una aproximación debido a que es cercano al 21.004 y debido a que es divisible entre 4. 25% de 21.004 ≈ 5 Debido a que el 25% de 20 = $\frac{20}{4}$ = 5.
Para encontrar el **5% de un número,** encuentre el 10% del número moviendo el punto decimal en el número una posición a la izquierda. Después divida ese resultado entre 2.	Estime la respuesta: ¿Cuánto es 5% de 36,150? Primero, se encuentra 10% del 36,150: 10% de 36,150 = 3,615 Se utiliza el 3,600 como una aproximación de este resultado debido a que es cercano al 3,615 y debido a que es par y por tanto, divisible entre 2. Después, se divide la aproximación entre 2 para estimar el 5% del 36,150. $\frac{3,600}{2} = 1,800$ Por tanto, 5% del 36,150 ≈ 1,800.
Para encontrar el **15% de un número,** encuentre la suma del 10% del número y el 5% del número.	PROPINAS Estime la propina de 15% sobre una cena que cuesta $88.55. Para simplificar los cálculos, se estimará el costo de la cena de $88.55 como de $90. Después, para estimar la propina, se encuentra el 10% de $90 y el 5% de $90 y se suman. 10% de $90 es $9 → $9 5% de $90 (la mitad de 10% de $90) → +$4.50 $13.50 La propina debe ser de $13.50.
Para encontrar el **200% de un número,** multiplique el número por 2. Puede utilizarse un método similar para encontrar el 300% de un número, el 400% de un número, etcétera.	Estime la respuesta: ¿Cuánto es 200% de 3.509? Para estimar el 200% del 3.509, se encontrará el 200% del 4. Se utiliza el 4 como una aproximación debido a que es cercano al 3.509 y hace sencilla la multiplicación por 2. 200% de 3.509 ≈ 8 Debido a que el 200% del 4 = 2 · 4 = 8.
En ocasiones se debe **aproximar el porcentaje,** para estimar una respuesta.	CONTROL DE CALIDAD En una tirada de 145,350 de baldosas cerámicas, se encontró que 3% estaban defectuosas. Estime el número de baldosas defectuosas. Para estimar el 3% de 145,350, se encuentra el 1% de 150,000 y se multiplica el resultado por 3. Se utiliza el 150,000 como la aproximación debido a que es cercano al 145,350 y termina con varios ceros. 3% de 145,350 ≈ 4,500 Debido a que el 1% del 150,000 = 1,500 y 3 · 1,500 = 4,500. Habían alrededor de 4,500 baldosas defectuosas en la tirada de la producción.

EJERCICIOS DE REPASO

¿Cuál es el 1% del número proporcionado? Encuentre la respuesta exacta y un estimado utilizando el redondeo por la izquierda.

61. 342.03 **62.** 8,687

¿Cuál es el 10% del número proporcionado? Encuentre la respuesta exacta y un estimado utilizando el redondeo por la izquierda.

63. 43.4 segundos **64.** 10,900 litros.

Estime cada respuesta. (Las respuestas pueden variar.)

65. ¿Cuánto es 20% de 63? **66.** ¿Cuánto es 20% de 612?

67. ¿Cuánto es 50% de 279,985? **68.** ¿Cuánto es 50% de 327?

69. ¿Cuánto es 25% de 13.02? **70.** ¿Cuánto es 25% de 39.9?

71. ¿Cuánto es 5% de 7,150? **72.** ¿Cuánto es 5% de 19,359?

73. ¿Cuánto es 200% de 29.78? **74.** ¿Cuánto es 200% de 1.125?

Estime una propina del 15% sobre cada cantidad en dólares. (Las respuestas pueden variar.)

75. $243.55 **76.** $46.99

Estime cada respuesta. (Las respuestas pueden variar.)

77. OFERTAS ESPECIALES Una tienda de bricolaje vende una cubeta de 50 onzas líquidas de sellador de asfalto para entrada de automóviles que tiene una etiqueta de "25% gratis" ¿Cuántas onzas son gratis?

78. CAPACITACIÓN El 15% de las 785 personas que asistieron a un programa de capacitación tenían un título profesional. ¿Cuántas personas es esto?

Aproxime el porcentaje y después estime cada respuesta. (Las respuestas pueden variar.)

79. CINTURONES DE SEGURIDAD Un estudio de la policía estatal en una carretera interestatal encontró que de los 3,850 automóviles que pasaron el punto de inspección, 6% de los conductores no estaban utilizando el cinturón de seguridad. Estime el número de los conductores que no estaban utilizando el cinturón de seguridad.

80. ENGANCHES Estime la cantidad de un enganche de 11% sobre una casa que se está vendiendo por $279,950.

SECCIÓN 6.5 Interés

DEFINICIONES Y CONCEPTOS

El **interés** es el dinero que se paga por el uso de dinero.

El **interés simple** es el interés ganado sobre el principal original y se encuentra utilizando la fórmula

$$I = Prt$$

donde P es el principal, r es la tasa de interés anual y t es la duración del tiempo en años.

La **cantidad total** en una cuenta de inversión o la cantidad total a pagarse sobre un préstamo es la suma del principal y el interés.

Cantidad total = principal + interés

EJEMPLOS

Si se invierten $4,000 por 3 años a una tasa del 7.2%, ¿cuánto se gana de interés simple?

$P = \$4{,}000 \quad r = 7.2\% = 0.072 \quad t = 3$

$I = Prt$ Esta es la fórmula del interés simple.

$I = \$4{,}000 \cdot 0.072 \cdot 3$ Sustituya los valores para P, r y t. Recuerde escribir la tasa r como un decimal.

$I = \$288 \cdot 3$ Multiplique: $\$4{,}000 \cdot 0.072 = \$288$.

$I = \$864$ Realice la multiplicación.

El interés simple ganado en 3 años es de $864.

BRICOLAJE El dueño de una casa solicitó $5,600 por 2 años a un interés simple de 10% para pagar una nueva entrada de automóviles. Encuentre la cantidad total debida sobre el préstamo.

$P = \$5{,}600 \quad r = 10\% = 0.10 \quad t = 2$

$I = Prt$ Esta es la fórmula del interés simple.

$I = \$5{,}600 \cdot 0.10 \cdot 2$ Escriba la tasa r como un decimal.

$I = \$560 \cdot 2$ Multiplique: $\$5{,}600 \cdot 0.10 = \$560$.

$I = \$1{,}120$ Realice la multiplicación.

El interés debido en 2 años es de $1,120. Para encontrar la cantidad total de dinero debido sobre el préstamo, se suma.

Cantidad total = principal + interés

= $5,600 + $1,120

= $6,720 Realice la suma.

Al final de 2 años, la cantidad total de dinero debida sobre el préstamo es de $6,720.

Cuando se utiliza la fórmula $I = Prt$, el **tiempo debe expresarse en años.** Si el tiempo se proporciona en días o meses, reescríbalo como una parte fraccional de un año.

Aquí hay dos ejemplos:

- Dado que hay 365 días en un año,

$$60 \text{ días} = \frac{60}{365} \text{ de año} = \frac{\overset{1}{\cancel{5}} \cdot 12}{\underset{1}{\cancel{5}} \cdot 73} \text{ de año} = \frac{12}{73} \text{ de año}$$

- Dado que hay 12 meses en un año,

$$4 \text{ meses} = \frac{4}{12} \text{ de año} = \frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{\cancel{3} \cdot \underset{1}{4}} \text{ de año} = \frac{1}{3} \text{ de año}$$

MULTAS Un hombre solicitó \$300 a 15% por 45 días para sacar su automóvil de un corralón. Encuentre el interés simple que debe pagarse sobre el préstamo.

Dado que hay 365 días en un año, se tiene

$$45 \text{ días} = \frac{45}{365} \text{ de año} = \frac{\overset{1}{\cancel{5}} \cdot 9}{\underset{1}{\cancel{5}} \cdot 73} \text{ de año} = \frac{9}{73} \text{de año}$$ Simplifique la fracción.

El tiempo del préstamo es de $\frac{9}{73}$ de año. Para encontrar la cantidad del interés, se multiplica.

$$P = \$300 \qquad r = 15\% = 0.15 \qquad t = \frac{9}{73}$$

$I = Prt$ Esta es la fórmula del interés simple.

$I = \mathbf{\$300} \cdot \mathbf{0.15} \cdot \mathbf{\frac{9}{73}}$ Escriba la tasa r como un decimal.

$I = \frac{\$300}{1} \cdot \frac{0.15}{1} \cdot \frac{9}{73}$ Escriba el \$300 y el 0.15 como fracciones.

$I = \frac{\$405}{73}$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$I \approx \$5.55$ Realice la división. Redondee al centavo más cercano.

El interés simple que debe pagarse sobre el préstamo es de \$5.55.

El **interés compuesto** es el interés ganado sobre el principal original y el interés ganado anteriormente.

Cuando se compone, se puede calcular el interés:

- **de manera anual:** una vez al año
- **de manera semestral:** dos veces al año
- **de manera trimestral:** cuatro veces al año
- **a diario:** 365 veces al año

INTERÉS COMPUESTO Suponga que se depositan \$10,000 en una cuenta que gana un interés compuesto de manera semestral de 6.5%. Encuentre la cantidad de dinero en la cuenta al final del primer año.

Las palabras *de manera semestral* significan que el interés se compondrá dos veces en un año. Para encontrar la cantidad del interés que ganarán \$10,000 en la primera mitad del año, use la fórmula del interés simple, donde t es $\frac{1}{2}$ de un año.

Interés ganado en la primera mitad del año:

$$P = \$10{,}000 \qquad r = 6.5\% = 0.065 \qquad t = \frac{1}{2}$$

$I = Prt$ Esta es la fórmula del interés simple.

$I = \mathbf{\$10{,}000} \cdot \mathbf{0.065} \cdot \mathbf{\frac{1}{2}}$ Escriba la tasa r como un decimal.

$I = \frac{\$10{,}000}{1} \cdot \frac{0.065}{1} \cdot \frac{1}{2}$ Escriba el \$10,000 y el 0.065 como fracciones.

$I = \frac{\$650}{2}$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$I = \$325$ Realice la división.

El interés ganado en la primera mitad del año es de \$325. El principal original y este interés ahora se convierten en el principal para la segunda mitad del año.

$$\$10{,}000 + \$325 = \$10{,}325$$

Para encontrar la cantidad del interés que ganarán \$10,325 en la segunda mitad del año, utilice la fórmula del interés simple, donde t es de nuevo de $\frac{1}{2}$ de un año.

Interés ganado en la segunda mitad del año:

$P = \$10{,}325 \qquad r = 6.5\% = 0.065 \qquad t = \frac{1}{2}$

$I = Prt$ Esta es la fórmula del interés simple.

$I = \$10{,}325 \cdot 0.065 \cdot \frac{1}{2}$ Escriba la tasa r como un decimal.

$I = \frac{\$10{,}325}{1} \cdot \frac{0.065}{1} \cdot \frac{1}{2}$ Escriba el \$10,325 y el 0.065 como fracciones.

$I = \frac{\$671.125}{2}$ Multiplique los numeradores.

Multiplique los denominadores.

$I \approx \$335.56$ Realice la división. Redondee al centavo más cercano.

El interés ganando en la segunda mitad del año es de \$335.56. Al sumar éste al principal para la segunda mitad del año, se obtiene

$\$10{,}325 + \$335.56 = \$10{,}660.56$

La cantidad en la cuenta después de un año es de \$10,660.56

Calcular el interés compuesto a mano puede tomar bastante tiempo. Puede utilizarse la **fórmula del interés compuesto** para encontrar la cantidad de dinero que contendrá una cuenta al final del periodo.

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

donde A es la cantidad en la cuenta, P es el principal, r es la tasa de interés anual, n es el número de compuestos en un año y t es la longitud del tiempo en años.

Una **calculadora** es de utilidad en el desarrollo de las operaciones en el lado derecho de la fórmula del interés compuesto.

COMPUESTO A DIARIO Un desarrollador de minicentros comerciales promete a sus inversores en su compañía un interés de $3\frac{1}{4}\%$ compuesto a diario. Si un hombre de negocios decide invertir \$80,000 con el desarrollador, ¿cuánto dinero tendrá en su cuenta en 8 años?

Compuesto a diario significa que el compuesto se realizará 365 veces al año.

$P = \$80{,}000 \qquad r = 3\frac{1}{4}\% = 0.0325 \qquad t = 8 \qquad n = 365$

$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ Esta es la fórmula del interés compuesto.

$A = 80{,}000\left(1 + \frac{0.0325}{365}\right)^{365(8)}$ Sustituya los valores para P, r, n y t.

$A = 80{,}000\left(1 + \frac{0.0325}{365}\right)^{2{,}920}$ Evalúe el exponente: $365 \cdot 8 = 2{,}920$.

$A \approx 103{,}753.21$ Use una calculadora. Redondee al centavo más cercano.

Habrá \$103,753.21 en la cuenta en 8 años.

EJERCICIOS DE REPASO

81. INVERSIONES Encuentre el interés simple ganado sobre \$6,000 invertidos al 8% por 2 años. Use la siguiente tabla para organizar su trabajo.

P	*r*	*t*	*I*

82. CUENTAS DE INVERSIÓN Si se invierte \$24,000 a una tasa de interés simple de 4.5% por 3 años, ¿cuál será la cantidad total de dinero en la cuenta de inversión al final del periodo?

83. PRÉSTAMOS PARA EMERGENCIAS Una cooperativa de profesores le prestó \$2,750 a un cliente a una tasa de interés simple de 11% para que pudiera pagar una factura médica atrasada. ¿Cuánto interés paga el cliente si el préstamo debe reembolsarse en 3 meses?

84. VIOLACIONES AL CÓDIGO A un negocio se le ordenó corregir las violaciones al código de seguridad en una planta de producción. Para pagar las correcciones necesarias, la compañía solicitó \$10,000 a un interés simple de 12.5% por 90 días. Encuentre la cantidad total que tuvo que pagar después de 90 días.

85. MENSUALIDADES Una pareja solicitó \$1,500 por 1 año a una tasa de interés simple de $7\frac{3}{4}\%$.

a. ¿Cuánto interés pagarán sobre el préstamo?

b. ¿Cuál es la cantidad total que debe reembolsar sobre el préstamo?

c. Si la pareja decide reembolsar el préstamo realizando 12 mensualidades iguales, ¿de cuánto será cada mensualidad?

86. CUENTAS DE AHORROS Encuentre la cantidad de dinero que habrá en una cuenta de ahorros al final de 1 año si el depósito inicial es de \$2,000 y la tasa de interés de 7% se compone de manera semestral. (*Sugerencia:* Encuentre el interés simple dos veces.)

87. CUENTAS DE AHORROS Encuentre la cantidad que habrá en una cuenta de ahorros al final de 3 años si un depósito de \$5,000 gana un interés a una tasa de $6\frac{1}{2}\%$, compuesto a diario.

88. AYUDAS ECONÓMICAS Cada año se le da una ayuda económica a un estudiante universitario que se lo merece. La ayuda consiste en el interés ganado ese año sobre una cuenta de ahorros de \$500,000. ¿Cuál es la ayuda económica para el año si el dinero se invirtió a una tasa de 8.3%, compuesto a diario?

CAPÍTULO 6 EXAMEN

1. Complete los espacios.

a. _____ significa partes por centena.

b. Las palabras clave en un enunciado de porcentaje se traducen como a continuación:

- _____ se traduce a un símbolo =
- _____ se traduce a una multiplicación que se muestra con un punto elevado ·
- _____ *número* o _____ *porcentaje* se traduce a un número desconocido que se representa por medio de una variable.

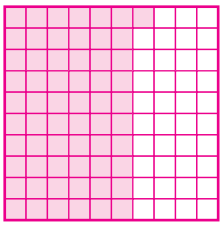
c. En el enunciado de porcentaje "5 es el 25% de 20", el 5 es la _____, 25% es el porcentaje y el 20 es la _____.

d. Cuando se utiliza un porcentaje para describir en cuánto se ha incrementado una cantidad en comparación con su valor original, se está encontrando el porcentaje de _____.

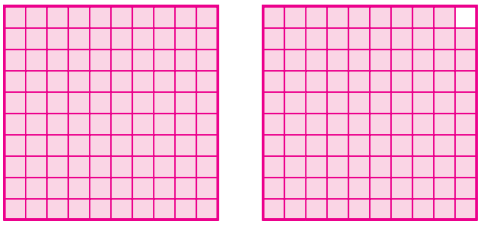
e. El interés _____ es el interés ganado sólo sobre el principal original. El interés _____ es el interés pagado sobre el principal y el interés ganado anteriormente.

2. a. Exprese la cantidad de la figura que está sombreada como un porcentaje, como una fracción y como un decimal.

b. ¿Qué porcentaje de la figura no está sombreada?



3. En la ilustración de abajo, cada conjunto de 100 regiones cuadradas representa 100%. Exprese como un porcentaje la cantidad de la figura que está sombreada. Después exprese ese porcentaje como una fracción y como un decimal.



4. Escriba cada porcentaje como un decimal.

a. 67% **b.** 12.3% **c.** $9\frac{3}{4}\%$

5. Escriba cada porcentaje como un decimal.

a. 0.06% **b.** 210% **c.** 55.375%

6. Escriba cada fracción como un porcentaje.

a. $\frac{1}{4}$ **b.** $\frac{5}{8}$ **c.** $\frac{28}{25}$

7. Escriba cada decimal como un porcentaje.

a. 0.19 **b.** 3.47 **c.** 0.005

8. Escriba cada decimal o número natural como un porcentaje.

a. 0.667 **b.** 2 **c.** 0.9

9. Escriba cada porcentaje como una fracción. Simplifique, si es posible.

a. 55% **b.** 0.01% **c.** 125%

10. Escriba cada porcentaje como una fracción. Simplifique, si es posible.

a. $6\frac{2}{3}\%$ **b.** 37.5% **c.** 8%

11. Escriba cada fracción como un porcentaje. Dé la respuesta exacta y una aproximación a la décima de 1% más cercana.

a. $\frac{1}{30}$ **b.** $\frac{16}{9}$

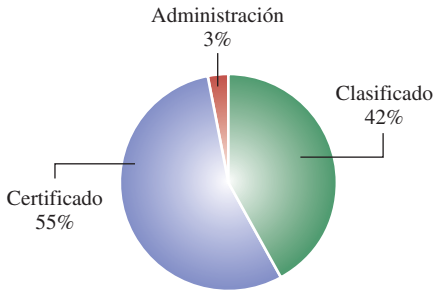
12. ¿65 es qué porcentaje de 1,000?

13. ¿Qué porcentaje de 14 es 35?

14. FUGITIVOS Hasta el 29 de noviembre del 2008, exactamente 460 de los 491 fugitivos que habían aparecido en la lista de los 10 más buscados del FBI habían sido capturados o localizados. ¿Qué porcentaje es esto? Redondee a la décima de uno por ciento más cercana. (*Fuente:* www.fbi.gov/wanted)

15. ENTRENAMIENTOS DE NATACIÓN Un nadador fue capaz de completar 18 vueltas antes de que una lesión en el hombro lo obligara a detenerse. Este sólo fue 20% de un entrenamiento normal. ¿Cuántas vueltas completa por lo regular durante un entrenamiento?

16. EMPLEADOS EN UNIVERSIDADES Los 700 empleados en una universidad comunitaria caen en tres categorías principales, como se muestra en la gráfica circular. ¿Cuántos empleados hay en la administración?



17. ¿Qué número es 224% de 60?

18. ¿2.6 es $33\frac{1}{3}$% de qué número?

19. ENCOGIMIENTO Vea la siguiente etiqueta de un par de jean nuevos. Las medidas están en pulgadas. (El *tiro* es una medida de la longitud de los jeans.)

CINTURA	TIRO
33	34

Espere un encogimiento de aproximadamente el **3%** en la longitud después de que se laven los jeans.

a. ¿Cuánto de la longitud se pierde debido al encogimiento?

b. ¿Cuál será la longitud de los jeans después de que se laven?

20. COSTO TOTAL Encuentre el costo total de una compra de $25.50 si la tasa del impuesto sobre las ventas es del 2.9%.

21. IMPUESTOS SOBRE LAS VENTAS El precio de compra para un reloj es de $90. Si el impuesto sobre las ventas es de $2.70, ¿cuál es la tasa del impuesto sobre las ventas?

22. INCREMENTOS DE LA POBLACIÓN Después de que se completó una carretera, la población de una ciudad por la que atravesó se incrementó de 2,800 a 3,444 en dos años. Encuentre el porcentaje de incremento.

23. SEGUROS Una vendedora de seguros para automóviles recibe una comisión de 4% sobre la prima anual de cualquier póliza que venda. Encuentre su comisión sobre una póliza si la prima anual es de $898.

24. TELEMERCADEO Una vendedora por teléfono ganó una comisión de $528 sobre una ganancia de $4,800 de los nuevos negocios que obtuvo por teléfono. Encuentre la tasa de su comisión.

25. COSTOS DE VIDA Un profesor que gana $40,000 acaba de recibir un incremento de 3.6% por el costo de vida. ¿Cuál es el nuevo salario del profesor?

26. CUIDADOS DE AUTOMÓVILES Refiérase al anuncio de abajo. Encuentre el descuento, el precio en rebaja y la tasa del descuento en el paquete de encerado de autos.

27. VENTAS DE TOALLAS Encuentre la cantidad del descuento sobre una toalla para playa si por lo regular se vende por $20, pero está en rebaja con un descuento de 33%. Después encuentre el precio en rebaja de la toalla.

28. Complete los espacios.

a. Para encontrar el 1% de un número, mueva el punto decimal en el número _____ posiciones a la _____.

b. Para encontrar el 10% de un número, mueva el punto decimal en el número _____ posición a la _____.

29. Estime cada respuesta. (Las respuestas pueden variar.)

a. ¿Cuánto es 20% de 396?

b. ¿Cuánto es 50% de 6,189,034?

c. ¿Cuánto es 200% de 21.2?

30. INSPECCIONES DE FRENOS De los 1,920 camiones inspeccionados en un punto de inspección de seguridad, 5% tenían problemas con sus frenos. Estime el número de camiones que tenían problemas con sus frenos.

31. PROPINAS Estime la cantidad de una propina 15% sobre un almuerzo que cuesta $28.40.

32. EXHIBICIONES DE AUTOMÓVILES El 24% de las 63,400 personas que asistieron a una exhibición de automóviles de cinco días eran mujeres. Estime el número de mujeres que asistieron a la exhibición de automóviles.

33. CARGOS POR INTERESES Encuentre el interés simple sobre un préstamo de $3,000 al 5% anual por 1 año.

34. INVERSIONES Si se invierte $23,000 a un interés simple de $4\frac{1}{2}\%$ por 5 años, ¿cuál será la cantidad total de dinero en la cuenta de inversión al final de los 5 años?

35. PRÉSTAMOS A CORTO PLAZO Encuentre el interés simple sobre un préstamo de $2,000 concedido a 8% por 90 días.

36. Use la fórmula $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ para encontrar la cantidad del interés ganado sobre una inversión de $24,000 que paga una tasa anual de 6.4%, compuesto a diario por 3 años.

CAPÍTULOS 1–6 REPASO ACUMULATIVO

1. Escriba el 6,054,346 [Sección 1.1]

a. en palabras

b. en notación expandida

2. CLIMA Las tablas de abajo muestran el número promedio de días nublados en Anchorage, Alaska, cada mes. Encuentre el número de días nublados en un año. (Fuente: Western Regional Climate Center.) [Sección 1.2]

Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun
19	18	18	18	20	20

Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
22	21	21	21	20	21

3. Reste: $50{,}055 - 7{,}899$ [Sección 1.3]

4. Multiplique: $308 \cdot 75$ [Sección 1.4]

5. Divida: $37\overline{)561}$ [Sección 1.5]

6. AGUA EMBOTELLADA ¿Cuántas porciones de 8 onzas hay en un garrafón de 5 galones de agua? (*Sugerencia:* Hay 128 onzas líquidas en un galón.) [Sección 1.6]

7. Liste los factores del 40, de menor a mayor. [Sección 1.7]

8. Encuentre la factorización de primos del 294. [Sección 1.7]

9. Encuentre el mcm y el mfc del 24 y el 30. [Sección 1.8]

10. Evalúe: $\dfrac{39 + 3[4^3 - 2(2^2 - 3)]}{4 \cdot 2^2 - 1}$ [Sección 1.9]

11. Coloque un símbolo $<$ o $>$ en el recuadro para formar un enunciado verdadero: $|-8| \quad -(-5)$ [Sección 2.1]

12. Evalúe: $(-20 + 9) + (-13 + 24)$ [Sección 2.2]

13. PROTECCIÓN POR SOBREGIRO Una estudiante olvidó que sólo tenía $55 en su cuenta de banco y extendió un cheque por $75, utilizó un cajero automático para obtener $60 en efectivo y utilizó su tarjeta de débito para comprar $25 en abarrotes. En cada una de las tres transacciones, el bancó le cobró una cuota de protección de sobregiro de $10. Encuentre el nuevo saldo de la cuenta. [Sección 2.3]

14. Evalúe: -6^2 y $(-6)^2$ [Sección 2.4]

15. Evalúe cada expresión, si es posible. [Sección 2.5]

a. $\dfrac{-14}{0}$ **b.** $\dfrac{0}{-12}$

c. $-3(-4)(-5)(0)$ **d.** $0 - (-14)$

16. Evalúe: $\dfrac{3 + 3[5(-6) - (1 - 10)]}{1 - (-1)}$ [Sección 2.6]

17. Estime la siguiente suma redondeando cada número a la centena más cercana. [Sección 2.6]

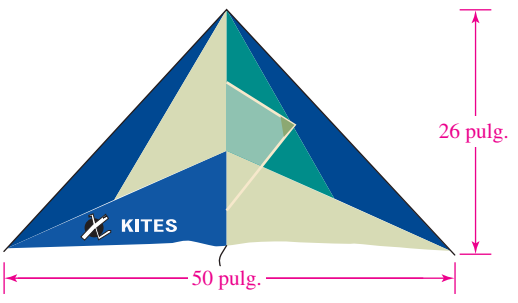
$$-5{,}684 + (-2{,}270) + 3{,}404 + 2{,}689$$

18. Simplifique: $\dfrac{54}{60}$ [Sección 3.1]

19. Exprese $\dfrac{4}{5}$ como una fracción equivalente con un denominador de 45. [Sección 3.1]

20. ¿Cuánto es $\dfrac{1}{4}$ de -240? [Sección 3.2]

21. PAPALOTES Encuentre el número de pulgadas cuadradas de nailon utilizadas para fabricar el papalote mostrado abajo. (*Sugerencia:* Encuentre el área.) [Sección 3.2]



22. Divida: $\frac{4}{9} \div \left(-\frac{16}{27}\right)$ [Sección 3.3]

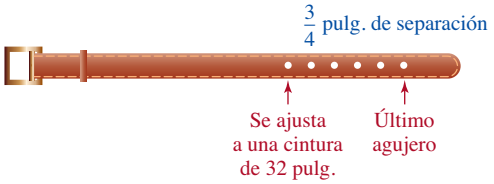
23. Reste: $\frac{9}{10} - \frac{3}{14}$ [Sección 3.4]

24. Determine cuál fracción es más grande: $\frac{23}{20}$ o $\frac{7}{6}$ [Sección 3.4]

25. HAMBURGUESAS ¿Cuál es la diferencia en peso entre una hamburguesa de $\frac{1}{4}$ de libra y una de $\frac{1}{3}$ de libra? [Sección 3.4]

26. Multiplique: $-3\frac{3}{4}(8)$ [Sección 3.5]

27. CINTURONES Refiérase al cinturón mostrado abajo. ¿Cuál es el tamaño de cintura máximo al que puede ajustarse el cinturón si se abrocha utilizando el último agujero? [Sección 3.6]



28. Simplifique: $\dfrac{\frac{1}{3} - \frac{3}{4}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}}$ [Sección 3.7]

29. Redondee cada decimal. [Sección 4.1]

a. Redondee el 452.0298 a la centésima más cercana.

b. Redondee el 452.0298 a la milésima más cercana.

30. Evalúe: $3.4 - (6.6 + 7.3) + 5$ [Sección 4.2]

31. INGRESOS SEMANALES La semana de trabajo básica de un soldador es de 40 horas. Después que se acaba su turno diario, puede trabajar tiempo extra a una tasa de 1.5 veces su tasa regular de $15.90 por hora. ¿Cuánto dinero ganará en una semana si trabaja 4 horas de tiempo extra? [Sección 4.3]

32. Divida: $0.58\overline{)0.1566}$ [Sección 4.4]

33. Escriba $\frac{11}{15}$ como un decimal. Utilice una barra superior. [Sección 4.5]

34. Evalúe: $3\sqrt{81} - 8\sqrt{49}$ [Sección 4.6]

35. Escriba la razón $1\frac{1}{4}$ a $1\frac{1}{2}$ como una fracción en la forma más simple. [Sección 5.1]

36. Resuelva la proporción $\frac{7}{14} = \frac{2}{x}$. [Sección 5.2]

37. ¿Cuántos días hay en 960 horas? [Sección 5.3]

38. Convierta 2,400 milímetros a metros. [Sección 5.4]

39. Convierta 6.5 kilogramos a libras. [Sección 5.5]

40. Complete la tabla. [Sección 6.1]

Porcentaje	Decimal	Fracción
	0.29	
47.3%		
		$\frac{7}{8}$

41. ¿16% de qué número es 20? [Sección 6.2]

42. GENEALOGÍA A través de una extensa búsqueda por computadora, un genealogista determinó que a nivel mundial, 180 de cada 10 millones de personas tenía su mismo apellido. ¿Qué porcentaje es esto? [Sección 6.2]

43. GIMNASIOS El número de miembros de un gimnasio aumentó de 300 a 534. ¿Cuál fue el porcentaje de incremento en la membresía del gimnasio? [Sección 6.3]

44. OFERTA DE GUITARRAS ¿Cuáles son el precio regular, el precio en rebaja, el descuento y la tasa del descuento para la guitarra mostrada en el anuncio de abajo? [Sección 6.3]

45. PROPINAS Refiérase al recibo de la compra de abajo. [Sección 6.4]

a. Estime la propina de 15%.

b. Encuentre el total.

STEAK STAMPEDE
Bloomington, MN
Server #12\ AT

VISA	67463777288
NOMBRE	DALTON/ LIZ
CANTIDAD	$78.18
PROPINA $	_____
TOTAL $	_____

46. INVERSIONES Encuentre el interés imple ganado sobre $10,000 invertidos por 2 años a 7.25%. [Sección 6.5]

7

Gráficas y estadística

7.1 Lectura de gráficas y tablas

7.2 Media, mediana y moda

Resumen y repaso

Examen

Repaso acumulativo

Kim Steele/Photodisc/Getty Images

Carreras del campus

Cartero

Los carteros siguen itinerarios a medida que recolectan y entregan el correo a los hogares y negocios. Deben tener la habilidad y la precisión de comparar semejanzas y diferencias entre conjuntos de letras, números, objetos, imágenes y patrones. También necesitan tener buenas habilidades de resolución de problemas para remitir al destinatario cartas y paquetes mal etiquetados. Los carteros pesan artículos en básculas postales y hacen cálculos monetarios al consultar las tablas de tarifas postales.

En el **Problema 19** del **Espacio para el estudio 7.1**, verá cómo un cartero debe ser capaz de leer una tabla de tarifas postales y conocer las unidades estadounidenses de peso para determinar el costo para enviar un paquete utilizando correo prioritario.

CARGO LABORAL:
Cartero

EDUCACIÓN: Se requiere un diploma de preparatoria (o equivalente) y pasar el examen escrito.

PERSPECTIVA LABORAL: La competencia por las vacantes es alta dado que las posiciones por lo regular sólo están disponibles cuando se retiran los carteros actuales.

INGRESOS ANUALES: El salario promedio (medio) es de $46,970

PARA MÁS INFORMACIÓN:
http://stats.bls.gov/oco/ocos141.HTM

Objetivos

1. Leer tablas.
2. Leer gráficas de barras.
3. Leer pictografías.
4. Leer gráficas circulares.
5. Leer gráficas de líneas.
6. Leer histogramas y polígonos de frecuencias.

SECCIÓN 7.1
Lectura de gráficas y tablas

Se vive en una era de la información. Nunca antes tantos hechos y cifras han estado al alcance de nuestras manos. Dado que la información se presenta con frecuencia en la forma de tablas o gráficas, se necesita ser capaz de leer y comprender la información mostrada de esta manera.

Las siguientes **tabla, gráfica de barras** y **gráfica circular** (o **gráfica de pastel**) muestran los resultados de una encuesta a compradores. A una muestra grande de adultos se les preguntó con cuánto tiempo de anticipación compran un regalo por lo regular. En la gráfica de barras, la longitud de una barra representa el porcentaje de las respuestas para un método de compra dado. En la gráfica circular, el tamaño de una región coloreada representa el porcentaje de las respuestas para un método de compra dado.

Encuesta a compradores

Con cuánto tiempo de anticipación por lo regular compran un regalo los obsequiantes

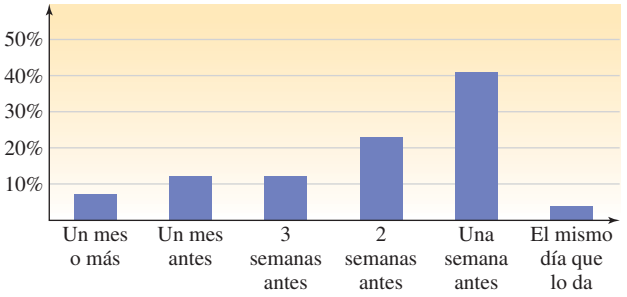
Una tabla

Respuesta para la encuesta

Tiempo de anticipación	Porcentaje
Un mes o más	8%
Un mes antes	12%
3 semanas antes	12%
2 semanas antes	23%
Una semana antes	41%
El mismo día que lo da	4%

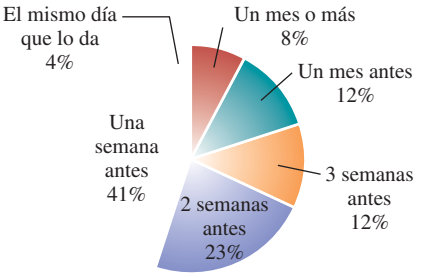
Una gráfica de barras

Respuesta para la encuesta



Una gráfica circular

Respuesta para la encuesta



(Fuente: Harris interactive online study via QuickQuery for Gifts.com)

Con frecuencia se dice que una imagen vale más que mil palabras. Este es el caso aquí, donde las gráficas muestran los resultados de la encuesta de manera más clara que una tabla. Es fácil observar a partir de las gráficas que la mayoría de la gente compra un regalo una semana antes de lo que lo tiene que dar. También es evidente que la compra el mismo día del regalo fue la respuesta menos popular. Esa información también aparece en la tabla, pero no es tan obvia.

1 Leer tablas

La información se presenta con frecuencia en tablas, con la información organizada en **renglones** y **columnas.** Para leer una tabla, se debe encontrar la *intersección* del renglón y la columna que contiene la información deseada.

EJEMPLO 1 ***Tarifas postales*** Refiérase a la tabla de las tarifas postales del correo prioritario (del 2009). Encuentre el costo de enviar un paquete de $8\frac{1}{2}$ libras por correo prioritario a la zona postal 4.

Tarifas postales para el correo prioritario del 2009

Peso no mayor de (libras)	Zonas						
	Local, 1 y 2	3	4	5	6	7	8
1	$4.95	$4.95	$4.95	$4.95	$4.95	$4.95	$4.95
2	4.95	5.20	5.75	7.10	7.60	8.10	8.70
3	5.50	6.25	7.10	9.05	9.90	10.60	11.95
4	6.10	7.10	8.15	10.80	11.95	12.95	14.70
5	6.85	8.15	9.45	12.70	13.75	15.20	17.15
6	7.55	9.25	10.75	14.65	15.50	17.50	19.60
7	8.30	10.30	12.05	16.55	17.30	19.75	22.05
8	8.80	10.70	13.10	17.95	18.80	21.70	24.75
9	9.25	11.45	**13.95**	19.15	20.30	23.60	27.55
10	9.90	12.35	15.15	20.75	22.50	25.90	29.95
11	10.55	13.30	16.40	22.40	24.75	28.20	32.40
12	11.20	14.20	17.60	24.00	26.95	30.50	34.80

Estrategia Se leerá el número en la intersección del 9o renglón y la columna etiquetada Zona 4.

POR QUÉ Dado que $8\frac{1}{2}$ libras es mayor que 8 libras, no se puede utilizar el 8o renglón. Debido a que $8\frac{1}{2}$ libras no excede las 9 libras, se utiliza el 9o renglón de la columna.

Solución

El número en la intersección del 9o renglón (en rojo) y la columna etiquetada Zona 4 (azul) es el 13.95 (en púrpura). Esto significa que costaría $13.95 enviar el paquete de $8\frac{1}{2}$ libras por correo prioritario.

Auto-revisión 1

TARIFAS POSTALES Refiérase a la tabla de las tarifas postales del correo prioritario. Encuentre el costo de enviar un paquete de 3.75 libras por correo prioritario a la zona postal 8.

Ahora intente **Problema 17**

2 Leer gráficas de barras

Otra manera popular de mostrar información es el uso de una **gráfica de barras** con las barras trazadas de manera vertical u horizontal. Las alturas (o longitudes) relativas de las barras hacen sencilla la comparación de valores. A la línea horizontal o vertical utilizada como referencia en una gráfica de barras se le llama **eje.** El **eje horizontal** y el **eje vertical** de una gráfica de barras sirven para estructurar la gráfica y se escalan en unidades como años, dólares, minutos, libras y porcentajes.

Auto-revisión 2

VELOCIDAD DE ANIMALES Refiérase a la gráfica de barras del Ejemplo 2.

a. ¿Cuál es la velocidad máxima de una jirafa?

b. ¿Por cuánto es mayor la velocidad máxima de un coyote en comparación con la de un reno?

c. ¿Cuáles de los animales listados en la gráfica tienen una velocidad máxima menor que la de un gato doméstico?

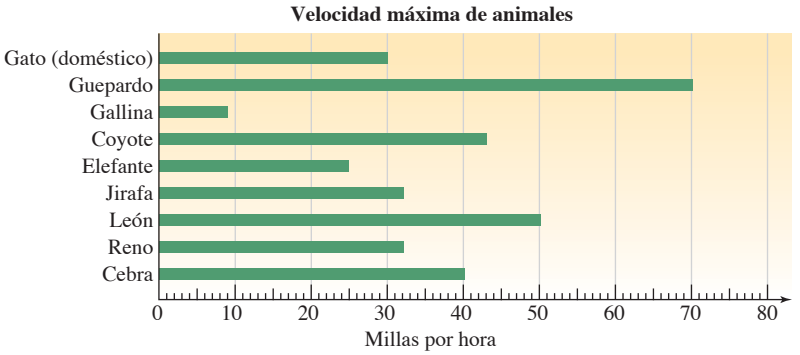
Ahora intente **Problema 21**

EJEMPLO 2 ***Velocidad de animales*** La siguiente gráfica muestra las velocidades máximas para varios animales en una distancia dada.

a. ¿Qué animal en la gráfica tiene la mayor velocidad máxima?

b. ¿Qué animal en la gráfica tiene la menor velocidad máxima?

c. ¿Por cuánto es mayor la velocidad máxima de un león en comparación con la de un coyote?



Fuente: Infoplease.com

Estrategia Se localizará el nombre de cada animal deseado en el eje vertical y se moverá a la derecha al final de su barra correspondiente.

POR QUÉ Entonces se puede extender hacia abajo y leer la velocidad máxima del animal en la escala del eje horizontal.

Solución

Federico Veronesi/ Getty Images

a. La barra más larga en la gráfica tiene una longitud de 70 unidades y corresponde a un guepardo. De todos los animales listados en la gráfica, el guepardo tiene la mayor velocidad máxima de 70 mph.

b. La barra más corta en la gráfica tiene una longitud de aproximadamente 9 unidades y corresponde a la gallina. De todos los animales listados en la gráfica, la gallina tiene la menor velocidad máxima de 9 mph.

c. La longitud de la barra que representa la velocidad máxima de un león es de 50 unidades de largo y la longitud de la barra que representa la velocidad máxima de un coyote aparece como de 43 unidades de largo. Para encontrar por cuánto es mayor la velocidad máxima de un león en comparación con la de un coyote, se resta

$$50 \text{ mph} - 43 \text{ mph} = 7 \text{ mph}$$

Reste la velocidad máxima del coyote de la velocidad máxima del león.

La velocidad máxima de un león es alrededor de 7 mph más rápida que la velocidad máxima de un coyote.

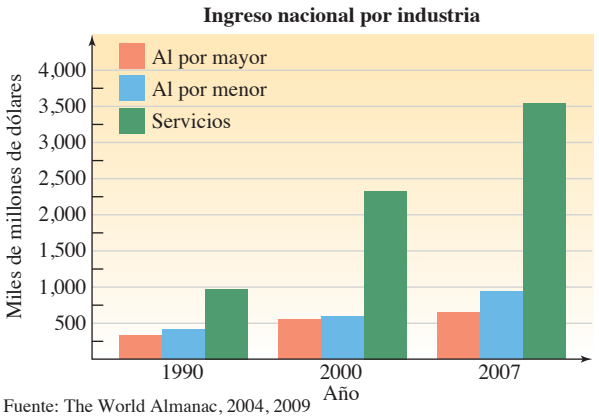
Para comparar conjuntos de información relacionada, pueden mostrarse grupos de dos (o más) barras. Para **gráficas de barras dobles** o **barras triples**, se utiliza una **clave** para explicar el significado de cada tipo de barra en un grupo.

EJEMPLO 3 ***Economía de E.U.*** La siguiente gráfica de barras muestra el ingreso total generado por tres sectores de la economía de E.U. en cada uno de tres años.

a. ¿Cuál fue el ingreso generado por las ventas al por menor en el 2000?

b. ¿Cuál sector de la economía generó de manera consistente el mayor ingreso?

c. ¿En qué cantidad aumentó el ingreso del sector de ventas al por mayor de 1990 al 2007?



Fuente: The World Almanac, 2004, 2009

Estrategia Para responder las preguntas acerca de los años, se localizará la barra de color correcta y se buscará en el *eje horizontal* de la gráfica. Para responder las preguntas acerca del ingreso, se localizará la barra de color correcta y se extenderá a la izquierda para buscar en el *eje vertical* de la gráfica.

POR QUÉ Los años aparecen en el eje horizontal. La altura de cada barra, que representa el ingreso en miles de millones de dólares, se mide en la escala en el eje vertical.

Solución

a. El segundo grupo de barras indica el ingreso en el año 2000. De acuerdo con la clave del color, la barra azul de ese grupo muestra las ventas al por menor. Dado que el eje vertical está escalado en unidades de \$250 mil millones, la altura de la barra es de aproximadamente 500 más un medio de 250, o 125. Por tanto, la altura de la barra azul es de aproximadamente $500 + 125 = 625$, la cual representa \$625 mil millones en ventas al por menor en el 2000.

b. En cada grupo, la barra verde es la más alta. Esa barra, de acuerdo con la clave del color, representa el ingreso del sector de servicios de la economía. Por tanto, los servicios generaron de manera consistente el mayor ingreso.

c. De acuerdo con la clave del color, la barra anaranjada en cada grupo muestra el ingreso del sector de ventas al por mayor. Ese sector generó alrededor de \$260 mil millones de ingreso en 1990 y \$700 mil millones de ingreso en el 2007. La cantidad del incremento es la diferencia de estas dos cantidades.

\$700 mil millones − \$260 mil millones = \$440 mil millones

Reste el ingreso de las ventas al por mayor de 1990 del ingreso de las ventas al por mayor del 2007.

El ingreso de las ventas al por mayor aumentó en alrededor de \$440 mil millones entre 1990 y el 2007.

Auto-revisión 3

ECONOMÍA DE E.U. Refiérase a la gráfica del Ejemplo 3.

a. ¿Cuál fue el ingreso generado por las ventas al por menor en 1990?

b. ¿Cuál fue el ingreso generado por el sector de las ventas al por mayor en el 2007?

c. En el 2000, ¿en qué cantidad excedió el ingreso del sector de servicios al ingreso del sector de ventas al por menor?

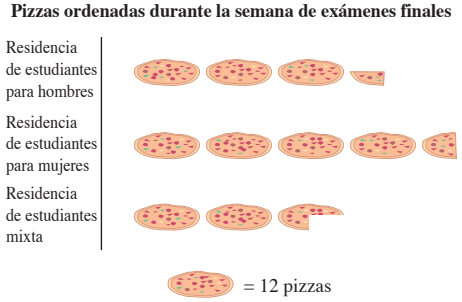
Ahora intente **Problemas 25 y 31**

3 Leer pictografías

Una **pictografía** es parecida a una gráfica de barras, pero las barras están hechas de imágenes o símbolos. Una **clave** indica el significado (o valor) de cada símbolo.

EJEMPLO 4 ***Envíos de pizzas***

La pictografía a la derecha muestra el número de pizzas enviadas a las tres residencias de estudiantes en un campus universitario durante la semana de exámenes finales. En la gráfica, ¿qué información proporciona el renglón superior de pizzas?



Auto-revisión 4

ENVÍOS DE PIZZAS En la pictografía del Ejemplo 4, ¿qué información proporciona el último renglón de pizzas?

Ahora intente **Problemas 33 y 35**

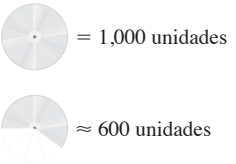
Estrategia Se contará el número de símbolos de pizzas completos que aparecen en el renglón superior de la gráfica y se estimará la parte fraccional del símbolo de pizza que también aparece en ese renglón.

POR QUÉ La clave indica que cada pizza completa representa una docena (12) de pizzas.

Solución

El renglón superior contiene 3 símbolos de pizzas completos y lo que parece ser $\frac{1}{4}$ de otro. Esto significa que la residencia de estudiantes para hombres ordenó $3 \cdot 12$, o 36 pizzas, más aproximadamente $\frac{1}{4}$ de 12, o alrededor de 3 pizzas. Esto totaliza 39 pizzas.

¡Cuidado! Un inconveniente de las pictografías es que puede ser difícil determinar qué cantidad fraccional está representada por una porción de un símbolo. Por ejemplo, si el CD mostrado a la derecha representa 1,000 unidades vendidas, sólo se puede estimar que el símbolo de CD parcial representa alrededor de 600 unidades vendidas.



4 Leer gráficas circulares

En una **gráfica circular**, se utilizan regiones llamadas **sectores** para mostrar qué parte del todo representa cada cantidad.

El lenguaje de las matemáticas Un *sector* tiene la forma de una rebanada de pizza o de una rebanada de pastel. Por tanto, a las gráficas circulares también se les llama **gráficas de pastel.**

Auto-revisión 5

PRODUCCIÓN DE ORO

Refiérase a la gráfica circular del Ejemplo 5. A la décima de un millón más cercana, ¿cuántas onzas de oro produjo Rusia en el 2008?

Ahora intente **Problemas 37, 41 y 43**

EJEMPLO 5 ***Producción de oro***

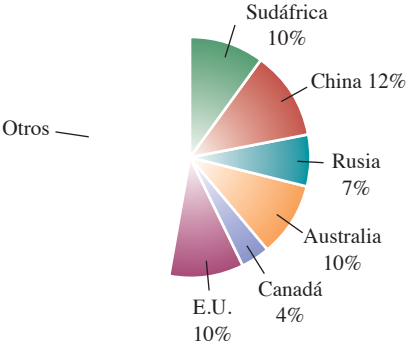
La gráfica circular a la derecha proporciona la información acerca de la producción mundial de oro. El círculo completo representa la producción mundial total de 78 millones de onzas troy en el 2008. Use la gráfica para responder las siguientes preguntas.

a. ¿Qué porcentaje del total fue la producción combinada de los Estados Unidos y Canadá?

b. ¿Qué porcentaje de la producción total provino de fuentes distintas a las listadas?

c. A la décima de un millón más cercana, ¿cuántas onzas de oro produjo China en el 2008?

Producción mundial de oro en el 2008
78 millones de onzas troy



Fuente: Goldsheet Mining Directory

Estrategia Se buscarán las palabras clave en cada problema.

POR QUÉ Las palabras clave indican qué operación (suma, resta, multiplicación o división) debe desarrollarse para responder cada pregunta.

Solución

a. La palabra clave *combinada* indica una suma. De acuerdo con la gráfica, Estados Unidos produjo 10% y Canadá produjo 4% de la cantidad total de oro en el 2008. En conjunto, produjeron 10% + 4%, o 14% del total.

b. La frase *provino de fuentes distintas a las listadas* indica una resta. Para encontrar el porcentaje de oro producido por los países que no están listados, se suman las contribuciones de todas las fuentes listadas y se resta el total de 100%.

$$100\% - (10\% + 12\% + 7\% + 10\% + 4\% + 10\%) = 100\% - 53\% = 47\%$$

Los países que no están listados en la gráfica produjeron 47% de la producción mundial total de oro en el 2008.

c. A partir de la gráfica se observa que China produjo el 12% del oro mundial en el 2008. Para encontrar el número de onzas producidas por China (la cantidad), se utiliza el método para resolver problemas de porcentaje de la Sección 6.2.

¿Qué número	es	12%	de	78?
↓	↓	↓	↓	↓
x	=	12%	·	78

Este es el enunciado de porcentaje.
Las unidades están en millones de onzas.
Traduzca a una ecuación de porcentaje.

Ahora se desarrolla la multiplicación en el lado derecho de la ecuación.

$x = 0.12 \cdot 78$ Escriba 12% como un decimal: 12% = 0.12.

$x = 9.36$ Realice la multiplicación.

$$\begin{array}{r} 78 \\ \times\ 0.12 \\ \hline 156 \\ 780 \\ \hline 9.36 \end{array}$$

Redondeada a la décima de un millón más cercana, China produjo 9.4 millones de onzas de oro en el 2008.

5 Leer gráficas de líneas

Otro tipo de gráfica, llamada **gráfica de líneas,** se utiliza para mostrar cómo cambian con el tiempo las cantidades. A partir de tal gráfica, se puede determinar cuándo una cantidad está incrementándose y cuándo está disminuyéndose.

El lenguaje de las matemáticas El símbolo ⫰ se utiliza con frecuencia cuando se grafica para mostrar una interrupción en la escala en un eje. Tal interrupción permite omitir porciones grandes de espacio vacío en una gráfica.

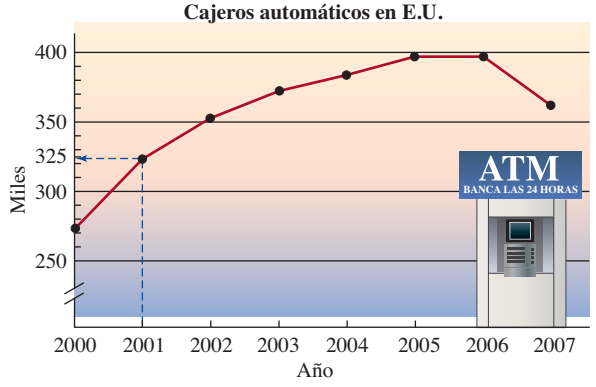
EJEMPLO 6 ***Cajeros automáticos*** La gráfica de líneas abajo muestra el número de cajeros automáticos (ATM, por sus siglas en inglés) en Estados Unidos para los años 2000 al 2007. Utilice la gráfica para contestar las preguntas siguientes.

a. ¿Cuántos cajeros automáticos había en Estados Unidos en el 2001?

b. ¿Entré cuáles dos años hubo el mayor incremento en el número de cajeros automáticos?

c. ¿Cuándo disminuyó el número de cajeros automáticos?

d. ¿Entre cuáles dos años el número de cajeros automáticos permaneció aproximadamente igual?



Fuente: The Federal Reserve and *ATM & Debit News*

Auto-revisión 6

CAJEROS AUTOMÁTICOS
Refiérase a la gráfica de líneas del Ejemplo 6.

a. Encuentre el incremento en el número de cajeros automáticos entre el 2002 y el 2003.

b. ¿Cuántos cajeros automáticos más había en Estados Unidos en el 2007 en comparación con el 2000?

Ahora intente **Problemas 45, 47 y 51**

Estrategia Se determinará si la gráfica está elevándose, descendiendo o es horizontal.

POR QUÉ Cuando la gráfica se eleva a medida que se lee de izquierda a derecha, el número de cajeros automáticos está incrementándose. Cuando la gráfica desciende a medida que se lee de izquierda a derecha, el número de cajeros automáticos está disminuyendo. Si la gráfica es horizontal no hay cambio en el número de cajeros automáticos.

Solución

a. Para encontrar el número de cajeros automáticos en el 2001, se sigue la línea azul punteada de la etiqueta 2001 en horizontal hacia arriba en línea recta a la gráfica de líneas. Después se extiende directamente a la escala en el eje vertical, donde la punta de flecha apunta a aproximadamente 325. Dado que la escala vertical está en miles de cajeros automáticos, había alrededor de 325,000 cajeros automáticos en Estados Unidos en el 2001.

b. Esta gráfica de líneas está compuesta por siete segmentos de línea que conectan pares de años consecutivos. El más pronunciado de estos siete segmentos representa el mayor incremento en el número de cajeros automáticos. Dado que ese segmento está entre el 2000 y el 2001, el mayor incremento en el número de cajeros automáticos ocurrió entre el 2000 y el 2001.

c. El único segmento de línea de la gráfica que desciende a medida que se lee de izquierda a derecha es el segmento que conecta los puntos de datos para los años 2006 y 2007. Por tanto, el número de cajeros automáticos disminuyó del 2006 al 2007.

d. El segmento de línea que conecta los puntos de datos para los años 2005 y 2006 parece ser horizontal. Dado que hay poco o ningún cambio en el número de cajeros automáticos para esos años, el número de cajeros automáticos permaneció aproximadamente igual del 2005 al 2006.

Dos cantidades que están cambiando con el tiempo pueden compararse trazando ambas líneas en la misma gráfica.

Auto-revisión 7

TRENES En la gráfica para el Ejercicio 7, ¿qué está haciendo el tren en el tiempo D?

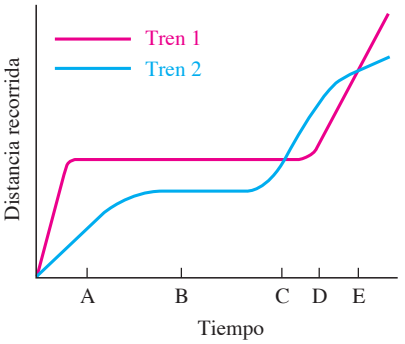
Ahora intente **Problemas 53, 55 y 59**

EJEMPLO 7 ***Trenes*** La gráfica de líneas de abajo muestra los movimientos de dos trenes. El eje horizontal representa el tiempo y el eje vertical representa la distancia que han recorrido los trenes.

a. ¿Cómo se están moviendo los trenes en el tiempo A?

b. ¿En qué tiempo (A, B, C, D o E) están detenidos ambos trenes?

c. ¿En qué tiempo ambos trenes han recorrido la misma distancia?



Estrategia Se determinará si las gráficas están elevándose o son horizontales. También se considerarán las posiciones relativas de las gráficas para un tiempo dado.

POR QUÉ Una gráfica que se eleva indica que el tren se está moviendo y una gráfica horizontal significa que está detenido. Para cualquier tiempo dado, la gráfica más alta indica que el tren que representa ha recorrido la mayor distancia.

Solución

El movimiento del tren 1 está representado por la línea roja y el del tren 2 está representado por la línea azul.

a. En el tiempo A, la línea azul está elevándose. Esto muestra que la distancia recorrida por el tren 2 está incrementándose. Por tanto, en el tiempo A, el tren 2 se está moviendo. En el tiempo A, la línea roja es horizontal. Esto indica que la distancia recorrida por el tren 1 no está cambiando: En el tiempo A, el tren está detenido.

b. Para encontrar el tiempo en que ambos trenes están detenidos, se encuentra el tiempo en el que las líneas roja y azul son horizontales. En el tiempo B, ambos trenes están detenidos.

c. En cualquier tiempo, la altura de una línea proporciona la distancia que ha recorrido un tren. Ambos trenes han recorrido la misma distancia siempre que las dos líneas estén a la misma altura —es decir, en cualquier tiempo cuando las líneas se intersecan. Esto ocurre en los tiempos C y E.

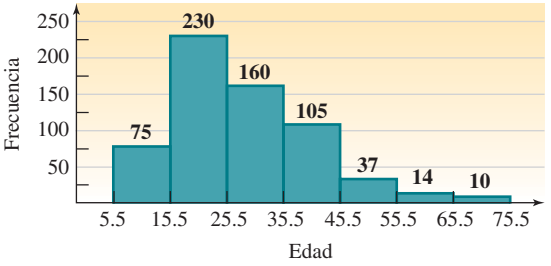
6 Leer histogramas y polígonos de frecuencias

Una compañía que fabrica vitaminas está patrocinando un canal de TV por cable. El departamento de mercadotecnia debe elegir a partir de tres anuncios a mostrar durante el programa.

1. Niños platicando acerca de una vitamina masticable que fabrica la compañía.
2. Un estudiante universitario que habla acerca de una vitamina para la vida activa que fabrica la compañía.
3. Una abuela hablando acerca de una multivitamina que la compañía fabrica.

Una encuesta de la audiencia telespectadora registra la edad de cada televidente, contando el número en el grupo de 6 a 15 años, en el grupo de 16 a 25 años, etc. La gráfica de la información se presenta en un tipo especial de gráfica de barras llamada **histograma,** como se muestra a la derecha. El eje vertical etiquetado como **Frecuencia**, indica el número de televidentes en cada grupo. Por ejemplo, el histograma muestra que 105 televidentes están en el grupo de 36 a 45 años.

Edad de los televidentes de un canal de TV por cable



Un histograma es una gráfica de barras con tres características importantes.

1. Las barras de un histograma se tocan.
2. Los valores de la información nunca caen en el borde de una barra.
3. Los anchos de las barras son iguales y representan un intervalo de valores.

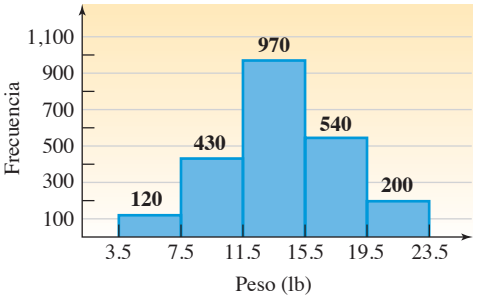
El ancho de cada barra de un histograma representa un intervalo de números llamado **intervalo de clase.** El histograma arriba tiene 7 intervalos de clase, cada uno representando un periodo de edad de 10 años. Dado que la mayoría de los televidentes están en el grupo de 16 a 25 años, el departamento de mercadotecnia decide anunciar las vitaminas para la vida activa en los comerciales dirigidos a jóvenes adultos.

EJEMPLO 8 ***Equipaje de mano*** Una aerolínea pesó el equipaje de mano de 2,260 pasajeros. La información se muestra en el histograma de abajo.

a. ¿Cuántos pasajeros llevaban equipaje en el intervalo de 8 a 11 libras?

b. ¿Cuántos llevaban equipaje de mano en el intervalo de 12 a 19 libras?

Peso del equipaje de mano



Estrategia Se examinará la escala en el eje horizontal del histograma y se identificará el intervalo que contiene el intervalo de peso proporcionado para el equipaje de mano.

POR QUÉ Entonces se puede leer la altura de la barra correspondiente para contestar la pregunta.

Solución

a. La segunda barra, con los bordes en 7.5 y 11.5 libras, corresponde al intervalo de 8 a 11 libras. Use la altura de la barra (o el número escrito ahí) para determinar que 430 pasajeros llevaba tal equipaje.

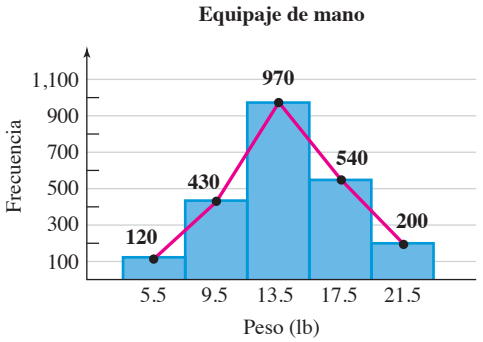
b. El intervalo de 12 a 19 libras está cubierto por dos barras. El número total de pasajeros con equipaje en este intervalo es de 970 + 540, o 1,510.

Auto-revisión 8

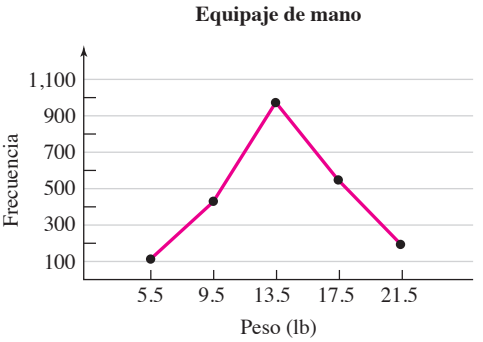
EQUIPAJE DE MANO Refiérase al histograma en el Ejemplo 8. ¿Cuántos pasajeros llevaban equipaje en el intervalo de 20 a 23 libras?

Ahora intente **Problema 61**

Puede construirse una gráfica de líneas especial, llamada **polígono de frecuencias,** a partir del histograma del equipaje de mano uniendo los puntos centrales en la parte superior de cada barra. (Vea las gráficas de abajo.) En el eje horizontal, se escribe la coordenada del valor medio de cada barra. Después de borrar las barras se obtiene el polígono de frecuencias mostrado abajo a la derecha.



Histograma



Polígono de frecuencias

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. $14.70 **2. a.** 32 mph **b.** 11 mph **c.** una gallina y un elefante **3. a.** alrededor de $400 mil millones **b.** alrededor de $700 mil millones **c.** alrededor de $170 mil millones **4.** se enviaron 33 pizzas a la residencia de estudiantes mixta. **5.** 5.5 millones de onzas **6. a.** alrededor de 20,000 **b.** alrededor de 90,000 **7.** El tren 1, el cual se había detenido, está comenzando a moverse. **8.** 200

SECCIÓN 7.1 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Para los problemas 1–6 refiérase a las gráficas a-f abajo. Complete los espacios con la letra correcta.

1. La gráfica _____ es una gráfica de barras.

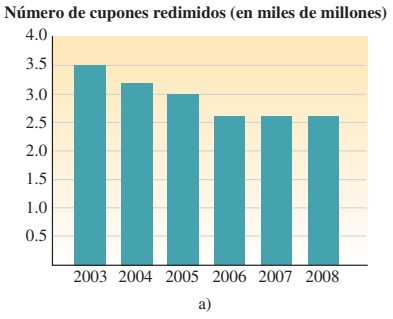
2. La gráfica _____ es una gráfica circular.

3. La gráfica _____ es una pictografía.

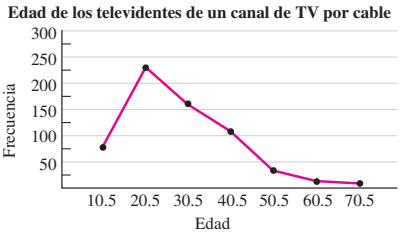
4. La gráfica _____ es una gráfica de líneas.

5. La gráfica _____ es un histograma.

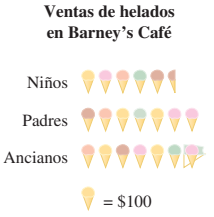
6. La gráfica _____ es un polígono de frecuencias.



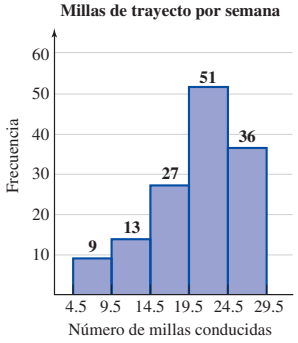
a)



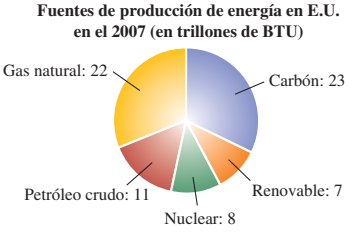
b)



c)



d)



e)

f)

7. A la línea horizontal o vertical utilizada como referencia en una gráfica de barras se le llama _____.

8. En una gráfica circular, las figuras con forma de rebanada de pastel llamadas _____ se utilizan para mostrar qué parte del todo representa cada cantidad.

CONCEPTOS

Complete los espacios.

9. Para leer una tabla, se debe encontrar la _____ del renglón y la columna que contiene la información deseada.

10. El eje _____ y el eje vertical de una gráfica de barras sirven para estructurar la gráfica y se escalan en unidades como años, dólares, minutos, libras y porcentajes.

11. Una pictografía es parecida a una gráfica de barras, pero las barras están hechas de _____ o símbolos.

12. Las gráficas de líneas se utilizan con frecuencia para mostrar cómo cambia una cantidad con el _____. En tales gráficas, se puede observar con facilidad cuándo una cantidad está incrementándose y cuándo está _____.

13. Un histograma es una gráfica de barras con tres características importantes.

- Las _____ de un histograma se tocan.
- Los valores de la información nunca caen en el _____ de una barra.
- Los anchos de las barras de un histograma son _____ y representan un intervalo de valores.

14. Puede construirse un polígono de frecuencias a partir de un histograma uniendo los puntos _____ en la parte superior de cada barra.

NOTACIÓN

15. Si el símbolo = 1,000 autobuses estime qué representa el símbolo .

16. Complete el espacio: El símbolo $\frac{1}{4}$ se utiliza cuando se grafica para mostrar una _____ en la escala en un eje.

PRÁCTICA GUIADA

Refiérase a la tabla de las tarifas postales en la página 595 para responder las siguientes preguntas. **Vea el Ejemplo 1.**

17. Encuentre el costo de utilizar el correo prioritario para enviar un paquete que pesa $7\frac{1}{4}$ libras a la zona 3.

18. Encuentre el costo de enviar un paquete que pesa $2\frac{1}{4}$ libras a la zona 5 por correo prioritario.

19. Una mujer desea enviar un regalo de cumpleaños y un regalo de aniversario a su hermano, que vive en la zona 6, utilizando el correo prioritario. Un paquete pesa 2 libras y 9 onzas, y el otro pesa 3 libras y 8 onzas. Suponga que usted es el cartero de la mujer y le pregunta cuánto dinero se ahorrará enviando ambos regalos como un paquete en vez de dos. Realice los cálculos necesarios para responder su pregunta: (Sugerencia: 16 onzas = 1 libra.)

Carreras del campus

Cartero

Kim Steele/Photodisc/Getty Images

20. Juan desea enviar un paquete que pesa 6 libras 1 onza a un amigo que vive en la zona 2. El correo estándar sería de $3.25. ¿Cuánto se ahorraría enviando el paquete por correo estándar en vez de por correo prioritario?

Refiérase a la gráfica de barras abajo para responder las siguientes preguntas. **Vea el Ejemplo 2.**

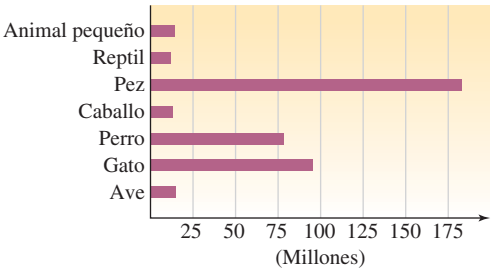
21. Liste las tres mascotas más comúnmente poseídas en Estados Unidos.

22. Hay cuatro tipos de mascotas que son poseídas en números aproximadamente iguales. ¿Cuáles son?

23. En conjunto, ¿hay más perros y gatos mascota que peces mascota?

24. ¿Cuántos más gatos mascota hay que perros mascota?

Número total de mascotas poseídas en Estados Unidos, 2009



Fuente: National Pet Owners Survey, AAPA

Refiérase a la gráfica de barras en la siguiente página para responder las siguientes preguntas. **Vea el Ejemplo 3.**

25. Para los años mostrados en la gráfica, ¿la producción de zinc siempre ha excedido la producción de plomo?

26. Estime cuántas veces es mayor la cantidad de zinc producida en el 2000 en comparación con la cantidad de plomo producida ese año.

27. ¿Cuál es la suma de las cantidades de plomo producidas en 1990, 2000 y 2007?

28. ¿Para cuál metal, plomo o zinc, la producción ha permanecido aproximadamente igual a lo largo de los años?

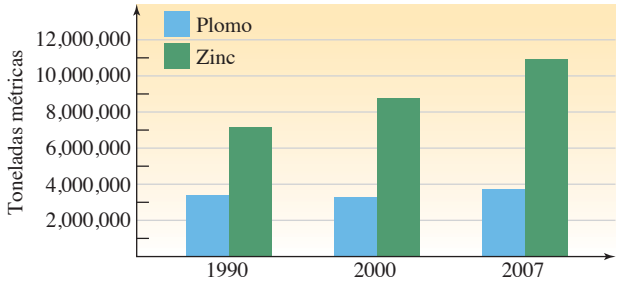
29. ¿En qué años fue al menos del doble la cantidad de zinc producida que la de plomo?

30. Encuentre la diferencia en la cantidad de zinc producida en el 2007 y la cantidad producida en el 2000.

31. ¿En cuántas toneladas métricas aumentó la cantidad de zinc producida entre 1990 y el 2007?

32. ¿Entre cuáles dos años disminuyó la producción de plomo?

Producción mundial de plomo y zinc



Fuente: U.S. Geological Survey

Refiérase a la pictografía abajo para responder las siguientes preguntas. **Vea el Ejemplo 4.**

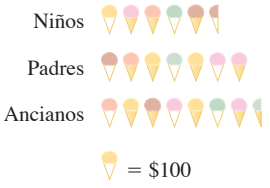
33. ¿Cuál grupo (niños, padres o ancianos) gastó más dinero en helados en Barney's Café?

34. ¿Cuánto dinero gastaron los padres en helado?

35. ¿Cuánto dinero más que los padres gastaron los ancianos?

36. ¿Cuánto dinero más que los niños gastaron los ancianos?

Ventas de helados en Barney's Café



Refiérase a la gráfica circular en la siguiente columna para responder las siguientes preguntas. **Vea el Ejemplo 5.**

37. De los lenguajes en la gráfica, ¿cuál es hablado por el mayor número de personas?

38. ¿Cuál hablan más personas: el español o el francés?

39. En conjunto, ¿las personas que hablan inglés, francés, español, ruso y alemán son más que las que hablan chino?

40. Tres pares de los lenguajes mostrados en la gráfica son hablados por grupos del mismo tamaño. ¿Cuáles pares de lenguajes son?

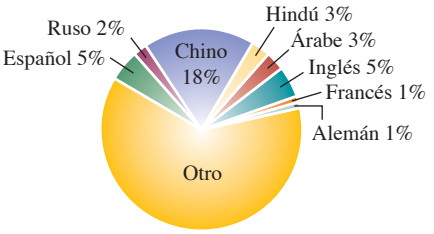
41. ¿Qué porcentaje de la población mundial habla un lenguaje diferente de los ocho mostrados en la gráfica?

42. ¿Qué porcentaje de la población mundial habla ruso o inglés?

43. Al millón más cercano, ¿cuántas personas en el mundo hablan chino?

44. Al millón más cercano, ¿cuántas personas en el mundo hablan árabe?

Lenguajes del mundo
y los porcentajes de la población mundo que los hablan



Población mundial estimada (2009): 6,771,000,000

Fuente: *The World Almanac*, 2009

Refiérase a la gráfica de líneas en la siguiente página para responder las siguientes preguntas. **Vea el Ejemplo 6.**

45. ¿Cuántas estaciones de esquí en E.U. estaban en operación en el 2004?

46. ¿Cuántas estaciones de esquí en E.U. estaban en operación en el 2008?

47. ¿Entre cuáles dos años hubo una disminución en el número de estaciones de esquí en operación? (*Sugerencia:* hay más de una respuesta.)

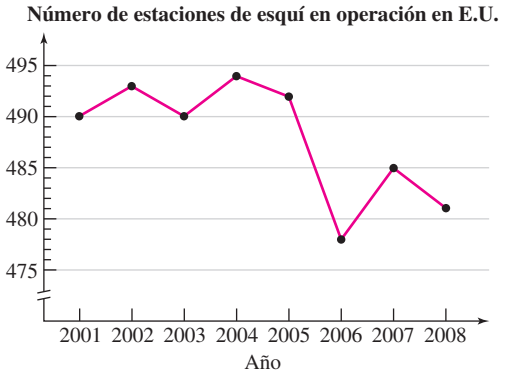
48. ¿Entre cuáles dos años hubo un incremento en el número de estaciones de esquí en operación? (*Sugerencia:* hay más de una respuesta.)

49. ¿Para cuáles dos años el número de estaciones de esquí en operación era el mismo?

50. Encuentre la diferencia en el número de estaciones de esquí en operación en el 2001 y el 2008.

51. ¿Entre cuáles dos años hubo la mayor disminución en el número de estaciones de esquí en operación? ¿Cuál fue el decremento?

52. ¿Entre cuáles dos años hubo el mayor aumento en el número de estaciones de esquí en operación? ¿Cuál fue el incremento?



Fuente: National Ski Area Assn.

Refiérase a la gráfica de líneas abajo para responder las siguientes preguntas. **Vea el Ejemplo 7.**

53. ¿Cuál corredor corrió más rápido al inicio de la carrera?

54. En el tiempo A, ¿cuál corredor iba a la cabeza en la carrera?

55. ¿En qué tiempo durante la carrera los corredores iban empatados a la cabeza?

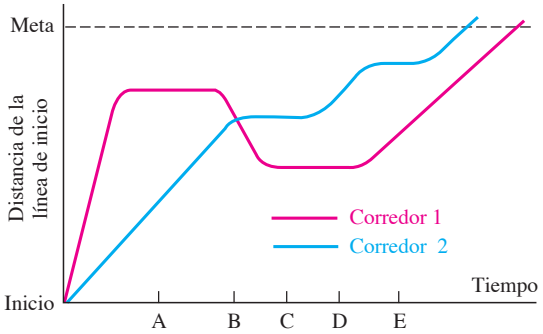
56. ¿Cuál corredor se detuvo para descansar primero?

57. ¿A cuál corredor se le cayó su reloj y tuvo que regresarse a recogerlo?

58. En cuáles de estos tiempos (A, B, C, D, E) el corredor 1 estaba detenido y el corredor 2 estaba corriendo?

59. Describa lo que estaba sucediendo en el tiempo E. ¿Quién estaba corriendo? ¿Quién estaba detenido?

60. ¿Cuál corredor ganó la carrera?

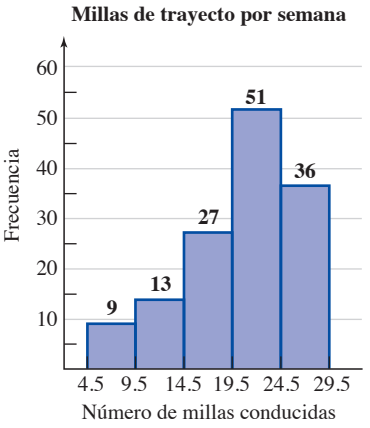


Refiérase al histograma y al polígono de frecuencias abajo para responder las siguientes preguntas. **Vea el Ejemplo 8.**

61. MILLAS DE TRAYECTO Una compañía de seguros recolectó información sobre el número de millas que sus empleados conducen al y desde el trabajo. La información se presenta en el histograma de abajo.

a. ¿Cuántos empleados tienen un recorrido que está en el intervalo de 15 a 19 millas por semana?

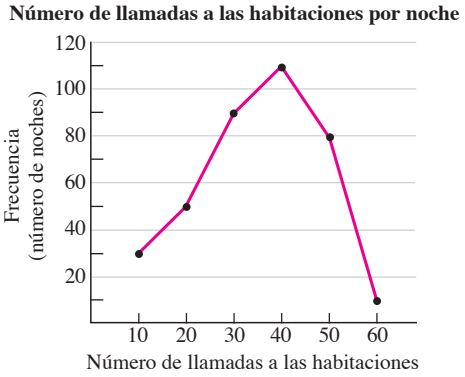
b. ¿Cuántos empleados recorren 14 millas o menos por semana?



62. TRABAJO EN EL TURNO NOCTURNO La administradora de un hospital encuestó a su equipo médico para determinar el número de llamadas a las habitaciones durante la noche. Construyó el polígono de frecuencias de abajo.

a. ¿En cuántas noches hubo alrededor de 30 llamadas a las habitaciones?

b. ¿En cuántas noches hubo alrededor de 60 llamadas a las habitaciones?



INTÉNTELO

Refiérase a la tabla del impuesto sobre la renta federal del 2008 en la página siguiente.

63. PRESENTACIÓN DE UNA DECLARACIÓN INDIVIDUAL Herb es soltero y tiene un ingreso

ajustado de $ 79,250. Calcule el impuesto sobre la renta federal.

64. PRESENTACIÓN DE UNA DECLARACIÓN CONJUNTA Raúl y su esposa tienen un ingreso ajustado combinado de $57,100. Calcule su impuesto sobre la renta federal si declaran de manera conjunta.

65. ESTRATEGIA PARA AHORRAR IMPUESTOS Angelina es soltera y tiene un ingreso ajustado de $53,000. Si se casara, ganaría otras deducciones que reducirían su ingreso en $2,000 y podría presentar una declaración conjunta.

- **a.** Calcule su impuesto sobre la renta federal si permanece soltera.
- **b.** Calcule su impuesto sobre la renta federal si se casa.
- **c.** ¿Cuánto ahorrará en el impuesto sobre la renta federal casándose?

66. PENALIZACIÓN MATRIMONIAL Un hombre soltero con un ingreso ajustado de $80,000 está saliendo con una mujer soltera con un ingreso ajustado de $75,000.

- **a.** Encuentre la cantidad del impuesto sobre la renta federal que pagaría cada persona sobre su ingreso ajustado.
- **b.** Sume los resultados del inciso a.
- **c.** Si se casaran y presentarán una declaración conjunta, ¿cuánto impuesto sobre la renta federal tendrían que pagar sobre sus ingresos ajustados combinados?
- **d.** ¿Habrían ahorrado en sus impuestos sobre la renta federales si no se hubieran casado y pagado como dos personas solteras? Encuentre la cantidad de la "penalización matrimonial".

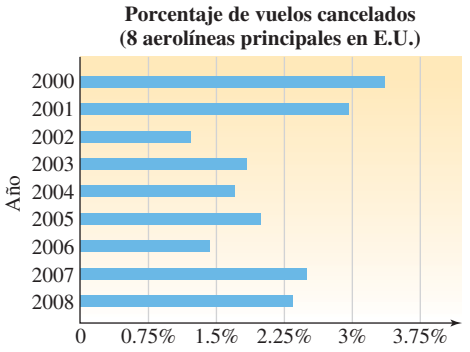
Refiérase a la siguiente gráfica de barras.

67. ¿En qué año hubo el mayor porcentaje de vuelos cancelados? Estime el porcentaje.

68. ¿En qué año hubo el menor porcentaje de vuelos cancelados? Estime el porcentaje.

69. ¿El porcentaje de vuelos cancelados aumentó o disminuyó entre el 2006 y el 2007? ¿En cuánto?

70. ¿El porcentaje de vuelos cancelados aumentó o disminuyó entre el 2007 y el 2008? ¿En cuánto?



Fuente: Bureau of Transportation Statistics

Agendas de tasas de impuestos del 2008 enmendadas					
	Si el INGRESO ES GRAVABLE		El IMPUESTO es		
	ENTONCES				
	Es sobre	Pero no sobre	Esta cantidad	Más este %	De la cantidad sobre
AGENDA X —					
Soltero	$0	$8,025	$0.00	10%	$0.00
	$8,025	$32,550	$802.50	15%	$8,025
	$32,550	$78,850	$4,481.25	25%	$32,550
	$78,850	$164,550	$16,056.25	28%	$78,850
	$164,550	$357,700	$40,052.25	33%	$164,550
	$357,700	—	$103,791.75	35%	$357,700
AGENDA Y-1 —					
Casado que declara de manera conjunta o viuda calificativa	$0	$16,050	$0.00	10%	$0.00
	$16,050	$65,100	$1,605.00	15%	$16,050
	$65,100	$131,450	$8,962.50	25%	$65,100
	$131,450	$200,300	$25,550.00	28%	$131,450
	$200,300	$357,700	$44,828.00	33%	$200,300
	$357,700	—	$96,770.00	35%	$357,700

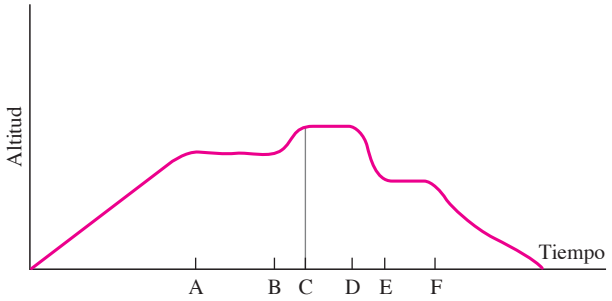
Refiérase a la siguiente gráfica de líneas, la cual muestra la altitud de un avión privado pequeño.

71. ¿Cómo cambió la altitud del avión entre los tiempos B y C?

72. ¿En qué tiempo el piloto niveló por primera vez el avión?

73. ¿Cuándo comenzó el piloto por primera vez el descenso para aterrizar el avión?

74. ¿Cómo cambió la altitud del avión entre los tiempos D y E?



Refiérase a la siguiente gráfica de barras dobles.

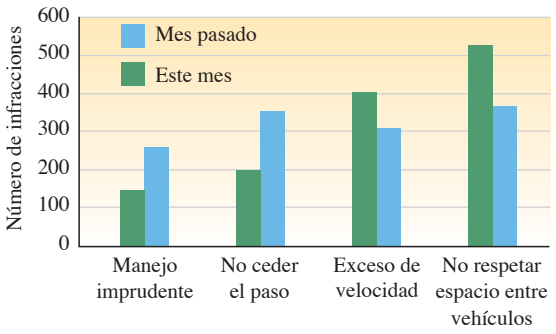
75. ¿En cuáles categorías de infracciones de circulación han disminuido las infracciones desde el mes pasado?

76. El mes pasado, ¿cuál infracción ocurrió con mayor frecuencia?

77. Este mes, ¿cuál infracción ocurrió con menor frecuencia?

78. ¿Cuál infracción ha mostrado la mayor disminución en número desde el mes pasado?

Infracciones de circulación



Refiérase a la siguiente gráfica de líneas.

79. ¿Cuáles fueron los ingresos semanales promedio en la minería durante el año 1980?

80. ¿Cuáles fueron los ingresos semanales promedio en la construcción durante el año 1980?

81. ¿Los ingresos semanales promedio en la minería y en la construcción fueron alguna vez iguales?

82. ¿Cuál fue la diferencia en los ingresos semanales de los trabajadores de la minería y de la construcción en 1995?

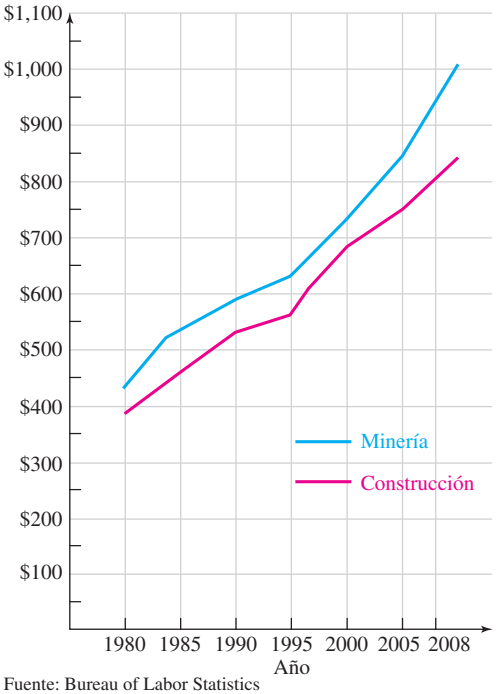
83. En el periodo entre el 2005 y el 2008, ¿los ingresos semanales de cuál ocupación se incrementaron con mayor rapidez, el de los trabajadores de minería o el de los de la construcción?

84. ¿Los ingresos semanales de un trabajador en una mina o una construcción alguna vez disminuyeron en un periodo de 5 años?

85. En el periodo de 1980 al 2008, ¿cuáles trabajadores recibieron el mayor incremento en los ingresos semanales?

86. ¿En qué periodo de 5 años hubo el menor incremento en los ingresos semanales de los mineros?

Minería y construcción: ingresos semanales



Fuente: Bureau of Labor Statistics

Refiérase a la siguiente pictografía.

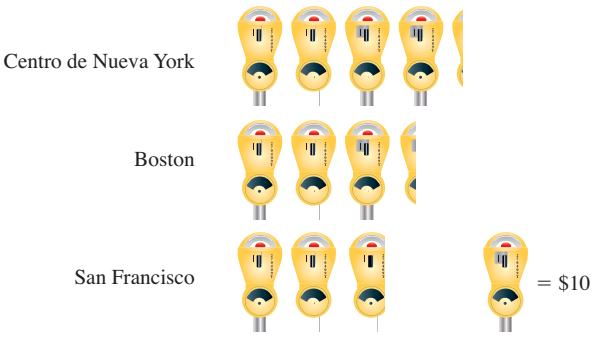
87. ¿Cuál es la tarifa de estacionamiento diaria para el centro de Nueva York?

88. ¿Cuál es la tarifa de estacionamiento diaria para Boston?

89. ¿Cuánto más costaría estacionar un automóvil por 5 días en Boston en comparación con 5 días en San Francisco?

90. ¿Cuánto más costaría estacionar un automóvil por 5 días en el centro de Nueva York en comparación con 5 días en Boston?

Tarifas de estacionamiento diarias



Fuente: Colliers International

Refiérase a la siguiente gráfica circular.

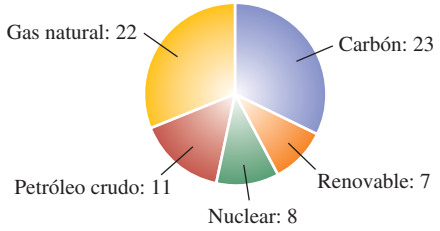
91. ¿Qué porcentaje de la producción de energía en E.U. proviene de la energía nuclear? Redondee al porcentaje más cercano.

92. ¿Qué porcentaje de la producción de energía en E.U. proviene del gas natural? Redondee al porcentaje más cercano.

93. ¿Qué porcentaje de la producción total de energía proviene de fuentes renovables y nucleares combinadas?

94. ¿En qué porcentaje excede la energía producida a partir del carbón la producida a partir del petróleo crudo?

Fuentes de producción de energía en E.U. en el 2007 (en trillones de BTU)



Producción total: 71 trillones de BTU

Fuente: Energy Information Administration

95. NÚMERO DE GRANJAS EN E.U. Use la información en la tabla abajo para formar una gráfica de líneas que muestre el número de granjas en E.U. para los años seleccionados de 1950 al 2007.

96. TAMAÑO DE LAS GRANJAS EN E.U. Use la información en la tabla abajo para formar una gráfica de líneas que muestre la extensión en acres promedio de las granjas en E.U. para los años seleccionados de 1950 al 2007.

Año	Número de granjas en E.U. (en millones)	Tamaño promedio de las granjas en E.U. (acres)
1950	5.6	213
1960	4.0	297
1970	2.9	374
1980	2.4	426
1990	2.1	460
2000	2.2	436
2007	2.1	449

Fuente: U.S. Dept. of Agriculture

97. CUPONES Cada valor del cupón mostrado en la tabla de abajo provee ahorros para los compradores. Forme una gráfica de líneas que relacione el precio original (en dólares, en el eje horizontal) con el precio en rebaja (en dólares, en el eje vertical).

Valor del cupón: Cantidad ahorrada	Precio original del artículo
\$10	\$100, pero menos que \$250
\$25	\$250, pero menos que \$500
\$50	\$500 o más

98. ODONTOLOGÍA Para estudiar el efecto del fluoruro en la prevención de la caries, los investigadores contaron el número de empastes en los dientes de 28 pacientes y registraron estos resultados:

3, 7, 11, 21, 16, 22, 18, 8, 12, 3, 7, 2, 8, 19, 12, 19, 12, 10, 13, 10, 14, 15, 14, 14, 9, 10, 12, 13

Cuadre los resultados completando la tabla. Después forme un histograma. La primera barra se extiende de 0.5 a 5.5, la segunda barra de 5.5 a 10.5, y así sucesivamente.

Número de empastes	Frecuencia
1–5	
6–10	
11–15	
16–20	
21–25	

REDACCIÓN

99. ¿Qué tipo de presentación (tabla, gráfica de barras, gráfica de líneas, gráfica circular, pictografía o histograma) es la más apropiada para mostrar cada tipo de información? Explique sus elecciones.

- El porcentaje de estudiantes en una universidad, clasificados por especialización.
- El porcentaje de carreras de biología en una universidad cada año desde 1970.
- El número de horas que pasó estudiando un grupo de estudiantes para los exámenes finales.
- Las poblaciones étnicas de las 10 ciudades más grandes.
- El salario anual promedio de los ejecutivos corporativos para las 10 industrias principales.

100. Explique por qué un histograma es un tipo especial de gráfica de barras.

REPASO

101. Escriba los números primos entre el 10 y el 30.

102. Escriba los primeros 10 números compuestos.

103. Escriba los números naturales pares menores que 6 que no son primos.

104. Escriba los números naturales impares menores que 20 que no son primos.

SECCIÓN 7.2

Media, mediana y moda

Objetivos

1. Encontrar la media (promedio) de un conjunto de valores.
2. Encontrar la media ponderada de un conjunto de valores.
3. Encontrar la mediana de un conjunto de valores.
4. Encontrar la moda de un conjunto de valores.
5. Usar la media, la mediana y la moda para describir un conjunto de valores.

Las gráficas no son la única manera de describir conjuntos de números en forma compacta. Otra manera de describir un conjunto de números es encontrar *un* valor alrededor del cual se agrupan los números en el conjunto. A tal valor se le llama **medida de una tendencia central.** En la Sección 1.9 se estudió la medida de la tendencia central más popular, la *media* o *promedio*. En esta sección se examinarán otras dos medidas de la tendencia central, llamadas *mediana* y *moda*.

1 Encontrar la media (promedio) de un conjunto de valores.

Recuerde que la *media* o *promedio* de un conjunto de valores da una indicación del "centro" del conjunto de valores. Para repasar este concepto, se considera el caso de una estudiante que ha tomado cinco exámenes este semestre en una clase de historia con calificaciones de 87, 73, 89, 92 y 84. Para encontrar qué tan bien lo está haciendo, calcula la media, o el promedio, de estas calificaciones, encontrando su suma y dividiéndola entre 5.

$$\text{Media} = \frac{87 + 73 + 89 + 92 + 84}{5} \quad \begin{array}{l}\leftarrow \text{La suma de las calificaciones de los exámenes}\\ \leftarrow \text{El número de calificaciones de los exámenes}\end{array}$$

$$= \frac{425}{5} \qquad \text{En el numerador realice la suma.}$$

$$= 85 \qquad \text{Realice la división.}$$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2}\\ 87\\ 73\\ 89\\ 92\\ +\ 84\\ \hline 425 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 85\\ 5\overline{)425}\\ -\ 40\\ \hline 25\\ -\ 25\\ \hline 0 \end{array}$$

La media es de 85. Algunas calificaciones eran mejores y algunas eran peores, pero el 85 es una buena indicación de su desempeño en la clase.

Consejo útil La media (promedio) es un valor sencillo que es "común" de un conjunto de valores. Puede ser, pero no necesariamente, uno de los valores en el conjunto. En el ejemplo anterior observe que la calificación media de la estudiante fue de 85; sin embargo, no sacó 85 en ninguno de los exámenes.

Encontrar la media (promedio aritmético)

La **media,** o **promedio,** de un conjunto de valores está dada por la fórmula:

$$\text{Media (promedio)} = \frac{\text{la suma de los valores}}{\text{el número de valores}}$$

El lenguaje de las matemáticas A la *media* (*promedio*) de un conjunto de valores se le llama de manera más formal **media aritmética**.

EJEMPLO 1 ***Ventas de tiendas*** En la tabla en la siguiente página se proporcionan las ventas de una semana en los departamentos de caballeros, damas y niños de Clothes Shoppe. Encuentre la media de las ventas diarias en el departamento de damas de Clothes Shoppe para la semana.

Estrategia Se sumará $3,135, $2,310, $3,206, $2,115, $1,570 y $2,100 y se dividirá la suma entre 6.

Auto-revisión 1

VENTAS DE TIENDAS Encuentre la media de las ventas diarias en el departamento de caballeros de Clothes Shoppe para la semana.

Ahora intente **Problemas 9 y 41**

iStockphoto.com/fotoIE

Ventas diarias totales por departamento —Clothes Shoppe			
Día	**Departamento de caballeros**	**Departamento de damas**	**Departamento de niños**
Lunes	$2,315	$3,135	$1,110
Martes	2,020	2,310	890
Miércoles	1,100	3,206	1,020
Jueves	2,000	2,115	880
Viernes	955	1,570	1,010
Sábado	850	2,100	1,000

POR QUÉ Para encontrar la media (promedio) de un conjunto de valores, se divide la suma de los valores entre el número de valores. En este caso, hay 6 días de ventas (lunes a sábado).

Solución

Hay 6 días de ventas, divida la suma entre 6.

$$\text{Media} = \frac{\$3{,}135 + \$2{,}310 + \$3{,}206 + \$2{,}115 + \$1{,}570 + 2{,}100}{6}$$

$$= \frac{\$14{,}436}{6} \qquad \text{En el numerador, realice la suma.}$$

$$= \$2{,}406 \qquad \text{Realice la división.}$$

$$\begin{array}{r} \overset{1}{3{,}135} \\ 2{,}310 \\ 3{,}206 \\ 2{,}115 \\ 1{,}570 \\ +\ 2{,}100 \\ \hline 14{,}436 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 2406 \\ \hline 6 & 14{,}436 \\ & -\ 12 \\ \hline & 24 \\ & -\ 24 \\ \hline & 036 \\ & -\ 0 \\ \hline & 36 \\ & -\ 36 \\ \hline & 0 \end{array}$$

La media de las ventas diarias de la semana en el departamento de damas es de $2,406.

Utilizando su CALCULADORA Encontrar la media

La mayoría de las calculadoras científicas realizan cálculos estadísticos y pueden encontrar con facilidad la media de un conjunto de números. Para utilizar una calculadora científica en modo estadístico para encontrar la media en el Ejemplo 1, trate esta secuencia de pulsaciones de teclas:

- Configure la calculadora en modo estadístico.
- Reinicie la calculadora para limpiar los *registros estadísticos*.
- Introduzca cada número, seguido por la tecla $\boxed{\Sigma+}$ en vez de por la tecla $\boxed{+}$. Es decir, introduzca el 3,135, presione $\boxed{\Sigma+}$, introduzca el 2,310, presione $\boxed{\Sigma+}$. y así sucesivamente.
- Cuando se haya introducido toda la información encuentre la media presionando la tecla $\boxed{\bar{x}}$. Puede necesitar presionar primero $\boxed{2^{nd}}$. La media es de 2,406.

Debido a que la secuencia de pulsaciones de teclas varía entre marcas de calculadoras, podría tener que comprobar el manual de usuario si estas instrucciones no funcionan.

Auto-revisión 2

TRANSPORTE Si un camionero manejó 3,360 millas en febrero, ¿cuántas millas manejó por día, en promedio? (Asuma que no es año bisiesto.)

Ahora intente **Problema 43**

EJEMPLO 2 ***Manejo*** En el mes de enero, un camionero manejó un total de 4,805 millas. En promedio, ¿cuántas millas manejó por día?

Estrategia Se dividirá el 4,805 entre 31 (el número de días en el mes de enero.)

Enero						
D	L	M	M	J	V	S
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

PORQUÉ No se tiene que encontrar la suma de las millas manejadas cada día en enero. Ese total está proporcionado en el problema como de 4,805 millas.

Solución

$$\text{Número promedio de millas manejadas por día} = \frac{\text{el total de millas manejadas}}{\text{el número de días}}$$

$$= \frac{4{,}805}{31}$$ ← Este se proporciona. ← Enero tiene 31 días.

$$= 155$$ Realice la división.

$$\begin{array}{r} 155 \\ 31\overline{)4{,}805} \\ -\,31 \\ \hline 170 \\ -\,155 \\ \hline 155 \\ -\,155 \\ \hline 0 \end{array}$$

En promedio, el camionero manejó 155 millas por día.

2 Encontrar la media ponderada de un conjunto de valores

Cuando un valor en un conjunto aparece más de una vez, ese valor tiene una mayor "influencia" sobre la media que cualquier otro valor que sólo aparezca en una ocasión. Para simplificar el proceso de encontrar una media, cualquier valor que aparezca más de una vez puede ser "ponderado" multiplicándolo por el número de veces que aparece. A una media que se encuentra de esta manera se le llama **media ponderada.**

EJEMPLO 3 *Reservaciones de hotel*

Un hotel registró de manera electrónica el número de veces que el teléfono de la mesa de reservaciones timbró antes de que contestara una recepcionista. Los resultados del estudio de una semana de duración se muestran en la tabla a la derecha. Encuentre el número promedio de veces que timbró el teléfono antes que la recepcionista contestara.

Número de timbres	Número de llamadas
1	11
2	46
3	45
4	28
5	20

Estrategia Primero se determinará el número total de veces que el teléfono de la mesa de reservaciones timbró durante la semana antes de que se contestara. Después se dividirá ese resultado entre el número de llamadas recibidas.

POR QUÉ Para encontrar el promedio de un conjunto de valores, se divide la suma de los valores entre el número de valores.

Solución

Para encontrar el número total de veces que el teléfono de la mesa de recepción timbró durante la semana antes de que se contestara, se multiplica cada número de timbres (1, 2, 3, 4 y 5) por el número de veces que aparece y se suman esos resultados para obtener 450. Los cálculos se muestran en azul en la columna "Número ponderado de timbres".

Número de timbres	Número de llamadas	Número ponderado de timbres
1	11	$1 \cdot 11 \rightarrow$ 11
2	46	$2 \cdot 46 \rightarrow$ 92
3	45	$3 \cdot 45 \rightarrow$ 135
4	28	$4 \cdot 28 \rightarrow$ 112
5	+ 20	$5 \cdot 20 \rightarrow$ + 100
Totales	**150**	**450**

Auto-revisión 3

RESULTADOS DE EXÁMENES

Abajo se muestran los resultados de una clase de un examen de español de cinco preguntas de verdadero o falso. Encuentre el número promedio de respuestas incorrectas en el examen.

Número total de respuestas incorrectas en el examen	Número de estudiantes
0	8
1	8
2	5
3	15
4	3
5	1

Ahora intente Problema 45

Para encontrar el número total de llamadas recibidas, se suman los valores en la columna "Número de llamadas" de la tabla y se obtiene 150, como se muestra en rojo. Para encontrar el promedio, se divide.

$$\text{Promedio} = \frac{450}{150} \quad \begin{matrix}\leftarrow \text{El número total de timbres} \\ \leftarrow \text{El número total de llamadas}\end{matrix}$$

$$= 3 \qquad \text{Realice la división.}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 150\overline{)450} \\ \underline{-450} \\ 0 \end{array}$$

El número promedio de veces que timbró el teléfono antes de que se contestara fue de 3.

Encontrar la media ponderada

Para encontrar la media ponderada de un conjunto de valores:

1. Multiplique cada valor por el número de veces que aparece.
2. Encuentre la suma de los productos del paso 1.
3. Divida la suma del paso 2 entre el número total de valores individuales.

Otro ejemplo de una media ponderada es el **promedio de calificaciones (PC).** Para encontrar el PC, se divide:

$$\text{PC} = \frac{\text{número total de puntos de calificaciones}}{\text{número total de horas crédito}}$$

El lenguaje de las matemáticas Algunas escuelas asignan un cierto número de **horas crédito (créditos)** a un curso mientras que otras asignan un cierto número de **unidades.** Por ejemplo, en el San Antonio College, el curso de Matemáticas básicas es de 3 horas crédito mientras que el mismo curso en Los Angeles City College es de 3 unidades.

Auto-revisión 4

ENCONTRAR PC Encuentre el promedio de calificaciones (PC) del semestre para un estudiante que recibió las siguientes calificaciones.

Curso	Calificación	Créditos
MATE 130	A	4
ING 101	D	3
FIS 080	B	4
NATA 100	C	1

Ahora intente **Problema 51**

EJEMPLO 4 ***Encontrar PC*** Encuentre el promedio de calificaciones (PC) del semestre para un estudiante que recibió las siguientes calificaciones. Redondee a la centésima más cercana.

Curso	Calificación	Créditos
Oratoria	C	2
Matemáticas básicas	A	4
Francés	B	4
Derecho comercial	D	3
Habilidades de estudio	A	1

Estrategia Primero, se determinará el número total de puntos de calificaciones obtenidos por el estudiante. Después se dividirá ese resultado entre el número total de créditos.

POR QUÉ Para encontrar la media de un conjunto de valores, se divide la suma de los valores entre el número de valores.

Solución

Los valores de los puntos de calificaciones que se utilizan en la mayoría de colegios y universidades son:

A: 4 pts **B**: 3 pts **C**: 2 pts **D**: 1 pt **F**: 0 pts

Para encontrar el número de puntos de calificación que obtuvo el estudiante, se multiplica el número de créditos para cada curso por el valor de puntos de la calificación obtenida. Después se suman esos resultados para encontrar que el número total de puntos de calificaciones es de 39. Los cálculos se muestran en azul en la columna "Puntos de calificaciones ponderados" en la siguiente página.

Para encontrar el número total de créditos, se suman los valores en esa columna (mostrado en rojo), para obtener 14.

Curso	Calificación	Créditos	Puntos de calificaciones ponderados
Oratoria	C	2	$2 \cdot 2 \rightarrow$ 4
Matemáticas básicas	A	4	$4 \cdot 4 \rightarrow$ 16
Francés	B	4	$3 \cdot 4 \rightarrow$ 12
Derecho comercial	D	3	$1 \cdot 3 \rightarrow$ 3
Habilidades de estudio	A	+ 1	$4 \cdot 1 \rightarrow$ + 4
Totales		**14**	**39**

Para encontrar el PC, se divide.

$$\text{PC} = \frac{39}{14} \quad \begin{array}{l}\leftarrow \text{El número total de puntos de calificaciones} \\ \leftarrow \text{El número total de créditos}\end{array}$$

$$\approx 2.785 \quad \text{Realice la división.}$$

$$= 2.79 \quad \text{Redondee el 2.785 a la centésima más cercana.}$$

El PC del semestre del estudiante es de 2.79.

$$\begin{array}{r} 2.785 \\ 14\overline{)39.000} \\ -\,28 \\ \hline 110 \\ -\,98 \\ \hline 120 \\ -\,112 \\ \hline 80 \\ -\,70 \\ \hline 10 \end{array}$$

3 Encontrar la mediana de un conjunto de valores

La media no siempre es la mejor medida de la tendencia central. Puede ser afectada por valores muy altos o muy bajos. Por ejemplo, suponga que las ganancias semanales de cuatro trabajadores en una compañía son \$280, \$300, \$380 y \$240 y el dueño se paga a sí mismo \$5,000 a la semana. En esa compañía, el salario medio por semana es

$$\text{Media} = \frac{\$280 + \$300 + \$380 + \$240 + \$5{,}000}{5} \quad \text{Hay 4 empleados más el dueño: } 4 + 1 = 5.$$

$$= \frac{\$6{,}200}{5} \quad \text{En el numerador, realice la suma.}$$

$$= \$1{,}240 \quad \text{Realice la división.}$$

El dueño pudiera decir, "Nuestros empleados ganan un promedio de \$1,240 por semana". De manera clara, la media no representa con justicia aquí el salario de un trabajador común.

Una medida mejor del salario común de la compañía es la *mediana:* el salario en el centro cuando todos ellos se ordenan por tamaño.

Menor \$240 \$280 **\$300** \$380 \$5,000 Mayor

Dos salarios — Dos salarios

El salario en el centro

El trabajador común gana \$300 por semana, mucho menos que el salario medio.

La mediana

La **mediana** de un conjunto de valores es el valor central. Para encontrar la mediana:

1. Ordene los valores en orden creciente.
2. Si hay un número impar de valores, la mediana es el valor central.
3. Si hay un número par de valores, la mediana es la media (promedio) de los dos valores centrales.

Auto-revisión 5

Encuentre la mediana del siguiente conjunto de valores:

$1\frac{7}{8}$ $2\frac{1}{2}$ $3\frac{3}{5}$ $\frac{1}{2}$ $2\frac{3}{4}$

Ahora intente **Problemas 17 y 21**

EJEMPLO 5 Encuentre la mediana del siguiente conjunto de valores:

7.5 20.9 9.9 4.4 9.8 5.3 6.2 7.5 4.9

Estrategia Se ordenarán los nueve valores en orden creciente.

POR QUÉ Es más sencillo encontrar el valor central cuando se escriben de esa manera.

Solución

Dado que hay un número impar de valores, la mediana es el valor central.

Más pequeño 4.4 4.9 5.3 6.2 **7.5** 7.5 9.8 9.9 20.9 Más grande

Cuatro valores — El valor central — Cuatro valores

La mediana es el 7.5

Si hay un número par de valores en un conjunto, no hay un valor central. En ese caso, la mediana es la media (promedio) de los dos valores más cercanos al centro.

Auto-revisión 6

DISTRIBUCIONES DE CALIFICACIONES En un examen de matemáticas hubo cuatro calificaciones de 68, cinco calificaciones de 83 y calificaciones de 72, 78 y 90. Encuentre la calificación mediana.

Ahora intente **Problemas 25 y 29**

EJEMPLO 6 ***Distribuciones de calificaciones*** En un examen hubo tres calificaciones de 59, cuatro calificaciones de 77 y calificaciones de 43, 47, 53, 60, 68, 82 y 97. Encuentre la calificación mediana.

Estrategia Se ordenarán las catorce calificaciones del examen en orden creciente.

POR QUÉ Es más sencillo encontrar las dos calificaciones centrales cuando se escriben de esta manera.

Solución

Dado que hay un número par de calificaciones del examen, se necesita identificar las dos calificaciones centrales.

Más pequeño 43 47 53 59 59 59 **60 68** 77 77 77 77 82 97 Más grande

Seis calificaciones — Calificaciones centrales — Seis calificaciones

Dado que hay un número par de calificaciones, la mediana es el promedio (media) de las dos calificaciones más cercanas al centro: el 60 y el 68.

$$\text{Mediana} = \frac{60 + 68}{2} = \frac{128}{2} = 64$$

La mediana es el 64.

Consejo útil La mediana es un valor sencillo que es "común" de un conjunto de valores. Puede ser, pero no necesariamente, uno de los valores en el conjunto. En el Ejemplo 5, la mediana, 7.5 era uno de los valores proporcionados. En el Ejemplo 6, la calificación mediana del examen no estaba en el conjunto proporcionado de calificaciones del examen.

4 Encontrar la moda de un conjunto de valores

La media y la mediana no siempre son la mejor medida de la tendencia central. Por ejemplo, suponga que una ferretería exhibe 20 termómetros para exteriores. Diez de ellos leen 80°, y los otros 10 tienen diferentes lecturas.

Para elegir un termómetro preciso, ¿debe elegir uno con una lectura que sea lo más cercana a la *media* de los 20 o a su *mediana?* Ninguno. En su lugar, se debe elegir

uno de los 10 que tienen la misma lectura, pensando que cualquiera de esos que concuerdan probablemente serán correctos.

Al elegir esa temperatura que aparece con mayor frecuencia, se ha elegido la *moda* de los 20 valores.

La moda

La **moda** de un conjunto de valores es el valor sencillo que aparece con mayor frecuencia. A la moda de varios valores también se le llama **valor modal.**

EJEMPLO 7 Encuentre la moda de estos valores:

3 6 5 7 3 7 2 4 3 5 3 7 8 7 3 7 6 3 4

Estrategia Se determinará cuántas veces aparece cada uno de los valores, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8.

POR QUÉ Se necesita conocer cuáles valores ocurren con mayor frecuencia.

Solución

No es necesario listar los valores en orden creciente. En su lugar se puede formar una tabla y utilizar **marcas de conteo** para llevar la cuenta del número de veces que aparecen los valores 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8.

2	3	4	5	6	7	8	← Estos valores aparecen en la lista.
/	𝍸 /	//	//	//	𝍸	/	← Marcas de conteo

Debido a que el 3 aparece más veces que cualquier otro valor, es la moda.

El lenguaje de las matemáticas En el Ejemplo 7, el conjunto de valores proporcionado tiene una moda. Si un conjunto de valores tiene dos modas (exactamente dos valores que aparecen un número igual de veces y con mayor frecuencia que cualquier otro valor), se dice que es **bimodal.** Si ningún valor en un conjunto aparece con mayor frecuencia que otro, entonces *no hay una moda.*

Auto-revisión 7

Encuentre la moda de estos valores:

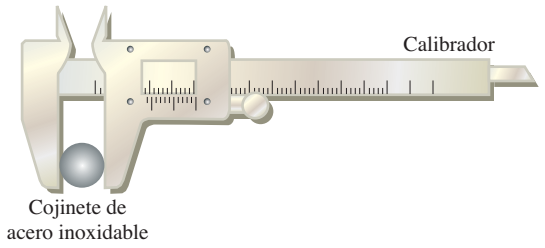
2 3 4 6 2 4
3 4 3 4 2 5

Ahora intente **Problemas 33 y 37**

5 Usar la media, la mediana y la moda para describir un conjunto de valores

EJEMPLO 8 ***Herramientas de maquinista*** Los diámetros (distancias transversales) de ocho cojinetes de acero inoxidable se encontraron utilizando el calibrador de abajo. Encuentre **a.** la media, **b.** la mediana y **c.** la moda del conjunto de mediciones listado.

3.43 cm 3.25 cm 3.48 cm 3.39 cm 3.54 cm 3.48 cm 3.23 cm 3.24 cm



Estrategia Se determinará la suma de las mediciones, el número de mediciones, la(s) medición(es) central(es) y la medición que aparece con mayor frecuencia.

POR QUÉ Se necesita conocer esa información para obtener la media, la mediana y la moda.

Auto-revisión 8

TELÉFONOS CELULARES

Los pesos de ocho marcas diferentes de teléfonos celulares son: 4.37 oz, 5.98 oz, 4.36 oz, 4.95 oz, 5.05 oz, 5.95 oz, 4.95 oz y 5.27 oz. Encuentre el peso medio, mediano y moda.

Ahora intente **Problema 47**

Solución

a. Para encontrar la media, se suman las mediciones y se divide entre el número de valores, el cual es 8.

$$\text{Media} = \frac{3.43 + 3.25 + 3.48 + 3.39 + 3.54 + 3.48 + 3.23 + 3.24}{8}$$

$$= \frac{27.04}{8} \quad \text{En el numerador, realice la suma.}$$

$$= 3.38 \quad \text{Realice la división.}$$

La media es 3.38 cm.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 3\ 4} \\ 3.43 \\ 3.25 \\ 3.48 \\ 3.39 \\ 3.54 \\ 3.48 \\ 3.23 \\ +\ 3.24 \\ \hline 27.04 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3.38 \\ 8\overline{)27.04} \\ -\ 24 \\ \hline 3\ 0 \\ -\ 2\ 4 \\ \hline 64 \\ -\ 64 \\ \hline 0 \end{array}$$

b. Para encontrar la mediana, primero se ordenan las ocho mediciones en orden creciente.

Más pequeño 3.23 3.24 3.25 **3.39 3.43** 3.48 3.48 3.54 Más grande

↑ Dos mediciones centrales

Debido a que hay un número par de mediciones, la mediana es el promedio de los dos valores centrales.

$$\text{Mediana} = \frac{3.39 + 3.43}{2} = \frac{6.82}{2} = 3.41 \text{ cm}$$

c. Dado que la medición de 3.48 cm aparece con mayor frecuencia (dos veces), es la moda.

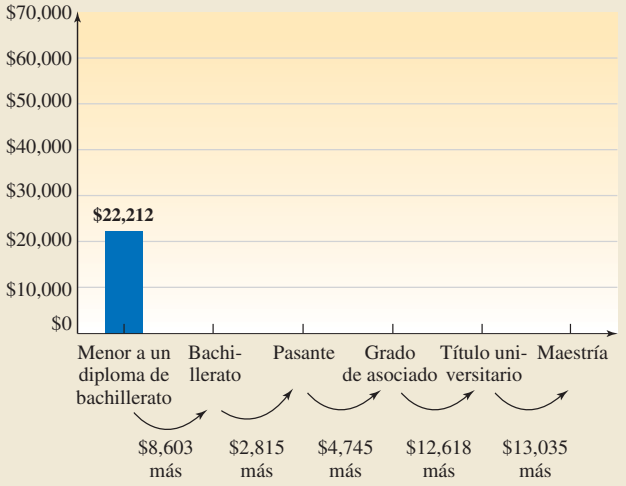
PIENSE DETENIDAMENTE *El valor de una educación*

"La educación adicional hace que los trabajadores sean más productivos y les permite incrementar sus ingresos".

Virginia Governor, Mark R. Warner, 2004

A medida que los costos universitarios aumentan, algunas personas se preguntan si vale la pena pasar años trabajando hacia un título cuando pudieran pasar el mismo tiempo ganando dinero. La siguiente información de los ingresos medianos clarifica que, con el tiempo, la educación adicional vale bien la inversión. Use los datos dados para completar la gráfica de barras.

Ingresos anuales medianos de los trabajadores de tiempo completo (25 años o mayores) por educación



Fuente: Bureau of Labor Statistics, Current Population Survey (2008)

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. $1,540 **2.** 120 millas por día **3.** 2 respuestas incorrectas **4.** 2.75 **5.** $2\frac{1}{2}$ **6.** 80.5 **7.** 4 **8.** media: 5.11 oz; mediana: 5.00 oz; moda: 4.95 oz

SECCIÓN 7.2 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Complete los espacios.

1. La _____ (promedio) de un conjunto de valores es la suma de los valores dividida entre el número de valores en el conjunto.

2. La _____ de un conjunto de valores escritos en orden creciente es el valor central.

3. La _____ de un conjunto de valores es el valor sencillo que ocurre con mayor frecuencia.

4. La media, la mediana y la moda son tres mediciones de la tendencia _____.

CONCEPTOS

5. Complete el espacio. La media de un conjunto de valores está dada por la fórmula

$$\text{Media} = \frac{\text{la suma de los valores}}{\square}$$

6. Considere el siguiente conjunto de valores escrito en orden creciente:

3 6 8 10 11 15 16

a. ¿Hay un número par o impar de valores?

b. ¿Cuál es el número central de la lista?

c. ¿Cuál es la mediana del conjunto de valores?

7. Considere el siguiente conjunto de valores escrito en orden creciente:

4 5 5 6 8 9 9 15

a. ¿Hay un número par o impar de valores?

b. ¿Cuáles son los números centrales de la lista?

c. Complete los espacios:

$$\text{Mediana} = \frac{\square + \square}{2} = \frac{\square}{2} = \square$$

8. Considere el siguiente conjunto de valores:

1 6 8 6 10 9 10 2 6

a. ¿Qué valor aparece con mayor frecuencia? ¿Cuántas veces aparece?

b. ¿Cuál es la moda del conjunto de valores?

PRÁCTICA GUIADA

Encuentre la media de cada conjunto de valores. Vea el Ejemplo 1.

9. 3 4 7 7 8 11 16

10. 13 15 17 17 15 13

11. 5 9 12 35 37 45 60 77

12. 0 0 3 4 7 9 12

13. 15 7 12 19 27 17 19 35 20

14. 45 67 42 35 86 52 91 102

15. 4.2 3.6 7.1 5.9 8.2

16. 19.1 12.8 16.5 20.0

Encuentre la mediana de cada conjunto de valores. Vea el Ejemplo 5.

17. 29 5 1 9 11 17 2

18. 20 4 3 2 9 8 1

19. 7 5 4 7 3 6 7 4 1

20. 0 0 3 4 0 0 3 4 5

21. 15.1 44.9 19.7 13.6 17.2

22. 22.4 22.1 50.5 22.3 22.2

23. $\frac{1}{100}$ $\frac{999}{1{,}000}$ $\frac{16}{15}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{5}{8}$

24. $\frac{1}{30}$ $\frac{17}{30}$ $\frac{7}{30}$ $\frac{29}{30}$ $\frac{11}{30}$

Encuentre la mediana de cada conjunto de valores. Vea el Ejemplo 6.

25. 8 10 16 63 6 7

26. 7 2 11 5 4 17

27. 39 1 50 41 51 47

28. 47 18 35 29 27 16

29. 1.8 1.7 2.0 9.0 2.1 2.3 2.1 2.0

30. 5.0 1.3 5.0 2.3 4.3 5.6 3.2 4.5

31. $\frac{1}{5}$ $\frac{11}{5}$ $\frac{13}{5}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{7}{5}$

32. $\frac{1}{9}$ $\frac{2}{9}$ $\frac{7}{9}$ $\frac{11}{9}$ $\frac{13}{9}$ $\frac{29}{9}$

Encuentre la moda (si la hay) de cada conjunto de valores. **Vea el Ejemplo 7.**

33. 3 5 7 3 5 4 6 7 2 3 1 4

34. 12 12 17 17 12 13 17 12

35. −6 −7 −6 −4 −3 −6 −7

36. 0 3 0 2 7 0 6 0 3 4 2 0

37. 23.1 22.7 23.5 22.7 34.2 22.7

38. 21.6 19.3 1.3 19.3 1.6 9.3 2.6

39. $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ 2 $\frac{1}{2}$ 2 $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{2}$ 5 $\frac{1}{3}$

40. 5 9 12 35 37 45 60

APLICACIONES

41. CALIFICACIONES DEL SEMESTRE La calificación en álgebra de Frank se basa en el promedio de los cuatro exámenes, los cuales se cuentan de manera equitativa. Sus calificaciones son 75, 80, 90 y 85.

a. Encuentre su calificación de examen promedio.

b. Si el profesor de Frank decidió contar el cuarto examen como doble, ¿cuál sería el promedio de Frank?

42. HURACANES La tabla lista el número de huracanes principales que tocaron tierra en Estados Unidos por década. Encuentre el número promedio por década. Redondee a la unidad más cercana.

Década	Número	Década	Número
1901–1910	4	1951–1960	8
1911–1920	7	1961–1970	6
1921–1930	5	1971–1980	4
1931–1940	8	1981–1990	5
1941–1950	10	1991–2000	5

Fuente: National Hurricane Center

43. MILLAJE DE UNA FLOTILLA La fuerza de ventas de una compañía de seguros utiliza 37 automóviles. En junio pasado, estos automóviles recorrieron un total de 98,790 millas.

a. En promedio, ¿cuántas millas recorrió cada automóvil ese mes?

b. Encuentre el número promedio de millas recorridas a diario por cada automóvil.

44. PRESUPUESTOS La familia Hinrichs gastó $519 en abarrotes en abril pasado.

a. En promedio, ¿cuánto gastaron en abarrotes cada día?

b. La familia Hinrichs tiene cinco miembros. ¿Cuál fue el gasto promedio para abarrotes para un miembro de la familia por un día?

45. PREMIOS EN EFECTIVO Un concurso va a ser parte de un inicio promocional para un nuevo cereal para niños. Se muestran los premios a otorgarse.

a. ¿Cuánto dinero se premiará en la promoción?

b. ¿Cuántos premios en efectivo se entregarán?

c. ¿Cuál es el premio en efectivo promedio?

Concurso de colorear

Gran premio: Vacaciones en Disney World más $2,500
Cuatro primeros lugares de $500
Treinta y cinco premios de 2o lugar de $150
Ochenta y cinco premios de 3er lugar de $25

46. ENCUESTAS A algunos estudiantes se les pidió que calificaran la comida de la cafetería de la universidad en una escala del 1 al 5. Las respuestas se muestran en la hoja de marcas de conteo. Encuentre la calificación promedio.

Pobre		Buena		Excelente
1	2	3	4	5
	𝍸	𝍸	𝍸	𝍸 𝍸

47. BARRAS DE CARAMELO Los precios (en centavos) de los diferentes tipos de barras de caramelo que se venden en una farmacia son: 50, 60, 50, 50, 70, 75, 50, 45, 50, 50, 60, 75, 60, 75, 100, 50, 80, 75, 100, 75.

a. Encuentre el precio medio de una barra de caramelo.

b. Encuentre el precio mediano de una barra de caramelo.

c. Encuentre la moda de los precios de las barras de caramelo.

48. SUMINISTROS DE CÓMPUTO Varias tiendas de cómputo reportaron precios diferentes para un cartucho de tóner para una impresora láser (en dólares): 51, 55, 73, 75, 72, 70, 53, 59, 75.

a. Encuentre el precio medio para un cartucho de tóner.

b. Encuentre el precio mediano para un cartucho de tóner.

c. Encuentre la moda de los precios para un cartucho de tóner.

49. CAMBIOS DE TEMPERATURA Las temperaturas se registraron a intervalos de una hora y se listaron en la tabla de abajo. Encuentre la temperatura promedio del periodo de la medianoche a las 11:00 A.M.

Hora	Temperatura	Hora	Temperatura
12:00 A.M.	53	12:00 mediodía	71
1:00	54	1:00 P.M.	73
2:00	57	2:00	76
3:00	58	3:00	77
4:00	59	4:00	78
5:00	59	5:00	71
6:00	61	6:00	70
7:00	62	7:00	64
8:00	64	8:00	61
9:00	66	9:00	59
10:00	68	10:00	53
11:00	71	11:00	51

50. TEMPERATURAS PROMEDIO Encuentre la temperatura promedio para el periodo de 24 horas mostrado en la tabla en el Ejercicio 49.

Para los ejercicios 51-54, encuentre el promedio de calificaciones para un estudiante que recibió las siguientes calificaciones. Redondee a la centésima más cercana cuando sea necesario.

51.

Curso	Calificación	Créditos
MATEMÁTICAS 210	C	5
CONTABILIDAD 175	A	3
SALUD 090	B	1
JAPONÉS 010	D	4

52.

Curso	Calificación	Créditos
ENFERMERÍA 101	D	3
LECTURA 150	B	4
PINTURA 175	A	2
ESTUDIOS LATINOS 090	C	3

53.

Curso	Calificación	Créditos
FOTOGRAFÍA	D	3
MATEMÁTICAS 020	B	4
CERÁMICA 175	A	1
ELECTRÓNICA 090	C	3
ESPAÑOL 130	B	5

54.

Curso	Calificación	Créditos
ANTROPOLOGÍA 050	D	3
ESTADÍSTICA 100	A	4
ASTRONOMÍA 100	C	1
SILVICULTURA 130	B	5
CORO 130	C	1

55. PROMEDIOS DE EXÁMENES Roberto recibió la misma calificación en cada uno de cinco exámenes y su calificación media es de 85. Encuentre la calificación mediana y la moda de sus calificaciones.

56. CALIFICACIONES DE EXÁMENES Las calificaciones en el primer examen de los estudiantes en una clase de historia fueron de 57, 59, 61, 63, 63, 63, 87, 89, 95, 99 y 100. Kia obtuvo una calificación de 70 y asevera que "70 es mejor que el promedio". ¿En cuáles de las tres medidas de la tendencia central es mejor ella: la media, la mediana o la moda?

57. COMPARACIÓN DE CALIFICACIONES Un estudiante recibió calificaciones de 37, 53 y 78 en tres exámenes. Su hermana recibió calificaciones de 53, 57 y 58. ¿Quién tuvo el mejor promedio? ¿Las calificaciones de quién fueron más consistentes?

58. ¿Cuál es el promedio de todos los enteros incluidos del -100 al 100?

59. OCTILLIZOS En diciembre de 1998, Nkem Chukwu dio a luz a ocho bebés en el Hospital pediátrico de Texas. Encuentre la media y la mediana de sus pesos al nacer listados abajo.

Ebuka (niña)	24 oz	Odera (niña)	11.2 oz
Chidi (niña)	27 oz	Ikem (niño)	17.5 oz
Echerem (niña)	28 oz	Jioke (niño)	28.5 oz
Chima (niña)	26 oz	Gorom (niña)	18 oz

60. COMPARACIÓN AL COMPRAR Un estudio de tiendas de abarrotes encontró que el precio de una caja de 15 onzas del cereal Cheerios oscilaba entre \$3.89 y \$4.39, como se muestra abajo. ¿Cuáles son la media, la mediana y la moda de los precios listados?

\$4.29 \$3.89 \$4.29 \$4.09 \$4.24 \$3.99
\$3.98 \$4.19 \$4.19 \$4.39 \$3.97 \$4.29

61. TERREMOTOS Abajo se listan las magnitudes de los terremotos principales del 2008. Encuentre la media (redondeada a la décima más cercana) y la mediana.

Fecha	Localización	Magnitud
Ene. 5	Región de las islas Reina Charlotte	6.6
Ene. 10	Frente a la costa de Oregón	6.4
Feb. 20	Simeulue, Indonesia	7.4
Feb. 24	Nevada	6.0
Feb. 25	Región de Kepulauan Mentawai	7.0
Mzo. 21	Región de la frontera Xinjiang-Xizang	7.2
Abr. 9	Islas de la Lealtad	7.3
May. 12	China	7.9
Jun. 13	Honshu oriental, Japón	6.9
Jul. 19	Honshu, Japón	7.0
Oct. 6	Kyrgyzstan	6.6
Oct. 11	Rusia	6.3
Oct. 29	Pakistán	6.4
Nov. 16	Indonesia	7.3
Dic. 20	Japón	6.3

Fuente: Incorporated Research Institutions for Seismology

62. EFICIENCIA DEL COMBUSTIBLE En la tabla abajo se muestran los 10 automóviles con mayor eficiencia de combustible en el 2009, con base en el estimado de millas por galón (mpg) promedio para ciudad y carretera del fabricante.

a. Encuentre la media, la mediana y la moda del millaje para ciudad.

b. Encuentre la media, la mediana y la moda del millaje para carretera.

Modelo	mpg ciudad/carretera
Toyota Prius	50/49
Honda Civic Híbrido	40/45
Honda Insight	40/43
Ford Fusion Híbrido	41/36
Mercury Milan Híbrido	41/36
VW Jetta TDI	30/41
Nissan Altima Híbrido	35/33
Toyota Camry Híbrido	33/34
Toyota Yaris	29/36
Toyota Corolla	26/35

Fuente: edmonds.com

63. PESCA DEPORTIVA El reporte mostrado abajo lista las condiciones de pesca en el Lago Pirámide para un sábado en enero. Encuentre la mediana y la moda de los pesos de los róbalos capturados en el lago.

> **Lago Pirámide**—Algunos róbalos están mordiendo pero en el lado pequeño. Plantillas llamativas y gusanos de plástico. El agua está fría: 38°. Pesos de los peces capturados (lb): 6, 9, 4, 7, 4, 3, 3, 5, 6, 9, 4, 5, 8, 13, 4, 5, 4, 6, 9

64. NUTRICIÓN Refiérase a la tabla de abajo.

a. Encuentre el número medio de calorías en una porción de las carnes mostradas.

b. Encuentre la mediana.

c. Encuentre la moda.

COMPARACIONES NUTRIMENTALES
Por porción de 3.5 oz de carne cocida

Especie	Calorías
Bisonte	143
Res (de primera calidad)	283
Res (selecta)	201
Puerco	212
Gallina (sin piel)	190
Salmón rojo	216

Fuente: The National Bison Association

REDACCIÓN

65. Explique cómo encontrar la media, la mediana y la moda de un conjunto de valores.

66. La media, la mediana y la moda se utilizan para medir la tendencia central de un conjunto de valores. ¿A qué se refiere con tendencia central?

67. ¿Cuál medida de la tendencia central, la media, la mediana o la moda, piensa que es la mejor para describir los salarios en una compañía grande? Explique su razonamiento.

68. ¿Cuándo es la moda una mejor medida de la tendencia central que la media o la mediana? Dé un ejemplo y explique por qué.

REPASO

Traduzca a una ecuación de porcentaje (o proporción de porcentaje) y después resuelva para encontrar el número desconocido.

69. ¿52 es qué porcentaje de 80?

70. ¿Qué porcentaje de 50 es 56?

71. ¿$66\frac{2}{3}$% de qué número es 28?

72. ¿56.2 es $16\frac{1}{3}$% de qué número?

73. ¿5 es qué porcentaje de 8?

74. ¿Qué número es 52% de 350?

75. Encuentre $7\frac{1}{4}$% de 600.

76. ¿$\frac{1}{2}$% de que número es 5,000?

LISTA DE VERIFICACIÓN DE LAS HABILIDADES DE ESTUDIO

Conocer las definiciones

Antes de tomar el examen en el Capítulo 7, asegúrese de que ha memorizado las definiciones de la *media*, la *mediana* y la *moda*. Coloque una marca de verificación en el recuadro si puede responder "sí" al enunciado.

☐ Sé que a la *media* de un conjunto de valores se le refiere con frecuencia como el *promedio*.

☐ Sé que la *media* de un conjunto de valores está dada por la fórmula:

$$\text{Media} = \frac{\text{suma de los valores}}{\text{número de valores}}$$

☐ Sé que la *mediana* de un conjunto de valores es el valor central cuando están ordenados en orden creciente.

☐ Sé cómo encontrar la *mediana* de un conjunto de valores si hay un número impar de valores.

2 4 5 8 10 13 14 7 valores

↑

Mediana = valor central

☐ Sé cómo encontrar la *mediana* de un conjunto de valores si hay un número par de valores.

2 4 5 8 10 13 14 16 8 Valores

Mediana $= \frac{8 + 10}{2} = 9$

☐ Sé que la *moda* de un conjunto de valores es el valor que aparece con mayor frecuencia.

☐ Sé que un conjunto de valores puede tener una *moda* o más de una *moda*.

2 8 5 8 10 8 14 moda: 8

2 8 5 8 2 8 2 dos modas: 2, 8

CAPÍTULO 7 RESUMEN Y REPASO

SECCIÓN 7.1 Lectura de gráficas y tablas

DEFINICIONES Y CONCEPTOS

Para leer una **tabla** y localizar un dato específico se encuentra la *intersección* del renglón y la columna correctos que contiene la información deseada.

EJEMPLOS

ESCALAS SALARIALES Encuentre el salario anual para una profesora con una maestría más 15 unidades adicionales de estudio que está comenzando su 4o año de enseñanza.

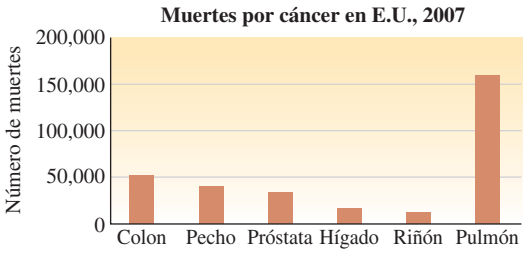
Escala salarial de profesores

Etapa	BA	BA+15	BA+30	BA+45	MA	MA+15	MA+30
1	37,295	38,362	39,416	40,480	41,556	42,612	43,669
2	38,504	39,581	40,652	41,728	42,812	43,879	44,952
3	39,716	40,802	41,885	42,973	44,066	45,147	46,234
4	40,926	42,021	43,120	44,220	45,321	46,417	47,514
5	42,135	43,240	44,356	45,465	46,577	47,682	48,795
6	44,458	45,567	46,683	47,782	48,897	50,010	51,113
7	46,780	47,891	49,003	50,115	51,226	52,330	53,438

El salario anual es de $46.417. Puede encontrarse buscando en el cuarto renglón (etiquetado Etapa 4) en la 6a columna (etiquetada MA + 15).

Una **gráfica de barras** presenta la información utilizando barras verticales y horizontales. El **eje horizontal** y el eje vertical sirven para estructurar la gráfica y se escalan en unidades como años, dólares, minutos, libras y porcentajes.

MUERTES POR CÁNCER Refiérase a la gráfica de barras de abajo. ¿Cuántas más muertes fueron ocasionadas por cáncer de pulmón que por el cáncer de colon en Estados Unidos en el 2007?



Fuente: Lung Cancer Alliance

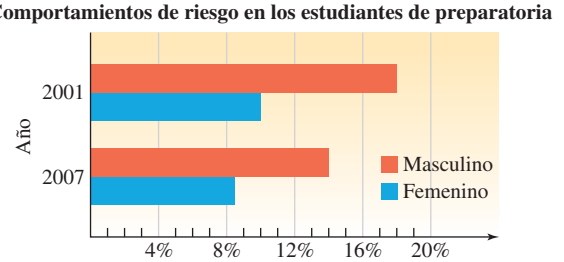
A partir de la gráfica se observa que hubo alrededor de 160,000 muertes ocasionadas por el cáncer de pulmón y alrededor de 50,000 muertes por el cáncer de colon. Para encontrar la diferencia, se resta:

$$160{,}000 - 50{,}000 = 110{,}000$$

Hubo alrededor de 110,000 más muertes ocasionadas por el cáncer de pulmón que muertes ocasionadas por el cáncer de colon en Estados Unidos en el 2007.

Para comparar conjuntos de información relacionados, pueden mostrarse grupos de dos (o tres) barras. Para una **gráfica de barras dobles** o **de barras triples,** se utiliza una clave para explicar el significado de cada tipo de barra en un grupo.

CINTURONES DE SEGURIDAD Refiérase a la gráficas de barras dobles de abajo. ¿Cómo cambió del 2001 al 2007 el porcentaje de estudiantes de preparatoria masculinos que rara vez o nunca utilizaban cinturones de seguridad?



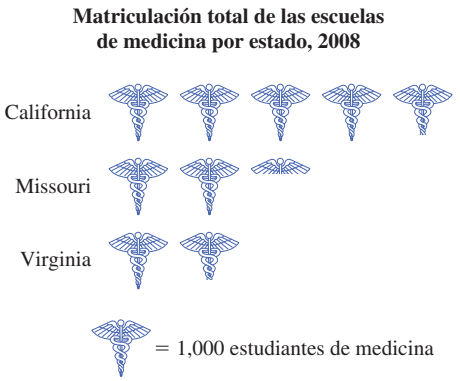
Porcentaje que rara vez o nunca utilizaban cinturones de seguridad

Fuente: *The World Almanac,* 2003, 2009

A partir de la gráfica se observa que en el 2001 alrededor de 18% de los estudiantes de preparatoria masculinos rara vez o nunca utilizaban cinturones de seguridad. Para el 2007, el porcentaje era de alrededor de 14%, una disminución de 18% − 14%, o de 4%.

Una **pictografía** es parecida a una gráfica de barras, pero las barras están conformadas por imágenes o símbolos. Una **clave** indica el significado (o valor) de cada símbolo.

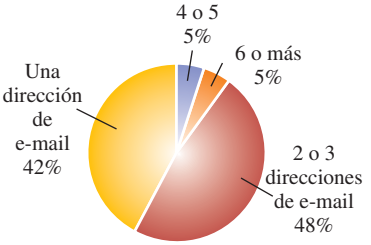
ESCUELAS DE MEDICINA Refiérase a la pictografía de abajo. En el 2008, ¿cuántos estudiantes estaban matriculados en las escuelas de medicina de California?



El renglón de California contiene 4 símbolos completos y casi la totalidad de otro. Esto significa que habían $4 \cdot 1{,}000$ o 4,000 estudiantes médicos, más aproximadamente 900 más. En el 2008, alrededor de 4,900 estudiantes estaban matriculados en las escuelas de medicina de California.

En una **gráfica circular,** las regiones llamadas sectores (son parecidas a rebanadas de pastel) se utilizan para mostrar qué parte del todo representa cada cantidad.

COMPROBACIÓN DE E-MAIL La gráfica circular a la derecha muestra los resultados de una encuesta de adultos a los que se les preguntó cuántas direcciones personales de e-mail comprobaban con regularidad. ¿Qué porcentaje de los adultos encuestados comprobaban 4 o más direcciones de e-mail de manera regular?



Fuente: Ipsos for Habeas

Se suman el porcentaje de las respuestas para 4 o 5 direcciones de e-mail y el porcentaje de las respuestas para 6 o más direcciones del e-mail:

$$5\% + 5\% = 10\%$$

Por tanto, 10% de los adultos encuestados comprobaban 4 o más direcciones de e-mail de manera regular.

Use los resultados de la encuesta para predecir el número de adultos en un grupo de 5,000 que sólo comprobaría una dirección de e-mail de manera regular.

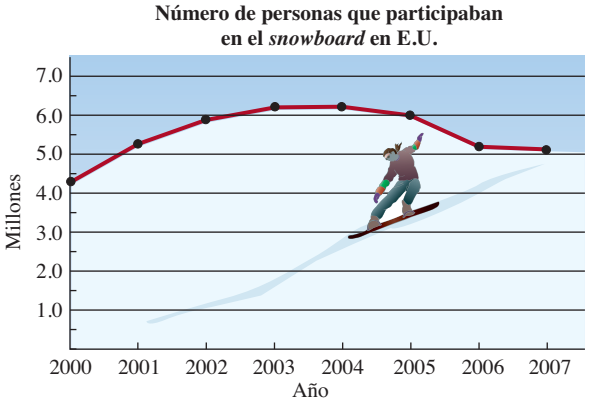
En la encuesta, 42% dicen que sólo comprueban una dirección de e-mail. Se necesita encontrar:

¿Qué número	es	42%	de	5,000?	
x	$=$	42%	$\cdot$	5,000	Traduzca.
	$x = 0.42 \cdot 5{,}000$				Escriba el 42% como un decimal.
	$x = 2{,}100$				Realice la multiplicación.

De acuerdo con la encuesta, alrededor de 2,100 de los 5,000 adultos sólo comprobarían una dirección de e-mail de manera regular.

Una **gráfica de líneas** se utiliza para mostrar cómo cambian las cantidades con el tiempo. A partir de tal gráfica, se puede determinar cuándo una cantidad está incrementándose y cuándo está disminuyéndose.

SNOWBOARD La gráfica de líneas abajo muestra el número de personas que participaban en el *snowboard* en Estados Unidos para los años 2000–2007.



Fuente: National Ski & Snowboard Retailers Association

¿Cuándo tuvo su pico la popularidad del *snowboard*?

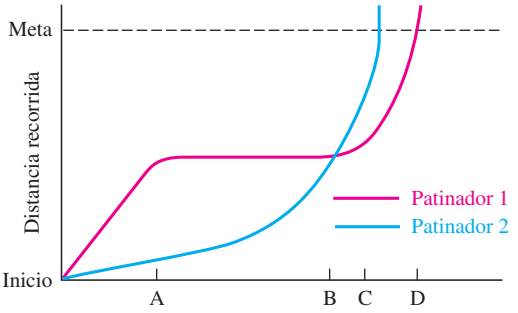
Los años con la mayor participación fueron el 2003 y el 2004.

¿Entre cuáles dos años hubo la mayor disminución en el número de participantes de *snowboard*?

El segmento de línea con el mayor "descenso" a medida que se lee de izquierda a derecha es el segmento que conecta los puntos de información para los años 2005 y 2006. Por tanto, la mayor disminución en el número de participantes de *snowboard* ocurrió entre el 2005 y el 2006.

Dos cantidades que están cambiando con el tiempo pueden compararse **trazando ambas líneas en la misma gráfica.**

PATINETAS Refiérase a la gráfica de líneas de abajo que muestra los resultados de una carrera de patinetas.



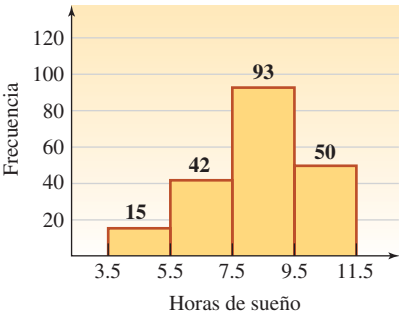
Observaciones:

- Dado que la gráfica roja está muy por encima de la gráfica azul en el tiempo A, el patinador 1 estaba muy por delante del patinador 2 en esa etapa de la carrera.
- Dado que la gráfica roja es horizontal del tiempo A al tiempo B, el patinador 1 se había detenido.
- Dado que la gráfica azul atraviesa la gráfica roja en el tiempo B, en ese instante, los patinadores estaban empatados a la cabeza.
- Dado que la gráfica azul atraviesa primero la línea de meta punteada en el tiempo C, el cual es antes que el tiempo D, el patinador 2 ganó la carrera.

Un **histograma** es una gráfica de barras con estas características:

1. Las barras de un histograma se tocan.
2. Los valores de la información nunca caen en el borde de una barra.
3. Los anchos de las barras son iguales y representan un intervalo de valores.

SUEÑO Se encuestó un grupo de padres de estudiantes de secundaria y se les pidió que estimaran el número de horas que sus hijos dormían cada noche. Los resultados se muestran en el histograma a la derecha. ¿Cuántos niños durmieron de 6 a 9 horas por noche?



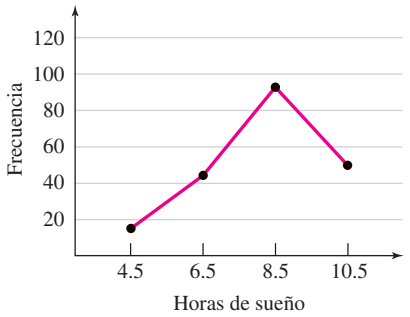
La barra con los bordes 5.5 y 7.5 corresponde al intervalo de 6 a 7 horas. La altura de la barra indica que 42 niños dormían de 6 a 7 horas. La barra con los bordes 7.5 y 9.5 corresponde al intervalo de 8 a 9 horas. La altura de la barra indica que 93 niños dormían de 8 a 9 horas. El número total de niños que duermen de 6 a 9 horas se encuentra utilizando una suma:

$$42 + 93 = 135$$

135 de los niños de secundaria dormían de 6 a 9 horas por noche.

Un **polígono de frecuencias** es una gráfica de líneas especial formada a partir de un histograma uniendo los puntos centrales en la parte superior de cada barra. En el eje horizontal se escribe la coordenada del valor central de cada **intervalo de clase.** Después se borran las barras.

Polígono de frecuencias



EJERCICIOS DE REPASO

Refiérase a la tabla abajo para responder las siguientes preguntas.

1. SENSACIÓN TÉRMICA
   - **a.** Encuentre la sensación térmica en un día de 10 °F cuando está soplando un viento de 15 mph.
   - **b.** Encuentre la sensación térmica en un día de –15 °F cuando está soplando un viento de 30 mph.
2. VELOCIDADES DEL VIENTO
   - **a.** La sensación térmica es de –25 °F, y la temperatura real en el exterior es de 15 °F. ¿Qué tan rápido está soplando el viento?
   - **b.** La sensación térmica es de –38 °F, y la temperatura real en el exterior es de –5 °F. ¿Qué tan rápido está soplando el viento?

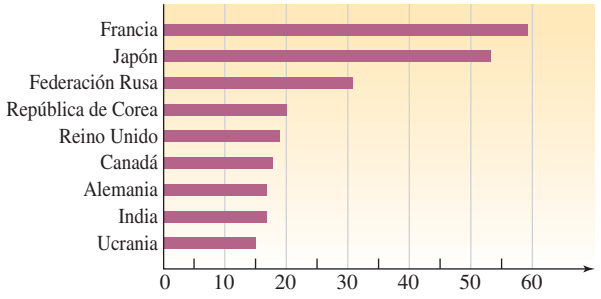
Determinar la temperatura del viento helado

Velocidad del viento	Temperatura real							
	20 °F	15 °F	10 °F	5 °F	0 °F	–5 °F	–10 °F	–15 °F
5 mph	16°	12°	7°	0°	−5°	−10°	−15°	−21°
10 mph	3°	−3°	−9°	−15°	−22°	−27°	−34°	−40°
15 mph	−5°	−11°	−18°	−25°	−31°	−38°	−45°	−51°
20 mph	−10°	−17°	−24°	−31°	−39°	−46°	−53°	−60°
25 mph	−15°	−22°	−29°	−36°	−44°	−51°	−59°	−66°
30 mph	−18°	−25°	−33°	−41°	−49°	−56°	−64°	−71°
35 mph	−20°	−27°	−35°	−43°	−52°	−58°	−67°	−74°

Hasta el 2008, Estados Unidos tenían la mayoría de las plantas de energía nuclear en operación a nivel mundial, con 104. La siguiente gráfica de barras muestra el restante de los diez países principales y el número de plantas de energía nuclear que tenían en operación.

3. ¿Cuántas plantas de energía nuclear tiene en operación Corea?
4. ¿Cuántas plantas de energía nuclear tiene en operación Francia?
5. ¿Cuáles países tienen el mismo número de plantas de energía nuclear en operación? ¿Cuántas?
6. ¿Cuántas más plantas de energía nuclear en operación tiene Japón que Canadá?

Número de plantas de energía nuclear en operación



Fuente: International Atomic Energy Agency

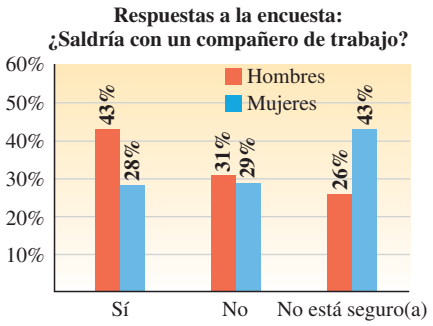
En una encuesta en un lugar de trabajo, a los adultos empleados se les preguntó si saldrían con un compañero de trabajo. Los resultados de la encuesta se muestran abajo. Use la gráfica de barras doble para responder las siguientes preguntas.

7. ¿Qué porcentaje de las mujeres dicen que no saldrían con un compañero de trabajo?

8. ¿Más hombres o mujeres dijeron que saldrían con un compañero de trabajo? ¿Qué porcentaje más?

9. Cuando se preguntó, ¿había más hombres o más mujeres inseguros si saldrían con un compañero de trabajo?

10. ¿Cuál de las tres respuestas para la encuesta se dio en aproximadamente el mismo porcentaje de hombres y mujeres?



Fuente: Spherion Workplace Survey

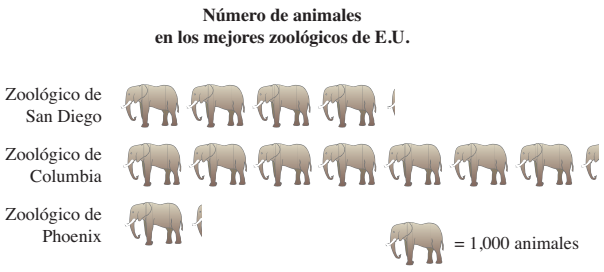
Refiérase a la pictografía abajo para responder las siguientes preguntas.

11. ¿Cuántos animales hay en el zoológico de San Diego?

12. ¿Cuál de los zoológicos tiene el mayor número de animales? ¿Cuántos?

13. ¿Cuántos animales tendría que añadírsele al zoológico de Phoenix para que tenga el mismo número que el zoológico de San Diego?

14. Encuentre el número total de animales en los tres zoológicos.



Fuente: USA Travel Guide

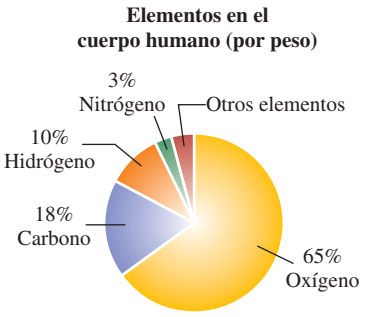
Refiérase a la gráfica circular abajo para responder las siguientes preguntas.

15. ¿Qué elemento conforma el mayor porcentaje del peso corporal de un humano?

16. ¿Qué porcentaje del peso de un cuerpo humano conforman los elementos *diferentes al oxígeno, carbono, hidrógeno y nitrógeno*?

17. ¿Cuánto del peso corporal de una mujer de 135 libras está conformado por el hidrógeno?

18. ¿Cuánto del peso corporal de un hombre de 200 libras está conformado por el oxígeno y el carbono?



Fuente: General Chemistry Online

Refiérase a la gráfica de líneas en la siguiente página para responder las siguientes preguntas.

19. ¿Cuántos huevos se produjeron en Nebraska en el 2001?

20. ¿Cuántos huevos se produjeron en Carolina del Norte en el 2008?

21. ¿En qué año la producción de huevos de Nebraska fue igual a la de Carolina del Norte? ¿Cuántos huevos?

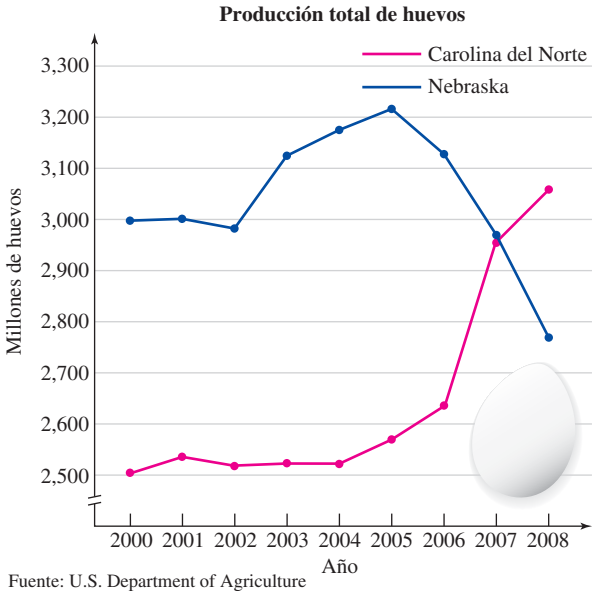
22. ¿Cuál fue la producción total de huevos de Nebraska y Carolina del Norte en el 2005?

23. ¿Entre cuáles dos años la producción de huevos en Carolina del Norte aumentó de manera considerable?

24. ¿Entre cuáles dos años la producción de huevos en Nebraska disminuyó de manera considerable?

25. ¿Cuántos más huevos produjo Carolina del Norte en el 2008 en comparación con Nebraska?

26. ¿Cuántos más huevos produjo Nebraska en el 2000 en comparación con Carolina del Norte?



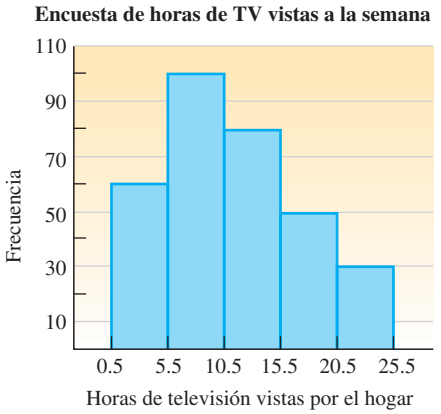
Fuente: U.S. Department of Agriculture

Una encuesta de los hábitos semanales de los televidentes de 320 hogares produjo el histograma en la siguiente columna. Use la gráfica para responder las siguientes preguntas.

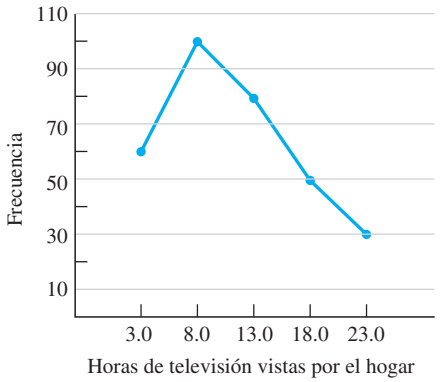
27. ¿Cuántos hogares vieron entre 1 y 5 horas de TV cada semana?

28. ¿Cuántos hogares vieron entre 6 y 15 horas de TV cada semana?

29. ¿Cuántos hogares vieron 11 horas o más cada semana?



30. Cree un polígono de frecuencias del histograma mostrado arriba.



SECCIÓN 7.2 Media, mediana y moda

DEFINICIONES Y CONCEPTOS

Con frecuencia es benéfico utilizar un número para representar el "centro" de todos los números en un conjunto de datos. Existen tres medidas de la **tendencia central:** la media, la mediana y la moda.

La **media** de un conjunto de valores está dada por la fórmula

$$\text{Media} = \frac{\text{suma de los valores}}{\text{número de valores}}$$

EJEMPLOS

Encuentre la media del siguiente conjunto de valores:

6 8 3 5 9 8 10 7 8 5

Para encontrar la media, se divide la suma de los valores entre el número de valores, el cual es 10.

$$\frac{6+8+3+5+9+8+10+7+8+5}{10} = \frac{69}{10} = 6.9$$

Por tanto, 6.9 es la media.

Cuando un valor en un conjunto aparece más de una vez, ese valor tiene la mayor "influencia" en la media que otro valor que sólo aparece una vez. Para simplificar el proceso de encontrar la media, cualquier valor que aparece más de una vez puede "ponderarse" multiplicándolo por el número de veces que aparece.

Para encontrar la **media ponderada** de un conjunto de valores:

1. Multiplique cada valor por el número de veces que aparece.
2. Encuentre la suma de los productos del paso 1.
3. Divida la suma del paso 2 entre el número total de valores individuales.

El **promedio de calificaciones (PC)** de un estudiante puede encontrarse utilizando una media ponderada.

Algunas escuelas asignan un cierto número de **horas crédito** a un curso mientras que otras asignan un determinado número de **unidades.**

PC Encuentre el promedio de calificaciones (PC) de un semestre para un estudiante que recibió las siguientes calificaciones. (Los valores de puntos son A = 4, B = 3, C = 2, D = 1 y F = 0.)

Curso	Calificación	Créditos
Álgebra	A	5
Historia	C	3
Arte	D	4

Multiplique el número de créditos para cada curso por el valor de puntos de la calificación recibida. Sume los resultados (como se muestra en azul) para obtener el número total de puntos de calificación. Para encontrar el número total de créditos, sume como se muestra en rojo.

Curso	Calificación	Créditos	Puntos de calificación ponderados
Álgebra	A	5	$4 \cdot 5 \rightarrow$ 20
Historia	C	3	$2 \cdot 3 \rightarrow$ 6
Arte	D	+ 4	$1 \cdot 4 \rightarrow$ + 4
Totales		**12**	**30**

Para encontrar el PC, se divide.

$$PC = \frac{30}{12}$$

30 ← El número total de puntos de calificación
12 ← El número total de créditos

$= 2.5$ Realice la división.

El PC en el semestre del estudiante es de 2.5.

Para encontrar la **mediana** de un conjunto de valores:

1. Ordene los valores en orden creciente.
2. Si hay un número impar de valores, la mediana es el valor central.
3. Si hay un número par de valores, la mediana es la media (promedio) de los dos valores centrales.

Para encontrar la mediana de

6 8 3 5 9 8 10 7 8 5

ordénelos en orden creciente:

Más pequeño Más grande

3 5 5 6 7 8 8 8 9 10 Hay 10 valores.

Dos valores centrales

Dado que hay un número par de valores, la mediana es la media (promedio) de los dos valores centrales:

$$\frac{7+8}{2} = \frac{15}{2} = 7.5$$

Por tanto, 7.5 es la mediana.

La **moda** de un conjunto de valores es el valor sencillo que aparece con mayor frecuencia.

Para encontrar la moda de

6 8 3 5 9 8 10 7 8 5

se encuentra el valor que aparece con mayor frecuencia.

6 **8** 3 5 9 **8** 10 7 **8** 5

3 veces

Dado que el 8 aparece más veces, es la moda.

Cuando una colección de valores tiene dos modas, se le llama **bimodal.**	La colección de valores 1 2 **3** **3** 4 5 **6** **6** 7 8 tiene dos modas: 3 y 6.

EJERCICIOS DE REPASO

31. CALIFICACIONES José trabajó duro este semestre, sacando calificaciones de 87, 92, 97, 100, 100, 98, 90 y 98. Si necesita un promedio de 95 para sacar una A en la clase, ¿lo logró?

32. RESÚMENES DE CALIFICACIONES Los estudiantes en una clase de matemáticas tuvieron promedios finales de 43, 83, 40, 100, 40, 36, 75, 39 y 100. Cuando se le preguntó qué tan bien le fue a sus estudiantes, su profesora respondió: "el 43 fue lo común". ¿Qué medida estaba utilizando la profesora: la media, la mediana o la moda?

33. EMPACADO DE PRETZEL Se pesaron muestras de pretzeles SnacPak para encontrar si la aseveración del paquete de "Peso neto de 1.2 onzas" era precisa. El conteo aparece en la tabla. Encuentre la moda de los pesos.

Pesos de los Pretzels SnacPak

Onzas	Número
0.9	1
1.0	6
1.1	18
1.2	23
1.3	2
1.4	0

34. Encuentre el peso medio de las muestras en el Ejercicio 33.

35. MUESTRAS DE SANGRE Un técnico de un laboratorio médico examinó una muestra de sangre bajo un microscopio y midió los tamaños (en micrones) de los glóbulos blancos. Los datos se listan abajo. Encuentre la media, la mediana y la moda.

7.8 6.9 7.9 6.7 6.8 8.0 7.2 6.9 7.5

36. LECTURA DE VERANO Una versión en pasta blanda del clásico *Gone With the Wind* tiene 960 páginas. Si una estudiante desea leer el libro completo durante el mes de junio, ¿cuántas páginas debe promediar por día?

37. CAMINATA A BENEFICENCIA Use la información en la tabla para encontrar la donación media (promedio) para una caminata a beneficencia.

Cantidad de la donación	$5	$10	$20	$50	$100
Número recibido	20	65	25	5	10

38. PC Encuentre el promedio de calificaciones (PC) de un semestre para un estudiante que recibió las calificaciones mostradas abajo. Redondee a la centésima más cercana. (Asuma los siguientes valores de puntos estándar para las calificaciones en letra: A = 4, B = 3, C = 2, D = 1 y F = 0.)

Curso	Calificación	Créditos
Química	A	5
Sociología	C	3
Economía	D	4
Arquería	A	1

CAPÍTULO 7 EXAMEN

Complete los espacios.

1. a. A la línea horizontal o vertical utilizada como referencia en una gráfica de barras se le llama _____.

b. La _____ (promedio) de un conjunto de valores es la suma de los valores dividida entre el número de valores en el conjunto.

c. La _____ de un conjunto de valores escritos en orden creciente es el valor central.

d. La _____ de un conjunto de valores es el valor sencillo que aparece con mayor frecuencia.

e. La media, la mediana y la moda son tres medidas de la tendencia _____.

2. ENTRENAMIENTOS Refiérase a la tabla abajo para responder las siguientes preguntas.

Número de calorías quemadas mientras se corre en una hora

Velocidad de la carrera (mph)	Peso corporal		
	130 lb	155 lb	190 lb
5	472	563	690
6	590	704	863
7	679	809	992
8	797	950	1,165
9	885	1,056	1,294

Fuente: nutristrategy.com

a. ¿Cuántas calorías quemaría una persona de 155 libras si corriera por una hora a una velocidad de 5 mph?

b. En una hora, ¿cuántas calorías más quemaría una persona de 190 libras si corriera a una velocidad de 7 mph en vez de 6 mph?

c. ¿A qué velocidad tiene que correr una persona de 130 libras por una hora para quemar aproximadamente 800 calorías?

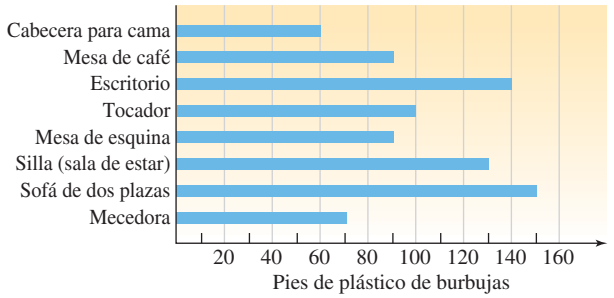
3. MUDANZAS Refiérase a la gráfica de barras en la siguiente columna para responder las siguientes preguntas.

a. ¿Cuál de los muebles mostrados en la gráfica requiere el mayor número de pies de plástico de burbujas? ¿Cuántos?

b. ¿Cuántos pies más de plástico de burbujas se necesitan para envolver un escritorio que una mesa de café?

c. ¿Cuántos pies de plástico de burbujas se necesitan para cubrir un juego de dormitorio que tiene una cabecera, un tocador y dos mesas de esquina?

Cantidad de plástico de burbujas necesaria para envolver piezas de muebles cuando se muda



Fuente: transitsystems.com

4. TASA SE SOBREVIVENCIA AL CÁNCER Refiérase a la gráfica de abajo para responder las siguientes preguntas.

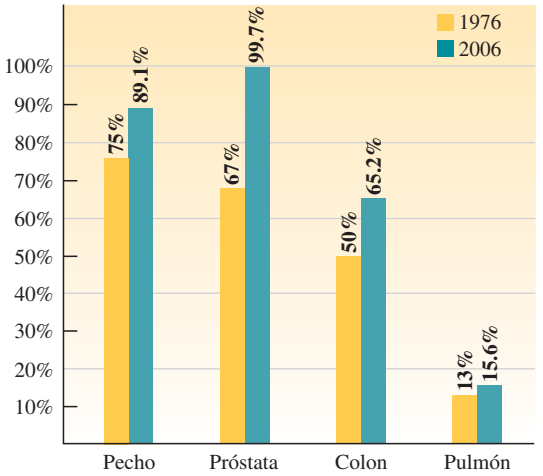
a. ¿Cuál era la tasa de sobrevivencia (en porcentaje) del cáncer de pecho en 1976?

b. ¿En qué porcentaje aumentó la tasa de sobrevivencia al cáncer para el cáncer de pecho en el 2006?

c. ¿Qué tipo de cáncer mostrado en la gráfica tiene la tasa de sobrevivencia más baja?

d. ¿Cuál tipo de cáncer ha tenido el mayor aumento en la tasa de sobrevivencia de 1976 al 2006? ¿Cuánto de incremento?

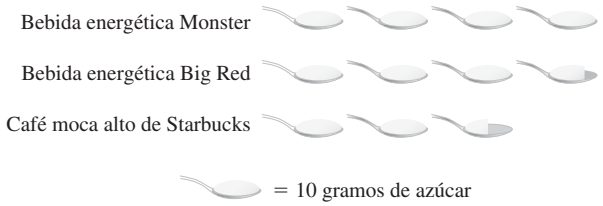
Tasas de sobrevivencia a cinco años



Fuente: SEER Cancer Statistics Review

5. BEBIDAS ENERGÉTICAS Refiérase a la pictografía mostrada abajo para responder las siguientes preguntas.

Contenido de azúcar en bebidas energéticas y café (porciones de 12 onzas)



Fuente: energyfiend.com

a. ¿Cuántos gramos de azúcar hay en 12 onzas de Big Red?

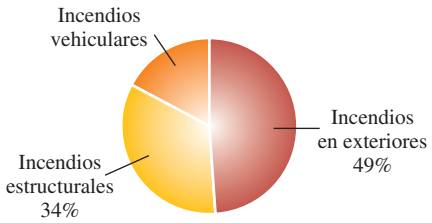
b. Para una porción de 12 onzas, ¿cuántos gramos más de azúcar hay en la bebida energética Monster que en el café moca alto de Starbucks?

6. INCENDIOS Refiérase a la gráfica abajo para responder las siguientes preguntas.

a. En el 2007, ¿qué porcentaje de incendios en Estados Unidos fueron incendios vehiculares?

b. En el 2007 hubo un total de 1,557,500 incendios en Estados Unidos. ¿Cuántos fueron incendios estructurales?

Lugares donde ocurrieron incendios, 2007



Fuente: U.S. Fire Administration

7. DPNY Refiérase a la gráfica en la siguiente columna para responder las siguientes preguntas.

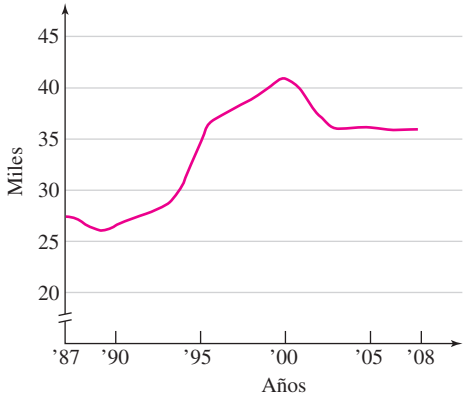
a. ¿Cuántos oficiales de policía uniformados tenía el DPNY en 1987?

b. ¿Cuándo hubo el menor número de oficiales de policía uniformados? ¿Cuántos oficiales había en ese tiempo

c. ¿Cuándo hubo el mayor número de oficiales de policía uniformados? ¿Cuántos oficiales había en ese tiempo?

d. Encuentre la disminución en el número de oficiales de policía uniformados del 2000 al 2003.

Número de oficiales de policía uniformados en el Departamento de policía de la ciudad de Nueva York



Fuente: *New York Times,* 17 de julio, 2009

8. CARRERAS DE BICICLETAS *Refiérase a la gráfica de abajo para responder cada una de las siguientes preguntas acerca de una carrera de bicicletas entre dos hombres.*

a. ¿Cuál ciclista ha recorrido una mayor distancia en el tiempo A?

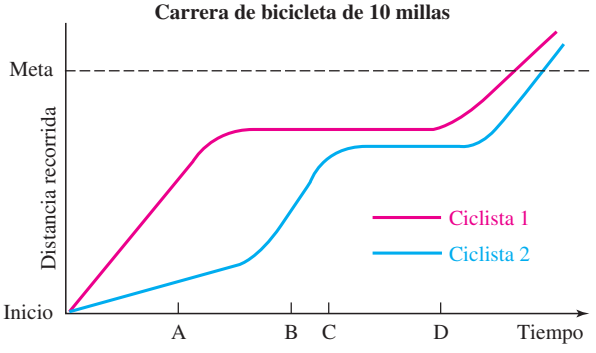
b. Explique lo que está sucediendo en la carrera en el tiempo B.

c. ¿Cuándo fue la primera vez que el ciclista 2 se detuvo a descansar?

d. ¿El ciclista 2 alguna vez lideró la carrera? Si lo hizo, ¿en qué tiempo?

e. ¿Cuál ciclista ganó la carrera?

Carrera de bicicleta de 10 millas

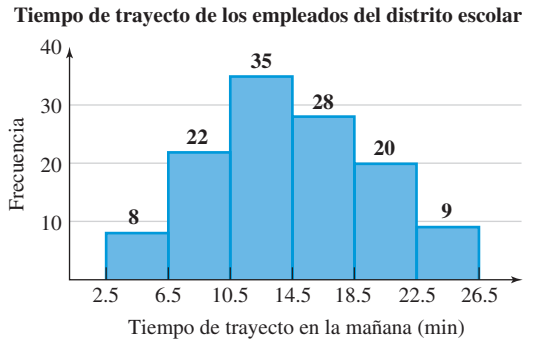


9. TIEMPO DE TRAYECTO Un distrito escolar recolectó información sobre el número de minutos que le toma a sus empleados conducir al trabajo en la mañana. Los resultados se presentan en el histograma de abajo.

a. ¿Cuántos empleados tienen un tiempo de trayecto que está en el intervalo de 7 a 10 minutos?

b. ¿Cuántos empleados tienen un tiempo de trayecto que es menor a 10 minutos?

c. ¿Cuántos empleados tienen un trayecto que les toma 15 minutos o más cada día?



10. SERVICIO VOLUNTARIO Abajo se lista el número de horas servidas el mes pasado por cada uno de los voluntarios en un albergue para personas sin hogar:

4 6 8 2 8 10 11 9 5 12 5 18 7 5 1 9

a. Encuentre la media (promedio) de las horas de servicio voluntario.

b. Encuentre la mediana de las horas de servicio voluntario.

c. Encuentre la moda de las horas de servicio voluntario.

11. CALIFICACIÓN DE PELÍCULAS Netflicks, un popular sistema de renta de DVD en línea, permite a los miembros calificar las películas utilizando un sistema de 5 estrellas. La tabla de abajo muestra un conteo de las calificaciones que le dio a una película un grupo de estudiantes universitarios. Encuentre la calificación media (promedio) de la película.

Número de estrellas	Comentarios	Conteo
★★★★★	La amo	III
★★★★	Realmente me gusta	IIII
★★★	Me gusta	~~IIII~~
★★	No me gusta	~~IIII~~ I
★	La odio	II

12. PC Encuentre el promedio de calificaciones (PC) para un estudiante que recibió las siguientes calificaciones. Redondee a la centésima más cercana.

Curso	Calificación	Créditos
ENTRENAMIENTO CON PESAS	C	1
TRIGONOMETRÍA	A	3
GOBIERNO	B	2
FÍSICA	A	4
LABORATORIO DE FÍSICA	D	1

13. RATINGS Abajo se muestran los siete programas de televisión por cable más vistos. ¿Cuáles son la media, la mediana y la moda de la información de los televidentes?

Programa/día/horario/cadena	Millones de televidentes
WCW Raw, Lun. 10 P.M., USA	5.39
WCW Raw, Lun. 9 P.M., USA	4.99
NCIS, Mar. 7 P.M., USA	4.25
NCIS, Mié. 7 P.M., USA	4.25
NCIS, Lun. 7 P.M., USA	4.04
Penguins of Madagascar, Dom. 10 A.M., Nickelodeon	4.02
The O'Reilly Factor, Mié. 8 P.M., Fox	3.93

Fuente: Bay Ledger News Zone

14. BIENES RAÍCES En mayo del 2009, el precio de venta mediano de una casa para una familia existente en Estados Unidos era de $172,900. Explique a qué se refiere con el precio de venta mediano. (Fuente: National Association of Realtors).

CAPÍTULOS 1–7 REPASO ACUMULATIVO

1. AUTOMÓVILES En el 2008, se produjeron un total de 52,940,549 automóviles en el mundo. Escriba el número en palabras y en notación expandida. (Fuente: Worldometers) [Sección 1.1]

2. Redondee el 49,999 al millar más cercano. [Sección 1.1]

Desarrolle cada operación.

3. $\begin{array}{r} 38{,}908 \\ +\ 15{,}696 \end{array}$ [Sección 1.2]

4. $\begin{array}{r} 9{,}700 \\ -\ 5{,}491 \end{array}$ [Sección 1.3]

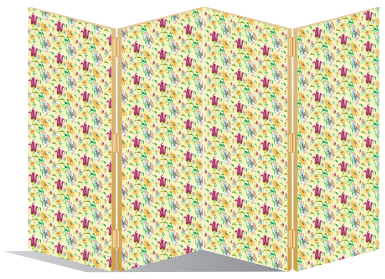
5. $\begin{array}{r} 345 \\ \times\ 67 \end{array}$ [Sección 1.4]

6. $23\overline{)2{,}001}$ [Sección 1.5]

7. Explique cómo comprobar el siguiente resultado utilizando una suma. [Sección 1.3]

$$\begin{array}{r} 1{,}142 \\ -\ 459 \\ \hline 683 \end{array}$$

8. BIOMBOS Cuatro piezas de madera laminada, cada una de 22 pulgadas de ancho y 62 pulgadas de alto, se van a cubrir con tela, por los dos lados, para formar el biombo mostrado. ¿Cuántas pulgadas cuadradas de tela se utilizarán? [Sección 1.4]



9. EL CALENDARIO VIETNAMITA Un animal representa cada año lunar vietnamita. Abajo se listan los Años del gato recientes. Si el ciclo continúa, ¿qué año será el siguiente Año del gato? [Sección 1.6]

1915 1927 1939 1951 1963 1975 1987 1999

10. a. Encuentre los factores del 18. [Sección 1.7]

b. Encuentre la factorización de primos del 18.

11. Escriba los primeros 10 números primos. [Sección 1.7]

12. a. Encuentre el mcm del 8 y el 12. [Sección 1.8]

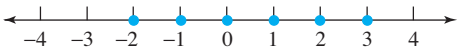
b. Encuentre el mfc del 8 y el 12.

Evalúe cada expresión. [Sección 1.9]

13. $15 + 5[12 - (2^2 + 4)]$

14. $\dfrac{12 + 5 \cdot 3}{3^2 - 2 \cdot 3}$

15. Grafique los enteros mayores que el -3 pero menores que el 4. [Sección 2.1]



16. a. Simplifique: $-(-6)$ [Sección 2.1]

b. Encuentre el valor absoluto: $|-5|$

c. ¿El enunciado $-12 > -10$ es verdadero o falso?

17. ***Desarrolle cada operación.***

a. $-25 + 5$ [Sección 2.2]

b. $25 - (-5)$ [Sección 2.3]

c. $-25(5)$ [Sección 2.4]

d. $\dfrac{-25}{-5}$ [Sección 2.5]

18. PLANETAS Mercurio orbita más cerca del Sol que cualquier otro planeta. Las temperaturas en Mercurio pueden ser tan altas como de 810 °F y tan bajas como de −290 °F. ¿Cuál es el intervalo de temperatura? [Sección 2.3]

Evalúe cada expresión. [Sección 2.6]

19. $\dfrac{(-6)^2 - 1^5}{-4 - 3}$

20. $-3 + 3(-4 - 4 \cdot 2)^2$

21. $-\left|\dfrac{45}{-9} - (-9)\right|$

22. $-10^2 - (-10)^2$

23. Simplifique cada fracción. [Sección 3.1]

a. $\dfrac{60}{108}$ **b.** $\dfrac{24}{16}$

24. Simplifique, si es posible. [Sección 3.1]

a. $\dfrac{0}{64}$ **b.** $\dfrac{27}{0}$

Desarrolle cada operación. Simplifique, si es posible.

25. $\dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{2}{7}$ [Sección 3.2]

26. $\dfrac{8}{63} \div \dfrac{2}{7}$ [Sección 3.3]

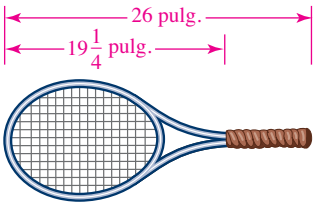
27. Reste $\dfrac{2}{3}$ de $\dfrac{1}{2}$. [Sección 3.4]

28. $\dfrac{11}{12} + \dfrac{1}{30}$ [Sección 3.4]

29. TIEMPO DE CLASE En un curso de química, los estudiantes pasan un total de 300 minutos en el laboratorio y en la cátedra cada semana. Si $\frac{7}{15}$ del tiempo los pasan en el laboratorio cada semana, ¿cuántos minutos pasan en la cátedra cada semana? [Sección 3.3]

30. Divida: $2\frac{4}{5} \div \left(-2\frac{2}{3}\right)$ [Sección 3.5]

31. TENIS Encuentre la longitud del mango en la raqueta de tenis mostrada abajo. [Sección 3.6]



32. Evalúe la fórmula $A = \frac{1}{2}h(a + b)$ para $a = 4\frac{1}{2}$, $b = 5\frac{1}{2}$ y $h = 2\frac{1}{8}$. [Sección 3.7]

33. Simplifique la fracción compleja: $\dfrac{-\frac{1}{5}}{\frac{8}{15}}$ [Sección 3.7]

34. Escriba $400 + 20 + 8 + \frac{9}{10} + \frac{1}{100}$ como un decimal. [Sección 4.1]

35. CHEQUERA Encuentre la cantidad total en dólares de los cheques escritos en el registro mostrado abajo. [Sección 4.2]

FECHA		NÚMERO DE CHEQUE	DESCRIPCIÓN DE LA TRANSACCIÓN	✓ T	(•) CANTIDAD DE PAGO O DÉBITO	
17	3	703	A: Albertsons		$ 213	16
			PARA: Abarrotes			
19	3	704	A: Brian Auto		$1,504	80
			PARA: Reparación del automóvil			
19	3	705	A: Nordstrom		$ 89	73
			PARA: Suéter			
21	3	706	A: Girl Scouts		$ 7	50
			PARA: Galletas			

36. Desarrolle cada operación de manera mental. [Sección 4.3]

a. Multiplique: $3.45 \cdot 100$

b. Divida: $3.45 \div 10{,}000$

Desarrolle cada operación.

37. Reste: $\begin{array}{r} 760.2 \\ -\ 614.7 \end{array}$ [Sección 4.2]

38. Multiplique: $(-0.31)(2.4)$ [Sección 4.3]

39. Divida: $0.72\overline{)536.4}$ [Sección 4.4]

40. Divida: $4\overline{)0.073}$ [Sección 4.4]

41. Escriba $\frac{8}{11}$ como un decimal. [Sección 4.5]

42. Evalúe: $15 + \sqrt{16}\left[5^2 - \left(\sqrt{9} + 2\right)\sqrt{4}\right]$ [Sección 4.6]

43. Exprese la frase "8 pies a 4 yardas" como una razón en la forma más simple. [Sección 5.1]

44. COMPRA DE ROPA Como parte de una liquidación de verano, una tienda para mujeres pone en oferta los suéteres de cuello de tortuga, 3 por $35.97. ¿Cuánto costarán cinco suéteres de cuello de tortuga? [Sección 5.2]

45. Resuelva la proporción: $\dfrac{\frac{7}{8}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{4}}{x}$ [Sección 5.2]

46. Convierta 8 pintas a onzas líquidas. [Sección 5.3]

47. Convierta 640 centímetros a metros. [Sección 5.4]

48. Convierta 67.7 °F a grados Celsius. Redondee a la décima más cercana. [Sección 5.5]

49. Complete la siguiente tabla. [Sección 6.1]

Fracción	Decimal	Porcentaje
		3%
$\frac{9}{4}$		
	0.041	

50. ¿90 es qué porcentaje de 525? Redondee al uno por ciento más cercano. [Sección 6.2]

51. ¿Qué número es 105% de 23.2? [Sección 6.2]

52. ¿19.2 es $33\frac{1}{3}$% de qué número? [Sección 6.2]

53. IMPUESTO SOBRE LAS VENTAS Encuentre el impuesto sobre las ventas sobre una compra de $98.95 si la tasa del impuesto sobre las ventas es de 8%. [Sección 6.3]

54. VENTA DE ELECTRÓNICA Si la comisión sobre una laptop de $1,500 es de $240, ¿cuál es la tasa de la comisión? [Sección 6.3]

55. PROPINA Estime la propina de 15% sobre la factura de una cena de $77.55. [Sección 6.4]

56. REMODELACIÓN El dueño de una casa solicita $18,000 para pagar un proyecto de remodelación

de la cocina. Los términos del préstamo son un interés simple de 9.2% y un reembolso en 2 años. ¿Cuánto interés pagará sobre el préstamo? [Sección 6.5]

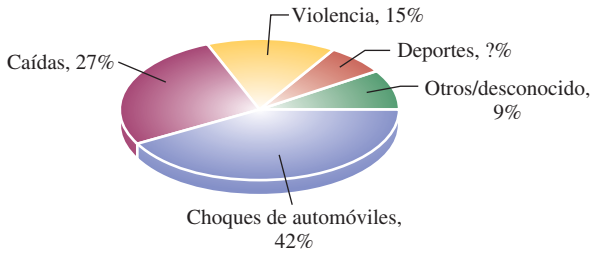
57. PRÉSTAMOS Se prestaron $12,600 a una tasa de interés simple de 18%. Encuentre la cantidad total que debe reembolsarse al final de un periodo de 90 días. [Sección 6.5]

58. LESIONES DE LA MÉDULA ESPINAL Refiérase a la gráfica circular de abajo. [Sección 7.1]

a. ¿Qué porcentaje de las lesiones de la médula espinal son ocasionadas por accidentes deportivos?

b. Si hay aproximadamente 12,000 casos nuevos de lesiones de médula espinal cada año, de acuerdo con la gráfica, ¿cuántas de ellas fueron ocasionadas por choques de automóviles?

Causas de lesiones de la médula espinal en Estados Unidos



Fuente: National Spinal Cord Injury Statistical Center

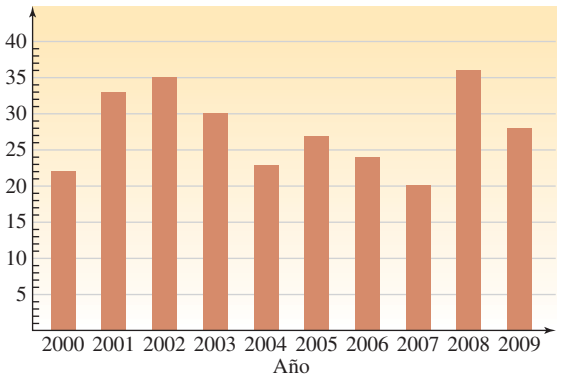
59. AVALANCHAS La gráfica de barras en la siguiente columna muestra el número de muertes por avalanchas en Estados Unidos al final de las temporadas de invierno en los años 2000 al 2009. Use la gráfica para responder las siguientes preguntas. [Sección 7.1]

a. ¿En qué años hubo la mayor cantidad de muertes por avalanchas? ¿Cuántas muertes hubo?

b. ¿Entre cuáles dos años hubo el mayor aumento en el número de muertes por avalanchas? ¿Cuál fue el incremento?

c. ¿Entre cuáles dos años hubo la mayor disminución en el número de muertes por avalanchas? ¿Cuál fue el decremento?

Muertes anuales por avalanchas en E.U.



Fuente: Northwest Weather and Avalanche Center

60. PC DE UN EQUIPO Abajo se listan los promedios de calificaciones de los jugadores de un equipo de bádminton. Encuentre la media, la mediana y la moda de los PC del equipo. [Sección 7.2]

3.04	4.00	2.75	3.23	3.87	2.21
3.02	2.25	2.98	2.56	3.58	2.75

8

Introducción al álgebra

© iStockphoto.com/Dejan Ljamić

8.1 El lenguaje del álgebra

8.2 Simplificación de expresiones algebraicas

8.3 Resolución de ecuaciones utilizando las propiedades de igualdad

8.4 Más acerca de la resolución de ecuaciones

8.5 Uso de ecuaciones para resolver problemas de aplicación

8.6 Reglas de multiplicación para los exponentes

Resumen y repaso

Examen

Repaso acumulativo

Carreras del campus

Transmisión

Se requiere de muchas personas tras bambalinas en las estaciones de radio y televisión para hacer posible lo que se ve y escucha en las ondas de radio. Existe una amplia variedad de oportunidades de trabajo en la transmisión para productores, directores, guionistas, editores, ingenieros de audio y video, técnicos de iluminación y operadores de cámaras con talento. Estos trabajos requieren habilidades de negocios y mercadotecnia, programación y planificación, operación de equipo electrónico y la habilidad matemática para analizar ratings e información.

En el **Problema 41** del **Espacio para el estudio 8.5** verá cómo un productor de televisión determina la cantidad del tiempo de comerciales y el tiempo del programa que debe planificar para una emisión de 30 minutos de duración.

CARGO LABORAL:
Transmisión

EDUCACIÓN: Los trabajos de transmisión en los mercados grandes son por lo regular ofrecidos a individuos con algún título.

PERSPECTIVA LABORAL: Las vacantes en la transmisión se espera que aumenten alrededor de 9% en el periodo 2006-2016.

INGRESOS ANUALES: Los intervalos van desde unos $25,000 para un puesto a nivel inicial a $70,000 o más para los puestos superiores.

PARA MÁS INFORMACIÓN:
http://www.bls.gov/oco/cg/cgs017.htm

Objetivos

1. Usar variables para enunciar propiedades de la suma, multiplicación y división.
2. Identificar términos y coeficientes de términos.
3. Traducir frases en palabras a expresiones algebraicas.
4. Evaluar expresiones algebraicas.

SECCIÓN 8.1
El lenguaje del álgebra

Los primeros siete capítulos de este libro se han enfocado en el estudio a profundidad de la aritmética. Ahora es tiempo de comenzar a moverse hacia el álgebra. El **álgebra** es el lenguaje de las matemáticas. Puede utilizarse para resolver varios tipos de problemas. En este capítulo aprenderá más acerca de cómo pensar y escribir en el lenguaje del álgebra utilizando su componente más importante: la variable.

El lenguaje de las matemáticas La palabra *álgebra* proviene del libro *Ihm Al-jabr wa'l muqābalah*, escrito por un matemático árabe alrededor del 800 d.n.e.

1 Usar variables para enunciar propiedades de la suma, multiplicación y división

Una de las principales diferencias entre la aritmética y el álgebra es el uso de *variables*. Recuerde que una **variable** es una letra (o símbolo) que representa un número. En este curso se han utilizado variables en varias ocasiones. Por ejemplo, en el Capítulo 1, l representó la longitud, y w representó el ancho en la fórmula del área de un rectángulo: $A = lw$. En el Capítulo 6, x representó el número desconocido en los problemas de porcentaje.

El lenguaje de las matemáticas La palabra *variable* está basada en la palabra raíz *variar,* la cual significa cambio o cambiar. Por ejemplo, la longitud y el ancho de los rectángulos *varían* y los números desconocidos en los problemas de porcentaje *varían.*

Muchos símbolos utilizados en la aritmética también se utilizan en el álgebra. Por ejemplo, se utiliza un símbolo más $+$ para indicar una suma, se utiliza un símbolo menos $-$ para indicar una resta, y un símbolo $=$ significa *es igual a.*

Dado que la letra x se utiliza con frecuencia en el álgebra y pudiera confundirse con el símbolo de multiplicación $\times$, por lo regular la multiplicación se escribe utilizando un **punto** o **paréntesis.** Cuando se multiplica una variable por un número, o una variable por otra variable, se puede omitir el símbolo de multiplicación. Por ejemplo,

$2b$ significa $2 \cdot b$ $\quad$ xy significa $x \cdot y$ $\quad$ $8abc$ significa $8 \cdot a \cdot b \cdot c$

En la notación $2b$, el número 2 es un ejemplo de una **constante** debido a que no cambia de valor.

Muchos de los patrones que se han visto mientras se trabajaba con números naturales, enteros, fracciones y decimales pueden generalizarse y enunciarse en símbolos utilizando variables. Aquí hay algunas propiedades familiares de la suma escritas en una forma muy compacta, donde las variables a y b representan cualquier número.

- **Propiedad conmutativa de la suma**

$$a + b = b + a$$

Cambiar el orden cuando se suma no afecta la respuesta.

- **Propiedad asociativa de la suma**

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Cambiar la agrupación cuando se suma no afecta la respuesta.

- **Propiedad de la suma del 0 (Propiedad identidad de la adición)**

$a + 0 = a$ y $0 + a = a$ Cuando se suma el 0 a cualquier número, el resultado es el mismo número.

Aquí hay varias propiedades familiares de la multiplicación enunciadas utilizando variables.

- **Propiedad conmutativa de la multiplicación**

$ab = ba$ Cambiar el orden cuando se multiplica no afecta la respuesta.

- **Propiedad asociativa de la multiplicación**

$(ab)c = a(bc)$ Cambiar la agrupación cuando se multiplica no afecta la respuesta.

- **Propiedad de la multiplicación del 0**

$0 \cdot a = 0$ y $a \cdot 0 = 0$ El producto del 0 y cualquier número es 0.

- **Propiedad de la multiplicación del 1**

$1 \cdot a = a$ y $a \cdot 1 = a$ El producto del 1 y cualquier número es ese número.

Aquí hay dos propiedades familiares de la división enunciadas utilizando una variable.

- **Propiedades de la división**

$\frac{a}{1} = a$ y $\frac{a}{a} = 1$ siempre que $a \neq 0$ Cualquier número dividido entre 1 es el mismo número. Cualquier número (excepto el 0) dividido entre sí mismo es 1.

2 Identificar términos y coeficientes de términos

Cuando se combinan variables y números utilizando operaciones aritméticas, el resultado es una *expresión algebraica.*

Expresiones algebraicas

Las variables y/o los números pueden combinarse con las operaciones de suma, resta, multiplicación y división para crear **expresiones algebraicas.**

El lenguaje de las matemáticas Con frecuencia se les refiere a las *expresiones algebraicas* simplemente como *expresiones.*

Aquí hay algunos ejemplos de expresiones algebraicas.

$4a + 7$ Esta expresión es una combinación de los números 4 y 7, la variable a y las operaciones de multiplicación y suma.

$\frac{10 - y}{3}$ Esta expresión es una combinación de los números 10 y 3, la variable y y las operaciones de resta y división.

$15mn(2m)$ Esta expresión es una combinación de los números 15 y 2, las variables m y n y la operación de multiplicación.

Los símbolos de suma separan las expresiones en partes llamadas *términos*. Por ejemplo, la expresión $x + 8$ tiene dos términos.

$$\underset{\text{Primer término}}{x} + \underset{\text{Segundo término}}{8}$$

Dado que la resta puede escribirse como la suma del opuesto, la expresión $a^2 - 3a - 9$ tiene tres términos.

$$a^2 - 3a - 9 = \underset{\text{Primer término}}{a^2} + \underset{\text{Segundo término}}{(-3a)} + \underset{\text{Tercer término}}{(-9)}$$

En general, un **término** es un producto o un cociente de números y/o variables. Un número o una variable sola también es un término. Son ejemplos de términos:

$$4, \quad y, \quad 6r, \quad -w^3, \quad 3.7x^5, \quad \frac{3}{n}, \quad -15ab^2$$

¡Cuidado! Por la propiedad conmutativa de la multiplicación, $r6 = 6r$ y $-15b^2a = -15ab^2$. Sin embargo, cuando se escriben los términos, por lo regular se escribe primero el factor numérico y los factores variables en orden alfabético.

Al factor numérico de un término se le llama **coeficiente** del término. Por ejemplo, el término $6r$ tiene un coeficiente de 6 debido a que $6r = 6 \cdot r$. El coeficiente del $-15ab^2$ es -15 debido a que $-15ab^2 = -15 \cdot ab^2$. Abajo se muestran más ejemplos.

A un término como el 4, que consiste en un solo número, se le llama **término constante.**

Término	Coeficiente	
$8y^2$	8	
$-0.9pq$	-0.9	
$\frac{3}{4}b$	$\frac{3}{4}$	Este término pudiera escribirse $\frac{3b}{4}$.
$-\frac{x}{6}$	$-\frac{1}{6}$	Debido a que $-\frac{x}{6} = -\frac{1x}{6} = -\frac{1}{6} \cdot x$
x	1	Debido a que $x = 1x$
$-t$	-1	Debido a que $-t = -1t$
27	27	El coeficiente de un término constante es esa constante.

El lenguaje del álgebra Los términos como x y y tienen coeficientes *implícitos* de 1. *Implícito* significa sugerir sin expresar de manera precisa.

Auto-revisión 1

Identifique el coeficiente de cada término en la expresión: $p^3 - 12p^2 + 3p - 4$

Ahora intente **Problema 23**

EJEMPLO 1 Identifique el coeficiente de cada término en la expresión: $7x^2 - x + 6$

Estrategia Se comenzará escribiendo la resta como la suma del opuesto. Después se determinará el factor numérico de cada término.

POR QUÉ Los símbolos de suma separan las expresiones en términos.

Solución Si se escribe $7x^2 - x + 6$ como $7x^2 + (-x) + 6$, se observa que ésta tiene tres términos: $7x^2$, $-x$ y 6. El factor numérico de cada término es su coeficiente.

El coeficiente del $7x^2$ es el **7** debido a que $7x^2$ significa $\mathbf{7} \cdot x^2$.

El coeficiente del $-x$ es el **−1** debido a que $-x$ significa $\mathbf{-1} \cdot x$.

El coeficiente de la constante 6 es el 6.

Es importante ser capaz de distinguir entre los *términos* de una expresión y los *factores* de un término.

EJEMPLO 2 ¿Se utiliza m como un *factor* o como un *término* en cada expresión?

a. $m + 6$ **b.** $8m$

Estrategia Se comenzará determinando si m está involucrada en una suma o en una multiplicación.

POR QUÉ Los símbolos de suma separan las expresiones en *términos*. Un *factor* es un número que se está multiplicando.

Solución

a. Dado que se suma m al 6, m es un término de $m + 6$.

b. Dado que se multiplica m por 8, m es un factor de $8m$.

Auto-revisión 2

¿b se usa como un *factor* o un *término* en cada expresión?

a. $-27b$

b. $5a + b$

Ahora intente **Problemas 27 y 29**

3 Traducir frases en palabras a expresiones algebraicas

Las tablas de abajo muestran cómo pueden traducirse las frases clave a expresiones algebraicas.

Suma	
la suma de a y 8	$a + 8$
4 más c	$4 + c$
16 sumado a m	$m + 16$
4 más que t	$t + 4$
20 mayor que F	$F + 20$
T incrementado en r	$T + r$
excede y por 35	$y + 35$

Resta	
la diferencia de 23 y P	$23 - P$
550 menos h	$550 - h$
18 menos que w	$w - 18$
7 disminuido en j	$7 - j$
M reducido en x	$M - x$
12 restado de L	$L - 12$
5 menos f	$5 - f$

¡Cuidado! Tenga cuidado cuando traduzca una resta. El orden es importante. Por ejemplo, cuando una traducción involucra la frase *menos que,* observe cómo se invierten los términos.

18 menos que w

$w - 18$

Multiplicación	
el producto de 4 y x	$4x$
20 veces B	$20B$
el doble de r	$2r$
duplica la cantidad a	$2a$
triplica la utilidad P	$3P$
tres cuartos de m	$\frac{3}{4}m$

División	
el cociente de R y 19	$\frac{R}{19}$
s dividido entre d	$\frac{s}{d}$
la razón de c a d	$\frac{c}{d}$
k dividido en 4 partes iguales	$\frac{k}{4}$

¡Cuidado! Tenga cuidado cuando traduzca una división. Como con la resta, el orden es importante. Por ejemplo, s dividido entre d *no* se escribe $\frac{d}{s}$.

Auto-revisión 3

Escriba cada frase como una expresión algebraica:

a. 80 menos que el total t

b. $\frac{2}{3}$ del tiempo T

c. La diferencia del doble de a y el 15, al cuadrado

Ahora intente **Problemas 31, 37 y 41**

EJEMPLO 3 Escriba cada frase como una expresión algebraica:

a. Un medio de la utilidad P

b. 5 menos que la capacidad c

c. El producto del peso w y el 2,000, incrementado en 300

Estrategia Se comenzará identificando las frases clave.

POR QUÉ Las frases clave pueden traducirse a símbolos matemáticos.

Solución

a. **Frase clave:** *Un medio de* **Traducción:** multiplicación por $\frac{1}{2}$

La expresión algebraica es: $\frac{1}{2}P$.

b. **Frase clave:** *menos que* **Traducción:** resta

En ocasiones el pensar en términos de números específicos hace la traducción más sencilla. Suponga que la capacidad fuera de 100. Entonces 5 *menos que* 100 sería $100 - 5$. Si la capacidad es c, entonces se necesita realizar c menos 5. La expresión algebraica es: $c - 5$.

¡Cuidado! $5 < c$ es la traducción del enunciado 5 *es menor que* la capacidad c y no de 5 *menos que* la capacidad c.

c. **Frase clave:** *Producto de* **Traducción:** multiplicación

Frase clave: *incrementado en* **Traducción:** suma

En la redacción proporcionada, la coma después del 2,000 significa que primero se multiplica w por 2,000; después se suma 300 a ese producto. La expresión algebraica es: $2{,}000w + 300$.

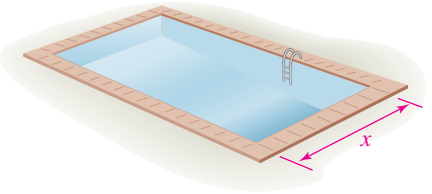
Para resolver problemas de aplicación se hace que una variable represente una cantidad desconocida.

Auto-revisión 4

TRAYECTO AL TRABAJO A Val le toma m minutos llegar al trabajo si maneja su automóvil. Si toma el autobús, su tiempo de viaje excede éste por 15 minutos. ¿Cuánto le toma llegar al trabajo en autobús?

Ahora intente **Problema 67**

EJEMPLO 4 ***Natación*** Una piscina está seccionada en 8 carriles de nado con anchos iguales. Escriba una expresión algebraica que represente el ancho de cada carril.



Estrategia Se comenzará haciendo que $x =$ al ancho de la piscina en pies. Después se identificarán las frases clave.

POR QUÉ Se desconoce el ancho de la piscina.

Solución La frase *seccionada en 8 carriles de nado con anchos iguales,* indica una división. Por tanto, el ancho de cada carril es de $\frac{x}{8}$ pies.

Auto-revisión 5

BECAS Parte de una donación de \$900 a una universidad fue al fondo para becas, el resto al fondo para edificios. Elija una variable para representar la cantidad donada a uno de los fondos. Después escriba una expresión que represente la cantidad donada al otro fondo.

Ahora intente **Problema 12**

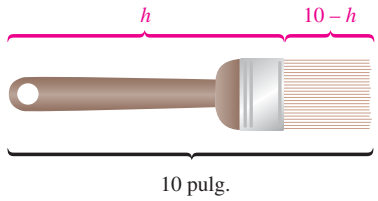
EJEMPLO 5 ***Pintar*** Una brocha de 10 pulgadas de largo tiene dos partes, el mango y las cerdas. Elija una variable para representar el largo de una de las partes. Después escriba una expresión para representar el largo de la otra parte.

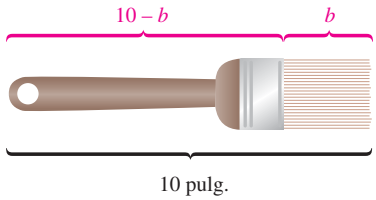
Estrategia Existen dos métodos. Se puede hacer que $h =$ la longitud del mango y que $b =$ el largo de las cerdas.

POR QUÉ El largo del mango y el largo de las cerdas se desconocen.

Solución Refiérase a la primera representación. Si h = el largo del mango (en pulgadas), entonces el largo de las cerdas es $10 - h$.

Ahora refiérase a la segunda representación. Si b = el largo de las cerdas (en pulgadas), entonces el largo del mango es $10 - b$.





EJEMPLO 6 ***Matriculaciones*** La matriculación del segundo semestre en un programa de enfermería fue 32 más que el doble de la del primer semestre. x representa la matriculación para uno de los semestres. Escriba una expresión que represente la matriculación para el otro semestre.

Somos/Veer

Estrategia Hay dos incógnitas: la matriculación del primer semestre y la matriculación del segundo semestre. Se comienza haciendo que x = la matriculación del primer semestre.

POR QUÉ Debido a que la matriculación del segundo semestre está relacionada con la matriculación del primer semestre.

Solución

Frase clave: *más que* **Traducción:** suma

Frase clave: *el doble que* **Traducción:** multiplicación por 2

La matriculación del segundo semestre fue $2x + 32$.

Auto-revisión 6

ELECCIONES En una elección, el funcionario recibió 55 votos menos que tres veces los votos del oponente. x representa el número de votos recibidos por un candidato. Escriba una expresión que represente el número de votos recibidos por el otro.

Ahora intente **Problema 91**

4 Evaluar expresiones algebraicas

Para **evaluar una expresión algebraica,** se sustituyen los números proporcionados para cada variable y se desarrollan los cálculos necesarios en el orden apropiado.

EJEMPLO 7 Evalúe cada expresión para $x = 3$ y $y = -4$:

a. $y^3 + y^2$ **b.** $-y - x$ **c.** $|5xy - 7|$ **d.** $\dfrac{y - 0}{x - (-1)}$

Estrategia Se reemplazará cada x y y en la expresión con el valor proporcionado de la variable y se evaluará la expresión utilizando las reglas del orden de las operaciones.

POR QUÉ *Evaluar una expresión* significa encontrar su valor numérico, una vez que se conoce el valor de su(s) variable(s).

Solución

a. $y^3 + y^2 = (-4)^3 + (-4)^2$ Sustituya el -4 para cada y. Se debe escribir el -4 dentro de paréntesis para que sea la base de cada expresión exponencial.

$= -64 + 16$ Evalúe cada expresión exponencial.

$= -48$ Realice la suma.

$$\begin{array}{r} {}^{5\,14} \\ \cancel{6}\cancel{4} \\ -\ 16 \\ \hline 48 \end{array}$$

Auto-revisión 7

Evalúe cada expresión para $a = -2$ y $b = 5$:

a. $|a^3 + b^2|$

b. $-a + 2ab$

c. $\dfrac{a + 2}{b - 3}$

Ahora intente **Problemas 73 y 85**

¡Cuidado! Cuando se reemplaza una variable con su valor numérico, con frecuencia se debe escribir el número reemplazado entre paréntesis para transmitir el significado apropiado.

b. $-y - x = -(-4) - 3$ Sustituya el -4 para y y el 3 para x. No olvide escribir el signo $-$ enfrente del (-4).

$= 4 - 3$ Simplifique: $-(-4) = 4$.

$= 1$

c. $|5xy - 7| = |5(3)(-4) - 7|$ Sustituya el 3 para x y -4 para y.

$= |-60 - 7|$ Realice la multiplicación: $5(3)(-4) = -60$.

$= |-67|$ Realice la resta: $-60 - 7 = -60 + (-7) = -67$.

$= 67$ Encuentre el valor absoluto de -67.

d. $\dfrac{y - 0}{x - (-1)} = \dfrac{-4 - 0}{3 - (-1)}$ Sustituya el 3 para x y -4 para y.

$= \dfrac{-4}{4}$ En el denominador, realice la resta: $3 - (-1) = 3 + 1 = 4$.

$= -1$ Realice la división.

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. 1, -12, 3, -4 **2. a.** factor **b.** término **3. a.** $t - 80$ **b.** $\frac{2}{3}T$ **c.** $(2a - 15)^2$ **4.** $(m + 15)$ minutos **5.** s = cantidad donada al fondo para becas (en dólares); $900 - s$ = cantidad donada al fondo para edificios (en dólares) **6.** x = el número de votos recibidos por el oponente; $3x - 55$ = número de votos recibidos por el funcionario **7. a.** 17 **b.** -18 **c.** 0

SECCIÓN 8.1 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

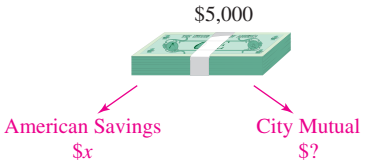
Complete los espacios.

1. Las _____ son letras (o símbolos) que representan números.
2. La palabra _____ proviene del título de un libro escrito por un matemático árabe alrededor del 800 d.n.e.
3. Las variables y/o los números pueden combinarse con las operaciones de la aritmética para crear _____ algebraicas.
4. Un _____ es un producto o un cociente de números y/o variables. Son ejemplos: $8x$, $\frac{t}{2}$ y $-cd^3$.
5. Los símbolos de suma separan las expresiones algebraicas en partes llamadas _____.
6. A un término, como el 27, que consiste en un solo número se le llama término _____.
7. El _____ del término $10x$ es el 10.
8. Para _____ $4x - 3$ para $x = 5$, se sustituye el 5 para x y se desarrollan los cálculos necesarios en orden.

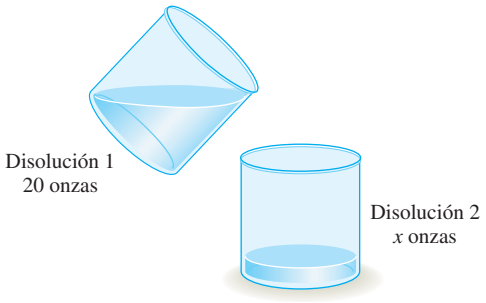
CONCEPTOS

9. CUBERTERÍA El cuchillo mostrado abajo es de 12 pulgadas de largo. Escriba una expresión que represente la longitud de la hoja.

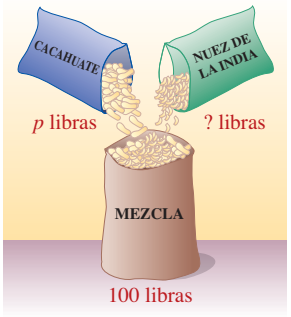
10. CUENTAS DE AHORROS Un estudiante heredó $5,000 y depositó x dólares en American Savings. Escriba una expresión que represente la cantidad de dinero que queda para depositar en una cuenta de City Mutual.



11. a. MEZCLA DE DISOLUCIONES Se vierte la disolución 1 en la disolución 2. Escriba una expresión que represente el número de onzas en la mezcla.



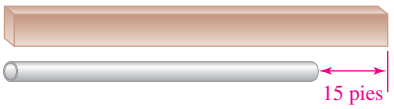
b. GOLOSINAS Se mezcló nuez de la india con p libras de cacahuate para preparar 100 libras de una mezcla. Escriba una expresión que represente el número de libras de nuez de la india utilizadas.



12. MATERIALES DE CONSTRUCCIÓN

a. Sea b = la longitud de la viga mostrada (en pies). Escriba una expresión que represente la longitud de la tubería.

b. Sea p = la longitud de la tubería (en pies). Escriba una expresión que represente la longitud de la viga.



NOTACIÓN

Complete cada solución. Evalúe la expresión para $a = 5$, $x = -2$ ***y*** $y = 4$.

13. $9a - a^2 = 9(\square) - (5)^2$
$= 9(5) - \square$
$= \square - 25$
$= 20$

14. $-x + 6y = -(\square) + 6(\square)$
$= \square + 24$
$= \square$

Escriba cada expresión sin utilizar un símbolo de multiplicación o paréntesis.

15. $4 \cdot x$

16. $P \cdot r \cdot t$

17. $2(w)$

18. $(x)(y)$

PRÁCTICA GUIADA

Use las siguientes variables para escribir cada propiedad de la suma y la multiplicación. Vea el Objetivo 1.

19. a. Escriba la propiedad conmutativa de la suma utilizando las variables x y y.

b. Escriba la propiedad asociativa de la suma utilizando las variables r, s y t.

20. a. Escriba la propiedad conmutativa de la multiplicación utilizando las variables m y n.

b. Escriba la propiedad asociativa de la multiplicación utilizando las variables x, y y z.

21. Escriba la propiedad de la multiplicación del cero utilizando la variable s.

22. Escriba la propiedad de la multiplicación del 1 utilizando la variable b.

Responda las siguientes operaciones acerca de términos y coeficientes. Vea el Ejemplo 1.

23. Considere la expresión $3x^3 + 11x^2 - x + 9$.

a. ¿Cuántos términos tiene la expresión?

b. ¿Cuál es el coeficiente de cada término?

24. Considere la expresión $4a^2 - 6a - 1$.

a. ¿Cuántos términos tiene la expresión?

b. ¿Cuál es el coeficiente de cada término?

25. Complete la siguiente tabla.

Término	$6m$	$-75t$	w	$\frac{1}{2}bh$	$\frac{x}{5}$	t
Coeficiente						

26. Complete la siguiente tabla.

Término	$4a$	$-2r$	c	$\frac{3}{4}lw$	$\frac{d}{9}$	$-x$
Coeficiente						

Determine si cada variable c se utiliza como un factor o como un término. Vea el Ejemplo 2.

27. $c + 32$

28. $-24c + 6$

29. $5c$

30. $a + b + c$

Traduzca cada frase a una expresión algebraica. Si no se proporciona una variable, use x como la variable. Vea el Ejemplo 3.

31. La suma de la longitud l y el 15

32. La diferencia de un número y el 10

33. El producto de un número y el 50

34. Tres cuartos de la población p

35. La razón de la cantidad ganada w y perdida l

36. El impuesto t sumado a c

37. P incrementado en dos tercios de p

38. 21 menos que la altura total h

39. El cuadrado de k, menos 2,005

40. s restado de S

41. 1 menos que el doble de la asistencia a

42. J reducido en 500

43. 1,000 separado en n formas iguales

44. Excede el costo c por 25,000

45. 90 más que el doble del precio actual p

46. 64 dividido entre el cubo de y

47. 3 por el total de 35, h y 300

48. Disminución de x en -17

49. 680 menos que la población total p

50. El triple del número de participantes esperados

51. El producto de d y el 4, disminuido en 15

52. El cociente de y y el 6, al cubo

53. El doble de la suma de 200 y t

54. El cuadrado de la cantidad 14 menos que x

55. El valor absoluto de la diferencia de a y 2

56. El valor absoluto de a, disminuido en 2

57. Una décima de la distancia d

58. El doble de la diferencia de x y 18

Traduzca cada expresión algebraica a palabras. Las respuestas podrían variar.) Vea el Objetivo 3.

59. $\frac{3}{4}r$

60. $\frac{2}{3}d$

61. $t - 50$

62. $c + 19$

63. xyz

64. $10ab$

65. $2m + 5$

66. $2s - 8$

Responda con una expresión algebraica. Vea el Ejemplo 4.

67. MODELAJE La falda de una modelo es de x pulgadas de largo. El diseñador después baja el dobladillo 2 pulgadas. ¿Cuál es la longitud de la falda arreglada?

68. LÍNEAS DE PRODUCCIÓN Un fabricante de bebidas produjo c latas de bebida de cola durante el turno matutino. Escriba una expresión para cuántos six-packs de bebida de cola se pueden ensamblar a partir de la producción del turno matutino.

69. PANTALONES La etiqueta en un par de jeans nuevos de 36 pulgadas de largo advierte que después de lavarse, se encogerán x pulgadas de longitud. ¿Cuál es la longitud de los jeans después de que se laven?

70. VIAJES POR CARRETERA Una caravana de b automóviles, cada uno transportando 5 personas, viajó a la capital del estado para una manifestación. ¿Cuántas personas había en la caravana?

Evalúe cada expresión, para $x = 3$, $y = -2$ y $z = -4$. Vea el Ejemplo 7.

71. $-y$

72. $-z$

73. $-z + 3x$

74. $-y - 5x$

75. $3y^2 - 6y - 4$

76. $-z^2 - z - 12$

77. $(3 + x)y$

78. $(4 + z)y$

79. $(x + y)^2 - |z + y|$

80. $[(z - 1)(z + 1)]^2$

81. $-\dfrac{2x + y^3}{y + 2z}$

82. $-\dfrac{2z^2 - x}{2x - y^2}$

Evalúe cada expresión. Vea el Ejemplo 7.

83. $b^2 - 4ac$ para $a = -1$, $b = 5$ y $c = -2$

84. $(x - a)^2 + (y - b)^2$ para $x = -2$, $y = 1$, $a = 5$ y $b = -3$

85. $a^2 + 2ab + b^2$ para $a = -5$ y $b = -1$

86. $\dfrac{a-x}{y-b}$ para $x=-2, y=1, a=5$ y $b=2$

87. $\dfrac{n}{2}[2a+(n-1)d]$ para $n=10, a=-4.2$ y $d=6.6$

88. $\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ para $a=-5, r=2$ y $n=3$

89. $(27c^2-4d^2)^3$ para $c=\frac{1}{3}$ y $d=\frac{1}{2}$

90. $\dfrac{-b^2+16a^2+1}{2}$ para $a=\frac{1}{4}$ y $b=-10$

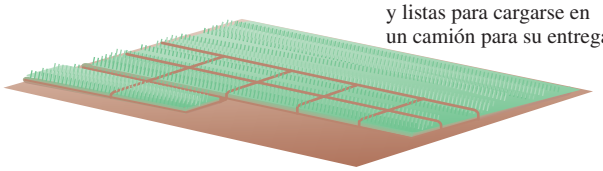
APLICACIONES

91. PESOS VEHICULARES Una Hummer H2 pesa 340 libras menos que el doble de una Honda Element.

a. s representa el peso de uno de los vehículos. Escriba una expresión para el peso del otro vehículo.

b. Si el peso de la Element es de 3,370 libras, ¿cuál es el peso de la Hummer?

92. GRANJAS DE CÉSPED La expresión $20{,}000-3s$ da el número de pies cuadrados de césped que quedan en un campo después de que se han removido s tiras. Suponga que una ciudad pide 7,000 tiras de césped. Evalúe la expresión y explique el resultado.



Tiras de césped, cortadas y listas para cargarse en un camión para su entrega

93. COMPAÑÍAS DE CÓMPUTO IBM fue fundada 80 años antes que Apple Computer. Dell Computer Corporation fue fundada 9 años después que Apple.

a. x representa la antigüedad (en años) de una de las compañías. Escriba expresiones para representar las antigüedades (en años) de las otras dos compañías.

b. El 1 de abril del 2008, Apple Computer Company tenía 32 años de antigüedad. ¿Qué tan antiguas eran entonces las otras dos compañías?

94. JUEGOS MECÁNICOS La distancia en pies que un objeto descenderá en t segundos está dada por la expresión $16t^2$. Encuentre la distancia que los pasajeros en "Drop Zone" descenderán durante los tiempos listados en la tabla.

©Joel Rogers, www.coastergallery.com

Tiempo (segundos)	Distancia (pies)
1	
2	
3	
4	

REDACCIÓN

95. ¿Qué es una variable? Dé un ejemplo de cómo se utilizan las variables.

96. ¿Qué es una expresión algebraica? Dé algunos ejemplos.

97. Explique por qué 2 *menos que* x no se traduce a $2 < x$.

98. En esta sección, se sustituyó un número por una variable. Liste algunos otros usos de la palabra *sustituir* que encuentre en su vida diaria.

REPASO

99. Encuentre el mcd de $\dfrac{5}{12}$ y $\dfrac{1}{15}$.

100. Simplifique: $\dfrac{3\cdot 3\cdot 5}{3\cdot 5\cdot 5\cdot 11}$

101. Evalúe: $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3$

102. Encuentre el resultado cuando se multiplica $\dfrac{7}{8}$ por su recíproco.

Objetivos

1. Simplificar productos.
2. Usar la propiedad distributiva.
3. Identificar términos similares.
4. Combinar términos similares.

SECCIÓN 8.2
Simplificación de expresiones algebraicas

En el álgebra, con frecuencia se reemplaza una expresión algebraica con otra que es equivalente y más sencilla en forma. Ese proceso, llamado *simplificación de una expresión algebraica,* con frecuencia involucra el uso de una o más propiedades de los números reales.

1 Simplificar productos

Pueden utilizarse las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación para simplificar ciertos productos. Por ejemplo, a continuación se simplifica $8(4x)$.

$$\begin{aligned} 8(4x) &= 8 \cdot (4 \cdot x) && \text{Rescriba el } 4x \text{ como } 4 \cdot x. \\ &= (8 \cdot 4) \cdot x && \text{Use la propiedad asociativa de la multiplicación para agrupar el 4 con el 8.} \\ &= 32x && \text{Realice la multiplicación dentro de los paréntesis.} \end{aligned}$$

Se ha encontrado que $8(4x) = 32x$. Se dice que $8(4x)$ y $32x$ son **expresiones equivalentes** debido a que para cada valor de x, representan el mismo número. Por ejemplo, si $x = 10$, ambas expresiones tienen un valor de 320. Si $x = -3$, ambas expresiones tienen un valor de -96.

Si x = 10

$$\begin{aligned} 8(4\boldsymbol{x}) &= 8[4(\boldsymbol{10})] \\ &= 8(40) \\ &= 320 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 32\boldsymbol{x} &= 32(\boldsymbol{10}) \\ &= 320 \end{aligned}$$

mismo resultado

Si x = −3

$$\begin{aligned} 8(4\boldsymbol{x}) &= 8[4(\boldsymbol{-3})] \\ &= 8(-12) \\ &= -96 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 32\boldsymbol{x} &= 32(\boldsymbol{-3}) \\ &= -96 \end{aligned}$$

mismo resultado

Consejo útil Por la propiedad conmutativa de la multiplicación se puede cambiar el *orden* de los factores. Por la propiedad asociativa de la multiplicación se puede cambiar la *agrupación* de los factores.

Auto-revisión 1

Simplifique:

a. $9 \cdot 6s$

b. $-4(6u)(-2)$

c. $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}m$

d. $36\left(\frac{2}{9}y\right)$

Ahora intente Problemas 15, 25, 29 y 31

EJEMPLO 1 Simplifique:

a. $9(3b)$ **b.** $15a(6)$ **c.** $3(7p)(-5)$ **d.** $\frac{8}{3} \cdot \frac{3}{8}r$ **e.** $35\left(\frac{4}{5}x\right)$

Estrategia Se utilizarán las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación para reordenar y reagrupar los factores en cada expresión.

POR QUÉ Se desea agrupar todos los factores numéricos de una expresión para que se pueda encontrar su producto.

Solución

a. $9(3b) = (9 \cdot 3)b$ Use la propiedad asociativa de la multiplicación para reagrupar los factores.

$= 27b$ Realice la multiplicación dentro de los paréntesis.

b. $15a(6) = 15(6)a$ Use la propiedad conmutativa de la multiplicación para reordenar los factores.

$= 90a$ Realice la multiplicación: $15(6) = 90$.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 3}\,15 \\ \times\ 6 \\ \hline 90 \end{array}$$

c. $3(7p)(-5) = [3(7)(-5)]p$ Use las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación para reordenar y reagrupar los factores.

$= [21(-5)]p$ Multiplique dentro de los corchetes.

$= -105p$ Complete la multiplicación dentro de los corchetes.

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times\ 5 \\ \hline 105 \end{array}$$

d. $\frac{8}{3} \cdot \frac{3}{8} r = \left(\frac{8}{3} \cdot \frac{3}{8}\right) r$ Use la propiedad asociativa de la multiplicación para agrupar los factores.

$= 1r$ Multiplique dentro de los paréntesis. El producto de un número y su recíproco es el 1: $\frac{\cancel{8}^{1}}{\cancel{3}_{1}} \cdot \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{8}_{1}} = 1$.

$= r$ El coeficiente 1 no necesita escribirse.

e. $35\left(\frac{4}{5}x\right) = \left(\frac{35}{1} \cdot \frac{4}{5}\right)x$ Use la propiedad asociativa de la multiplicación para reagrupar los factores.

$= \left(\frac{\overset{1}{\cancel{5}} \cdot 7 \cdot 4}{1 \cdot \underset{1}{\cancel{5}}}\right)x$ Factorice el 35 como $5 \cdot 7$ y después elimine al factor común de 5.

$= 28x$ Realice la multiplicación y después simplifique: $\frac{28}{1} = 28$.

2 Usar la propiedad distributiva

Otra propiedad que se utiliza con frecuencia para simplificar expresiones algebraicas es la **propiedad distributiva.** Para introducirla se evaluará $4(5 + 3)$ de dos maneras.

Método 1	***Método 2***
Use el orden de las operaciones:	***Distribuya la multiplicación:***
$4(\mathbf{5 + 3}) = 4(\mathbf{8})$	$\mathbf{4}(5 + 3) = \mathbf{4}(5) + \mathbf{4}(3)$
$= 32$	$= 20 + 12$
	$= 32$

Cada método da un resultado de 32. Esta observación sugiere la siguiente propiedad.

Propiedad distributiva

Para cualquier número a, b y c,

$$a(b + c) = ab + ac$$

El lenguaje del álgebra *Distribuir* significa dar de algo a varios. Probablemente ha *distribuido* dulces a los niños que tocan a su puerta en Halloween.

Para ilustrar un uso de la propiedad distributiva, se considera la expresión $5(x + 3)$. Dado que no se proporciona el valor de x, no se puede sumar x y 3 dentro de los paréntesis. Sin embargo, se puede distribuir la multiplicación por el factor de 5 que está fuera del paréntesis para x y para 3 y después sumar esos productos.

$\mathbf{5}(x + 3) = \mathbf{5}(x) + \mathbf{5}(3)$ Distribuya la multiplicación por 5.

$= 5x + 15$ Realice las multiplicaciones.

El lenguaje del álgebra Formalmente, se le conoce como *propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma.* Cuando se utiliza para escribir un producto, como $5(x + 2)$, como una suma, $5x + 10$, se dice que se han *eliminado* o *despejado* los paréntesis.

Auto-revisión 2

Multiplique:

a. $7(m + 2)$

b. $-80(8x + 3)$

c. $24\left(\frac{y}{6} + \frac{3}{8}\right)$

Ahora intente **Problemas 35, 37 y 39**

EJEMPLO 2

Multiplique: **a.** $8(m + 9)$ **b.** $-12(4t + 1)$ **c.** $6\left(\frac{x}{3} + \frac{9}{2}\right)$

Estrategia En cada caso, se distribuirá la multiplicación por el factor *fuera* de los paréntesis sobre cada término *dentro* de los paréntesis.

POR QUÉ En cada caso, no se puede simplificar la expresión dentro de los paréntesis. Para multiplicar, se debe utilizar la propiedad distributiva.

Solución

a. Se lee $8(m + 9)$ como "ocho por la *cantidad* de m más nueve". La palabra *cantidad* alerta sobre los símbolos de agrupación en la expresión.

$$8(m + 9) = 8 \cdot m + 8 \cdot 9 \quad \text{Distribuya la multiplicación por 8.}$$
$$= 8m + 72 \quad \text{Realice las multiplicaciones. Intente pasar directamente a este paso.}$$

b. $-12(4t + 1) = -12(4t) + (-12)(1)$ Distribuya la multiplicación por -12.

$$= -48t + (-12) \quad \text{Realice las multiplicaciones.}$$
$$= -48t - 12 \quad \text{Escriba el resultado en la forma más simple. Recuerde que el sumar el } -12 \text{ es lo mismo que restar el 12.}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times\ 4 \\ \hline 48 \end{array}$$

c. $6\left(\frac{x}{3} + \frac{9}{2}\right) = 6 \cdot \frac{x}{3} + 6 \cdot \frac{9}{2}$ Distribuya la multiplicación por 6.

$$= \frac{2 \cdot \overset{1}{\cancel{3}} \cdot x}{\underset{1}{\cancel{3}}} + \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot 3 \cdot 9}{\underset{1}{\cancel{2}}} \quad \text{Factorice el 6 como } 2 \cdot 3 \text{ y después elimine los factores comunes de 3 y 2.}$$
$$= 2x + 27$$

Dado que la resta es lo mismo que la suma del opuesto, la propiedad distributiva también se aplica a la resta.

$$a(b - c) = ab - ac$$

Auto-revisión 3

Multiplique:

a. $5(2x - 1)$

b. $-9(-y - 4)$

c. $-1(c - 22)$

Ahora intente **Problemas 43, 47 y 49**

EJEMPLO 3

Multiplique: **a.** $3(3b - 4)$ **b.** $-6(-3y - 8)$ **c.** $-1(t - 9)$

Estrategia En cada caso se distribuirá la multiplicación por el factor *fuera* de los paréntesis sobre cada término *dentro* de los paréntesis.

POR QUÉ En cada caso no se puede simplificar la expresión dentro de los paréntesis. Para multiplicar, se debe utilizar la propiedad distributiva.

Solución

a. $3(3b - 4) = 3(3b) - 3(4)$ Distribuya la multiplicación por 3.

$$= 9b - 12 \quad \text{Realice las multiplicaciones. Intente pasar directamente a este paso.}$$

¡Cuidado! Un error común es olvidar distribuir la multiplicación sobre cada uno de los términos dentro de los paréntesis.

$3(3b - 4) = 9b - 4$

b. $-6(-3y - 8) = -6(-3y) - (-6)(8)$ Distribuya la multiplicación por -6.

$= 18y - (-48)$ Realice las multiplicaciones.

$= 18y + 48$ Escriba el resultado en la forma más simple. Sume el opuesto del -48.

Otro método es escribir la resta dentro de los paréntesis como la suma del opuesto. Después se distribuye la multiplicación por -6 sobre la suma.

$-6(-3y - 8) = -6[-3y + (-8)]$ Sume el opuesto del 8.

$= -6(-3y) + (-6)(-8)$ Distribuya la multiplicación por -6.

$= 18y + 48$ Realice las multiplicaciones.

c. $-1(t - 9) = -1(t) - (-1)(9)$ Distribuya la multiplicación por -1.

$= -t - (-9)$ Realice las multiplicaciones.

$= -t + 9$ Escriba el resultado en la forma más simple. Sume el opuesto del -9.

Observe que la distribución de la multiplicación por -1 *cambia el signo* de cada término dentro de los paréntesis.

¡Cuidado! La propiedad distributiva no aplica a toda expresión que contiene paréntesis, sólo a aquellas donde la multiplicación está distribuida sobre una suma (o resta). Por ejemplo, para simplificar $6(5x)$, no se utiliza la propiedad distributiva.

Correcto	***Incorrecto***
$6(5x) = (6 \cdot 5)x = 30x$	$6(5x) = 30 \cdot 6x = 180x$

La propiedad distributiva puede extenderse a varias otras formas útiles. Dado que la multiplicación es conmutativa, se tiene:

$(b + c)a = ba + ca$ $\qquad$ $(b - c)a = ba - ca$

Para situaciones en las que hay más de dos términos dentro de paréntesis, se tiene:

$a(b + c + d) = ab + ac + ad$ $\qquad$ $a(b - c - d) = ab - ac - ad$

EJEMPLO 4

Multiplique:

a. $(6x + 4)\frac{1}{2}$ **b.** $2(a - 3b)8$ **c.** $-0.3(3a - 4b + 7)$

Estrategia Se multiplicará cada término dentro de los paréntesis por el factor (o factores) fuera de los paréntesis.

POR QUÉ En cada caso no se puede simplificar la expresión dentro de los paréntesis. Para multiplicar se utiliza la propiedad distributiva.

Solución

a. $(6x + 4)\frac{1}{2} = (6x)\frac{1}{2} + (4)\frac{1}{2}$ Distribuya la multiplicación por $\frac{1}{2}$.

$= 3x + 2$ Realice las multiplicaciones.

Auto-revisión 4

Multiplique:

a. $(-6x - 24)\frac{1}{3}$

b. $6(c - 2d)9$

c. $-0.7(2r + 5s - 8)$

Ahora intente **Problemas 53, 55 y 57**

b. Esta expresión contiene tres factores.

$$2(a - 3b)\mathbf{8} = 2 \cdot \mathbf{8}(a - 3b)$$

Use la propiedad conmutativa de la multiplicación para reordenar los factores.

$$= 16(a - 3b)$$

Multiplique el 2 y el 8 para obtener 16.

$$= 16a - 48b$$

Distribuya la multiplicación por 16.

$$0.3 \times 3 = 0.9 \qquad 0.3 \times 4 = 1.2$$

c. $\mathbf{-0.3}(3a - 4b + 7) = \mathbf{-0.3}(3a) - (\mathbf{-0.3})(4b) + (\mathbf{-0.3})(7)$

$$= -0.9a + 1.2b - 2.1$$

Realice cada multiplicación.

$$0.3 \times 7 = 2.1$$

Se puede utilizar la propiedad distributiva para encontrar el opuesto de una suma. Por ejemplo, para encontrar $-(x + 10)$, se interpreta el símbolo $-$ como un factor de -1 y se procede como a continuación:

$$-(x + 10) = \mathbf{-1}(x + 10)$$

Reemplace el símbolo $-$ con -1.

$$= \mathbf{-1}(x) + (\mathbf{-1})(10)$$

Distribuya la multiplicación por -1.

$$= -x - 10$$

En general, se tiene la siguiente propiedad.

El opuesto de una suma

El opuesto de una suma es la suma de los opuestos.

Para cualquier número a y b,

$$-(a + b) = -a + (-b)$$

Auto-revisión 5

Simplifique: $-(-5x + 18)$

Ahora intente **Problema 59**

EJEMPLO 5 Simplifique: $-(-9s - 3)$.

Estrategia Se multiplicará cada término dentro de los paréntesis por -1.

POR QUÉ El $-$ fuera de los paréntesis representa un factor de -1 que se va a distribuir.

Solución

$$-(-9s - 3) = \mathbf{-1}(-9s - 3)$$

Reemplace el símbolo $-$ enfrente de los paréntesis con -1.

$$= \mathbf{-1}(-9s) - (\mathbf{-1})(3)$$

Distribuya la multiplicación por -1.

$$= 9s + 3$$

Realice las multiplicaciones. Intente pasar directamente a este paso.

3 Identificar términos similares

Antes de explicar los métodos para la simplificación de expresiones algebraicas que involucran suma y resta, se necesita introducir más vocabulario nuevo.

Términos similares

Los **términos similares** son términos que contienen exactamente las mismas variables elevadas a exactamente las mismas potencias. A los términos constantes en una expresión se les considera términos similares. A los términos que no son términos similares se les llama **términos no similares.**

Aquí hay varios ejemplos.

Términos similares	*Términos no similares*	
$4x$ y $7x$	$4x$ y $7y$	Las variables no son las mismas.
$-10p^2$ y $25p^2$	$-10p$ y $25p^2$	Misma variable, pero potencias diferentes.
$\frac{1}{3}c^3d$ y c^3d	$\frac{1}{3}c^3d$ y c^3	Las variables no son las mismas.

Consejo útil Cuando se busquen términos similares, no busque en los coeficientes de los términos. Sólo considere los factores variables de cada término. Para que dos términos sean términos similares, sólo pueden diferir sus coeficientes.

EJEMPLO 6 Identifique los términos similares en cada expresión:

a. $7r + 5 + 3r$ **b.** $6x^4 - 6x^2 - 6x$ **c.** $-17m^3 + 3 - 2 + m^3$

Estrategia Primero, se identificarán los términos de la expresión. Después se buscarán los términos que contienen las mismas variables elevadas a exactamente las mismas potencias.

POR QUÉ Si dos términos contienen las mismas variables elevadas a las mismas potencias, son términos similares.

Solución

a. $7r + 5 + 3r$ contiene los términos similares $7r$ y $3r$.

b. Dado que los exponentes en x son diferentes, $6x^4 - 6x^2 - 6x$ no contiene términos similares.

c. $-17m^3 + 3 - 2 + m^3$ contiene dos pares de términos similares: $-17m^3$ y m^3 son términos similares y los términos constantes, 3 y -2, son términos similares.

Auto-revisión 6

Identifique los términos similares:

a. $2x - 2y + 7y$

b. $5p^2 - 12 + 17p^2 + 2$

Ahora intente **Problema 63**

4 Combinar términos similares

Para sumar o restar objetos, deben ser similares. Por ejemplo, las fracciones que se van a sumar deben tener un denominador común. Cuando se suman decimales, se alinean las columnas para asegurar que se sumen décimas a décimas, centésimas a centésimas, etc. Lo mismo es verdadero cuando se trabaja con los términos de una expresión algebraica. Sólo pueden sumarse o restarse si son términos similares.

Esta expresión puede simplificarse debido a que contiene términos similares.

$$3x + 4x$$

Esta expresión no puede simplificarse debido a que sus términos no son términos similares.

$$3x + 4y$$

Recuerde que la propiedad distributiva puede escribirse de las siguientes formas:

$$(b + c)a = ba + ca \qquad (b - c)a = ba - ca$$

Se pueden utilizar estas formas de la propiedad distributiva de manera inversa para simplificar una suma o resta de términos similares. Por ejemplo, se puede simplificar $3x + 4x$ como a continuación:

$$3x + 4x = (3 + 4)x \qquad \text{Use la forma: } ba + ca = (b + c)a.$$
$$= 7x$$

Consejo útil Tal como 3 manzanas más 4 manzanas es igual a 7 manzanas.

$$3x + 4x = 7x$$

Se puede simplificar $15m^2 - 9m^2$ de manera similar:

$$15m^2 - 9m^2 = (15 - 9)m^2 \quad \text{Use la forma: } ba - ca = (b - c)a.$$
$$= 6m^2$$

El lenguaje del álgebra A la simplificación de una suma o diferencia de términos similares se le llama *combinación de términos similares.*

Estos ejemplos sugieren la siguiente regla general.

Combinación de términos similares

Los términos similares pueden combinarse sumando o restando los coeficientes de los términos y conservando las mismas variables con los mismos exponentes.

Auto-revisión 7

Simplifique si es posible:

a. $3x + 5x$

b. $-6y + (-6y) + 9y$

c. $4.4s^4 - 3.9s^4$

d. $4a - 2$

e. $\frac{10}{7}c - \frac{4}{7}c$

Ahora intente **Problemas 67, 71, 79 y 83**

EJEMPLO 7 Simplifique combinando términos similares, si es posible:

a. $2x + 9x$ **b.** $-8p + (-2p) + 4p$ **c.** $0.5s^3 - 0.3s^3$ **d.** $4w + 6$ **e.** $\frac{4}{9}b + \frac{7}{9}b$

Estrategia Se utilizará la propiedad distributiva de manera inversa para sumar (o restar) los coeficientes de los términos similares. Se conservarán las mismas variables elevadas a las mismas potencias.

POR QUÉ El *combinar términos similares* significa sumar o restar los términos similares en una expresión.

Solución

a. Dado que $2x$ y $9x$ son términos similares con la variable común x, se pueden combinar.

$$2x + 9x = 11x \quad \text{Piense: } (2 + 9)x = 11x.$$

b. $-8p + (-2p) + 4p = -6p$ Piense: $[-8 + (-2) + 4]p = -6p$.

c. $0.5s^3 - 0.3s^3 = 0.2s^3$ Piense: $(0.5 - 0.3)s^3 = 0.2s^3$.

d. Dado que $4w$ y 6 no son términos similares, no pueden combinarse. La expresión $4w + 6$ no se simplifica.

e. $\frac{4}{9}b + \frac{7}{9}b = \frac{11}{9}b$ Piense: $\left(\frac{4}{9} + \frac{7}{9}\right)b = \frac{11}{9}b$.

Auto-revisión 8

Simplifique:

a. $9h - h$ **b.** $9h + h$

c. $9h - 8h$ **d.** $8h - 9h$

Ahora intente **Problemas 73 y 77**

EJEMPLO 8 Simplifique combinando términos similares:

a. $16t - 15t$ **b.** $16t - t$ **c.** $15t - 16t$ **d.** $16t + t$

Estrategia A medida que se combinan términos similares, se debe tener cuidado cuando se trabaja con términos como t y $-t$.

POR QUÉ Los coeficientes de 1 y -1 por lo regular no se escriben.

Solución

a. $16t - 15t = t$ Piense: $(16 - 15)t = 1t = t$.

b. $16t - t = 15t$ Piense: $16t - 1t = (16 - 1)t = 15t$.

c. $15t - 16t = -t$ Piense: $(15 - 16)t = -1t = -t$.

d. $16t + t = 17t$ Piense: $16t + 1t = (16 + 1)t = 17t$.

EJEMPLO 9 Simplifique: $6a^2 + 54a - 4a - 36$

Estrategia Primero, se identificarán los términos similares en la expresión. Después se utilizará la propiedad distributiva de manera inversa para combinarlos.

POR QUÉ Para *simplificar* una expresión se utilizan las propiedades de los números reales para escribir una expresión equivalente en la forma más simple.

Solución
Se pueden combinar los términos similares que involucran la variable a.

$$6a^2 + \mathbf{54a - 4a} - 36 = 6a^2 + \mathbf{50a} - 36$$ Piense: $(54 - 4)a = 50a$.

Auto-revisión 9
Simplifique:
$7y^2 + 21y - 2y - 6$
Ahora intente **Problema 93**

EJEMPLO 10 Simplifique: $4(x + 5) - 5 - (2x - 4)$

Estrategia Primero, se eliminarán los paréntesis. Después se identificarán los términos similares y se combinarán.

POR QUÉ Para *simplificar* una expresión se utilizan las propiedades de los números reales, como la propiedad distributiva, para escribir una expresión equivalente en la forma más simple.

Solución
Aquí se utiliza la propiedad distributiva de *manera directa* (para eliminar los paréntesis) y de *manera inversa* (para combinar términos similares).

$$4(x + 5) - 5 \mathbf{-} (2x - 4) = 4(x + 5) - 5 \mathbf{-} \mathbf{1}(2x - 4)$$ Reemplace el símbolo − enfrente de $(2x - 4)$ con -1.

$$= \mathbf{4x} + 20 - 5 \mathbf{-} \mathbf{2x} + 4$$ Distribuya la multiplicación por 4 y -1.

$$= \mathbf{2x} + 19$$ Piense: $(4 - 2)x = 2x$. Piense: $(20 - 5 + 4) = 19$.

Auto-revisión 10
Simplifique:
$6(3y - 1) + 2 - (-3y + 4)$
Ahora intente **Problema 99**

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. a. $54s$ **b.** $48u$ **c.** m **d.** $8y$ **2. a.** $7m + 14$ **b.** $-640x - 240$ **c.** $4y + 9$
3. a. $10x - 5$ **b.** $9y + 36$ **c.** $-c + 22$ **4. a.** $-2x - 8$ **b.** $54c - 108d$
c. $-1.4r - 3.5s + 5.6$ **5.** $5x - 18$ **6. a.** $-2y$ y $7y$ **b.** $5p^2$ y $17p^2$; -12 y 2
7. a. $8x$ **b.** $-3y$ **c.** $0.5s^4$ **d.** no se simplifica **e.** $\frac{6}{7}c$ **8. a.** $8h$ **b.** $10h$ **c.** h
d. $-h$ **9.** $7y^2 + 19y - 6$ **10.** $21y - 8$

SECCIÓN 8.2 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Complete los espacios.

1. El _____ la expresión $5(6x)$ significa escribirla en la forma más simple: $5(6x) = 30x$.

2. $5(6x)$ y $30x$ son expresiones _____ debido a que para cada valor de x, representan el mismo número.

3. Para desarrollar la multiplicación $2(x + 8)$, se utiliza la propiedad _____.

4. A $-(c + 9)$ se le llama _____ de una suma.

5. A los términos como $7x^2$ y $5x^2$, los cuales tienen las mismas variables elevadas a exactamente la misma potencia, se les llama términos _____.

6. Cuando se escribe $9x + x$ como $10x$, se dice que se tienen _____ términos similares.

CONCEPTOS

7. a. Complete los espacios para simplificar la expresión.

$$4(9t) = (\square \cdot \square)t = \square t$$

b. ¿Qué propiedad utilizó en el inciso a?

8. a. Complete los espacios para simplificar la expresión.

$$-6y \cdot 2 = \square \cdot \square \cdot y = \square y$$

b. ¿Qué propiedad utilizó en el inciso a?

9. Complete los espacios.

a. $2(x + 4) = 2x \square 8$

b. $2(x - 4) = 2x \square 8$

c. $-2(x + 4) = -2x \square 8$

d. $-2(-x - 4) = 2x \square 8$

10. Complete los espacios para combinar términos similares.

a. $4m + 6m = (\square + \square)m = \square m$

b. $30n^2 - 50n^2 = (\square - \square)n^2 = \square n^2$

c. $12 + 32d + 15 = 32d + \square$

d. Los términos similares pueden combinarse sumando o restando los _____ de los términos y conservando las mismas _____ con los mismos exponentes.

11. Simplifique cada expresión, si es posible.

a. $5(2x)$ **b.** $5 + 2x$

c. $6(-7x)$ **d.** $6 - 7x$

e. $2(3x)(3)$ **f.** $2 + 3x + 3$

12. Complete los espacios: El distribuir la multiplicación por -1 cambia el _____ de cada término dentro de los paréntesis.

$$-(x + 10) = \square (x + 10) = -x \square 10$$

NOTACIÓN

13. Traduzca a símbolos.

a. Seis por la cantidad de h menos cuatro.

b. El opuesto de la suma de z y 16.

14. Escriba una expresión equivalente para las expresiones proporcionadas utilizando el menor número de símbolos.

a. $1x$ **b.** $-1d$ **c.** $0m$

d. $5x - (-1)$ **e.** $16t + (-6)$

PRÁCTICA GUIADA

Simplifique. **Vea el Ejemplo 1.**

15. $3 \cdot 4t$ **16.** $9 \cdot 3s$

17. $9(7m)$ **18.** $12n(8)$

19. $5(-7q)$ **20.** $-7(5t)$

21. $5t \cdot 60$ **22.** $70a \cdot 10$

23. $(-5.6x)(-2)$ **24.** $(-4.4x)(-3)$

25. $5(4c)(3)$ **26.** $9(2h)(2)$

27. $-4(-6)(-4m)$ **28.** $-5(-9)(-4n)$

29. $\frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5}g$ **30.** $\frac{9}{7} \cdot \frac{7}{9}k$

31. $12\left(\frac{5}{12}x\right)$ **32.** $15\left(\frac{4}{15}w\right)$

33. $8\left(\frac{3}{4}y\right)$ **34.** $27\left(\frac{2}{3}x\right)$

Multiplique. **Vea el Ejemplo 2.**

35. $5(x + 3)$ **36.** $4(x + 2)$

37. $-3(4x + 9)$ **38.** $-5(8x + 9)$

39. $45\left(\frac{x}{5} + \frac{2}{9}\right)$ **40.** $35\left(\frac{y}{5} + \frac{8}{7}\right)$

41. $0.4(x + 4)$ **42.** $2.2(2q + 1)$

Multiplique. **Vea el Ejemplo 3.**

43. $6(6c - 7)$ **44.** $9(9d - 3)$

45. $-6(13c - 3)$ **46.** $-2(10s - 11)$

47. $-15(-2t - 6)$ **48.** $-20(-4z - 5)$

49. $-1(-4a + 1)$ **50.** $-1(-2x + 3)$

Multiplique. **Vea el Ejemplo 4.**

51. $(3t + 2)8$ **52.** $(2q + 1)9$

53. $(3w - 6)\frac{2}{3}$ **54.** $(2y - 8)\frac{1}{2}$

55. $4(7y + 4)2$ **56.** $8(2a - 3)4$

57. $25(2a - 3b + 1)$ **58.** $5(9s - 12t - 3)$

Simplifique. **Vea el Ejemplo 5.**

59. $-(x - 7)$ **60.** $-(y + 1)$

61. $-(-5.6y + 7)$ **62.** $-(-4.8a - 3)$

Identifique los términos similares en cada expresión, si los hay. **Vea el Ejemplo 6.**

63. $3x + 2 - 2x$

64. $3y + 4 - 11y + 6$

65. $-12m^4 - 3m^3 + 2m^2 - m^3$

66. $6x^3 + 3x^2 + 6x$

Simplifique combinando términos similares. **Vea los Ejemplos 7 y 8.**

67. $3x + 7x$

68. $12y - 15y$

69. $-4x + 4x$

70. $-16y + 16y$

71. $-7b^2 + 27b^2$

72. $-2c^3 + 12c^3$

73. $13r - 12r$

74. $25s + s$

75. $36y + y - 9y$

76. $32a - a + 5a$

77. $43s^3 - 44s^3$

78. $8j^3 - 9j^3$

79. $-9.8c + 6.2c$

80. $-5.7m + 4.3m$

81. $-0.2r - (-0.6r)$

82. $-1.1m - (-2.4m)$

83. $\frac{3}{5}t + \frac{1}{5}t$

84. $\frac{3}{16}x - \frac{5}{16}x$

85. $-\frac{7}{16}x - \frac{3}{16}x$

86. $-\frac{5}{18}x - \frac{7}{18}x$

Simplifique combinando términos similares, si es posible. **Vea el Ejemplo 9.**

87. $15y - 10 - y - 20y$

88. $9z - 7 - z - 19z$

89. $3x + 4 - 5x + 1$

90. $4b + 9 - 9b + 9$

91. $6m^2 - 6m + 6$

92. $9a^2 + 9a - 9$

93. $4x^2 + 5x - 8x + 9$

94. $10y^2 - 8y + y - 7$

Simplifique. **Vea el Ejemplo 10.**

95. $2z + 5(z - 3)$

96. $12(m + 11) - 11$

97. $2(s^2 - 7) - (s^2 - 2)$

98. $4(d^2 - 3) - (d^2 - 1)$

99. $-9(3r - 9) - 7(2r - 7)$

100. $-6(3t - 6) - 3(11t - 3)$

101. $36\left(\frac{2}{9}x - \frac{3}{4}\right) + 36\left(\frac{1}{2}\right)$

102. $40\left(\frac{3}{8}y - \frac{1}{4}\right) + 40\left(\frac{4}{5}\right)$

INTÉNTELO

Simplifique cada expresión.

103. $6 - 4(-3c - 7)$

104. $10 - 5(-5g - 1)$

105. $-4r - 7r + 2r - r$

106. $-v - 3v + 6v + 2v$

107. $24\left(-\frac{5}{6}r\right)$

108. $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}g$

109. $a + a + a$

110. $t - t - t - t$

111. $60\left(\frac{3}{20}r - \frac{4}{15}\right)$

112. $72\left(\frac{7}{8}f - \frac{8}{9}\right)$

113. $5(-1.2x)$

114. $5(-6.4c)$

115. $-(c + 7) + 2(c - 3)$

116. $-(z + 2) + 5(3 - z)$

117. $a^3 + 2a^2 + 4a - 2a^2 - 4a - 8$

118. $c^3 - 3c^2 + 9c + 3c^2 - 9c + 27$

APLICACIONES

En los ejercicios 119–122, recuerde que el perímetro de una figura es igual a la suma de las longitudes de sus lados.

119. LA CRUZ ROJA En 1891, Clara Barton fundó la Cruz Roja. Su símbolo es una bandera blanca que porta una cruz roja. Si cada lado de la cruz tiene una longitud x, escriba una expresión que represente el perímetro de la cruz.

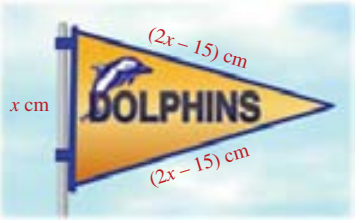
120. BILLARES Las mesas de billar varían en tamaño, pero todas las mesas son del doble de largo que de ancho.

a. Si la mesa de billar es de x pies de ancho, escriba una expresión que represente su longitud.

b. Escriba una expresión que represente el perímetro de la mesa.

121. PING PONG Escriba una expresión que represente el perímetro de la mesa de ping pong.

122. COSER Escriba una expresión que represente la longitud del ribeteado amarillo necesario para delinear un banderín con las longitudes de los lados proporcionadas.



REDACCIÓN

123. Explique por qué la propiedad distributiva aplica para $2(3 + x)$ pero no para $2(3x)$.

124. Explique cómo combinar términos similares. Dé un ejemplo.

REPASO

Evalúe cada expresión para $x = -3$, $y = -5$ y $z = 0$.

125. $\frac{x - y^2}{2y - 1 + x}$

126. $\frac{2y + 1}{x} - x$

Objetivos

1. Determinar si un número es una solución.
2. Usar la propiedad de igualdad de la suma.
3. Usar la propiedad de igualdad de la resta.
4. Usar la propiedad de igualdad de la multiplicación.
5. Usar la propiedad de igualdad de la división.

SECCIÓN 8.3
Resolución de ecuaciones utilizando las propiedades de igualdad

En esta sección se introducen cuatro propiedades de la igualdad que se utilizan para resolver ecuaciones.

1 Determinar si un número es una solución

Una **ecuación** es un enunciado que indica que dos expresiones son iguales. Todas las ecuaciones contienen un símbolo $=$. Un ejemplo es $x + 5 = 15$. El símbolo $=$ separa la ecuación en dos partes: La expresión $x + 5$ es el **lado izquierdo** y el 15 es el **lado derecho.** La letra x es la **variable** (o **incógnita**). Los lados de una ecuación pueden invertirse, por lo que se puede escribir $x + 5 = 15$ o $15 = x + 5$

- Una ecuación puede ser verdadera: $6 + 3 = 9$
- Una ecuación puede ser falsa: $2 + 4 = 7$
- Una ecuación puede no ser verdadera ni falsa: Por ejemplo, $x + 5 = 15$ no es verdadera ni falsa debido a que no se sabe qué número representa x.

Una ecuación que contiene una variable se hace verdadera o falsa sustituyendo un número para la variable. Si se sustituye 10 para x en $x + 5 = 15$, la ecuación resultante es verdadera: $10 + 5 = 15$. Si se sustituye 1 para x, la ecuación resultante es falsa: $1 + 5 = 15$. A un número que hace verdadera una ecuación cuando se sustituye para la variable se le llama **solución** y se dice que **satisface** la ecuación. Por tanto, 10 es una solución de $x + 5 = 15$ y 1 no lo es.

El lenguaje del álgebra Es importante conocer la diferencia entre una *ecuación* y una *expresión*. Una ecuación contiene un símbolo $=$ y una expresión no.

Auto-revisión 1

¿25 es una solución de $10 - x = 35 - 2x$?

Ahora intente **Problema 19**

EJEMPLO 1 ¿9 es una solución de $3y - 1 = 2y + 7$?

Estrategia Se sustituirá el 9 para cada y en la ecuación y se evaluará por separado la expresión en el lado izquierdo y la expresión en el lado derecho.

POR QUÉ Si resulta un enunciado verdadero, el 9 es una solución de la ecuación. Si se obtiene un enunciado falso, el 9 no es una solución.

Solución

Evalué la expresión en el lado izquierdo.

$$3y - 1 = 2y + 7$$
$$3(9) - 1 \stackrel{?}{=} 2(9) + 7$$
$$27 - 1 \stackrel{?}{=} 18 + 7$$
$$26 = 25$$

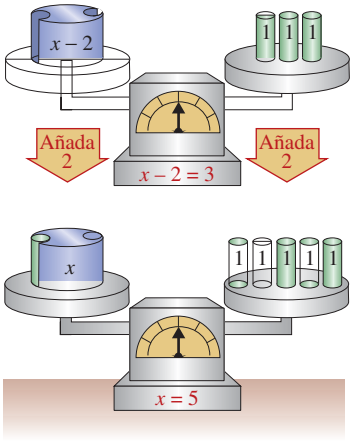
Lea $\stackrel{?}{=}$ como "es posiblemente igual a".

Evalúe la expresión en el lado derecho.

Dado que $26 = 25$ es falso, el 9 *no* es una solución de $3y - 1 = 2y + 7$.

2 Usar la propiedad de igualdad de la suma

El **resolver una ecuación** significa encontrar todos los valores de la variable que hacen verdadera la ecuación. Se puede desarrollar una comprensión de cómo resolver ecuaciones refiriéndose a las balanzas mostradas a la derecha.



La primera balanza representa la ecuación $x - 2 = 3$. La balanza está en equilibrio debido a que los pesos en el lado izquierdo y en el lado derecho son iguales. Para encontrar x, se debe añadir 2 al lado izquierdo. Para mantener en equilibrio la balanza, también se debe añadir 2 al lado derecho. Después de hacer esto, se observa que x es balanceada por el 5. Por tanto, x debe ser de 5. Se dice que se ha resuelto la ecuación $x - 2 = 3$ y que la solución es el 5.

En este ejemplo, se resolvió $x - 2 = 3$ transformándola a una *ecuación equivalente*, más simple, $x = 5$.

Ecuaciones equivalentes

A las ecuaciones con las mismas soluciones se les llama **ecuaciones equivalentes.**

El procedimiento que se utilizó para resolver $x - 2 = 3$ ilustra la siguiente propiedad de la igualdad.

Propiedad de igualdad de la suma

El sumar el mismo número a ambos lados de una ecuación no cambia su solución.

Para cualquier número a, b y c,

si $a = b$, entonces $a + c = b + c$

Cuando se utiliza esta propiedad de la igualdad, la ecuación resultante es *equivalente a la original.* Ahora se mostrará cómo se utiliza para resolver $x - 2 = 3$.

EJEMPLO 2 Resuelva: $x - 2 = 3$

Estrategia Se utilizará una propiedad de la igualdad para despejar la variable en un lado de la ecuación.

POR QUÉ Para resolver la ecuación original, se requiere encontrar una ecuación equivalente más sencilla de la forma **$x =$ un número**, cuya solución sea obvia.

Solución

Se utilizará la propiedad de suma de la igualdad para despejar x en el lado izquierdo de la ecuación. Se puede deshacer la resta del 2 sumando 2 a ambos lados.

$x - 2 = 3$	Esta es la ecuación a resolver.
$x - 2 + 2 = 3 + 2$	Sume el 2 a ambos lados.
$x + 0 = 5$	En el lado izquierdo, la suma de un número y su opuesto es cero: $-2 + 2 = 0$. En el lado derecho, sume: $3 + 2 = 5$.
$x = 5$	En el lado izquierdo, cuando se suma 0 a un número, el resultado es el mismo número.

Auto-revisión 2

Resuelva: $n - 16 = 33$

Ahora intente **Problema 37**

Dado que 5 es de manera obvia la solución de la ecuación equivalente $x = 5$, la solución de la ecuación original, $x - 2 = 3$, también es el 5. Para comprobar este resultado, se sustituye el 5 para x en la ecuación original y se simplifica.

$x - 2 = 3$ Esta es la ecuación original.
$5 - 2 \stackrel{?}{=} 3$ Sustituya el 5 para x.
$3 = 3$ Verdadero

Dado que el enunciado $3 = 3$ es verdadero, el 5 es la solución de $x - 2 = 3$.

El lenguaje del álgebra Se resuelven ecuaciones escribiendo una serie de pasos que resulta en una ecuación equivalente de la forma

x = un número o *un número = x*

Se dice que la variable está *despejada* en un lado de la ecuación. *Despejada* significa sola o por sí misma.

Auto-revisión 3

Resuelva:
a. $-5 = b - 38$
b. $-20 + n = 29$

Ahora intente **Problemas 39 y 43**

EJEMPLO 3

Resuelva: **a.** $-19 = y - 7$ **b.** $-27 + y = -3$

Estrategia Se utilizará una propiedad de la igualdad para despejar la variable en un lado de la ecuación.

POR QUÉ Para resolver la ecuación original, se requiere encontrar una ecuación equivalente más sencilla de la forma **y = un número** o un **número = y**, cuya solución sea obvia.

Solución

a. Para despejar y en el lado derecho, se utiliza la propiedad de igualdad de la suma. Se puede deshacer la resta del 7 sumando el 7 a ambos lados.

$-19 = y - 7$ Esta es la ecuación a resolver.
$-19 + 7 = y - 7 + 7$ Sume el 7 a ambos lados.
$-12 = y$ La suma de un número y su opuesto es cero: $-7 + 7 = 0$.

Comprobación:
$-19 = y - 7$ Esta es la ecuación original.
$-19 \stackrel{?}{=} -12 - 7$ Sustituya el -12 para y.
$-19 = -19$ Verdadero

Dado que el enunciado $-19 = -19$ es verdadero, la solución es el -12.

¡Cuidado! Se puede resolver una ecuación para que la variable esté despejada en cualquier lado de la ecuación. Observe que $-12 = y$ es equivalente a $y = -12$.

b. Para despejar y, se utiliza la propiedad de igualdad de la suma. Se puede eliminar el -27 en el lado izquierdo sumando su opuesto a ambos lados.

$-27 + y = -3$ Esta es la ecuación a resolver.
$-27 + y + 27 = -3 + 27$ Sume el 27 a ambos lados.
$y = 24$ En el lado izquierdo, sume. En el lado derecho, la suma de un número y su opuesto es cero: $-27 + 27 = 0$.

Comprobación:
$-27 + y = -3$ Esta es la ecuación original.
$-27 + 24 \stackrel{?}{=} -3$ Sustituya el 24 para y.
$-3 = -3$ Verdadero

La solución de $-27 + y = -3$ es el 24.

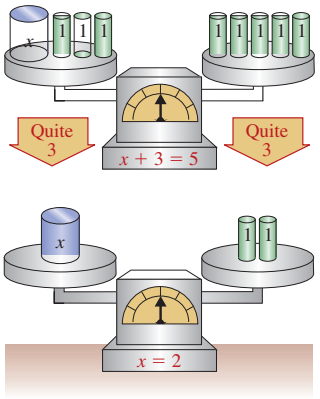
¡Cuidado! Después de comprobar el resultado, tenga cuidado al enunciar su conclusión. Aquí, sería incorrecto decir:

La solución es el -3.

El número que se estaba comprobando era el 24, no el -3.

3 Usar la propiedad de igualdad de la resta

Para introducir otra propiedad de la igualdad, considere la primera balanza mostrada a la derecha, la cual representa la ecuación $x + 3 = 5$. La balanza está en equilibrio debido a que los pesos en los lados izquierdo y derecho son iguales. Para encontrar x, se necesita quitar 3 del lado izquierdo. Para mantener la escala en equilibrio, también se debe quitar 3 del lado derecho. Después de hacer esto, se observa que x está balanceada por el 2. Por tanto, x debe ser de 2. Se dice que se ha resuelto la ecuación $x + 3 = 5$ y que la solución es el 2. Este ejemplo ilustra la siguiente propiedad de la igualdad.



Propiedad de igualdad de la resta

El restar el mismo número de ambos lados de una ecuación no cambia su solución.

Para cualquier número a, b y c,

si $a = b$, entonces $a - c = b - c$

Cuando se utiliza esta propiedad de la igualdad, la ecuación resultante es equivalente a la original.

EJEMPLO 4

Resuelva: **a.** $x + \frac{1}{8} = \frac{7}{4}$ **b.** $54.9 + x = 45.2$

Estrategia Se utilizará una propiedad de la igualdad para despejar la variable en un lado de la ecuación.

POR QUÉ Para resolver la ecuación original, se requiere encontrar una ecuación equivalente más sencilla de la forma **$x =$ un número**, cuya solución sea obvia.

Solución

a. Para despejar x, se utiliza la propiedad de igualdad de la resta. Se puede deshacer la suma del $\frac{1}{8}$ restando $\frac{1}{8}$ de ambos lados.

$$x + \frac{1}{8} = \frac{7}{4}$$ Esta es la ecuación a resolver.

$$x + \frac{1}{8} - \mathbf{\frac{1}{8}} = \frac{7}{4} - \mathbf{\frac{1}{8}}$$ Reste $\frac{1}{8}$ de ambos lados.

$$x = \frac{7}{4} - \frac{1}{8}$$ En el lado izquierdo, $\frac{1}{8} - \frac{1}{8} = 0$.

$$x = \frac{7}{4} \cdot \mathbf{\frac{2}{2}} - \frac{1}{8}$$ En el lado derecho, construya $\frac{7}{4}$ para que tenga un denominador de 8.

$$x = \frac{14}{8} - \frac{1}{8}$$ Multiplique los numeradores y multiplique los denominadores.

$$x = \frac{13}{8}$$ Reste los numeradores. Escriba el resultado sobre el denominador común de 8.

La solución es $\frac{13}{8}$. Compruebe sustituyéndola para x en la ecuación original.

Auto-revisión 4

Resuelva:

a. $x + \frac{4}{15} = \frac{11}{5}$

b. $0.7 + a = 0.2$

Ahora intente Problemas 49 y 51

b. Para despejar x, se utiliza la propiedad de igualdad de la resta. Se puede deshacer la suma del 54.9 restando el 54.9 de ambos lados.

$$54.9 + x = 45.2 \quad \text{Esta es la ecuación a resolver.}$$

$$54.9 + x - \mathbf{54.9} = 45.2 - \mathbf{54.9} \quad \text{Reste el 54.9 de ambos lados.}$$

$$x = -9.7 \quad \text{En el lado izquierdo, } 54.9 - 54.9 = 0.$$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 4\,14} \\ \not{5}\not{4}.9 \\ -\ 45.2 \\ \hline 9.7 \end{array}$$

Comprobación: $54.9 + \boldsymbol{x} = 45.2$ Esta es la ecuación original.

$54.9 + (\mathbf{-9.7}) \stackrel{?}{=} 45.2$ Sustituya el -9.7 para x.

$45.2 = 45.2$ Verdadero

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 4\,14} \\ \not{5}\not{4}.9 \\ -\ 9.7 \\ \hline 45.2 \end{array}$$

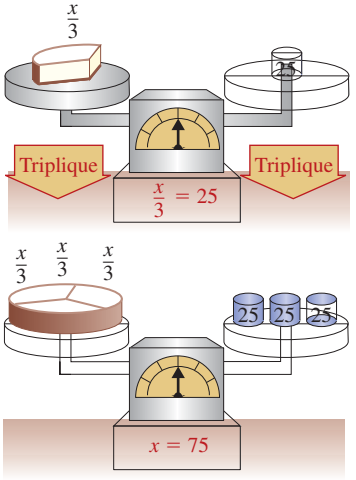
La solución es el -9.7.

Consejo útil En el Ejemplo 4a, la solución, $\frac{13}{8}$, es una fracción impropia. Se habría podido decidir escribirla como el número mixto $1\frac{5}{8}$, pero esto no es necesario. En el álgebra es una práctica común dejar tal solución en forma de fracción impropia. Sólo asegúrese que esté simplificada (que el numerador y el denominador no tengan factores comunes diferentes del 1.)

4 Usar la propiedad de igualdad de la multiplicación

La primera balanza mostrada a la derecha representa la ecuación $\frac{x}{3} = 25$. La balanza está en equilibrio debido a que los pesos en el lado izquierdo y en el lado derecho son iguales. Para encontrar x, se debe triplicar (multiplicar por 3) el peso en el lado izquierdo. Para mantener la balanza en equilibrio, también se debe triplicar el peso en el lado derecho. Después de hacer esto, se observa que x está balanceada por el 75. Por tanto, x debe ser de 75.

El procedimiento que se utilizó para resolver $\frac{x}{3} = 25$ ilustra la siguiente propiedad de la igualdad.



Propiedad de igualdad de la multiplicación

El multiplicar ambos lados de una ecuación por el mismo número diferente del cero no cambia su solución.

Para cualquier número a, b y c, donde c no es 0,

si $a = b$, entonces $ca = cb$

Cuando se utiliza esta propiedad, la ecuación resultante es equivalente a la original. Ahora se mostrará cómo se utiliza para resolver $\frac{x}{3} = 25$ de manera algebraica.

Auto-revisión 5

Resuelva: $\dfrac{b}{24} = 3$

Ahora intente **Problema 53**

EJEMPLO 5

Resuelva: $\dfrac{x}{3} = 25$

Estrategia Se utilizará una propiedad de la igualdad para despejar la variable en un lado de la ecuación.

POR QUÉ Para resolver la ecuación original, se requiere encontrar una ecuación equivalente más sencilla de la forma ***x* = un número**, cuya solución sea obvia.

Solución

Para despejar x, se utiliza la propiedad de igualdad de la multiplicación. Se puede deshacer la división entre 3 multiplicando ambos lados por 3.

$\frac{x}{3} = 25$ Esta es la ecuación a resolver.

$3 \cdot \frac{x}{3} = 3 \cdot 25$ Multiplique ambos lados por 3.

$\frac{3}{1} \cdot \frac{x}{3} = 3 \cdot 25$ Escriba el 3 como $\frac{3}{1}$.

$\begin{array}{r} 25 \\ \times\ 3 \\ \hline 75 \end{array}$

$\frac{3x}{3} = 75$ Realice las multiplicaciones.

$1x = 75$ Simplifique $\frac{3x}{3}$ eliminando el factor común de 3 en el numerador y el denominador: $\frac{\overset{1}{\cancel{3}}x}{\underset{1}{\cancel{3}}} = x$.

$x = 75$ El coeficiente de 1 no se escribe dado que $1x = x$.

Si se sustituye el 75 para x en $\frac{x}{3} = 25$, se obtiene el enunciado verdadero $25 = 25$. Esto verifica que el 75 es la solución.

Dado que el producto de un número y su recíproco es el 1, se pueden resolver ecuaciones como $\frac{2}{3}x = 6$, donde el coeficiente del término variable es una fracción, como a continuación.

EJEMPLO 6

Resuelva: **a.** $\frac{2}{3}x = 6$ **b.** $-\frac{5}{4}x = 3$

Estrategia Se utilizará una propiedad de la igualdad para despejar la variable en un lado de la ecuación.

POR QUÉ Para resolver la ecuación original, se requiere encontrar una ecuación equivalente más sencilla de la forma ***x* = un número**, cuya solución sea obvia.

Solución

a. Dado que el coeficiente de x es $\frac{2}{3}$, se puede despejar x multiplicando ambos lados de la ecuación por el recíproco de $\frac{2}{3}$, el cual es $\frac{3}{2}$.

$\frac{2}{3}x = 6$ Esta es la ecuación a resolver.

$\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}x = \frac{3}{2} \cdot 6$ Para deshacer la multiplicación por $\frac{2}{3}$, multiplique ambos lados por el recíproco de $\frac{2}{3}$.

$\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}\right)x = \frac{3}{2} \cdot 6$ Use la propiedad asociativa de la multiplicación para agrupar $\frac{3}{2}$ y $\frac{2}{3}$.

$1x = 9$ En el lado izquierdo, el producto de un número y su recíproco es el 1: $\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1$. En el lado derecho, $\frac{3}{2} \cdot 6 = \frac{18}{2} = 9$.

$x = 9$ El coeficiente de 1 no se necesita escribir dado que $1x = x$.

Comprobación:

$\frac{2}{3}x = 6$ Esta es la ecuación original.

$\frac{2}{3}(9) \stackrel{?}{=} 6$ Sustituya el 9 para x en la ecuación original.

$6 = 6$ En el lado izquierdo, $\frac{2}{3}(9) = \frac{18}{3} = 6$.

Dado que el enunciado $6 = 6$ es verdadero, 9 es la solución de $\frac{2}{3}x = 6$.

Auto-revisión 6

Resuelva:

a. $\frac{7}{2}x = 21$

b. $-\frac{3}{8}b = 2$

Ahora intente **Problemas 61 y 67**

b. Para despejar x, multiplique ambos lados por el recíproco de $-\frac{5}{4}$, el cual es $-\frac{4}{5}$.

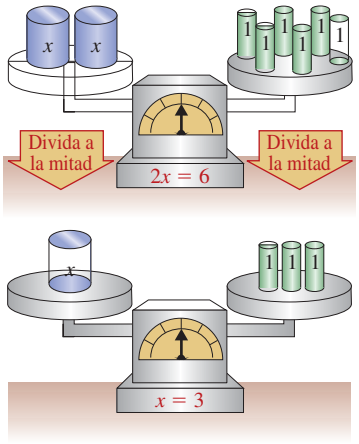
$$-\frac{5}{4}x = 3$$ Esta es la ecuación a resolver.

$$-\frac{4}{5}\left(-\frac{5}{4}x\right) = -\frac{4}{5}(3)$$ Para deshacer la multiplicación por $-\frac{5}{4}$, multiplique ambos lados por el recíproco de $-\frac{5}{4}$.

$$1x = -\frac{12}{5}$$ En el lado izquierdo, el producto de un número y su recíproco es el 1: $-\frac{4}{5}\left(-\frac{5}{4}\right) = 1$.

$$x = -\frac{12}{5}$$ El coeficiente de 1 no se necesita escribir dado que $1x = x$.

La solución es $-\frac{12}{5}$. Verifique que ésta es correcta comprobando.



5 Usar la propiedad de igualdad de la división

Para introducir una cuarta propiedad de la igualdad, considere la primera balanza a la izquierda, la cual representa la ecuación $2x = 6$. La balanza está en equilibrio debido a que los pesos en los lados izquierdo y derecho son iguales. Para encontrar x se necesita dividir a la mitad la cantidad del peso en el lado izquierdo. Para mantener la balanza en equilibrio, se debe dividir a la mitad la cantidad del peso en el lado derecho. Después de hacer esto se observa que x está balanceada por el 3. Por tanto, x debe ser de 3. Se dice que se ha resuelto la ecuación $2x = 6$ y que la solución es el 3. Este ejemplo ilustra la siguiente propiedad de la igualdad.

Propiedad de igualdad de la división

Dividir ambos lados de una ecuación entre el mismo número diferente del cero no cambia su solución.

Para cualquier número a, b y c, donde c no es 0,

$$\text{si } a = b, \text{ entonces } \frac{a}{c} = \frac{b}{c}$$

Cuando se utiliza esta propiedad de la igualdad, la ecuación resultante es equivalente a la original.

Auto-revisión 7

Resuelva:
a. $16x = 176$
b. $10.04 = -0.4r$

Ahora intente **Problemas 69 y 79**

EJEMPLO 7 Resuelva: **a.** $2t = 80$ **b.** $-6.02 = -8.6t$

Estrategia Se utilizará una propiedad de la igualdad para despejar la variable en un lado de la ecuación.

POR QUÉ Para resolver la ecuación original, se requiere encontrar una ecuación equivalente más sencilla de la forma ***t* = un número** o un **número = *t***, cuya solución sea obvia.

Solución

a. Para despejar t en el lado izquierdo, se utiliza la propiedad de igualdad de la división. Se puede deshacer la multiplicación por 2 dividiendo ambos lados de la ecuación entre 2.

$$2t = 80$$ Esta es la ecuación a resolver.

$$\frac{2t}{2} = \frac{80}{2}$$ Divida ambos lados entre 2.

$$1t = 40$$ En el lado izquierdo, simplifique $\frac{2t}{2}$ eliminando el factor común de 2 en el numerador y el denominador: $\frac{2t}{2} = t$. En el Lado derecho, realice la división.

$$t = 40$$ El coeficiente de 1 no se necesita escribir dado que $1t = t$.

Si se sustituye el 40 para t en $2t = 80$, se obtiene el enunciado verdadero $80 = 80$. Esto verifica que el 40 es la solución.

Dado que la división entre 2 es lo mismo que la multiplicación por $\frac{1}{2}$, también se puede resolver $2t = 80$ utilizando la propiedad de igualdad de la multiplicación. También se podría despejar t multiplicando ambos lados por el *recíproco* del 2, el cual es $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2} \cdot 2t = \frac{1}{2} \cdot 80$$

b. Para despejar t en el lado derecho, se utiliza la propiedad de igualdad de la división. Se puede deshacer la multiplicación por -8.6 dividiendo ambos lados entre -8.6.

$-6.02 = -8.6t$ Esta es la ecuación a resolver.

$\frac{-6.02}{-8.6} = \frac{-8.6t}{-8.6}$ Use la propiedad de igualdad de la división: Divida ambos lados entre -8.6.

$0.7 = t$ En el lado izquierdo, realice la división. El cociente de dos números negativos es positivo. En el lado derecho, simplifique eliminando el factor común de -8.6 del numerador y el denominador: $\frac{-8.6t}{-8.6} = t$

$$\begin{array}{r} 0.7 \\ 86\overline{)60.2} \\ -\,602 \\ \hline 0 \end{array}$$

La solución es el 0.7. Verifique que ésta es correcta comprobando.

Consejo útil Por lo regular es más sencillo multiplicar cada lado si el coeficiente del término variable es una *fracción* y dividir cada lado si el coeficiente es un *entero* o un *decimal*.

EJEMPLO 8

Resuelva: $-x = 3$.

Estrategia La variable x no está despejada, debido a que hay un signo $-$ enfrente de ella. Dado que el término $-x$ tiene un coeficiente implícito de -1, la ecuación puede escribirse como $-1x = 3$. Se necesita seleccionar una propiedad de igualdad y utilizarla para despejar la variable en un lado de la ecuación.

POR QUÉ Para encontrar la solución de la ecuación original, se requiere encontrar una ecuación equivalente más sencilla de la forma ***x* = un número**, cuya solución sea obvia.

Solución Para despejar x, se puede multiplicar o dividir ambos lados por/entre -1.

Multiplique ambos lados por −1:

$-x = 3$ La ecuación a resolver

$-1x = 3$ Escriba: $-x = -1x$

$(-1)(-1x) = (-1)3$

$1x = -3$

$x = -3$

Divida ambos lados entre −1:

$-x = 3$ La ecuación a resolver

$-1x = 3$ Escriba: $-x = -1x$

$\frac{-1x}{-1} = \frac{3}{-1}$

$1x = -3$ En el lado izquierdo, $\frac{-1}{-1} = 1$.

$x = -3$

Comprobación: $-x = 3$ Esta es la ecuación original.

$-(-3) \stackrel{?}{=} 3$ Sustituya el -3 para x.

$3 = 3$ En el lado izquierdo, el opuesto del -3 es el 3.

Dado que el enunciado $3 = 3$ es verdadero, el -3 es la solución de $-x = 3$.

Auto-revisión 8

Resuelva: $-h = -12$

Ahora intente **Problema 81**

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. sí **2.** 49 **3. a.** 33 **b.** 49 **4. a.** $\frac{29}{15}$ **b.** -0.5 **5.** 72 **6. a.** 6 **b.** $-\frac{16}{3}$ **7. a.** 11 **b.** -25.1 **8.** 12

SECCIÓN 8.3 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Complete los espacios.

1. Una _____ como $x + 1 = 7$, es un enunciado que indica que dos expresiones son iguales.
2. Cualquier número que haga una ecuación verdadera cuando se sustituye para la variable se dice que _____ la ecuación. A tal número se le llama _____.
3. _____ una ecuación significa encontrar todos los valores de la variable que hacen verdadera la ecuación.
4. Para resolver una ecuación, se _____ la variable en un lado del símbolo igual.
5. A las ecuaciones con las mismas soluciones se les llama ecuaciones _____.
6. Para _____ la solución de una ecuación, se sustituye el valor para la variable en la ecuación original y se determina si el resultado es un enunciado verdadero.

CONCEPTOS

7. Considere $x + 6 = 12$.
   - **a.** ¿Cuál es el lado izquierdo de la ecuación?
   - **b.** ¿Esta ecuación es verdadera o falsa?
   - **c.** ¿El 5 es la solución?
   - **d.** ¿El 6 satisface la ecuación?
8. Para cada ecuación, determine qué operación se está desarrollando sobre la variable. Después explique cómo deshacer esa operación para despejar la variable.
   - **a.** $x - 8 = 24$
   - **b.** $x + 8 = 24$
   - **c.** $\frac{x}{8} = 24$
   - **d.** $8x = 24$
9. Complete las siguientes propiedades de la igualdad.
   - **a.** Si $a = b$, entonces
     $a + c = b +$ ☐ y $a - c = b -$ ☐
   - **b.** Si $a = b$, entonces $ca =$ ☐b y $\frac{a}{c} = \frac{b}{\square}\ (c \neq 0)$
10. **a.** Para resolver $\frac{h}{10} = 20$, ¿se multiplican ambos lados de la ecuación por 10 o por 20?
    - **b.** Para resolver $4k = 16$, ¿se resta 4 de ambos lados de la ecuación o se dividen ambos lados de la ecuación entre 4?
11. Simplifique cada expresión.
    - **a.** $x + 7 - 7$
    - **b.** $y - 2 + 2$
    - **c.** $\frac{5t}{5}$
    - **d.** $6 \cdot \frac{h}{6}$
12. **a.** Para resolver $-\frac{4}{5}x = 8$, se pueden multiplicar ambos lados por el recíproco de $-\frac{4}{5}$. ¿Cuál es el recíproco de $-\frac{4}{5}$?
    - **b.** ¿Qué es $-\frac{5}{4}\left(-\frac{4}{5}\right)$?

NOTACIÓN

Complete cada solución para resolver la ecuación.

13. $x - 5 = 45$

$x - 5 +$ ☐ $= 45 +$ ☐

$x =$ ☐

Comprobación: $x - 5 = 45$

☐ $- 5$ ☐ 45

☐ $= 45$ Verdadero

☐ es la solución.

14. $8x = 40$

$\frac{8x}{\square} = \frac{40}{\square}$

$x =$ ☐

Comprobación: $8x = 40$

$8($☐$) \stackrel{?}{=} 40$

☐ $= 40$ Verdadero

☐ es la solución.

15. **a.** ¿Qué significa el símbolo $\stackrel{?}{=}$?
    - **b.** Si resuelve una ecuación y obtiene $50 = x$, ¿puede escribir $x = 50$?
16. Complete el espacio: $-x =$ ☐x

PRÁCTICA GUIADA

Compruebe para determinar si el número proporcionado es una solución de la ecuación. Vea el Ejemplo 1.

17. $6,\ x + 12 = 28$
18. $110,\ x - 50 = 60$
19. $-8,\ 2b + 3 = -15$
20. $-2,\ 5t - 4 = -16$
21. $5,\ 0.5x = 2.9$
22. $3.5,\ 1.2 + x = 4.7$
23. $-6,\ 33 - \frac{x}{2} = 30$
24. $-8,\ \frac{x}{4} + 98 = 100$
25. $-2,\ |c - 8| = 10$
26. $-45,\ |30 - r| = 15$
27. $12,\ 3x - 2 = 4x - 5$
28. $5,\ 5y + 8 = 3y - 2$
29. $-3,\ x^2 - x - 6 = 0$
30. $-2,\ y^2 + 5y - 3 = 0$
31. $1,\ \frac{2}{a+1} + 5 = \frac{12}{a+1}$
32. $4,\ \frac{2t}{t-2} - \frac{4}{t-2} = 1$
33. $\frac{3}{4},\ x - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$
34. $\frac{7}{3},\ -4 = a + \frac{5}{3}$
35. $-3,\ (x - 4)(x + 3) = 0$
36. $5,\ (2x + 1)(x - 5) = 0$

Use una propiedad de la igualdad para resolver cada ecuación. Después compruebe el resultado. Vea los Ejemplos 2–4.

37. $a - 5 = 66$
38. $x - 34 = 19$
39. $9 = p - 9$
40. $3 = j - 88$
41. $x - 1.6 = -2.5$
42. $y - 1.2 = -1.3$

43. $-3 + a = 0$ **44.** $-1 + m = 0$

45. $d - \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$ **46.** $\frac{7}{15} = b - \frac{1}{15}$

47. $x + 7 = 10$ **48.** $y + 15 = 24$

49. $s + \frac{1}{5} = \frac{4}{25}$ **50.** $\frac{1}{6} = h + \frac{4}{3}$

51. $3.5 + f = 1.2$ **52.** $9.4 + h = 8.1$

Use una propiedad de la igualdad para resolver cada ecuación. Después compruebe el resultado. Vea el Ejemplo 5.

53. $\frac{x}{15} = 3$ **54.** $\frac{y}{7} = 12$

55. $0 = \frac{v}{11}$ **56.** $\frac{d}{49} = 0$

57. $\frac{d}{-7} = -3$ **58.** $\frac{c}{-2} = -11$

59. $\frac{y}{0.6} = -4.4$ **60.** $\frac{y}{0.8} = -2.9$

Use una propiedad de la igualdad para resolver cada ecuación. Vea el Ejemplo 6.

61. $\frac{4}{5}t = 16$ **62.** $\frac{11}{15}y = 22$

63. $\frac{2}{3}c = 10$ **64.** $\frac{9}{7}d = 81$

65. $-\frac{7}{2}r = 21$ **66.** $-\frac{4}{5}s = 36$

67. $-\frac{5}{4}h = -5$ **68.** $-\frac{3}{8}t = -3$

Use una propiedad de la igualdad para resolver cada ecuación. Vea el Ejemplo 7.

69. $4x = 16$ **70.** $5y = 45$

71. $63 = 9c$ **72.** $40 = 5t$

73. $23b = 23$ **74.** $16 = 16h$

75. $-8h = 48$ **76.** $-9a = 72$

77. $-100 = -5g$ **78.** $-80 = -5w$

79. $-3.4y = -1.7$ **80.** $-2.1x = -1.26$

Use una propiedad de la igualdad para resolver cada ecuación. Vea el Ejemplo 8.

81. $-x = 18$ **82.** $-y = 50$

83. $-n = \frac{4}{21}$ **84.** $-w = \frac{11}{16}$

INTÉNTELO

Resuelva cada ecuación. Después compruebe el resultado.

85. $8.9 = -4.1 + t$ **86.** $7.7 = -3.2 + s$

87. $-2.5 = -m$ **88.** $-1.8 = -b$

89. $-\frac{9}{8}x = 3$ **90.** $-\frac{14}{3}c = 7$

91. $\frac{3}{4} = d + \frac{1}{10}$ **92.** $\frac{5}{9} = r + \frac{1}{6}$

93. $-15x = -60$ **94.** $-14x = -84$

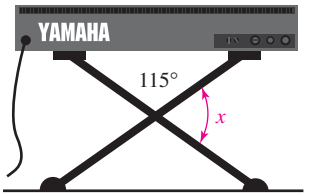
95. $-10 = n - 5$ **96.** $-8 = t - 2$

97. $\frac{h}{-40} = 5$ **98.** $\frac{x}{-7} = 12$

99. $a - 93 = 2$ **100.** $18 = x - 3$

APLICACIONES

101. SINTETIZADORES Para encontrar la medida del ángulo desconocido, la cual se representa con x, resuelva la ecuación $x + 115 = 180$.



102. SEÑALES DE ALTO Para encontrar la medida de un ángulo de la señal de alto, la cual se representa con x, resuelva la ecuación $8x = 1{,}080$.

103. LOTERÍA Cuando el premio gordo de una lotería de Florida en el 2006 fue ganado por un grupo de 16 enfermeros empleados en el Centro médico Southwest Florida, cada uno recibió $375,000. Para encontrar la cantidad del premio gordo, el cual se representa con x, resuelva la ecuación $\frac{x}{16} = 375{,}000$.

104. TENIS Billie Jean King ganó 40 títulos de tenis Grand Slam en su carrera. Esto es 14 menos que la número uno de todos los tiempos, Martina Navratilova. Para encontrar el número de títulos ganados por Navratilova, el cual se representa con x, resuelva la ecuación $40 = x - 14$.

REDACCIÓN

105. ¿A qué se refiere con resolver una ecuación?

106. Cuando se resuelve una ecuación, se *despeja* la variable en un lado de la ecuación. Escriba un enunciado en el que se utilice la palabra *despejar* en un contexto diferente.

107. Explique el error en la siguiente solución.

Resuelva: $x + 2 = 40$

$x + 2 - 2 = 40$

$x = 40$

108. Después de resolver una ecuación, ¿cómo se comprueba el resultado?

REPASO

109. Evalúe $-9 - 3x$ para $x = -3$.

110. Evalúe: $-5^2 + (-5)^2$

111. Traduzca a símbolos: Reste x de 45

112. Evalúe: $\frac{2^3 + 3(5 - 3)}{15 - 4 \cdot 2}$

Objetivos

1. Usar más de una propiedad de la igualdad para resolver ecuaciones.
2. Simplificar expresiones para resolver ecuaciones.

SECCIÓN 8.4
Más acerca de la resolución de ecuaciones

Se han resuelto ecuaciones sencillas utilizando las propiedades de la igualdad. Ahora se expandirán las habilidades de resolución de ecuaciones considerando ecuaciones más complicadas.

1 Usar más de una propiedad de la igualdad para resolver ecuaciones

En ocasiones se deben utilizar varias propiedades de la igualdad para resolver una ecuación. Por ejemplo, en el lado izquierdo de $2x + 6 = 10$, la variable x es multiplicada por el 2 y después se le suma el 6 a ese producto. Para despejar x se utiliza las reglas del orden de las operaciones en modo inverso. Primero, se deshace la suma del 6 y después se deshace la multiplicación por 2.

$2x + 6 = 10$	Esta es la ecuación a resolver.
$2x + 6 \mathbf{- 6} = 10 \mathbf{- 6}$	Para deshacer la suma del 6, reste el 6 de ambos lados.
$2x = 4$	Realice las restas.
$\frac{2x}{\mathbf{2}} = \frac{4}{\mathbf{2}}$	Para deshacer la multiplicación por 2, divida ambos lados entre 2.
$x = 2$	En el lado izquierdo, simplifique eliminando el factor común de 2 del numerador y el denominador: $\frac{\overset{1}{\cancel{2}}x}{\underset{1}{\cancel{2}}} = x$. En el lado derecho, realice la división.

La solución es el 2.

Auto-revisión 1

Resuelva: $8x - 13 = 43$

Ahora intente **Problema 15**

EJEMPLO 1 Resuelva: $12x + 5 = 17$

Estrategia Primero, se utilizará una propiedad de la igualdad para despejar el *término variable* en un lado de la ecuación. Después se utilizará una segunda propiedad de la igualdad para despejar la *variable* en sí.

POR QUÉ Para resolver la ecuación original, se requiere encontrar una ecuación equivalente más sencilla de la forma ***x* = un número**, cuya solución sea obvia.

Solución

En el lado izquierdo de la ecuación, x es multiplicada por el 12 y después se le suma el 5 a ese producto. Para despejar x, se deshacen las operaciones en el orden opuesto.

- Para despejar el término variable, $12x$, se resta el 5 de ambos lados para deshacer la suma del 5.
- Para despejar la variable, x, se dividen ambos lados entre 12 para deshacer la multiplicación por 12.

$12x + 5 = 17$	Esta es la ecuación a resolver. Primero, se requiere despejar el término variable, 12x.
$12x + 5 \mathbf{- 5} = 17 \mathbf{- 5}$	Use la propiedad de igualdad de la resta: Reste el 5 de ambos lados para despejar 12x.
$12x = 12$	Realice las restas: $5 - 5 = 0$ y $17 - 5 = 12$. Ahora se requiere despejar la variable, x.
$\frac{12x}{\mathbf{12}} = \frac{12}{\mathbf{12}}$	Use la propiedad de igualdad de la división: Divida ambos lados entre 12 para despejar x.
$x = 1$	En el lado izquierdo simplifique: $\frac{\overset{1}{\cancel{12}}x}{\underset{1}{\cancel{12}}} = x$. En el lado derecho realice la división.

Comprobación:

$12x + 5 = 17$ Esta es la ecuación original.

$12(\mathbf{1}) + 5 \stackrel{?}{=} 17$ Sustituya el 1 para x.

$12 + 5 \stackrel{?}{=} 17$ Realice la multiplicación en el lado izquierdo.

$17 = 17$ Verdadero

La solución es el 1.

¡Cuidado! Cuando compruebe soluciones, siempre utilice la ecuación original.

El lenguaje del álgebra En el Ejemplo 1, se restó el 5 de ambos lados para despejar el *término variable,* $12x$. Después se dividió ambos lados entre 12 para despejar la *variable,* x.

EJEMPLO 2

Resuelva: $10 = -5s - 60$

Estrategia Primero se utilizará una propiedad de la igualdad para despejar el *término variable* en un lado de la ecuación. Después se utilizará una segunda propiedad de la igualdad para despejar la *variable* en sí.

POR QUÉ Para resolver la ecuación original, se desea encontrar una ecuación equivalente más sencilla de la forma **un número** $= s$, cuya solución sea obvia.

Solución

En el lado derecho de la ecuación, s es multiplicada por el -5, y después se resta el 60 de ese producto. Para despejar s, se deshacen las operaciones en el orden opuesto.

- Para despejar el término variable, $-5s$, se suma el 60 a ambos lados para deshacer la resta del 60.
- Para despejar la variable, s, se dividen ambos lados entre -5 para deshacer la multiplicación por -5.

$10 = -5s - 60$ Esta es la ecuación a resolver. Primero, se requiere despejar el término variable, $-5s$.

$10 + \mathbf{60} = -5s - 60 + \mathbf{60}$ Use la propiedad de suma de la igualdad: Sume el 60 a ambos lados para despejar $-5s$.

$70 = -5s$ Realice las sumas: $10 + 60 = 70$ y $-60 + 60 = 0$. Ahora se requiere despejar la variable, s.

$\frac{70}{\mathbf{-5}} = \frac{-5s}{\mathbf{-5}}$ Use la propiedad de igualdad de la división: Divida ambos lados entre -5 para despejar s.

$-14 = s$ En el lado izquierdo, realice la división. El cociente de un número positivo y uno negativo es negativo.

En el lado derecho, simplifique: $\frac{\overset{1}{\cancel{-5}}s}{\underset{1}{\cancel{-5}}} = s$.

$5\overline{)70}$ → 14, -5, 20, -20, 0

Comprobación:

$10 = -5s - 60$ Esta es la ecuación original.

$10 \stackrel{?}{=} -5(\mathbf{-14}) - 60$ Sustituya el -14 para s.

$10 \stackrel{?}{=} 70 - 60$ Realice la multiplicación en el lado derecho.

$10 = 10$ Verdadero

$14 \times 5 = 70$

La solución es el –14.

Auto-revisión 2

Resuelva: $40 = -4d - 8$

Ahora intente **Problema 25**

Auto-revisión 3

Resuelva: $\frac{7}{12}a - 6 = -27$

Ahora intente **Problema 29**

EJEMPLO 3

Resuelva: $\frac{5}{8}m - 2 = -12$.

Estrategia Se utilizarán las propiedades de la igualdad para despejar la variable en un lado de la ecuación.

POR QUÉ Para resolver la ecuación original, se requiere encontrar una ecuación equivalente más sencilla de la forma ***m* = un número**, cuya solución sea obvia.

Solución

Se observa que el coeficiente de m es $\frac{5}{8}$ y se procede como a continuación.

- Para despejar el término variable $\frac{5}{8}m$, se suma el 2 a ambos lados para deshacer la resta del 2.
- Para despejar la variable, m, se multiplican ambos lados por $\frac{8}{5}$ para deshacer la multiplicación por $\frac{5}{8}$.

$$\frac{5}{8}m - 2 = -12$$
Esta es la ecuación a resolver. Primero, se rerquiere despejar el término variable, $\frac{5}{8}m$.

$$\frac{5}{8}m - 2 + 2 = -12 + 2$$
Use la propiedad de igualdad de la suma: Sume el 2 a ambos lados para despejar $\frac{5}{8}m$.

$$\frac{5}{8}m = -10$$
Realice las sumas: $-2 + 2 = 0$ y $-12 + 2 = -10$. Ahora se requiere despejar la variable, m.

$$\frac{8}{5}\left(\frac{5}{8}m\right) = \frac{8}{5}(-10)$$
Use la propiedad de igualdad de la multiplicación: Multiplique ambos lados por $\frac{8}{5}$ (el cual es el reciproco de $\frac{5}{8}$) para despejar m.

$$m = -16$$
En el lado izquierdo: $\frac{8}{5}\left(\frac{5}{8}\right) = 1$ y $1m = m$. En el lado derecho: $\frac{8}{5}(-10) = -\frac{8 \cdot 2 \cdot \cancel{5}^{1}}{\cancel{5}_{1}} = -16$.

La solución es el -16. Compruebe sustituyéndolo en la ecuación original.

Auto-revisión 4

Resuelva: $-6.6 - m = -2.7$

Ahora intente **Problema 35**

EJEMPLO 4

Resuelva: $-0.2 = -0.8 - y$

Estrategia Primero, se utilizará una propiedad de la igualdad para despejar el término variable en un lado de la ecuación. Después se utilizará una segunda propiedad de la igualdad para despejar la variable en sí.

POR QUÉ Para resolver la ecuación original, se requiere encontrar una ecuación equivalente más sencilla de la forma **un número = *y***, cuya solución sea obvia.

Solución

Para despejar el término variable $-y$ en el lado derecho, se elimina el -0.8 sumando el 0.8 a ambos lados.

$$-0.2 = -0.8 - y$$
Esta es la ecuación a resolver. Primero, se requiere despejar el término variable, $-y$.

$$\begin{array}{r} 0.8 \\ -\ 0.2 \\ \hline 0.6 \end{array}$$

$$-0.2 + 0.8 = -0.8 - y + 0.8$$
Sume el 0.8 a ambos lados para despejar $-y$.

$$0.6 = -y$$
Realice las sumas.

Dado que el término $-y$ tiene un coeficiente implícito de -1, la ecuación puede escribirse como $0.6 = -1y$. Para despejar y, se pueden multiplicar ambos lados o dividir ambos lados por/entre -1. Si se elige dividir ambos lados entre -1, se procede como a continuación.

$$0.6 = -1y$$
Ahora se requiere despejar la variable y.

$$\frac{0.6}{-1} = \frac{-1y}{-1}$$
En el lado izquierdo, realice la división. El cociente de un número positivo y uno negativo es negativo. En el lado derecho, simplifique: $\frac{\cancel{-1}^{1}y}{\cancel{-1}_{1}} = y$.

$$-0.6 = y$$

La solución es el -0.6. Compruebe ésta sustituyéndola en la ecuación original.

2 Simplificar expresiones para resolver ecuaciones

Cuando se resuelven ecuaciones se deben simplificar las expresiones que conforman los lados izquierdo y derecho antes de aplicar alguna de las propiedades de la igualdad. Con frecuencia eso involucra eliminar paréntesis y/o combinar términos similares.

EJEMPLO 5 Resuelva: **a.** $3(k + 1) - 5k = 0$ **b.** $8a - 2(a - 7) = 68$

Estrategia Se utilizará la propiedad distributiva junto con el proceso de combinación de términos similares para simplificar el lado izquierdo de cada ecuación.

POR QUÉ Es mejor simplificar cada lado de una ecuación antes de utilizar una propiedad de la igualdad.

Solución

a. $3(k + 1) - 5k = 0$ Esta es la ecuación a resolver.

$3k + 3 - 5k = 0$ Distribuya la multiplicación por 3.

$-2k + 3 = 0$ Combine los términos similares: $3k - 5k = -2k$. Primero, se requiere despejar el término variable, $-2k$.

$-2k + 3 - 3 = 0 - 3$ Para deshacer la suma del 3, reste el 3 de ambos lados. Esto despeja $-2k$.

$-2k = -3$ Realice las restas: $3 - 3 = 0$ y $0 - 3 = -3$. Ahora se requiere despejar la variable, k.

$\frac{-2k}{-2} = \frac{-3}{-2}$ Para deshacer la multiplicación por -2, divida ambos lados por -2. Esto despeja k.

$k = \frac{3}{2}$ En el lado derecho, simplifique: $\frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$.

Comprobación: $3(k + 1) - 5k = 0$ Esta es la ecuación original.

$3\left(\frac{3}{2} + 1\right) - 5\left(\frac{3}{2}\right) \stackrel{?}{=} 0$ Sustituya $\frac{3}{2}$ para k.

$3\left(\frac{5}{2}\right) - 5\left(\frac{3}{2}\right) \stackrel{?}{=} 0$ Realice la suma dentro de los paréntesis. Piense en el 1 como $\frac{2}{2}$ y después sume: $\frac{3}{2} + \frac{2}{2} = \frac{5}{2}$.

$\frac{15}{2} - \frac{15}{2} \stackrel{?}{=} 0$ Realice las multiplicaciones.

$0 = 0$ Verdadero

La solución es $\frac{3}{2}$.

¡Cuidado! Para comprobar un resultado, se evalúa cada lado de la ecuación siguiendo la regla del orden de las operaciones. Para la comprobación mostrada arriba, desarrolle primero la suma dentro de los paréntesis. *No distribuya la multiplicación por 3.*

$3\underbrace{\left(\frac{3}{2} + 1\right)}$ Sume primero

b. $8a - 2(a - 7) = 68$ Esta es la ecuación a resolver.

$8a - 2a + 14 = 68$ Distribuya la multiplicación por -2.

$6a + 14 = 68$ Combine los términos similares: $8a - 2a = 6a$. Primero, se requiere despejar el término variable, $6a$.

$6a + 14 - 14 = 68 - 14$ Para deshacer la suma del 14, reste el 14 de ambos lados. Esto despeja $6a$.

$\begin{array}{r} 68 \\ -\ 14 \\ \hline 54 \end{array}$

Auto-revisión 5

Resuelva:

a. $4(a + 2) - a = 11$

b. $9x - 5(x - 9) = 1$

Ahora intente **Problemas 39 y 45**

$6a = 54$ Realice las restas. Ahora se requiere despejar la variable, a.

$\frac{6a}{6} = \frac{54}{6}$ Para deshacer la multiplicación por 6, divida ambos lados entre 6. Esto despeja a.

$a = 9$ En el lado izquierdo simplifique: $\frac{\overset{1}{\cancel{6}}a}{\underset{1}{\cancel{6}}} = a$. En el lado derecho realice la división.

La solución es el 9. Use una comprobación para verificar ésta.

Cuando se resuelve una ecuación, si las variables aparecen en ambos lados, se puede utilizar la propiedad de igualdad de la suma (o resta) para obtener todos los términos variables en un lado y todos los términos constantes en el otro.

Auto-revisión 6

Resuelva: $30 + 6n = 4n - 2$

Ahora intente **Problema 57**

EJEMPLO 6

Resuelva: $3x - 15 = 4x + 36$

Estrategia Hay términos variables ($3x$ y $4x$) en ambos lados de la ecuación. Se eliminará $3x$ del lado izquierdo de la ecuación restando $3x$ de ambos lados.

POR QUÉ Para resolver para x, todos los términos que contienen x deben estar en el mismo lado de la ecuación.

Solución

$3x - 15 = 4x + 36$ Esta es la ecuación a resolver. Hay términos variables en ambos lados de la ecuación.

$3x - 15 \mathbf{- 3x} = 4x + 36 \mathbf{- 3x}$ Reste $3x$ de ambos lados para despejar el término variable en el lado derecho.

$-15 = x + 36$ Combine los términos similares: $3x - 3x = 0$ y $4x - 3x = x$. Ahora se requiere despejar la variable, x.

$-15 \mathbf{- 36} = x + 36 \mathbf{- 36}$ Para deshacer la suma del 36, reste el 36 de ambos lados. Esto despeja x.

$-51 = x$ Realice las restas.

$\overset{1}{1}5 + 36 = 51$

Comprobación: $3x - 15 = 4x + 36$ Esta es la ecuación original.

$3(\mathbf{-51}) - 15 \stackrel{?}{=} 4(\mathbf{-51}) + 36$ Sustituya el -51 para x.

$-153 - 15 \stackrel{?}{=} -204 + 36$ Realice la multiplicación.

$-168 = -168$ Verdadero

$51 \times 3 = 153 \quad 51 \times 4 = 204$

$153 + 15 = 168 \quad 204 - 36 = 168$

La solución es el -51.

Consejo útil En el Ejemplo 6, se pudo haber eliminado $4x$ del lado derecho restando $4x$ de ambos lados:

$3x - 15 \mathbf{- 4x} = 4x + 36 \mathbf{- 4x}$

$-x - 15 = 36$ Observe que el coeficiente de x es negativo.

Sin embargo, por lo regular es más sencillo despejar el término variable en el lado que resultará en un coeficiente *positivo*.

Auto-revisión 7

Resuelva:
$6(5x - 30) - 2x = 8(x + 50)$

Ahora intente **Problema 59**

EJEMPLO 7

Resuelva: $3(4x - 80) + 6x = 2(x + 40)$.

Estrategia Se utilizará la propiedad distributiva en cada lado de la ecuación para eliminar los paréntesis. Después se combinarán los términos similares.

POR QUÉ Es más fácil simplificar las expresiones que conforman los lados izquierdo y derecho de la ecuación antes de utilizar las propiedades de la igualdad para despejar la variable.

Solución

$3(4x - 80) + 6x = 2(x + 40)$ Esta es la ecuación a resolver.

$12x - 240 + 6x = 2x + 80$ Distribuya la multiplicación por 3 y por 2.

$18x - 240 = 2x + 80$ En el lado izquierdo, combine los términos similares: $12x + 6x = 18x$. Hay términos variables en ambos lados.

$18x - 240 \mathbf{- 2x} = 2x + 80 \mathbf{- 2x}$ Para eliminar el término $2x$ en el lado derecho, reste $2x$ de ambos lados.

$16x - 240 = 80$ Combine los términos similares en cada lado: $18x - 2x = 16x$ y $2x - 2x = 0$.

$16x - 240 \mathbf{+ 240} = 80 \mathbf{+ 240}$ Para despejar el término variable, $16x$, en el lado izquierdo, sume el 240 a ambos lados para deshacer la resta del 240.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 240 \\ +\ 80 \\ \hline 320 \end{array}$$

$16x = 320$ Realice la suma en cada lado: $-240 + 240 = 0$ y $80 + 240 = 320$. Ahora se requiere despejar la variable, x.

$\dfrac{16x}{\mathbf{16}} = \dfrac{320}{\mathbf{16}}$ Para despejar x en el lado izquierdo, divida ambos lados entre 16 para deshacer la multiplicación por 16.

$$\begin{array}{r} 20 \\ 16\overline{)320} \\ -\ 32 \\ \hline 00 \\ -\ 0 \\ \hline 0 \end{array}$$

$x = 20$ En el lado izquierdo, simplifique, $\frac{{\scriptstyle 1}\,16x}{{\scriptstyle 1}\,16} = x$. En el lado derecho, realice la división.

La solución es el 20. Compruebe sustituyéndola en la ecuación original.

Los ejemplos anteriores sugieren la siguiente estrategia para resolver ecuaciones. No siempre tiene que utilizar los cuatro pasos para resolver una ecuación proporcionada. Si un paso no aplica, sáltelo y vaya al siguiente paso.

Estrategia para resolver ecuaciones

1. **Simplifique cada lado de la ecuación:** Use la propiedad distributiva para eliminar paréntesis y después combine los términos similares en cada lado.
2. **Despeje el término variable en un lado:** Sume (o reste) para obtener el término variable en un lado de la ecuación y un número en el otro utilizando la propiedad de igualdad de la suma (o resta).
3. **Despeje la variable:** Multiplique (o divida) para despejar la variable utilizando la propiedad de igualdad de la multiplicación (o división).
4. **Compruebe el resultado:** Sustituya la solución posible para la variable en la ecuación *original* para ver si resulta un enunciado verdadero.

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. 7 **2.** −12 **3.** −36 **4.** −3.9 **5. a.** 1 **b.** −11 **6.** −16 **7.** 29

SECCIÓN 8.4 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Complete los espacios.

1. _____ una ecuación significa encontrar todos los valores de la variable que hacen verdadera la ecuación.

2. La ecuación $6x + 3 = 4x + 1$ tiene términos variables en _____ lados.

3. Cuando resuelva ecuaciones, _____ las expresiones que conformen los lados izquierdo y derecho de la ecuación antes de utilizar las propiedades de la igualdad para despejar la variable.

4. Cuando se escribe la expresión $9x + x$ como $10x$, se dice que se han _____ términos similares.

CONCEPTOS

5. En el lado izquierdo de la ecuación $4x + 9 = 25$, la variable x es multiplicada por ☐, y después se le suma ☐ a ese producto.

6. En el lado derecho de la ecuación $16 = -5t - 1$, la variable t se multiplica por ☐, y después se resta ☐ de ese producto.

Complete los espacios.

7. Para resolver $3x - 5 = 1$, primero se deshace la _____ del 5 sumando el 5 a ambos lados. Después se deshace la _____ por 3 dividiendo ambos lados entre 3.

8. Para resolver $\frac{x}{2} + 3 = 5$, se deshace la _____ del 3 restando el 3 de ambos lados. Después se deshace la _____ entre 2 multiplicando ambos lados por 2.

9. a. Combine los términos similares en el lado izquierdo de $6x - 8 - 8x = -24$.

b. Distribuya y después combine los términos similares en el lado derecho de $-20 = 4(3x - 4) - 9x$.

10. Distribuya en ambos lados de la ecuación mostrada abajo. **No resuelva.**

$$7(3x + 2) = 4(x - 3)$$

11. Use una comprobación para determinar si el -2 es una solución de la ecuación.

a. $6x + 5 = 7$ **b.** $8(x + 3) = 8$

12. a. Simplifique: $3x + 5 - x$

b. Resuelva: $3x + 5 = 9$

c. Evalúe $3x + 5 - x$ para $x = 9$.

d. Compruebe: ¿El -1 es una solución de $3x + 5 - x = 9$?

NOTACIÓN

Complete la solución.

13. Resuelva:

$$2x - 7 = 21$$
$$2x - 7 + \square = 21 + \square$$
$$2x = 28$$
$$\frac{2x}{\square} = \frac{28}{\square}$$
$$x = 14$$

Comprobación:
$$2x - 7 = 21$$
$$2(\square) - 7 \square 21$$
$$\square - 7 \stackrel{?}{=} 21$$
$$\square = 21$$

☐ es la solución.

14. Complete el espacio: $-y = \square y$

PRÁCTICA GUIADA

Resuelva cada ecuación y compruebe el resultado. Vea el Ejemplo 1.

15. $2x + 5 = 17$ **16.** $4p + 3 = 43$

17. $5q - 2 = 23$ **18.** $3x - 5 = 13$

19. $-33 = 5t + 2$ **20.** $-55 = 3w + 5$

21. $0.7 + 4y = 1.7$ **22.** $0.3 + 2x = 0.9$

23. $-5 - 2d = 0$ **24.** $-8 - 3c = 0$

Resuelva cada ecuación y compruebe el resultado. Vea el Ejemplo 2.

25. $12 = -7a - 9$ **26.** $15 = -8b - 1$

27. $-3 = -3p + 7$ **28.** $-1 = -2r + 8$

Resuelva cada ecuación y compruebe el resultado. Vea el Ejemplo 3.

29. $\frac{2}{3}t + 2 = 6$ **30.** $\frac{3}{5}x - 6 = -12$

31. $\frac{5}{6}k - 5 = 10$ **32.** $\frac{2}{5}c - 12 = 2$

33. $-\frac{7}{16}h + 28 = 21$ **34.** $-\frac{5}{8}h + 25 = 15$

Resuelva cada ecuación y compruebe el resultado. Vea el Ejemplo 4.

35. $-1.7 = 1.2 - x$ **36.** $0.6 = 4.1 - x$

37. $-6 - y = -2$ **38.** $-1 - h = -9$

Resuelva cada ecuación y compruebe el resultado. Vea el Ejemplo 5.

39. $3(2y - 2) - y = 5$

40. $2(-3a + 2) + a = 2$

41. $9(x + 11) + 5(13 - x) = 0$

42. $20b + 2(6b - 1) = -34$

43. $-(4 - m) = -10$

44. $-(6 - t) = -12$

45. $10.08 = 4(0.5x + 2.5)$

46. $-3.28 = 8(1.5y - 0.5)$

47. $6a - 3(3a - 4) = 30$

48. $16y - 8(3y - 2) = -24$

49. $-(19 - 3s) - (8s + 1) = 35$

50. $6x - 5(3x + 1) = 58$

Resuelva cada ecuación y compruebe el resultado. Vea el Ejemplo 6.

51. $5x = 4x + 7$ **52.** $3x = 2x + 2$

53. $8y + 44 = 4y$ **54.** $9y + 36 = 6y$

55. $60r - 50 = 15r - 5$ **56.** $100f - 75 = 50f + 75$

57. $8y - 2 = 4y + 16$ **58.** $7 + 3w = 4 + 9w$

Resuelva cada ecuación y compruebe el resultado. Vea el Ejemplo 7.

59. $3(A + 2) + 4A = 2(A - 7)$

60. $9(T - 1) + 18T = 6(T + 2)$

61. $2 - 3(x - 5) = 4(x - 1)$

62. $2 - (4x + 7) = 3 + 2(x + 2)$

INTÉNTELO

Resuelva cada ecuación. Compruebe el resultado.

63. $3x - 8 - 4x - 7x = -2 - 8$

64. $-6t - 7t - 5t - 1 = 12 - 3$

65. $4(d - 5) + 20 = 5 - 2d$

66. $1 - t = 5(t - 2) + 10$
67. $30x - 12 = 1{,}338$
68. $40y - 19 = 1{,}381$
69. $-7 = \frac{3}{7}r + 14$
70. $21 = \frac{2}{5}f - 19$
71. $10 - 2y = 8$
72. $7 - 7x = -21$
73. $9 + 5(r + 3) = 6 + 3(r - 2)$
74. $2 + 3(n-6) = 4(n + 2) - 21$
75. $-\frac{2}{3}z + 4 = 8$
76. $-\frac{7}{5}x + 9 = -5$
77. $-2(9 - 3s) - (5s + 2) = -25$
78. $4(x - 5) - 3(12 - x) = 7$
79. $9a - 2.4 = 7a + 4.6$
80. $4c - 1.6 = 7c + 3.2$

REDACCIÓN

81. Para resolver $3x - 4 = 5x + 1$, un estudiante comenzó restando $3x$ de ambos lados. Otro estudiante resolvió la misma ecuación restando primero $5x$ de ambos lados. ¿Los estudiantes obtendrán la misma solución? Explique por qué o por qué no.

82. Explique el error en la siguiente solución.

Resuelva: $2x + 4 = 30$

$$\frac{2x}{2} + 4 = \frac{30}{2}$$
$$x + 4 = 15$$
$$x + 4 - 4 = 15 - 4$$
$$x = 11$$

REPASO

Nombre la propiedad que se utiliza.

83. $x \cdot 9 = 9x$
84. $x + 99 = 99 + x$
85. $(x + 1) + 2 = x + (1 + 2)$
86. $2(30y) = (2 \cdot 30)y$

SECCIÓN 8.5
Uso de ecuaciones para resolver problemas de aplicación

Objetivos
1. Resolver problemas de aplicación para encontrar una incógnita.
2. Resolver problemas de aplicación para encontrar dos incógnitas.

A lo largo de este curso, se han utilizado los pasos *Analizar, Formar, Resolver, Enunciar y Comprobar* como una estrategia para resolver problemas de aplicación. Ahora que se le ha dado una introducción al álgebra, puede modificar esta estrategia y hacer uso de sus habilidades recién aprendidas.

1 Resolver problemas de aplicación para encontrar una incógnita

Para ser un buen solucionador de problemas, necesita un plan a seguir, como la siguiente estrategia de cinco pasos. Observará que los pasos son bastante similares a la estrategia introducida por primera vez en el Capítulo 1. Sin embargo, este nuevo método utiliza el concepto de la variable, las habilidades de traducción de la Sección 8.1 y los métodos para resolver ecuaciones de las secciones 8.3 y 8.4.

Estrategia para resolver problemas

1. **Analizar el problema** leyéndolo con cuidado para comprender los hechos proporcionados. ¿Qué información se proporciona? ¿Qué se le pide que encuentre? ¿Qué vocabulario se proporciona? Con frecuencia, un diagrama o una tabla le ayudará a visualizar los hechos del problema.
2. **Formar una ecuación** eligiendo una variable para representar el valor numérico a encontrar. Después expresar las demás cantidades desconocidas como expresiones que involucran esa variable. Las palabras o frases clave pueden ser de utilidad. Por último, traduzca las palabras del problema a una ecuación.
3. **Resolver la ecuación.**
4. **Enunciar la conclusión** de manera clara. Asegúrese de incluir las unidades (como pies, segundos o libras) en su respuesta.
5. **Comprobar el resultado** utilizando la redacción original del problema, no la ecuación que se formó en el paso 2 a partir de las palabras.

Auto-revisión 1

EDIFICIOS DE DEPARTAMENTOS Los dueños de un edificio de departamentos recién construido tendrían que vender 34 unidades más antes que se vendan las 510 unidades. ¿Cuántos de los departamentos se han vendido a la fecha?

Ahora intente **Problema 19**

EJEMPLO 1 ***Análisis de sistemas*** El uso telefónico de una compañía tendría que incrementarse en 350 llamadas por hora antes que el sistema alcance la capacidad máxima de 1,500 llamadas por hora. En la actualidad, ¿cuántas llamadas se están haciendo cada hora en el sistema?

© iStockphoto.com/Neustockimages

Analizar

- Si el número de llamadas aumenta en 350, el sistema alcanzará su capacidad. Proporcionado
- La capacidad máxima del sistema es de 1,500 llamadas por hora. Proporcionado
- ¿Cuántas llamadas se realizan cada hora en la actualidad? A encontrar

¡Cuidado! A diferencia de un método aritmético, *no* tiene que determinar si se suma, resta, multiplica o divide en esta etapa. Simplemente traduzca las palabras del problema a símbolos matemáticos para formar una ecuación que describa la situación. Después resuelva la ecuación.

Formar

Sea n el número de llamadas que se están realizando cada hora en la actualidad. Para formar una ecuación que involucre n, se busca una palabra o frase clave en el problema.

Frase clave: *incrementado en 350* **Traducción:** suma

La frase clave indica sumar 350 al número actual de llamadas para obtener una expresión para la capacidad máxima del sistema. Ahora se traducen las palabras del problema a una ecuación.

El número actual de llamadas por hora	aumenta en	350	es igual a	la capacidad máxima del sistema
n	+	350	=	1,500

Resolver

$n + 350 = 1{,}500$ Se requiere despejar n en el lado izquierdo.

$n + 350 - \mathbf{350} = 1{,}500 - \mathbf{350}$ Para despejar n, reste el 350 de ambos lados para deshacer la suma del 350.

$n = 1{,}150$ Realice la resta.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 4\,10} \\ 1{,}\not{5}\not{0}0 \\ -\ 350 \\ \hline 1{,}150 \end{array}$$

Enunciar

En la actualidad se están realizando 1,150 llamadas por hora.

Comprobar

Si el número de llamadas que se están haciendo cada hora en la actualidad es de 1,150 y se incrementa ese número en 350, se debe obtener la capacidad máxima del sistema.

$$\begin{array}{r} 1{,}150 \\ +\ 350 \\ \hline 1{,}500 \end{array}$$ ← Esta es la capacidad máxima.

El resultado, 1,150, es correcto.

¡Cuidado! Siempre compruebe el resultado en la redacción original del problema, no lo sustituya en la ecuación. ¿Por qué? La ecuación pudo haberse resuelto de manera correcta, pero el peligro es que pudo haberla formado de manera incorrecta.

EJEMPLO 2 *Negocios pequeños*

El año pasado, una estilista perdió 17 clientes que se mudaron. Si ahora tiene 73 clientes, ¿cuántos tenía originalmente?

Imagen copyright Marin, 2009. Utilizada bajo licencia de Shutterstock.com

Analizar

- Perdió 17 clientes. Proporcionado
- Ahora tiene 73 clientes. Proporcionado
- ¿Cuántos clientes tenía originalmente? A encontrar

Formar

Se puede hacer que c = al número original de clientes. Para formar una ecuación que involucre c, se busca una palabra o frase clave en el problema.

Frase clave: *se mudaron* **Traducción:** *resta*

Ahora se traducen las palabras del problema a una ecuación.

A este se le llama **modelo verbal.**

El número original de clientes	menos	17	es	el número de clientes que tiene ahora
c	$-$	17	$=$	73

Resolver

$c - 17 = 73$ Se necesita despejar c en el lado izquierdo.

$c - 17 + 17 = 73 + 17$ Para despejar c, sume el 17 a ambos lados para deshacer la resta del 17.

$c = 90$ Realice la suma.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1}\\ 73\\ +\ 17\\ \hline 90 \end{array}$$

Enunciar

Originalmente tenía 90 clientes.

Comprobar

Si la estilista tenía originalmente 90 clientes y ese número disminuyó en 17 por los que se mudaron, debe obtener el número de clientes que tiene ahora.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 8\,10}\\ \not{9}\not{0}\\ -\ 17\\ \hline 73 \end{array}$$

Este es el número de clientes que tiene la estilista ahora.

El resultado, 90, es correcto.

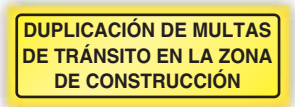
Auto-revisión 2

ALMACENAMIENTO DE GASOLINA Un tanque contiene en la actualidad 1,325 galones de gasolina. Si más temprano se bombearon 450 galones del tanque, ¿cuántos galones contenía originalmente?

Ahora intente **Problema 20**

EJEMPLO 3 *Multas de tránsito*

Por ir a exceso de velocidad en una zona de construcción, un conductor tuvo que pagar una multa de $592. La violación ocurrió en una carretera con señalamiento como el mostrado a la derecha. ¿De cuánto habría sido la multa si no estuviesen colocados tales señalamientos?



Analizar

- Por ir a exceso de velocidad, al conductor se le multó con $592. Proporcionado
- La multa fue del doble de lo que regularmente hubiese sido. Proporcionado
- ¿De cuánto habría sido la multa si no estuviese colocado el señalamiento? A encontrar

Formar

Se puede hacer f = la cantidad de lo que hubiese sido normalmente la multa. Para formar una ecuación, se busca una palabra o frase clave en el problema o análisis.

Frase clave: *doble* **Traducción:** *multiplicación por 2*

Auto-revisión 3

LECTURA VELOZ Un curso de lectura veloz asegura que puede enseñarle a una persona a leer cuatro veces más rápido. Después de tomar el curso, un estudiante puede leer ahora 700 palabras por minuto. Si la aseveración de la compañía es verdadera, ¿cuál era la velocidad de lectura del estudiante antes de tomar el curso?

Ahora intente **Problema 21**

Ahora se traducen las palabras del problema a una ecuación.

Dos	veces	la multa normal por exceso de velocidad	es	la nueva multa
2	·	f	=	592

Resolver

$2f = 592$ Se necesita despejar f en el lado izquierdo.

$\frac{2f}{2} = \frac{592}{2}$ Para despejar f, divida ambos lados entre 2 para deshacer la multiplicación por 2.

$f = 296$ Realice la división.

$$\begin{array}{r} 296 \\ 2\overline{)592} \\ -\,4 \\ \hline 19 \\ -\,18 \\ \hline 12 \\ -\,12 \\ \hline 0 \end{array}$$

Enunciar

La multa normalmente hubiese sido de $296.

Comprobar

Si la multa normal era de $296 y se duplica, se debe obtener la nueva multa.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1} \\ 296 \\ \times\ 2 \\ \hline 592 \end{array}$$ ← Esta es la nueva multa.

El resultado, $296, es correcto.

Auto-revisión 4

MÚSICA CLÁSICA Se contrató un cuarteto de viento madera para que tocara en una exhibición de arte. Si cada miembro ganó $85 por la actuación, ¿cuáles fueron los honorarios que cobró el cuarteto?

Ahora intente **Problema 22**

EJEMPLO 4 ***Costos de entretenimiento*** Una banda con cinco miembros trabajó en una fiesta de fin de año. Si cada músico ganó $120, ¿cuáles fueron los honorarios que cobró la banda?

Analizar

- Había 5 músicos en la banda. Proporcionado
- Cada músico ganó $120. Proporcionado
- ¿Cuáles fueron los honorarios que cobró la banda? A encontrar

Formar

Se puede hacer f = los honorarios de la banda. Para formar una ecuación, se busca una palabra o frase clave. En este caso, se encuentra en el análisis del problema. Si cada músico ganó la misma cantidad ($120), los honorarios de la banda deben haberse dividido en 5 partes iguales.

Frase clave: *dividido en 5 partes iguales* **Traducción:** *división*

Ahora se traducen las palabras del problema a una ecuación.

Los honorarios de la banda	divididos entre	el número de músicos en la banda	es	la parte de cada persona
f	÷	5	=	120

Resolver

$\frac{f}{5} = 120$ Se necesita despejar f en el lado izquierdo.

$5 \cdot \frac{f}{5} = 5 \cdot 120$ Para despejar f, multiplique ambos lados por 5 para deshacer la división entre 5.

$f = 600$ Realice la multiplicación.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 120 \\ \times\ 5 \\ \hline 600 \end{array}$$

Enunciar

Los honorarios de la banda fueron de $600.

Comprobar

Si los honorarios de la banda fueron de \$600 y se dividieron en 5 partes iguales, se debe obtener la cantidad que ganó cada músico.

$$\begin{array}{r} 120 \\ 5\overline{)600} \\ -\ 5 \\ \hline 10 \\ -\ 10 \\ \hline 00 \\ -\ 0 \\ \hline 0 \end{array}$$

← Esta es la cantidad que ganó cada miembro de la banda.

El resultado, \$600, es correcto.

EJEMPLO 5 *Horas de servicio voluntario*

Para recibir un título en desarrollo infantil, los estudiantes en una universidad deben completar 135 horas de servicio voluntario trabajando turnos de 3 horas en un preescolar infantil. Si una estudiante ya ha cumplido 87 horas, ¿cuántos turnos más de 3 horas debe trabajar para cumplir el requerimiento del servicio para su título?

Analizar

- Los estudiantes deben completar 135 horas de servicio voluntario. — Proporcionado
- Los estudiantes trabajan turnos de 3 horas. — Proporcionado
- Una estudiante ya ha completado 87 horas de servicio. — Proporcionado
- ¿Cuántos turnos más de 3 horas debe trabajar? — A encontrar

Formar

Sea x = el número de turnos necesarios para completar el requerimiento del servicio. Dado que cada turno es de 3 horas de duración, multiplicar el 3 por el número de turnos dará el número de horas adicionales que la estudiante necesita cumplir.

El número de horas que ya ha completado	más	3 por	el número de turnos aun por completar	es	el número de horas requeridas
87	+	3 ·	x	=	135

Resolver

$$87 + 3x = 135$$ Se necesita despejar x en el lado izquierdo.

$$87 + 3x - 87 = 135 - 87$$ Para despejar el término variable 3x, reste el 87 de ambos lados para deshacer la suma del 87.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 12\,15} \\ \cancel{135} \\ -\ 87 \\ \hline 48 \end{array}$$

$$3x = 48$$ Realice la resta.

$$\frac{3x}{3} = \frac{48}{3}$$ Para despejar x, divida ambos lados entre 3 para deshacer la multiplicación por 3.

$$\begin{array}{r} 16 \\ 3\overline{)48} \\ -\ 3 \\ \hline 18 \\ -\ 18 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$x = 16$$ Realice la división.

Enunciar

La estudiante necesita completar 16 turnos más de 3 horas de servicio voluntario.

Comprobar

La estudiante ya ha completado 87 horas. Si trabaja 16 turnos más, cada uno de 3 horas de duración, tendrá $16 \cdot 3 = 48$ horas más. Al sumar los dos conjuntos de horas, se obtiene:

$$\begin{array}{r} 87 \\ +\ 48 \\ \hline 135 \end{array}$$

← Este es el número total de horas necesarias.

El resultado, 16, es correcto.

Auto-revisión 5

CLUBES DE SERVICIOS Para ser un miembro de un club de servicios, los estudiantes en una universidad deben completar 72 horas de servicio voluntario trabajando turnos de 4 horas en el centro de tutoría. Si una estudiante ya ha cumplido 48 horas, ¿cuántos turnos más de 4 horas debe trabajar para cumplir el requerimiento de servicio para la membresía en el club?

Ahora intente **Problema 23**

Auto-revisión 6

VENTAS DE GARAJE Un marido y su esposa dividen de manera equitativa el dinero que ganaron en una venta de garaje. El marido dio $75 de su parte a caridad, quedando con $210. ¿Cuánto dinero ganó la pareja en la venta de garaje?

Ahora intente **Problema 24**

EJEMPLO 6 ***Honorarios de abogados*** A cambio de sus servicios, una abogado y su cliente dividen de manera equitativa la gratificación en efectivo del jurado. Después de pagarle a su asistente $1,000, la abogada acabó ganando $10,000 por el caso. ¿Cuál fue la cantidad de la gratificación?

Analizar

- La abogada y su cliente dividieron la gratificación de manera equitativa. — Proporcionado
- Al asistente de la abogada se le pagó $1,000. — Proporcionado
- La abogada ganó $10,000. — Proporcionado
- ¿Cuál fue la cantidad de la gratificación? — A encontrar

Formar

Sea x = la cantidad de la gratificación. Dos frases clave en el problema ayudan a formar una ecuación.

Frase clave: *dividieron la gratificación de manera equitativa* **Traducción:** dividir entre 2

Frase clave: *pagó a su asistente* $1,000 **Traducción:** Restar $1,000

Ahora se traducen las palabras del problema a una ecuación.

La gratificación dividida a la mitad		la cantidad pagada al asistente		la cantidad que gana la abogada.
$\frac{x}{2}$	$-$	1,000	$=$	10,000

Resolver

$$\frac{x}{2} - 1{,}000 = 10{,}000$$ Se necesita despejar x en el lado izquierdo.

$$\frac{x}{2} - 1{,}000 \mathbf{+ 1{,}000} = 10{,}000 \mathbf{+ 1{,}000}$$ Para despejar el término variable $\frac{x}{2}$, sume el 1,000 a ambos lados para deshacer la resta del 1,000.

$$\frac{x}{2} = 11{,}000$$ Realice la suma.

$$\mathbf{2} \cdot \frac{x}{2} = \mathbf{2} \cdot 11{,}000$$ Para despejar la variable x, multiplique ambos lados por 2 para deshacer la división entre 2.

$$\begin{array}{r} 11{,}000 \\ \times \quad 2 \\ \hline 22{,}000 \end{array}$$

$$x = 22{,}000$$ Realice la multiplicación.

Enunciar

La cantidad de la gratificación fue de $22,000.

Comprobar

Si la gratificación de $22,000 se divide a la mitad, la parte de la abogada es de $11,000. Si le pagó a su asistente $1,000, se resta para obtener:

$$\begin{array}{r} \$11{,}000 \\ -\ 1{,}000 \\ \hline \$10{,}000 \end{array}$$ ← Esto es lo que ganó la abogada.

El resultado, $22,000, es correcto.

2 Resolver problemas de aplicación para encontrar dos incógnitas

Cuando se resuelven problemas de aplicación, por lo general las variables representan la cantidad que se está pidiendo que se encuentre. En los siguientes dos ejemplos, cada problema contiene una segunda cantidad desconocida. Se buscará una palabra o frase clave en el problema que ayude a describirlo utilizando una expresión algebraica.

EJEMPLO 7 ***Administración pública*** Una candidata para un puesto en el FBI sacó 12 puntos más en la parte escrita del examen para la administración pública que lo que lo hizo en su entrevista. Si su calificación combinada fue de 92, ¿cuáles fueron sus calificaciones en la entrevista y en la parte escrita del examen?

Analizar

- Sacó 12 puntos más en la parte escrita que en la entrevista. — Proporcionado
- Su calificación combinada fue de 92. — Proporcionado
- ¿Cuáles fueron sus calificaciones en la entrevista y en la parte escrita? — A encontrar

Formar

Dado que se indica que su calificación en la parte escrita estaba relacionada con su calificación en la entrevista, sea x = su calificación en la entrevista.

Hay una segunda cantidad desconocida —su calificación en la parte escrita del examen—. Se busca una frase clave para ayudar a decidir cómo representar esa calificación utilizando una expresión algebraica.

Frase clave:	12 puntos *más* en la parte escrita que en la entrevista	**Traducción:**	sumar 12 puntos a la calificación de la entrevista

Por lo que $x + 12$ = su calificación en la parte escrita del examen. Ahora se traducen las palabras del problema a una ecuación.

La calificación en la entrevista	más	la calificación en la parte escrita	es	la calificación total.
x	+	$x + 12$	=	92

Resolver

$$x + x + 12 = 92$$ Se necesita despejar x en el lado izquierdo.

$$2x + 12 = 92$$ En el lado izquierdo, combine los términos similares: x + x = 2x.

$$2x + 12 \mathbf{- 12} = 92 \mathbf{- 12}$$ Para despejar el término variable, 2x, reste el 12 de ambos lados para deshacer la suma del 12.

$$2x = 80$$ Realice la resta.

$$\frac{2x}{\mathbf{2}} = \frac{80}{\mathbf{2}}$$ Para despejar la variable x, divida ambos lados entre 2 para deshacer la multiplicación por 2.

$$x = 40$$ Realice la división. Esta es su calificación en la entrevista.

Para encontrar la segunda incógnita, se sustituye el 40 para x en la expresión que representa su calificación en la parte escrita.

$$x + 12 = \mathbf{40} + 12$$
$$= 52$$ Esta es su calificación en la parte escrita.

Enunciar

Su calificación en la entrevista fue de 40 y su calificación en la parte escrita fue de 52.

Comprobar

Su calificación de 52 en el examen escrito fue 12 puntos más alta que su calificación de 40 en la entrevista. También, si se suman las dos calificaciones se obtiene:

$$\begin{array}{r} 40 \\ +\ 52 \\ \hline 92 \end{array}$$ ← Esta es su calificación combinada.

Los resultados, 40 y 52, son correctos.

Auto-revisión 7

ADMINISTRACIÓN PÚBLICA Un candidato para un puesto en el IRS sacó 15 puntos más en la parte escrita del examen para la administración pública que lo que lo hizo en su entrevista. Si su calificación combinada fue de 155, ¿cuáles fueron sus calificaciones en la entrevista y en la parte escrita del examen?

Ahora intente **Problema 25**

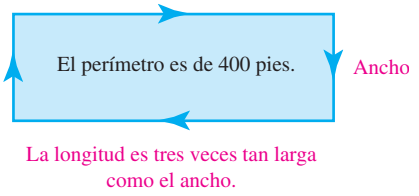
Auto-revisión 8

ESCENAS DEL CRIMEN La policía utilizó 800 pies de cinta amarilla para cercar un lote de forma rectangular para una investigación. Se utilizaron cincuenta pies menos de cinta para cada ancho que para cada longitud. Encuentre la longitud y el ancho del lote.

Ahora intente **Problema 26**

EJEMPLO 8 *Zonas recreativas*

Después de recibir una donación de 400 pies de mallas, el personal de un preescolar decidió utilizarla para delimitar una zona de recreamiento que es rectangular. Encuentre la longitud y el ancho de la zona de recreamiento si la longitud es tres veces el ancho.



Analizar

- El perímetro es de 400 pies. — Proporcionado
- La longitud es tres veces tan larga como el ancho. — Proporcionado
- ¿Cuál es la longitud y cuál es el ancho del rectángulo? — A encontrar

Formar

Se hará que w = el ancho de la zona recreativa. Existe una segunda cantidad desconocida: la longitud de la zona de recreativa. Se busca una frase clave que ayude a decidir cómo representarla utilizando una expresión algebraica.

Frase clave: longitud de *tres veces* el ancho **Traducción:** multiplicar el ancho por 3

Por lo que $3w$ = la longitud de la zona recreativa.

La fórmula para el perímetro de un rectángulo es $P = 2l + 2w$. En palabras, se puede escribir

2 ·	la longitud de la zona recreativa	más	2 ·	el ancho de la zona recreativa	es	el perímetro.
2 ·	$3w$	+	2 ·	w	=	400

Resolver

$2 \cdot 3w + 2w = 400$ Se necesita despejar w en el lado izquierdo.

$6w + 2w = 400$ Realice la multiplicación: $2 \cdot 3w = 6w$.

$8w = 400$ En el lado izquierdo, combine los términos similares: $6w + 2w = 8w$.

$\frac{8w}{8} = \frac{400}{8}$ Para despejar w, divida ambos lados entre 8 para deshacer la multiplicación por 8.

$w = 50$ Realice la división.

$$\begin{array}{r} 50 \\ 8\overline{)400} \\ -\,40 \\ \hline 00 \\ -\,0 \\ \hline 0 \end{array}$$

Para encontrar la segunda incógnita, se sustituye el 50 para w en la expresión que representa la longitud de la zona recreativa.

$3w = 3(50)$ Sustituya el 50 para w.

$= 150$ Esta es la longitud de la zona recreativa.

Enunciar

El ancho de la zona recreativa es de 50 pies y la longitud es de 150 pies.

Comprobar

Si se suman dos longitudes y dos anchos, se obtiene $2(150) + 2(50) = 300 + 100 = 400$. También, la longitud (150 pies) es tres veces el ancho (50 pies). El resultado es correcto.

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. Se han vendido 476 unidades. **2.** El tanque originalmente contenía 1,775 galones de gasolina. **3.** El estudiante leía 175 palabras por minuto. **4.** El cuarteto cobró $340 por la función. **5.** La estudiante necesita completar 6 turnos más de 4 horas de servicio voluntario. **6.** La pareja ganó $570 en la venta de garaje. **7.** Su calificación en la entrevista fue de 70 y su calificación en la parte escrita fue de 85. **8.** La longitud del lote es de 225 pies y el ancho del lote es de 175 pies.

SECCIÓN 8.5 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Complete los espacios.

1. La estrategia para la resolución de problemas de cinco pasos es:
   - _____ el problema
   - Formar una _____
   - _____ la ecuación
   - Enunciar la _____
   - _____ el resultado
2. Las palabras como *duplicado* y *triplicado* indican la operación de _____.
3. Las frases como *distribuido de manera equitativa* y *seccionado de manera uniforme* indican la operación de _____.
4. Las palabras como *recortar, eliminado* y *disolver* indican la operación de _____.
5. Las palabras como *extender* y *recuperar* indican la operación de _____.
6. A una letra (o símbolo) que se utiliza para representar un número se le llama _____.

CONCEPTOS

En cada uno de los siguientes problemas, encuentre la palabra o frase clave e indique cómo se traduce. No tiene que resolver el problema.

7. COMIDA RÁPIDA Los honorarios de la franquicia y los costos para poner en funcionamiento un restaurante Taco Bell totalizan $1,324,300. Si una empresaria tiene $550,000 para invertir, ¿cuánto dinero necesitará pedir prestado para abrir su propio restaurante Taco Bell? (Fuente: yumfranchises.com)

   Palabra clave: _____

   Traducción: _____

8. INVITACIONES DE GRADUACIÓN Seis de las invitaciones de la graduación de Tom fueron regresadas por la oficina postal con el sello "ya no existe esta dirección", pero 27 fueron entregadas. ¿Cuántas invitaciones envió?

   Palabra clave: _____

   Traducción: _____

9. TRABAJAR EN GRUPOS Cuando una profesora de historia hizo que los estudiantes en su clase formaran grupos de discusión de igual tamaño, hubo siete grupos completos, con cinco estudiantes en un grupo. ¿Cuántos estudiantes había en la clase?

   Palabra clave: _____

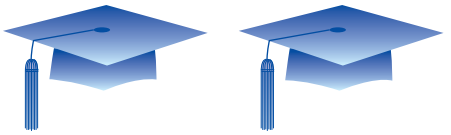
   Traducción: _____

10. LIBROS DE AUTOAYUDA El autor de un libro aseveró que la información en su libro podía duplicar los ingresos mensuales de un vendedor. Si una vendedora de suministros médicos en la actualidad gana $5,000 al mes, ¿cuál ingreso mensual puede esperar ganar después de leer el libro?

    Palabra clave: _____

    Traducción: _____

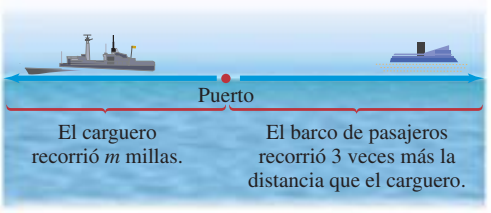
11. BECAS Vea la ilustración. ¿Cuántas becas se otorgaron este año?



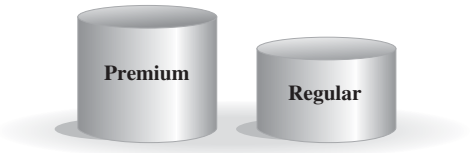
El año pasado, se otorgaron s becas.

Este año se otorgaron seis becas más que el año pasado.

12. VIAJES EN EL OCÉANO Vea la ilustración. ¿Cuántas millas recorrió el barco de pasajeros?



13. ESTACIONES DE SERVICIO Vea la ilustración. ¿Cuántos galones contiene el tanque más pequeño?

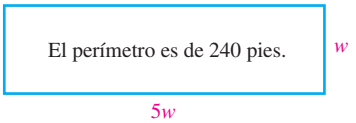


Este tanque contiene g galones.

Este tanque contiene 100 galones menos que el tanque de premium.

14. Complete el siguiente enunciado acerca del perímetro del rectángulo mostrado.

$2 \cdot$ ☐ $+ 2 \cdot$ ☐ $= 240$



15. HISTORIA Un pergamino de 1,700 años de antigüedad es 425 años más antiguo que la jarra de arcilla en la que se encontró. ¿Qué tan antigua es la jarra?

Analizar

- El pergamino es de _____ años de antigüedad.
- El pergamino es _____ años más antiguo que la jarra.
- ¿Qué tan antigua es la _____?

Formar Sea x = la _____ de la jarra. Ahora se busca una frase clave en el problema.

Palabra clave: más antiguo que

Traducción: _____

Ahora se traducen las palabras del problema a una ecuación.

La antigüedad del pergamino	es	425 años	más	la antigüedad de la jarra.
	=	425	+	

Resolver

$$\square = 425 + x$$
$$1{,}700 - \square = 425 + x - \square$$
$$\square = x$$

Enunciar La jarra tiene una antigüedad de _____ años.

Comprobar

$$\square$$
$$+\ 425$$
$$\square$$

← Esta es la antigüedad del pergamino.

El resultado es correcto.

16. BANCA Después que un estudiante expidió un cheque por $1,500 para pagar un automóvil, tenía un saldo de $750 en su cuenta. ¿Cuánto tenía en la cuenta antes que expidiera el cheque?

Analizar

- Se expidió un cheque por _____.
- El nuevo saldo en la cuenta era de _____.
- ¿Cuánto tenía en la cuenta _____ de que expidiera el cheque?

Formar Sea x = el saldo de la cuenta _____ de que expidiera el cheque. Ahora se busca una frase clave en el problema.

Palabra clave: expidió un cheque

Traducción: _____

Ahora se traducen las palabras del problema a una ecuación.

El saldo de la cuenta antes de expedir el cheque	menos	la cantidad del cheque	es	el nuevo saldo.
	−	1,500	=	

Resolver

$$\square - 1{,}500 = 750$$
$$x - 1{,}500 + \square = 750 + \square$$
$$x = \square$$

Enunciar El saldo de la cuenta antes de expedir el cheque era de _____.

Comprobar

$$\square$$
$$-\ 1{,}500$$
$$\square$$

← Este es el nuevo saldo.

El resultado es correcto.

17. ASIENTOS DE AEROLÍNEAS Un avión con 88 asientos para pasajeros tiene 10 veces más asientos de clase económica que asientos de primera clase. Encuentre el número de asientos de primera clase y el número de asientos de clase económica.

Analizar

- Hay $\square$ asientos en el avión.
- Hay $\square$ veces más asientos de clase económica que asientos de primera clase.
- Encuentre el número de asientos de _____ y el número de asientos de _____.

Formar Dado que el número de asientos de clase económica está relacionado con el número de asientos de primera clase, sea x = el número de asientos _____.

Para representar el número de asientos de clase económica, busque una frase clave en el problema.

Palabra clave: diez veces más

Traducción: multiplicar por _____

Por lo que $\square$ = número de asientos de clase económica.

El número de asientos de primera clase	más	el número de asientos de clase económica	es	88.
x	+		=	88

Resolver

$$x + 10x = \square$$
$$\square = 88$$
$$\frac{11x}{\square} = \frac{88}{\square}$$
$$x = \square$$

Enunciar Hay $\square$ asientos de primera clase y $\square$ asientos de clase económica.

Comprobar El número de asientos de clase económica, 80, es $\square$ veces el número de asientos de primera clase, 8. También, si se suman los números de asientos, se obtiene:

$$\square$$
$$+\ 8$$
$$\square$$

← Este es el número total de asientos.

El resultado es correcto.

18. BOLSA DE VALORES Un inversor ha observado que el valor de sus acciones se duplicó en los últimos 12 meses. Si el valor actual de sus acciones es de $274,552, ¿cuál era su valor hace un año?

Analizar

- El valor de las acciones se _____ en 12 meses.
- El valor actual de las acciones es de _____.
- ¿Cuál era el _____ de las acciones hace un año?

Formar

Se puede hacer que x = el _____ de las acciones hace un año. Ahora se busca una palabra clave en el problema.

Palabra clave: duplicó

Traducción: _____ por 2

Ahora se traducen las palabras del problema a una ecuación.

2	por	el valor de las acciones hace un año	es	el valor actual de las acciones.
2	·		=	274,552

Resolver

$2x =$

$\frac{2x}{\square} = \frac{274{,}552}{\square}$

$x =$

Enunciar

El valor de las acciones hace un año era de _____.

Comprobar

$\times \quad 2$

← Este es el valor actual de las acciones.

El resultado es correcto.

PRÁCTICA GUIADA

Forme una ecuación y resuélvala para responder cada pregunta. Vea el Ejemplo 1.

19. COMIDA RÁPIDA Los honorarios de la franquicia y los costos para poner en funcionamiento un restaurante Pizza Hut son de $316,500. Si una empresaria tiene $68,500 para invertir, ¿cuánto dinero necesitará pedir prestado para abrir su propio restaurante Pizza Hut?

Vea el Ejemplo 2.

20. INVITACIONES PARA FIESTA Tres de las invitaciones para la fiesta de Mia se perdieron en el correo, pero 59 fueron entregadas. ¿Cuántas invitaciones envió?

Vea el Ejemplo 3.

21. LECTURA VELOZ La publicidad de un programa de lectura veloz asegura que al completar el curso con éxito una persona puede triplicar su velocidad de lectura. Después de tomar el curso, Alicia puede leer ahora 399 palabras por minuto. Si la aseveración de la compañía es verdadera, ¿cuál era su velocidad de lectura antes de tomar el curso?

Vea el Ejemplo 4.

22. EDUCACIÓN FÍSICA Una profesora de E.F. de preparatoria hizo que los estudiantes en su clase formaran equipos de tres personas para un torneo de basquetbol. Treinta y dos equipos participaron en el torneo. ¿Cuántos estudiantes había en la clase de E.F.?

Vea el Ejemplo 5.

23. NEGOCIOS Después de comenzar una nueva posición con 15 cuentas establecidas, un vendedor se fijó la meta de añadir 5 cuentas nuevas cada mes. Su objetivo era lograr 100 cuentas. A esta tasa, ¿cuántos meses le tomaría alcanzar su objetivo?

Vea el Ejemplo 6.

24. DEVOLUCIONES DE IMPUESTOS Después de recibir una devolución de impuestos, un marido y su esposa dividieron el dinero devuelto de manera equitativa. A continuación el marido donó $50 de su dinero a caridad, quedándose con $70. ¿Cuál era la cantidad del cheque de la devolución de impuestos?

Vea el Ejemplo 7.

25. BECAS Debido al incremento en la donación, un programa de becas universitarias otorgó más becas este año que el año pasado. Si se otorgaron un total de 20 becas en los últimos dos años, ¿cuántas se otorgaron el año pasado y cuántas se otorgaron este año?

Vea el Ejemplo 8.

26. GEOMETRÍA El perímetro de un rectángulo es de 150 pulgadas. Encuentre la longitud y el ancho si la longitud es cuatro veces el ancho.

APLICACIONES

Forma una ecuación y resuélvala para responder cada pregunta.

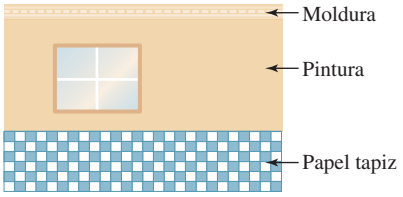
27. PRÉSTAMOS Una estudiante planea reembolsar un préstamo de $600 con mensualidades de $30. ¿Cuántas mensualidades debe pagar si sólo debe $420?

28. ANTIGÜEDADES Una mujer compra 8 cucharas antiguas cada año. Ahora posee 56 cucharas. ¿En cuántos años tendrá 200 cucharas en su colección?

29. HIP HOP La revista *Forbes* estima que en el 2008, Shawn "Jay-Z" Carter ganó $82 millones. Si esto fue $68 millones menos que los ingresos de Curtis "50 Cent" Jackson, ¿cuánto ganó 50 Cent en el 2008?

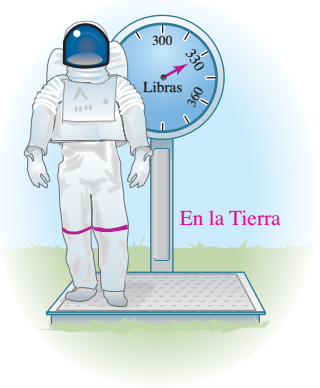
30. COMPRA DE PALOS DE GOLF Un hombre necesita $345 para un nuevo juego de palos de golf. ¿Cuánto dinero más necesita si ahora tiene $317?

31. DECORACIÓN DE INTERIORES Como parte de una redecoración, se instaló una moldura de corona alrededor del techo de una habitación. Se necesitaron sesenta pies de la moldura para el proyecto. Encuentre la longitud y el ancho de la habitación si su longitud es el doble del ancho.



32. SISTEMAS DE ROCIADO Un paisajista enterró una línea de agua alrededor de un prado rectangular para que sirva como una línea de suministro para un sistema de rociado. La longitud de la pradera es de 5 veces su ancho. Si se utilizaron 240 pies de tubería para hacer el trabajo, ¿cuál es la longitud y el ancho del prado?

33. GRAVEDAD El peso de un objeto en la Tierra es 6 veces mayor que en la luna. La situación mostrada abajo tuvo lugar en la Tierra. Si tuviese lugar en la luna, ¿qué peso registraría la báscula?



34. INFOMERCIALES El número de pedidos recibidas cada semana por una compañía que vende productos para el cuidado de la piel se incrementó cinco veces después que una celebridad de Hollywood se sumara al infomercial de la compañía. Después de sumarse la celebridad, la compañía recibía alrededor de 175 pedidos cada semana. ¿Cuántos pedidos se recibían cada semana antes de que la celebridad se uniera?

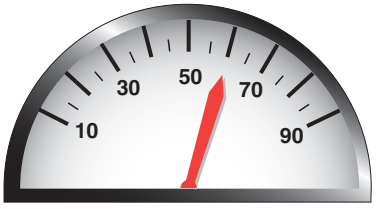
35. TEATRO La obra *Romeo y Julieta,* de William Shakespeare, tiene 5 actos y un total de 24 escenas. El segundo acto es el que tiene más escenas, 6. El tercer y cuarto actos tienen 5 escenas. El último acto tiene el menor número de escenas, 3. ¿Cuántas escenas tiene el primer acto?

36. PRESIDENTES DE E.U. Al 31 de diciembre de 1999, ha habido 42 presidentes de los Estados Unidos. George Washington y John Adams fueron los únicos presidentes en el siglo XVIII (1700-1799). Durante el siglo XIX (1800-1899), hubo 23 presidentes. ¿Cuántos presidentes hubo durante el siglo XX (1900-1999)?

37. BÚSQUEDA DE AYUDA A partir del siguiente anuncio de la sección de anuncios clasificados de un periódico, determine el valor del paquete de beneficios. ($45K significa $45,000.)

★CUENTAS POR PAGAR★
2-3 años de experiencia como supervisor. Licenciatura o +. Compañía de gran volumen. Buena paga, $45K y beneficios excelentes: compensación total con un valor de $52K. Faxear currículo.

38. CORTES DE ENERGÍA El sistema eléctrico en un edificio se apaga de manera automática cuando el medidor muestra una lectura de 85. ¿En cuánto debe incrementarse la lectura actual para ocasionar que el sistema se apague?



39. VIDEOJUEGOS Después de una semana de jugar *Sonic Adventure* de Sega, un muchacho logró 11,053 puntos en un juego —una mejora de 9,485 puntos sobre la primera vez que jugó—. ¿Cuál fue su marcador para su primer juego?

40. REPARACIONES DE AUTOMÓVILES Una mujer pagó $29 menos al haber arreglado su automóvil en un taller de silenciadores que lo que hubiese pagado en una gasolinera. En la gasolineria, hubiese tenido que pagar $219. ¿Cuánto pagó para que le arreglaran su automóvil?

41. Para un espacio de media hora en televisión, un productor programó 18 minutos más para el programa que para los comerciales. ¿Cuántos minutos de comerciales y cuántos minutos del programa hay en ese espacio de tiempo? (*Sugerencia:* Cuántos minutos hay en media hora?)

Carreras del campus

Transmisión

© iStockphoto.com/Dejan Ljamić

42. ESTACIONES DE SERVICIO En una estación de servicio, el tanque de almacenamiento subterráneo de gasolina regular contiene 100 galones menos que el tanque de almacenamiento de gasolina premium. Si la capacidad de almacenamiento total de los tanques es de 700 galones, ¿cuánto contiene el tanque de gasolina premium y cuánto el tanque de gasolina regular?

43. TIEMPO DE CLASE En un curso de biología, los estudiantes pasan un total de 250 minutos en el laboratorio y en la cátedra cada semana. El tiempo de laboratorio es 50 minutos más corto que el tiempo de la cátedra. ¿Cuántos minutos pasan los estudiantes en la cátedra y cuántos minutos pasan los estudiantes en el laboratorio por semana?

44. VIAJES POR EL OCÉANO Al mediodía, un barco de pasajeros y un carguero dejaron un puerto viajando en direcciones opuestas. A la media noche, el barco de pasajeros estaba 3 veces más alejado del puerto que el carguero. ¿Qué tan lejos estaba el carguero y qué tan lejos estaba el barco de pasajeros del puerto si la distancia entre los barcos era de 84 millas?

45. REFUGIOS DE ANIMALES El número de llamadas telefónicas a un refugio de animales se cuadriplicó después de que las noticias de la tarde transmitieran un segmento que explicaba los servicios que ofrecía el refugio. Antes de la publicidad, el refugio recibía 8 llamadas al día. ¿Cuántas llamadas recibía el refugio cada día después de haber aparecido en las noticias?

46. JORNADAS DE PUERTAS ABIERTAS La asistencia a una jornada de puertas abiertas de una primaria sólo fue de la mitad de lo que esperaba la directora. Si 120 personas visitaron la escuela esa tarde, ¿cuántas había esperado que asistieran?

47. PASAJEROS DE AUTOBUSES Un hombre tuvo que esperar 20 minutos por un autobús hoy. Hace tres días, tuvo que esperar 15 minutos más de los que esperó hoy, debido a que cuatro autobuses pasaron sin detenerse. ¿Cuánto esperó hace tres días?

48. DISCOS DE ÉXITO El artista más viejo en tener un sencillo número uno fue Louis Armstrong con la canción *Hello Dolly.* Tenía 55 años más que el artista más joven en tener un sencillo número uno, Jimmy Boyd de 12 años de edad, con *I Saw Mommy Kissing Santa Claus.* ¿Cuál era la edad de Louis Armstrong cuando tuvo la canción número uno? (Fuente: *The Top 10 of Everything,* 2000.)

Cortesía de la Biblioteca del Congreso.

49. EXCESO DE GASTOS Los retrasos largos y los costos disparados por las nubes ocasionaron que un proyecto de construcción de tránsito rápido superaran el presupuesto por un factor de 10. La auditoría final mostró que el proyecto costaba $540 millones. ¿Cuál era el costo estimado inicial?

50. GANADORES DE LA LOTERÍA Los empleados de una tienda de abarrotes listados abajo juntaron su dinero para comprar boletos de lotería con un valor de $120 cada semana, con el entendido de que repartirían el premio de manera equitativa si llegaban a ganar. Una semana tuvieron el boleto ganador y ganaron $480,000. ¿Cuál fue la parte de las ganancias de cada empleado?

Sam M. Adler	Ronda Pellman	Manny Fernando
Lorrie Jenkins	Tom Sato	Sam Lin
Kiem Nguyen	H. R. Kinsella	Tejal Neeraj
Virginia Ortiz	Libby Sellez	Alicia Wen

51. RENTAS Al rentar un departamento con otros dos amigos, Enrique estuvo de acuerdo en pagar el solo el depósito de seguridad de $100. Los tres estuvieron de acuerdo en contribuir de manera equitativa a la renta mensual. El primer cheque de Enrique para el dueño del departamento fue de $425. ¿Cuál era la renta mensual del departamento?

52. ENTREGA DE AGUA EMBOTELLADA El conductor de un camión salió de la planta transportando 300 garrafones de agua potable. Su ruta de entrega consistía en edificios de oficinas, cada uno de los cuales iba a recibir 3 garrafones de agua. El conductor regresó a la planta al final del día con 117 garrafones de agua en el camión. ¿A cuántos edificios de oficinas repartió?

53. CONSTRUCCIÓN Para obtener un certificado de operador de equipo pesado, se requieren 48 horas de entrenamiento en el trabajo. Si una mujer ha completado 24 horas y las sesiones de entrenamiento duran 6 horas, ¿cuántas sesiones más debe tomar para obtener el certificado?

54. TRIÁNGULO DE LAS BERMUDAS El Triángulo de las Bermudas es una región triangular en el Océano Atlántico donde han desaparecido varios barcos y aviones. El perímetro del triángulo es de alrededor de 3,075 millas. Está formado por tres líneas imaginarias. La primera, de 1,100 millas de largo, es de Melbourne, Florida, a Puerto Rico. La segunda, de 1,000 millas de largo, va de Puerto Rico a las Bermudas. La tercera se extiende de las Bermudas de regreso a Florida. Encuentre su longitud.

REDACCIÓN

55. ¿Cuál es para usted el paso más difícil de la estrategia para la resolución de problemas de cinco pasos? Explique por qué lo es.

56. Dé 10 palabras o frases que indican una resta.

57. ¿Qué significa la palabra *traducir*?

58. A diferencia de un método aritmético, no tiene que determinar si se suma, resta, multiplica o divide para resolver los problemas de aplicación en esta sección. Esa decisión se hace cuando resuelve la ecuación que describe de manera matemática la situación. Explique.

59. Escriba un problema que pudiera representarse por medio de la siguiente ecuación.

La edad del padre	más	la edad del hijo	es	50.
x	$+$	$x - 20$	$=$	50

60. Escriba un problema que pudiera representarse por medio de la siguiente ecuación.

$2 \cdot$	la longitud de un campo	más	$2 \cdot$	el ancho de un campo	es	600 pies.
$2 \cdot$	$4x$	$+$	$2 \cdot$	x	$=$	600

REPASO

Encuentre el mcm y el mfc de los números proporcionados.

61. 100, 120

62. 120, 180

63. 14, 140

64. 15, 300

65. 8, 9, 49

66. 9, 16, 25

67. 66, 198, 242

68. 52, 78, 130

Objetivos

1. Identificar bases y exponentes.
2. Multiplicar expresiones exponenciales que tienen bases similares.
3. Elevar a una potencia expresiones exponenciales.
4. Encontrar potencias de productos.

SECCIÓN 8.6
Reglas de multiplicación para los exponentes

En esta sección se utilizará la definición del exponente para desarrollar algunas reglas para la simplificación de expresiones que contienen exponentes.

1 Identificar bases y exponentes

Recuerde que un **exponente** indica una multiplicación repetitiva. Indica cuántas veces se utiliza la base como un factor. Por ejemplo, 3^5 representa el producto de cinco 3.

Exponente → $3^5 = \overbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}^{\text{5 factores de 3}}$ ← Base

En general, se tiene la siguiente definición.

Exponentes de números naturales

El exponente de un número natural* indica cuántas veces se va a utilizar la base como un factor.

Para cualquier número x y cualquier número natural n,

$$x^n = \overbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}^{n \text{ factores de } x}$$

*El conjunto de los números naturales es $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$.

A las expresiones de la forma x^n se les llama **expresiones exponenciales.** La base de una expresión exponencial puede ser un número, una variable o una combinación de números y variables. Algunos ejemplos son:

$10^5 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$ — La base es el 10. El exponente es el 5. Se lee como "10 a la quinta potencia".

$y^2 = y \cdot y$ — La base es y. El exponente es el 2. Se lee como "y al cuadrado".

$(-2s)^3 = (-2s)(-2s)(-2s)$ — La base es $-2s$. El exponente es el 3. Se lee como "2s negativo elevado a la tercera potencia" o como "2s negativo al cubo".

$-8^4 = -(8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8)$ — Dado que el signo $-$ no está escrito dentro de los paréntesis, la base es el 8. El exponente es el 4. Se lee como "el opuesto (o el negativo) de 8 a la cuarta potencia".

Cuando un exponente es el 1, por lo regular no se escribe. Por ejemplo, $4 = 4^1$ y $x = x^1$.

¡Cuidado! Las bases que contienen un signo $-$ *deben* escribirse dentro de paréntesis.

$(-2s)^3$ ← Exponente

Base

EJEMPLO 1 Identifique la base y el exponente en cada fracción:

a. 8^5 **b.** $7a^3$ **c.** $(7a)^3$

Estrategia Para identificar la base y el exponente, se buscará la forma .

POR QUÉ El exponente es el número pequeño elevado a la derecha de la base.

Solución

a. En 8^5, la base es el 8 y el exponente es el 5.

b. $7a^3$ si significa $7 \cdot a^3$. Por tanto, la base es a, no $7a$. El exponente es el 3.

c. Debido a los paréntesis en $(7a)^3$, la base es $7a$ y el exponente es el 3.

Auto-revisión 1

Identifique la base y el exponente:

a. $3y^4$

b. $(3y)^4$

Ahora intente **Problemas 13 y 17**

EJEMPLO 2 Escriba cada expresión en una forma equivalente utilizando un exponente: **a.** $b \cdot b \cdot b \cdot b$ **b.** $5 \cdot t \cdot t \cdot t$

Estrategia Se buscarán factores repetidos y se contará el número de veces que aparece cada uno.

POR QUÉ Se puede utilizar un exponente para representar una multiplicación repetitiva.

Solución

a. Dado que hay cuatro factores repetidos de b en $b \cdot b \cdot b \cdot b$, la expresión puede escribirse como b^4.

b. Dado que hay tres factores repetidos de t en $5 \cdot t \cdot t \cdot t$, la expresión puede escribirse como $5t^3$.

Auto-revisión 2

Escriba como una expresión exponencial:

$(x + y)(x + y)(x + y)(x + y)(x + y)$

Ahora intente **Problemas 25 y 29**

2 Multiplicar expresiones exponenciales que tienen bases similares

Para desarrollar una regla para la multiplicación de expresiones exponenciales que tienen la misma base, se considera el producto $6^2 \cdot 6^3$. Dado que 6^2 significa que el 6 se va a utilizar como un factor dos veces y 6^3 significa que el 6 se va a utilizar como un factor tres veces, se tiene

$$6^2 \cdot 6^3 = \overbrace{6 \cdot 6}^{\text{2 factores de 6}} \cdot \overbrace{6 \cdot 6 \cdot 6}^{\text{3 factores de 6}}$$
$$= \overbrace{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6}^{\text{5 factores de 6}}$$
$$= 6^5$$

Se puede encontrar rápido este resultado si se conserva la base común de 6 y se suman los exponentes en 6^2 y 6^3.

$$6^2 \cdot 6^3 = 6^{2+3} = 6^5$$

Este ejemplo ilustra la siguiente regla para los exponentes.

Regla del producto para los exponentes

Para multiplicar expresiones exponenciales que tienen la misma base, conserve la base común y sume los exponentes.

Para cualquier número x y cualquier número natural m y n,

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

Se lee como "x a la m-ésima potencia por x a la n-ésima potencia es igual a x a la m más n-ésima potencia".

Auto-revisión 3

Simplifique:

a. $7^8(7^7)$

b. x^2x^3x

c. $(y-1)^5(y-1)^5$

d. $(s^4t^3)(s^4t^4)$

Ahora intente **Problemas 33, 35 y 37**

EJEMPLO 3

Simplifique:

a. $9^5(9^6)$ **b.** $x^3 \cdot x^4$ **c.** y^2y^4y **d.** $(c^2d^3)(c^4d^5)$

Estrategia En cada caso, se desea escribir una expresión equivalente utilizando una base y un exponente. Se utilizará la regla del producto para los exponentes para hacer esto.

POR QUÉ La regla del producto para los exponentes se utiliza para multiplicar expresiones exponenciales que tienen la misma base.

Solución

a. $9^5(9^6) = 9^{5+6} = 9^{11}$ Conserve la base común, el 9, y sume los exponentes. Dado que 9^{11} es un número muy grande, se dejará la respuesta en esta forma. No se evaluará.

¡Cuidado! No cometa el error de multiplicar las bases cuando utiliza la regla del producto. Conserve la *misma* base.

$$9^5(9^6) \neq 81^{11}$$

b. $x^3 \cdot x^4 = x^{3+4} = x^7$ Conserve la base común, x, y sume los exponentes.

c. $y^2y^4y = y^2y^4y^1$ Escriba y como y^1.
$= y^{2+4+1}$ Conserve la base común, y, y sume los exponentes.
$= y^7$

d. $(c^2d^3)(c^4d^5) = (c^2c^4)(d^3d^5)$ Use las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación para agrupar las bases comunes.
$= (c^{2+4})(d^{3+5})$ Conserve la base común, c, y sume los exponentes. Conserve la base común, d, y sume los exponentes.
$= c^6d^8$

¡Cuidado! No se puede utilizar la regla del producto para simplificar expresiones como $3^2 \cdot 2^3$, donde las bases no son iguales. Sin embargo, se puede simplificar esta expresión realizando la aritmética:

$3^2 \cdot 2^3 = 9 \cdot 8 = 72$ $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$ y $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Recuerde que los *términos similares* son términos con exactamente las mismas variables elevadas a exactamente las mismas potencias. Para sumar o restar expresiones exponenciales, deben ser términos similares. Para multiplicar expresiones exponenciales, sólo las bases necesitan ser iguales.

$x^5 + x^2$ No hay términos similares; los exponentes son diferentes. No se pueden sumar.

$x^2 + x^2 = 2x^2$ Hay términos similares; se pueden sumar. Recuerde que $x^2 = 1x^2$.

$x^5 \cdot x^2 = x^7$ Las bases son iguales; se pueden multiplicar.

3 Elevar a una potencia expresiones exponenciales

Para desarrollar otra regla para los exponentes, se considera $(5^3)^4$. Aquí, se eleva a una potencia una expresión exponencial, 5^3. Dado que 5^3 es la base y el 4 es el exponente, $(5^3)^4$ puede escribirse como $5^3 \cdot 5^3 \cdot 5^3 \cdot 5^3$. Debido a que cada uno de los cuatro factores de 5^3 contiene tres factores de 5, hay $4 \cdot 3$ o 12 factores de 5.

12 factores de 5

$$(5^3)^4 = 5^3 \cdot 5^3 \cdot 5^3 \cdot 5^3 = \overbrace{\underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{5^3} \cdot \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{5^3} \cdot \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{5^3} \cdot \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{5^3}}^{} = 5^{12}$$

Se puede encontrar de manera rápida este resultado si se conserva la base de 5 y se multiplican los exponentes.

$(5^3)^4 = 5^{3 \cdot 4} = 5^{12}$

Este ejemplo ilustra la siguiente regla para los exponentes.

Regla de la potencia para los exponentes

Para elevar a una potencia una expresión exponencial, conserve la base y multiplique los exponentes.

Para cualquier número x y cualesquier números naturales m y n,

$(x^m)^n = x^{m \cdot n} = x^{mn}$ Se lee como "la cantidad de x a la m-ésima potencia elevada a la n-ésima potencia es igual a x a la mn-ésima potencia".

El lenguaje del álgebra A una expresión exponencial elevada a una potencia, como $(5^3)^4$, también se le llama *potencia de una potencia.*

EJEMPLO 4 Simplifique: **a.** $(2^3)^7$ **b.** $[(-6)^2]^5$ **c.** $(z^8)^8$

Estrategia En cada caso, se desea escribir una expresión equivalente utilizando una base y un exponente. Se utiliza la regla de la potencia para los exponentes para hacer esto.

POR QUÉ Cada expresión es una potencia de una potencia.

Auto-revisión 4

Simplifique:

a. $(4^6)^5$

b. $(y^5)^2$

Ahora intente Problemas 49, 51 y 53

Solución

a. $(2^3)^7 = 2^{3\cdot 7} = 2^{21}$ Conserve la base, el 2, y multiplique los exponentes. Dado que 2^{21} es un número muy grande, se dejará la respuesta en esta forma.

b. $[(-6)^2]^5 = (-6)^{2\cdot 5} = (-6)^{10}$ Conserve la base, el -6, y multiplique los exponentes. Dado que $(-6)^{10}$ es un número muy grande, se dejará la respuesta en esta forma.

c. $(z^8)^8 = z^{8\cdot 8} = z^{64}$ Conserve la base, z, y multiplique los exponentes.

Auto-revisión 5

Simplifique:

a. $(a^4a^3)^3$

b. $(a^3)^3(a^4)^2$

Ahora intente Problemas 57 y 61

EJEMPLO 5 Simplifique: **a.** $(x^2x^5)^2$ **b.** $(z^2)^4(z^3)^3$

Estrategia En cada caso se requiere escribir una expresión equivalente utilizando una base y un exponente. Se utiliza la regla de la potencia para los exponentes para hacer esto.

POR QUÉ Las expresiones involucran la multiplicación de expresiones exponenciales que tienen la misma base e involucran potencias de potencias.

Solución

a. $(x^2x^5)^2 = (x^7)^2$ Dentro de los paréntesis, conserve la base común, x, y sume los exponentes: $2 + 5 = 7$.

$= x^{14}$ Conserve la base, x, y multiplique los exponentes: $7 \cdot 2 = 14$.

b. $(z^2)^4(z^3)^3 = z^8z^9$ Para cada potencia de z elevada a una potencia, conserve la base y multiplique los exponentes: $2 \cdot 4 = 8$ y $3 \cdot 3 = 9$.

$= z^{17}$ Conserve la base común, z, y sume los exponentes: $8 + 9 = 17$.

4 Encontrar potencias de productos

Para desarrollar otra regla para los exponentes, se considera la expresión $(2x)^3$, la cual es una *potencia del producto* del 2 y x.

$(2x)^3 = 2x \cdot 2x \cdot 2x$ Escriba la base $2x$ como un factor 3 veces.

$= (2 \cdot 2 \cdot 2)(x \cdot x \cdot x)$ Cambie el orden de los factores y agrupe las bases similares.

$= 2^3x^3$ Escriba cada producto de los factores repetidos en forma exponencial.

$= 8x^3$ Evalúe: $2^3 = 8$.

Este ejemplo ilustra la siguiente regla para los exponentes.

Potencia de un producto

Para elevar un producto a una potencia, eleve cada factor del producto a esa potencia.

Para cualquier número x y y, y cualquier número natural n,

$$(xy)^n = x^ny^n$$

Auto-revisión 6

Simplifique:

a. $(2t)^4$

b. $(c^3d^4)^6$

Ahora intente Problemas 65 y 69

EJEMPLO 6 Simplifique: **a.** $(3c)^4$ **b.** $(x^2y^3)^5$

Estrategia En cada caso se requiere escribir la expresión en una forma equivalente en la que cada base se eleva a una sola potencia. Se utilizará la regla de la potencia de un producto para los exponentes para hacer esto.

POR QUÉ Dentro de cada conjunto de paréntesis está un producto y cada uno de estos productos está elevado a una potencia.

Solución

a. $(3c)^4 = 3^4c^4$ Eleve cada factor del producto $3c$ a la 4a potencia.

$= 81c^4$ Evalúe: $3^4 = 81$.

b. $(x^2y^3)^5 = (x^2)^5(y^3)^5$ Eleve cada factor del producto x^2y^3 a la 5a potencia.

$= x^{10}y^{15}$ Para cada potencia de una potencia, conserve cada base, x y y, y multiplique los exponentes: $2 \cdot 5 = 10$ y $3 \cdot 5 = 15$.

EJEMPLO 7

Simplifique: $(2a^2)^2(4a^3)^3$

Estrategia Se requiere escribir una expresión equivalente utilizando una base y un exponente. Se comenzará el proceso utilizando la regla de la potencia de un producto para los exponentes.

POR QUÉ Dentro de cada conjunto de paréntesis está un producto y cada producto está elevado a una potencia.

Solución

$(2a^2)^2(4a^3)^3 = 2^2(a^2)^2 \cdot 4^3(a^3)^3$ Eleve cada factor del producto $2a^2$ a la 2a potencia. Eleve cada factor del producto $4a^3$ a la 3a potencia.

$= 4a^4 \cdot 64a^9$ Evalúe: $2^2 = 4$ y $4^3 = 64$. Para cada potencia de una potencia, conserve cada base y multiplique los exponentes: $2 \cdot 2 = 4$ y $3 \cdot 3 = 9$.

$= (4 \cdot 64)(a^4 \cdot a^9)$ Agrupe los factores numéricos. Agrupe los factores que tienen la misma base.

$= 256a^{13}$ Realice la multiplicación: $4 \cdot 64 = 256$. Conserve la base común a y sume los exponentes: $4 + 9 = 13$.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1}\\ 64\\ \times\ 4\\ \hline 256 \end{array}$$

Auto-revisión 7

Simplifique: $(4y^3)^2(3y^4)^3$

Ahora intente **Problema 73**

Las reglas para los exponentes de números naturales se resumen como a continuación.

Reglas para los exponentes

Si m y n representan números naturales y no hay divisiones entre cero, entonces

Exponente de 1	Regla del producto	Regla de la potencia
$x^1 = x$	$x^m x^n = x^{m+n}$	$(x^m)^n = x^{mn}$

Potencia de un producto

$$(xy)^n = x^n y^n$$

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. a. base: y, exponente: 4 **b.** base: $3y$, exponente: 4 **2.** $(x + y)^5$ **3. a.** 7^{15} **b.** x^6 **c.** $(y - 1)^{10}$ **d.** s^8t^7 **4. a.** 4^{30} **b.** y^{10} **5. a.** a^{21} **b.** a^{17} **6. a.** $16t^4$ **b.** $c^{18}d^{24}$ **7.** $432y^{18}$

SECCIÓN 8.6 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Complete los espacios.

1. A las expresiones como x^4, 10^3 y $(5t)^2$ se les llama expresiones _____.

2. Relacione cada expresión con la descripción apropiada.

   $(a^4b^2)^5$ $(a^8)^4$ $a^5 \cdot a^3$

   a. Producto de expresiones exponenciales con la misma base

   b. Potencia de una expresión exponencial

   c. Potencia de un producto

CONCEPTOS

Complete los espacios.

3. **a.** $(3x)^4 =$ ☐ · ☐ · ☐ · ☐

   b. $(-5y)(-5y)(-5y) =$ ☐

4. **a.** $x = x$☐ **b.** $x^m x^n =$ ☐

   c. $(xy)^n =$ ☐ **d.** $(a^b)^c =$ ☐

5. Para simplificar cada expresión, determine si suma, resta, multiplica o divide los exponentes.

   a. $b^6 \cdot b^9$

   b. $(n^8)^4$

   c. $(a^4b^2)^5$

6. Para simplificar $(2y^3z^2)^4$, ¿qué factores dentro de los paréntesis deben elevarse a la cuarta potencia?

Simplifique cada expresión, si es posible.

7. **a.** $x^2 + x^2$ **b.** $x^2 \cdot x^2$

8. **a.** $x^2 + x$ **b.** $x^2 \cdot x$

9. **a.** $x^3 - x^2$ **b.** $x^3 \cdot x^2$

10. **a.** $4^2 \cdot 2^4$ **b.** $x^3 \cdot y^2$

NOTACIÓN

Complete cada solución para simplificar las expresiones.

11. $(x^4x^2)^3 = (\square)^3$
    $= x$☐

12. $(x^4)^3\,(x^2)^3$
    $= x$☐ $x^{12} \cdot x^6$
    $= x$☐

PRÁCTICA GUIADA

Identifique la base y el exponente en cada expresión. Vea el Ejemplo 1.

13. 4^3 14. $(-8)^2$

15. x^5 16. $\left(\frac{5}{x}\right)^3$

17. $(-3x)^2$ 18. $(2xy)^{10}$

19. $-\frac{1}{3}y^6$ 20. $-x^4$

21. $9m^{12}$ 22. $3.14r^4$

23. $(y + 9)^4$ 24. $(z - 2)^3$

Escriba cada expresión en una forma equivalente utilizando un exponente. Vea el Ejemplo 2.

25. $m \cdot m \cdot m \cdot m \cdot m$

26. $r \cdot r \cdot r \cdot r \cdot r \cdot r$

27. $4t \cdot 4t \cdot 4t \cdot 4t$

28. $-5u(-5u)(-5u)(-5u)(-5u)$

29. $4 \cdot t \cdot t \cdot t \cdot t \cdot t$

30. $5 \cdot u \cdot u \cdot u$

31. $a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b$

32. $m \cdot m \cdot m \cdot n \cdot n$

Use la regla del producto para los exponentes para simplificar cada expresión. Escriba los resultados utilizando exponentes. Vea el Ejemplo 3.

33. $5^3 \cdot 5^4$ 34. $3^4 \cdot 3^6$

35. $a^3 \cdot a^3$ 36. $m^7 \cdot m^7$

37. bb^2b^3 38. aa^3a^5

39. $(c^5)(c^8)$ 40. $(d^4)(d^{20})$

41. $(a^2b^3)(a^3b^3)$ 42. $(u^3v^5)(u^4v^5)$

43. $cd^4 \cdot cd$ 44. $ab^3 \cdot ab^4$

45. $x^2 \cdot y \cdot x \cdot y^{10}$ 46. $x^3 \cdot y \cdot x \cdot y^{12}$

47. $m^{100} \cdot m^{100}$ 48. $n^{600} \cdot n^{600}$

Use la regla de la potencia para los exponentes para simplificar cada expresión. Escriba los resultados utilizando exponentes. Vea el Ejemplo 4.

49. $(3^2)^4$

50. $(4^3)^3$

51. $[(-4.3)^3]^8$

52. $[(-1.7)^9]^8$

53. $(m^{50})^{10}$

54. $(n^{25})^4$

55. $(y^5)^3$

56. $(b^3)^6$

Use las reglas del producto y de la potencia para los exponentes para simplificar cada expresión. Vea el Ejemplo 5.

57. $(x^2x^3)^5$

58. $(y^3y^4)^4$

59. $(p^2p^3)^5$

60. $(r^3r^4)^2$

61. $(t^3)^4(t^2)^3$

62. $(b^2)^5(b^3)^2$

63. $(u^4)^2(u^3)^2$

64. $(v^5)^2(v^3)^4$

Use la regla de la potencia de un producto para los exponentes para simplificar cada expresión. Vea el Ejemplo 6.

65. $(6a)^2$

66. $(3b)^3$

67. $(5y)^4$

68. $(4t)^4$

69. $(3a^4b^7)^3$

70. $(5m^9n^{10})^2$

71. $(-2r^2s^3)^3$

72. $(-2x^2y^4)^5$

Use la regla de la potencia de un producto para los exponentes para simplificar cada expresión. Vea el Ejemplo 7.

73. $(2c^3)^3(3c^4)^2$

74. $(5b^4)^2(3b^8)^2$

75. $(10d^7)^2(4d^9)^3$

76. $(2x^7)^3(4x^8)^2$

INTÉNTELO

Simplifique cada expresión.

77. $(7a^9)^2$

78. $(12b^6)^2$

79. $t^4 \cdot t^5 \cdot t$

80. $n^4 \cdot n \cdot n^3$

81. $y^3y^2y^4$

82. y^4yy^6

83. $(-6a^3b^2)^3$

84. $(-10r^3s^2)^2$

85. $(n^4n)^3(n^3)^6$

86. $(y^3y)^2(y^2)^2$

87. $(b^2b^3)^{12}$

88. $(s^3s^3)^3$

89. $(2b^4b)^5(3b)^2$

90. $(2aa^7)^3(3a)^3$

91. $(c^2)^3(c^4)^2$

92. $(t^5)^2(t^3)^3$

93. $(3s^4t^3)^3(2st)^4$

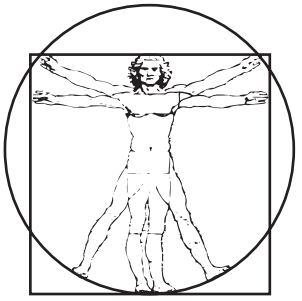
94. $(2a^3b^5)^2(4ab)^3$

95. $x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot x^4 \cdot x^5$

96. $x^{10} \cdot x^9 \cdot x^8 \cdot x^7$

APLICACIONES

97. HISTORIA DEL ARTE Se muestra el dibujo de Leonardo da Vinci que relaciona una figura humana con un cuadrado y un círculo. Encuentre una expresión para el área del cuadrado si la altura del hombre es de $5x$ pies.



98. EMPACADO Encuentre una expresión para el volumen de la caja mostrada abajo.

REDACCIÓN

99. Explique el error en la siguiente solución.

$2^3 \cdot 2^2 = 4^5 = 1{,}024$

100. Explique por qué se puede simplificar $x^4 \cdot x^5$, pero no se puede simplificar $x^4 + x^5$.

REPASO

101. JOYERÍA Gran parte de lo que se refiere como joyería de oro en realidad está hecho de una combinación de oro y otro metal. Por ejemplo, el oro de 18 quilates es $\frac{18}{24}$ oro en peso. Simplifique esta razón.

102. Después de la evaluación, ¿cuál es el signo de $(-13)^5$?

103. Divida: $\dfrac{-25}{-5}$

104. ¿Cuánto cambió la temperatura si pasó de -4°F a -17°F?

105. Evalúe: $2\left(\dfrac{12}{-3}\right) + 3(5)$

106. Resuelva: $-10 = x + 1$

107. Resuelva: $-x = -12$

108. Divida: $\dfrac{0}{10}$

LISTA DE VERIFICACIÓN DE LAS HABILIDADES DE ESTUDIO

Expresiones y ecuaciones

Antes de tomar el examen en el Capítulo 8, asegúrese de que conoce la diferencia entre simplificar una expresión y resolver una ecuación. Coloque una marca de verificación en el recuadro si puede responder "sí" al enunciado.

☐ Sé que una *expresión* no contiene un símbolo =.

Expresiones:

$2x + 3x$ $\quad$ $4(5y - 2)$

☐ Sé cómo simplificar expresiones combinando términos similares.

$2x + 3x$ es $5x$

☐ Sé cómo utilizar la propiedad distributiva para simplificar expresiones.

$4(5y - 2)$ es $20y - 8$

☐ Sé que una *ecuación* contiene un símbolo =.

Ecuaciones:

$x + 5 = 9$ $\quad$ $8y = -40$

☐ Sé cómo utilizar las propiedades de igualdad de la suma y resta para resolver ecuaciones. Si se suma un número a (o se resta de) un lado de una ecuación, debe sumarse el mismo número (o restarse de) al otro lado.

$$x + 5 = 9$$
$$x + 5 - 5 = 9 - 5 \quad \text{Reste el 5 de ambos lados.}$$
$$x = 4$$

☐ Sé cómo utilizar las propiedades de igualdad de la multiplicación y división para resolver ecuaciones. Si un lado de una ecuación se multiplica por (o se divide entre) un número, el otro lado debe multiplicarse por (o dividirse entre) el mismo número.

$$8y = -40$$
$$\frac{8y}{8} = \frac{-40}{8} \quad \text{Divida ambos lados entre 8.}$$
$$y = -5$$

CAPÍTULO 8 RESUMEN Y REPASO

SECCIÓN 8.1 El lenguaje del álgebra

DEFINICIONES Y CONCEPTOS	EJEMPLOS
Una **variable** es una letra (o símbolo) que representa un número. Dado que los números no cambian de valor, se les llama **constantes.**	Variables: x, a y y Constantes: $8, -10, 2\frac{3}{5}$ y 3.14
Cuando se multiplica una variable por un número, o una variable por otra variable, se puede omitir el símbolo de multiplicación.	$3x$ significa $3 \cdot x$ $\quad$ ab significa $a \cdot b$ $\quad$ $4rst$ significa $4 \cdot r \cdot s \cdot t$
Varias de las propiedades que se han visto mientras se trabajaba con números naturales, enteros, fracciones y decimales pueden generalizarse y enunciarse en símbolos utilizando variables.	**Propiedad conmutativa de la suma** $a + b = b + a$ **Propiedad asociativa de la multiplicación** $(ab)c = a(bc)$

Las variables y/o números pueden combinarse con las operaciones de suma, resta, multiplicación y división para crear **expresiones algebraicas.**

Con frecuencia se les refiere a las *expresiones algebraicas* simplemente como **expresiones.**

Expresiones:

$5y + 7$ $\quad \frac{12 - x}{5}$ $\quad 8a(b - 3)$

Un **término** es un producto o cociente de números y/o variables. Un número o una variable sola también es un término. A un término como el 4, que consiste en un solo número, se le llama **término constante.**

Términos: $4,\ y,\ 6r,\ -w^3,\ 3.7x^5,\ \frac{3}{n},\ -15ab^2$

Los símbolos de suma separan las expresiones en partes llamadas **términos.**

Al factor numérico de un término se le llama **coeficiente** del término.

Dado que $6a^2 + a - 5$ puede escribirse como $6a^2 + a + (-5)$, tiene tres términos.

Término	Coeficiente
$6a^2$	6
a	1
-5	-5

Es importante ser capaz de distinguir entre los **términos de una expresión** y los **factores de un término.**

$x + 6$ — x es un término.

$6x$ — x es un factor.

Las **palabras clave** y las **frases clave** pueden traducirse a expresiones algebraicas.

5 más que x puede expresarse como $x + 5$.

25 menos que el doble de y puede expresarse como $2y - 25$.

Una mitad del costo c puede expresarse como $\frac{1}{2}c$.

Para **evaluar expresiones algebraicas,** se sustituyen los valores de sus variables y se aplican las reglas para el orden de las operaciones.

Evalúe $\frac{x^2 - y^2}{x + y}$ para $x = 2$ y $y = -3$.

$$\frac{\mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^2}{\mathbf{x} + \mathbf{y}} = \frac{\mathbf{2}^2 - (\mathbf{-3})^2}{\mathbf{2} + (\mathbf{-3})}$$ Sustituya el 2 para x y el -3 para y.

$$= \frac{4 - 9}{-1}$$ En el numerador, evalúe las expresiones exponenciales. En el denominador, sume.

$$= \frac{-5}{-1}$$ En el numerador, reste.

$$= 5$$ Realice la división.

EJERCICIOS DE REPASO

1. Escriba cada expresión sin utilizar un símbolo de multiplicación o paréntesis.

a. $6 \cdot b$

b. $x \cdot y \cdot z$

c. $2(t)$

2. a. Escriba la propiedad conmutativa de la suma utilizando las variables c y d.

b. Escriba la propiedad asociativa de la multiplicación utilizando las variables r, s, y t.

3. Determine si la variable h se utiliza como un *término* o como un *factor*.

a. $5h + 9$ **b.** $h + 16$

4. ¿Cuántos términos tiene cada expresión?

a. $3x^2 + 2x - 5$ **b.** $-12xyz$

5. Identifique los cocientes de cada término de la expresión proporcionada.

a. $16x^2 - x + 25$ **b.** $\frac{x}{2} + y$

6. Traduzca la expresión $m - 500$ a palabras.

7. Traduzca cada frase a una expresión algebraica.

a. 25 más que la altura h

b. 100 reducido por el doble de la calificación de corte s

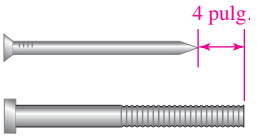
c. 6 menos que un medio del tiempo t

d. El valor absoluto de la diferencia del 2 y el cuadrado de a.

8. FERRETERÍA Refiérase a la ilustración en la siguiente columna.

a. n representa la longitud del clavo (en pulgadas). Escriba una expresión algebraica que represente la longitud del tornillo (en pulgadas).

b. b representa la longitud del tornillo (en pulgadas). Escriba una expresión algebraica que represente la longitud del clavo (en pulgadas).



9. a. DISEÑADORES DE ROPA Las piernas en un par de pantalones son de x pulgadas de largo. El diseñador después baja el dobladillo 1 pulgada. Escriba una expresión algebraica que represente la longitud de las piernas arregladas del pantalón.

b. CARNICEROS Una carne asada pesa p libras. Un carnicero corta la carne asada en 8 porciones de igual tamaño. Escriba una expresión algebraica que represente el peso de una porción.

10. EQUIPO DEPORTIVO Un balón de basquetbol de la NBA pesa 2 onzas más que el doble del peso de un balón de volibol.

a. x representa el peso de uno de los balones. Escriba una expresión para el peso del otro balón.

b. Si el peso de un balón de volibol es de 10 onzas, ¿cuál es el peso de un balón de basquetbol de la NBA?

Evalúe cada expresión algebraica para los valores proporcionados de las variables.

11. $2x^2 + 3x + 7$ para $x = 5$

12. $(x - 7)^2$ para $x = -1$

13. $b^2 - 4ac$ para $b = -10, a = 3$ y $c = 5$

14. $\frac{x + y}{-x - z}$ para $x = 19, y = 17$ y $z = -18$

SECCIÓN 8.2 Simplificación de expresiones algebraicas

DEFINICIONES Y CONCEPTOS	EJEMPLOS
Con frecuencia se utiliza la *propiedad conmutativa de la multiplicación* para reordenar factores y la *propiedad asociativa de la multiplicación* para reagrupar factores cuando se **simplifican expresiones.**	Simplifique: $-5(3y) = (-5 \cdot 3)y = -15y$ Simplifique: $-45b\left(\frac{5}{9}\right) = \left(-45 \cdot \frac{5}{9}\right)b = -\frac{5 \cdot \overset{1}{\cancel{9}} \cdot 5}{\underset{1}{\cancel{9}}}b = -25b$

Puede utilizarse la **propiedad distributiva** para eliminar paréntesis: $a(b + c) = ab + ac$ $a(b - c) = ab - ac$ $a(b + c + d) = ab + ac + ad$	Multiplique: $7(x + 3) = 7 \cdot x + 7 \cdot 3$ $= 7x + 21$ Multiplique: $-0.2(4m - 5n - 7) = -0.2(4m) - (-0.2)(5n) - (-0.2)(7)$ $= -0.8m + n + 1.4$
Los **términos similares** son términos que tienen exactamente las mismas variables elevadas a exactamente las mismas potencias.	$3x$ y $-5x$ son términos similares. $-4t^3$ y $3t^2$ son términos no similares debido a que la variable t tiene exponentes diferentes. $0.5xyz$ y $3.7xy$ son términos no similares debido a que tienen variables diferentes.
A la simplificación de la suma o diferencia de términos similares se le llama **combinar términos similares.** Los términos similares pueden combinarse sumando o restando los coeficientes de los términos y conservando las mismas variables con los mismos exponentes.	Simplifique: $4a + 2a = 6a$ Piense: $(4 + 2)a = 6a$. Simplifique: $5p^2 + p - p^2 - 9p = 4p^2 - 8p$ Piense: $(5 - 1)p^2 = 4p^2$ y $(1 - 9)p = -8p$. Simplifique: $2(k - 1) - 3(k + 2) = 2k - 2 - 3k - 6$ $= -k - 8$

EJERCICIOS DE REPASO

Simplifique cada expresión.

15. $4(7w)$

16. $3(-2x)(-4)$

17 $0.4(5.2f)$

18. $\frac{7}{2} \cdot \frac{2}{7}r$

Use la propiedad distributiva para eliminar paréntesis.

19. $5(x + 3)$

20. $-(2x + 3 - y)$

21. $\frac{3}{4}(4c - 8)$

22. $2(3c + 7)(2.1)$

Liste los términos similares en cada expresión.

23. $7a + 3 + 9a$

24. $2x^2 + 2x + 3x^2 - x$

Simplifique cada expresión combinando términos similares, si es posible.

25. $8p + 5p - 4p$

26. $-5m + 2 - 2m - 2$

27. $n + n + n + n$

28. $5(p - 2) - 2(3p + 4)$

29. $55.7k^2 - 55.6k^2$

30. $8a^3 + 4a^3 + 2a - 4a^3 - 2a - 1$

31. $10x + 10y$

32. $4x^3 - 4x^2 - 4x - 4$

33. $\frac{3}{5}w - \left(-\frac{2}{5}w\right)$

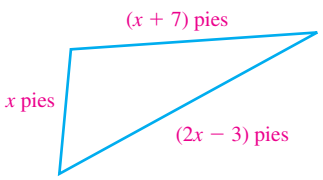
34. $36\left(\frac{1}{9}h - \frac{3}{4}\right) + 36\left(\frac{1}{3}\right)$

35. Escriba una expresión equivalente para la expresión proporcionada utilizando el menor número de símbolos.

a. $1x$ **b.** $-1x$

c. $4x - (-1)$ **d.** $4x + (-1)$

36. GEOMETRÍA Escriba una expresión algebraica en forma simplificada que represente el perímetro del triángulo.



SECCIÓN 8.3 Resolución de ecuaciones utilizando las propiedades de igualdad

DEFINICIONES Y CONCEPTOS

Una **ecuación** es un enunciado que indica que dos expresiones son iguales. Todas las ecuaciones contienen un símbolo igual. El símbolo = separa una ecuación en dos partes: el lado izquierdo y el lado derecho.

EJEMPLOS

Ecuaciones:

$2x + 4 = 10$ $\quad -5(a + 4) = -11a$ $\quad \frac{3}{2}t + 6 = t - \frac{1}{3}$

A un número que hace a una ecuación un enunciado verdadero cuando se sustituye para la variable se le llama **solución** de la ecuación.

Determine si el 2 es una solución de $x + 4 = 3x$.

Comprobación:

$$x + 4 = 3x$$
$$2 + 4 \stackrel{?}{=} 3(2) \qquad \text{Sustituya el 2 para cada x.}$$
$$6 = 6 \qquad \text{Verdadero.}$$

Dado que el enunciado resultante, $6 = 6$, es verdadero, el 2 es una solución de $x + 4 = 3x$.

Las **ecuaciones equivalentes** tienen las mismas soluciones.

$x - 2 = 6$ y $x = 8$ son ecuaciones equivalentes debido a que tienen la misma solución, el 8.

Para **resolver una ecuación** despeje la variable en un lado de la ecuación deshaciendo las operaciones desarrolladas sobre ella utilizando las propiedades de la igualdad.

Propiedad de igualdad de la suma (resta): Si se suma el mismo número a (o se resta de) ambos lados de una ecuación, el resultado es una ecuación equivalente.

Resuelva: $x - 5 = 7$

$$x - 5 + 5 = 7 + 5$$
$$x = 12$$

Resuelva: $c + 9 = 16$

$$c + 9 - 9 = 16 - 9$$
$$c = 7$$

Propiedad de igualdad de la multiplicación (división): Si ambos lados de una ecuación se multiplican por (o se dividen entre) el mismo número diferente del cero, el resultado es una ecuación equivalente.

Resuelva: $\frac{m}{3} = 2$

$$3\left(\frac{m}{3}\right) = 3(2)$$
$$m = 6$$

Resuelva: $10y = 50$

$$\frac{10y}{10} = \frac{50}{10}$$
$$y = 5$$

EJERCICIOS DE REPASO

Use una comprobación para determinar si el número dado es una solución de la ecuación.

37. 84, $x - 34 = 50$

38. 3, $5y + 2 = 12$

39. -30, $\frac{x}{5} = 6$

40. 2, $a^2 - a - 1 = 0$

41. -3, $5b - 2 = 3b - 8$

42. 1, $\frac{2}{y + 1} = \frac{12}{y + 1} - 5$

Complete los espacios.

43. Una _____ es un enunciado que indica que dos expresiones son iguales.

44. El resolver $x - 8 = 10$ significa encontrar todos los valores de la variable que hacen a la ecuación un enunciado _____.

Resuelva cada ecuación. Compruebe el resultado.

45. $x - 9 = 12$

46. $-y = -32$

47. $a + 3.7 = -16.9$

48. $100 = -7 + r$

49. $120 = 5c$

50. $t - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

51. $\frac{4}{3}t = -12$

52. $3 = \frac{q}{-2.6}$

53. $6b = 0$

54. $\frac{15}{16}s = -3$

SECCIÓN 8.4 Más acerca de la resolución de ecuaciones

DEFINICIONES Y CONCEPTOS

Una estrategia para la resolución de ecuaciones:

1. *Simplifique* cada lado. Use la propiedad distributiva y combine los términos similares cuando sea necesario.
2. *Despeje el término variable.* Use las propiedades de igualdad de la suma y resta.
3. *Despeje la variable.* Use las propiedades de igualdad de la multiplicación y división.
4. *Compruebe* el resultado en la ecuación original.

EJEMPLOS

Resuelva: $6x + 2 = 14$

Para despejar la variable, se utiliza la regla del orden de las operaciones de manera inversa.

- Para despejar el término variable, $6x$, se resta 2 de ambos lados para deshacer la suma del 2.
- Para despejar la variable, x, se dividen ambos lados entre 6 para deshacer la multiplicación por 6.

$6x + 2 - 2 = 14 - 2$ Reste el 2 de ambos lados para despejar 6x.

$6x = 12$ Realice las restas.

$\frac{6x}{6} = \frac{12}{6}$ Divida ambos lados entre 6 para despejar x.

$x = 2$

La solución es el 2. Compruebe sustituyéndolo en la ecuación original.

Cuando se resuelven ecuaciones, se deben simplificar las expresiones que conforman los lados izquierdo y derecho antes de aplicar alguna propiedad de igualdad.

Resuelva: $2(y + 2) + 4y = 11 - y$

$2y + 4 + 4y = 11 - y$ Distribuya la multiplicación por 2.

$6y + 4 = 11 - y$ Combine los términos similares: 2y + 4y = 6y.

$6y + 4 + y = 11 - y + y$ Para eliminar −y a la derecha, sume y a ambos lados.

$7y + 4 = 11$ Combine los términos similares.

$7y + 4 - 4 = 11 - 4$ Para despejar el término variable 7y, reste el 4 de ambos lados.

$7y = 7$ Simplifique cada lado de la ecuación.

$\frac{7y}{7} = \frac{7}{7}$ Para despejar y, divida ambos lados entre 7.

$y = 1$

La solución es el 1. Compruebe sustituyéndolo en la ecuación original.

EJERCICIOS DE REPASO

Resuelva cada ecuación. Compruebe el resultado.

55. $5x + 4 = 14$

56. $98.6 - t = 129.2$

57. $\frac{n}{5} - 2 = 4$

58. $\frac{3}{4}c + 10 = -11$

59. $12a - 9 = 4a + 15$

60. $8t + 3.2 = 4t - 1.6$

61. $5(2x - 4) - 5x = 0$

62. $-2(x - 5) = 5(-3x + 4) + 3$

63. $2(m + 40) - 6m = 3(4m - 80)$

64. $-8(1.5r - 0.5) = 3.28$

SECCIÓN 8.5 Uso de ecuaciones para resolver problemas de aplicación

DEFINICIONES Y CONCEPTOS

Para resolver problemas de aplicación, use la estrategia para la resolución de problemas de cinco pasos.

1. **Analizar el problema:** ¿Qué información se proporciona? ¿Qué se le pide que encuentre?
2. **Formar una ecuación:** Elija una variable para representar el valor numérico a encontrar. Traduzca las palabras del problema a una ecuación.
3. **Resolver la ecuación.**
4. **Enunciar la conclusión** de manera clara. Asegúrese de incluir las unidades (como pies, segundos o libras) en su respuesta.
5. **Comprobar el resultado:** Utilice la redacción original del problema, no la ecuación que se formó en el paso 2 a partir de las palabras.

EJEMPLOS

PREMIO NOBEL En 1998, tres estadounidenses, Louis Ignarro, Robert Furchgott y Fred Murad, ganaron el Premio Nobel de medicina. Compartieron el dinero del premio de manera equitativa. Si cada persona recibió $318,500, ¿cuál era la cantidad del premio en efectivo para el Premio Nobel de medicina? (Fuente: nobelprize.org)

Analizar

- 3 personas compartieron de manera equitativa el premio en efectivo. — Proporcionado
- Cada persona recibió $318,500. — Proporcionado
- ¿Cuál era la cantidad del premio en efectivo? — A encontrar

Formar

Sea a = la cantidad del premio en efectivo para el Premio Nobel.

Busque una palabra o frase clave en el problema.

Frase clave: compartieron el dinero del premio de manera equitativa

Traducción: división

Traduzca las palabras del problema a una ecuación.

La cantidad del premio en efectivo	dividida entre	el número de personas que la compartieron de manera equitativa	era	$318.500.
a	$\div$	3	$=$	318,500

Resolver

$$\frac{a}{3} = 318{,}500$$ Se necesita despejar a en el lado izquierdo.

$$3 \cdot \frac{a}{3} = 3 \cdot 318{,}500$$ Para despejar a, deshaga la división entre 3 multiplicando ambos lados por 3.

$$a = 955{,}500$$ Realice la multiplicación.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2\,1} \\ 318{,}500 \\ \times \quad 3 \\ \hline 955{,}500 \end{array}$$

Enunciar

La cantidad del premio en efectivo para el Premio Nobel de medicina era de $955,500.

Comprobar

Si el premio en efectivo era de $955,500, entonces la cantidad que recibió cada ganador puede encontrarse utilizando una división:

$$3\overline{)955{,}500}\quad 318{,}500$$ ← Esta es la cantidad que recibió cada ganador del premio.

El resultado, $955,500, es correcto.

La estrategia para la resolución de problemas de cinco pasos puede utilizarse para resolver problemas de aplicación para encontrar **dos incógnitas.**

SISTEMAS DE SONIDO Un cable para bocina de 45 pies de largo se corta en dos piezas. Una pieza es 9 pies más larga que la otra. Encuentre la longitud de cada pieza de cable.

Analizar

- Un cable de 45 pies de largo se corta en dos piezas. — Proporcionado
- Una pieza es 9 pies más larga que la otra. — Proporcionado
- ¿Cuál es la longitud de la pieza de cable más corta y la longitud de la pieza más larga? — A encontrar

Formar

Dado que se indica que la longitud de la pieza de cable más larga está relacionada con la longitud de la pieza más corta,

Sea x = la longitud de la pieza de cable más corta

Hay una segunda cantidad desconocida. Busque una frase clave que ayude a representar la longitud de la pieza de cable más larga utilizando una expresión algebraica.

Frase clave: 9 pies más larga **Traducción:** suma

Por lo que $x + 9$ = la longitud de la pieza de cable más larga

Ahora se traducen las palabras del problema a una ecuación

La longitud de la pieza más corta	más	la longitud de la pieza más larga	es	45 pies.
x	$+$	$x + 9$	$=$	45

Resolver

$x + x + 9 = 45$ Se necesita despejar x en el lado izquierdo.

$2x + 9 = 45$ Combine los términos similares: $x + x = 2x$.

$2x + 9 - \mathbf{9} = 45 - \mathbf{9}$ Para despejar 2x, reste el 9 de ambos lados.

$2x = 36$ Realice la resta.

$\frac{2x}{\mathbf{2}} = \frac{36}{\mathbf{2}}$ Para despejar x, deshaga la multiplicación por 2 dividiendo ambos lados entre 2.

$x = 18$ Realice la división.

Para encontrar la segunda incógnita, se sustituye el 18 para x en la expresión que representa la longitud de la pieza de cable más larga.

$$\boldsymbol{x} + 9 = \mathbf{18} + 9 = 27$$

Enunciar

La longitud de la pieza de cable más corta es de 18 pies y la longitud de la pieza más larga es de 27 pies.

Comprobar

La longitud de la pieza de cable más larga, 27 pies, es 9 pies más larga que la longitud de la pieza más corta, 18 pies. Al sumar las dos longitudes, se obtiene

$$\begin{array}{r} 18 \\ +\ 27 \\ \hline 45 \end{array}$$ ← Esta es la longitud original del cable, antes de que se cortara en dos piezas.

Los resultados, 18 pies y 27 pies, son correctos.

EJERCICIOS DE REPASO

Forme una ecuación y resuélvala para responder cada pregunta.

65. FINANCIAMIENTO Una pareja recién casada dio un enganche de $25,000 para una casa con un precio de $122,750. ¿Cuánto necesitaron pedir prestado?

66. LISTAS DE PACIENTES Después de mudar su oficina, un médico perdió 53 pacientes. Si se quedó con 672 pacientes, ¿cuántos tenía originalmente?

67. RETRASOS EN LA CONSTRUCCIÓN Debido a la escasez de materiales, el costo final de un proyecto de construcción fue tres veces mayor que el estimado original. Al completarse, el proyecto costó $81 millones. ¿Cuál era el estimado original del costo?

68. SERVICIO SOCIAL Un programa de servicios sociales asigna a cada uno de sus trabajadores sociales una cantidad de casos de 80 clientes. ¿Cuántos clientes son atendidos por 45 trabajadores sociales?

69. ALMACENAJE FRIGORÍFICO Un frigorífico disminuye la temperatura de un producto 7° Fahrenheit cada hora. Si coloca carne recién molida en el frigorífico, ¿cuánto tardaría en pasar de la temperatura ambiente de 71 °F a 29 °F?

70. GASTOS DE MUDANZA Tom y su amigo dividen de manera equitativa el costo de rentar un camión U-Haul. Tom también estuvo de acuerdo en pagar $4 para rentar un frigorífico. Tom pagó $20. ¿Cuánto costó la renta del camión?

71. ACONDICIONAMIENTO FÍSICO El entrenamiento de media semana de una instructora de acondicionamiento físico consiste en caminar y correr. Camina 3 millas menos que lo que corre. Si su entrenamiento cubre un total de 15 millas, ¿cuántas millas corre y cuántas millas camina?

72. RODEOS La asistencia durante el primer día de un rodeo de dos días fue baja. En el segundo día, la asistencia se duplicó. Si un total de 6,600 personas asistieron al espectáculo, ¿cuál fue la asistencia en el primer día y cuál fue la asistencia en el segundo día?

73. LOTES DE ESTACIONAMIENTO Un lote de estacionamiento con forma rectangular es 4 veces tan largo como su ancho. Si el perímetro del lote de estacionamiento es de 250 pies, ¿cuál es su longitud y su ancho?

74. VIAJE EN EL ESPACIO El cohete *Saturn V*. de 364 pies de alto, transportó a los primeros astronautas a la luna. Su primera, segunda y tercera etapas eran de 138, 98 y 46 pies de alto (en ese orden). En la parte superior de la tercera etapa había un módulo lunar y a partir de él se extendía una torre de escape de 28 pies. ¿Qué tan alto era el módulo lunar? (Fuente: NASA)

SECCIÓN 8.6 Reglas de multiplicación para los exponentes

DEFINICIONES Y CONCEPTOS

Un **exponente** indica una multiplicación repetitiva. Indica cuántas veces se va a utilizar la **base** como un factor.

Exponente → $x^n = \overbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}^{n \text{ factores de } x}$ ← Base

Reglas para los exponentes: Si m y n representan enteros,

Regla del producto: $x^m x^n = x^{m+n}$

Regla de la potencia: $(x^m)^n = x^{m \cdot n} = x^{mn}$

Regla de la potencia de un producto: $(xy)^m = x^m y^m$

Para simplificar algunas expresiones, se deben aplicar dos (o más) reglas para los exponentes.

EJEMPLOS

Identifique la base y el exponente en cada expresión.

$2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ El 2 es la base y el 6 es el exponente.

$(-xy)^3 = (-xy)(-xy)(-xy)$ Debido a los paréntesis, $-xy$ es la base y el 3 es el exponente.

$5t^4 = 5 \cdot t \cdot t \cdot t \cdot t$ La base es t y el 4 es el exponente.

$8^1 = 8$ La base es el 8 y el 1 es el exponente.

Simplifique cada expresión:

$5^2 5^7 = 5^{2+7} = 5^9$ Conserve la base común, el 5, y sume los exponentes.

$(6^3)^7 = 6^{3 \cdot 7} = 6^{21}$ Conserve la base, el 6, y multiplique los exponentes.

$(2p)^5 = 2^5 p^5 = 32p^5$ Eleve cada factor del producto $2p$ a la 5a potencia.

Simplifique: $(c^2c^5)^4 = (c^7)^4$ Dentro de los paréntesis, conserve la base original, c, y sume los exponentes: $2 + 5 = 7$.

$= c^{28}$ Conserve la base, c, y multiplique los exponentes: $7 \cdot 4 = 28$.

Simplifique: $(t^2)^4(t^3)^3 = t^8 t^9$ Para cada potencia de t elevada a una potencia, conserve la base y multiplique los exponentes: $2 \cdot 4 = 8$ y $3 \cdot 3 = 9$.

$= t^{17}$ Conserve la base común, t, y sume los exponentes: $8 + 9 = 17$.

EJERCICIOS DE REPASO

75. Identifique la base y el exponente en cada expresión.

a. n^{12} **b.** $(2x)^6$

c. $3r^4$ **d.** $(y - 7)^3$

76. Escriba cada expresión en una forma equivalente utilizando un exponente.

a. $m \cdot m \cdot m \cdot m \cdot m$ **b.** $-3 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$

c. $a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b$ **d.** $(pq)(pq)(pq)$

77. Simplifique, si es posible.

a. $x^2 \cdot x^2$ **b.** $x^2 + x^2$

c. $x \cdot x^2$ **d.** $x + x^2$

78. Explique cada error.

a. ~~$3^2 \cdot 3^4 = 9^6$~~

b. ~~$(3^2)^4 = 3^6$~~

Simplifique cada expresión.

79. $7^4 \cdot 7^8$ **80.** $mmnn^2$

81. $(y^7)^3$ **82.** $(3x)^4$

83. $(6^3)^{12}$ **84.** $-b^3b^4b^5$

85. $(-16s^3)^2s^4$ **86.** $(2.1x^2y)^2$

87. $[(-9)^3]^5$ **88.** $(a^5)^3(a^2)^4$

89. $(2x^2x^3)^3$ **90.** $(m^2m^3)^2(n^2n^4)^3$

91. $(3a^4)^2(2a^3)^3$ **92.** $x^{100} \cdot x^{100}$

93. $(4m^3)^3(2m^2)^2$ **94.** $(3t^4)^3(2t^5)^2$

CAPÍTULO 8 EXAMEN

Complete los espacios.

1. a. Las _____ son letras (o símbolos) que representan números.

b. Para desarrollar la multiplicación $3(x + 4)$, se utiliza la propiedad _____.

c. A los términos como $7x^2$ y $5x^2$, los cuales tienen las mismas variables elevadas a exactamente la misma potencia, se les llama términos _____.

d. Cuando se escribe $4x + x$ como $5x$, se dice que se han _____ términos similares.

e. El _____ del término $9y$ es el 9.

f. Para evaluar $y^2 + 9y - 3$ para $y = -5$, se _____ el -5 para y y se aplica la regla del orden de las operaciones.

g. Las variables y/o los números pueden combinarse con las operaciones de la aritmética para crear _____ algebraicas.

h. Una _____ es un enunciado que indica que dos expresiones son iguales.

i. El _____ una ecuación significa encontrar todos los valores de la variable que hacen verdadera la ecuación.

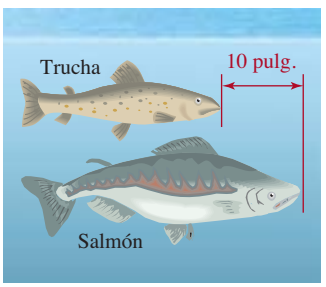
j. Para _____ la solución de una ecuación, se sustituye el valor para la variable en la ecuación original y se determina si el resultado es un enunciado verdadero.

2. Use las siguientes variables para enunciar cada propiedad en símbolos.

a. Escriba la propiedad asociativa de la suma utilizando las variables b, c y d.

b. Escriba la propiedad de la multiplicación del 1 utilizando la variable t.

3. PESCADO Refiérase a la ilustración de abajo. La variable s representa la longitud del salmón (en pulgadas). Escriba una expresión algebraica que represente la longitud de la trucha (en pulgadas).



4. Traduzca a símbolos

a. 2 menos que r

b. El producto del 3, x y y

c. El costo c dividido de tres maneras iguales

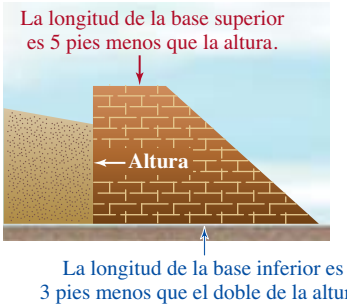
d. 7 más que el doble del ancho w

5. Traduzca la expresión algebraica $\frac{3}{4}t$ a palabras.

6. MUROS DE CONTENCIÓN Refiérase a la ilustración de abajo. Sea h = la altura del muro de contención (en pies).

a. Escriba una expresión algebraica para representar la longitud de la base superior del muro de contención de ladrillo.

b. Escriba una expresión algebraica para representar la longitud de la base inferior del muro de contención de ladrillo.



7. Determine si a se utiliza como un factor o como un término.

a. $5ab$ **b.** $8b + a + 6$

8. Considere la expresión $x^3 + 8x^2 - x - 6$.

a. ¿Cuántos términos tiene la expresión?

b. ¿Cuál es el coeficiente de cada término?

9. Evalúe $\dfrac{x - 16}{x}$ para $x = 4$.

10. Evalúe $a^2 + 2ab + b^2$ para $a = -5$ y $b = -1$.

11. Simplifique cada expresión.

a. $9 \cdot 4s$ **b.** $-10(12t)$

c. $18\left(\frac{2}{3}x\right)$ **d.** $-4(-6)(-3m)$

12. Multiplique.

a. $5(5x + 1)$ **b.** $-6(7 - x)$

c. $-(6y + 4)$ **d.** $0.3(2a + 3b - 7)$

e. $\frac{1}{2}(2m - 8)$ **f.** $(2r + 1)9$

13. Identifique los términos similares en la siguiente expresión:

$$12m^2 - 3m + 2m^2 + 3$$

14. Simplifique combinando los términos similares, si es posible.

a. $20y - 8y$

b. $34a - a + 7a$

c. $-8b^2 + 29b^2$

d. $9z - 6 + 2z + 19$

15. Simplifique: $4(2y + 3) - 5(y + 3)$

16. Use una comprobación para determinar si el 7 es una solución de $2y - 1 = y + 8$.

Resuelva cada ecuación y compruebe el resultado.

17. $x + 6 = 10$

18. $1.8 = y - 1.3$

19. $5t = 55$

20. $\frac{q}{3} = -27$

21. $d - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

22. $\frac{7}{8}n = 21$

23. $15a - 10 = 20$

24. $8x + 6 = 3x + 7$

25. $3.6 - r = 9.8$

26. $2(4x - 1) = 3(4 - 3x) + 3x$

27. $-\frac{15}{16}x + 15 = 0$

28. $-b = 15$

Forme una ecuación y resuélvala para responder cada pregunta.

29. PROTECCIÓN AUDITIVA Cuando el mecánico de un avión utiliza tapones para oídos, la intensidad del sonido que experimenta del motor del jet es de sólo 81 decibeles. Si los tapones para oídos reducen la intensidad del sonido en 29 decibeles, ¿cuál es la intensidad del sonido real del motor del jet?

30. ESTACIONAMIENTO Después de varias quejas de los estudiantes, una universidad decidió triplicar el número de espacios de cajones de estacionamiento en el campus construyendo una estructura de estacionamiento. Ese incremento elevará el número total de cajones a 6,240. ¿Cuántos cajones de estacionamiento tiene en este momento la universidad?

31. ORQUESTAS Una orquesta de 98 miembros está conformada por una sección de madera viento con 19 músicos, una sección de metales con 23 ejecutantes, una sección de percusión con 2 personas y una sección de cuerdas grande. ¿Cuántos músicos conforman la sección de cuerdas de la orquesta?

32. RECREACIÓN Un desarrollador donó un terreno grande a una ciudad para un parque. La mitad de los acres se utilizará para campos deportivos. De la otra mitad, se utilizarán 4 acres para estacionamiento. Esto dejará 18 acres para un hábitat natural. ¿Cuántos acres de terreno donó a la ciudad el desarrollador?

Imagen copyright Grandpa, 2009. Utilizada bajo licencia de Shutterstock.com

33. PROBLEMA NUMÉRICO La suma de dos números es de 63. Un número es 17 más que el otro. ¿Cuáles son los números?

34. MARCOS PARA FOTOGRAFÍAS Un marco para fotografías rectangular es del doble de largo que de ancho. Si se utilizaron 144 pulgadas del material del marco para formarlo, ¿cuál es el ancho y cuál es la longitud del marco?

35. Identifique la base y el exponente de cada expresión.

a. 6^5

b. $7b^4$

36. Simplifique cada expresión, si es posible.

a. $x^2 + x^2$ **b.** $x^2 \cdot x^2$

c. $x^2 + x$ **d.** $x^2 \cdot x$

37. Simplifique cada expresión.

a. h^2h^4 **b.** $(m^{10})^2$

c. $b^2 \cdot b \cdot b^5$ **d.** $(x^3)^4(x^2)^3$

e. $(a^2b^3)(a^4b^7)$ **f.** $(12a^9b)^2$

g. $(2x^2)^3(3x^3)^3$ **h.** $(t^2t^3)^3$

38. Explique qué hay de incorrecto con la siguiente solución:

~~$5^4 \cdot 5^3 = 25^7$~~

CAPÍTULO 1–8 REPASO ACUMULATIVO

1. Redondee el 7,535,670 [Sección 1.1]

a. a la centena más cercana.

b. a la decena de millar más cercana.

2. ALAS DE POLLO A julio del 2009, Wingstop, una cadena de restaurantes, había vendido un total de 1,726,537,068 alas de pollo. Escriba este número en palabras y en notación expandida. (Fuente: wingstop.com) [Sección 1.1]

Desarrolle cada operación.

3. $5{,}679 + 68 + 109 + 3{,}458$ [Sección 1.2]

4. Reste 4,375 para 7,697 [Sección 1.3]

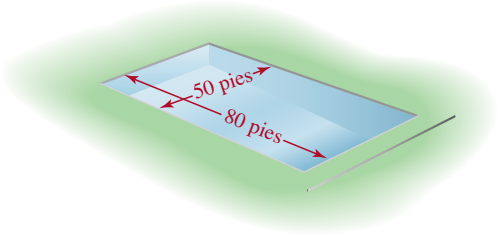
5. $5{,}345 \cdot 46$ [Sección 1.4]

6. $35\overline{)30{,}625}$ [Sección 1.5]

7. Refiérase a la ilustración de la piscina rectangular de abajo.

a. Encuentre el perímetro de la piscina. [Sección 1.2]

b. Encuentre el área de la superficie de la piscina. [Sección 1.5]



8. DESCUENTO EN HOSPEDAJE Un hotel está ofreciendo habitaciones que por lo general cuestan $99 por noche a sólo $65 la noche. ¿Cuántos dólares ahorraría un turista si permanece en tal habitación 5 noches? [Sección 1.6]

9. **a.** Encuentre los factores del 20. [Sección 1.7]

b. Encuentre la factorización de primos del 20.

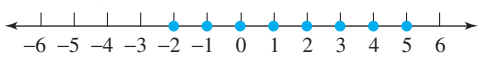
10. **a.** Encuentre el mcm del 14 y el 21. [Sección 1.8]

b. Encuentre el mfc del 14 y el 21.

Evalúe cada expresión. [Sección 1.9]

11. $6 + 5[20 - (3^2 + 1)]$ **12.** $\dfrac{25 - (2 \cdot 3 - 1)}{2 \cdot 9 - 8}$

13. Grafique los enteros mayores que -3 pero menores que el 6. [Sección 2.1]



14. **a.** Simplifique: $-(-11)$ [Sección 2.1]

b. Encuentre el valor absoluto: $|-11|$

c. ¿El enunciado $-11 > -10$ es verdadero o falso?

15. Desarrolle cada operación.

a. $-16 + 11$ [Sección 2.2]

b. $21 - (-17)$ [Sección 2.3]

c. $-6(40)$ [Sección 2.4]

d. $\dfrac{-80}{-10}$ [Sección 2.5]

16. LA CIUDAD DE SALIDA La temperatura alta récord para San Louis, Missouri, es de 107 °F. La temperatura baja récord es de -18 °F. Encuentre el intervalo de temperatura para estos extremos. (Fuente: *The World Almanac and Book of Facts,* 2009) [Sección 2.3]

Evalúe cada expresión. [Sección 2.6]

17. $\dfrac{(-6)^2 - 1^5}{-4 - 3}$

18. $-10^2 - (-10)^2$

19. Simplifique: $\dfrac{36}{96}$ [Sección 3.1]

20. Escriba $\frac{5}{6}$ como una fracción equivalente con denominador 54. [Sección 3.1]

Desarrolle las operaciones.

21. $\dfrac{10}{21} \cdot \dfrac{3}{10}$ [Sección 3.2] **22.** $\dfrac{22}{25} \div \dfrac{11}{5}$ [Sección 3.3]

23. $\dfrac{1}{9} + \dfrac{5}{6}$ [Sección 3.4]

24. $-20\dfrac{1}{4} \div \left(-1\dfrac{11}{16}\right)$ [Sección 3.5]

25. $58\dfrac{4}{11} - 15\dfrac{1}{2}$ [Sección 3.6]

26. $\dfrac{\frac{2}{5} + \frac{1}{4}}{\frac{2}{5} - \frac{1}{4}}$ [Sección 3.7]

27. LECTURA Un estudiante ha leído $\frac{2}{3}$ de una novela. Planea leer la mitad de las páginas restantes esta noche. [Sección 3.3]

a. ¿Qué fracción del libro habrá leído esta noche?

b. ¿Qué fracción del libro queda por leer?

28. Considere el número decimal: 304.817 [Sección 4.1]

a. ¿Cuál es el valor posicional del dígito 1?

b. ¿Cuál dígito indica el número de milésimas?

c. ¿Cuál dígito indica el número de centésimas?

d. ¿Cuál es el valor posicional del dígito 7?

e. Redondee el 304.817 a la centésima más cercana.

Desarrolle las operaciones.

29. $645 + 9.90005 + 0.12 + 3.02002$ [Sección 4.2]

30. $202.234 - 19.34$ [Sección 4.2]

31. $-5.8(3.9)(100)$ [Sección 4.3]

32. $-(-0.2)^2 + 4\left|-2.3 + 1.5\right|$ [Sección 4.3]

33. Divida -0.4531 entre -0.001. [Sección 4.4]

34. $12.243 \div 0.9$ (a la centena más cercana) [Sección 4.4]

35. Estime el cociente: $284.254 \div 91.4$ [Sección 4.4]

36. MONEDAS Los bancos envuelven las monedas de 10 centavos en rollos de 50 monedas. Si una moneda de 10 centavos es de 1.35 milímetros de grosor, ¿qué tan alta es una pila de 50 monedas de 10 centavos? [Sección 4.3]

37. Escriba cada fracción como un decimal. [Sección 4.5]

a. $\frac{19}{25}$ **b.** $\frac{1}{66}$ (use una barra superior)

38. Evalúe: $50 - [(6^2 - 24) + 9\sqrt{25}\,]$ [Sección 4.6]

39. Escriba la razón 45:35 como una fracción en la forma más simple. [Sección 5.1]

40. REGALOS DE ANIVERSARIO Una florista vende una docena de rosas rojas de tallo largo por $45. En honor de su 25o aniversario, un hombre desea comprar 25 rosas para su esposa. ¿Cuánto costarán las rosas? (*Sugerencia:* ¿Cuántas rosas hay en una docena?) [Sección 5.2]

41. Resuelva la proporción: $\frac{9.8}{x} = \frac{2.8}{5.4}$ [Sección 5.2]

42. Convierta 80 minutos a horas. [Sección 5.3]

43. Convierta 7,500 miligramos a gramos. [Sección 5.4]

44. ATLETISMO Una bala para lanzar pesa 7.264 kilogramos. Dé este peso en libras. [Sección 5.5]

45. Complete la tabla de abajo. [Sección 6.1]

Fracción	Decimal	Porcentaje
	0.25	
$\frac{1}{3}$		$33\frac{1}{3}\%$
		4.2%

46. ¿13 es qué porcentaje de 25? [Sección 6.2]

47. ¿7.8 es 12% de qué número? [Sección 6.2]

48. EQUIPO PARA ENSEÑANZA Encuentre la cantidad del descuento y el precio en rebaja del retroproyector mostrado abajo. [Sección 6.3]

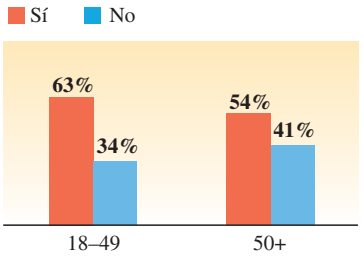
49. Estime: ¿Qué es 5% de 16,359? [Sección 6.4]

50. PRÉSTAMOS Si se invierten $400 a un interés simple del 6.5% por 6 años, ¿cuál será la cantidad total de dinero en la cuenta de inversión al final de los 6 años? [Sección 6.5]

51. VIAJE EN EL ESPACIO Una encuesta de Gallup llevada a cabo del 10-12 de julio del 2009, le preguntó a un grupo de adultos si el programa espacial de E.U. le había dado al país los beneficios suficientes para justificar los costos. Los resultados se muestran en la gráfica abajo. [Sección 7.1]

Han pasado 40 años desde que Estados Unidos puso hombres sobre la Luna. ¿Piensa que el programa espacial le ha dado al país los beneficios suficientes para justificar su costo o no piensa esto?

Por edad



Fuente: gallup.com

a. ¿Qué grupo por edad se sintió más positivo acerca de los beneficios del programa espacial?

b. Si 800 personas en la encuesta estaban en el grupo de edad 50+, ¿cuántos de ellos respondieron que los beneficios del programa espacial no justificaban los costos?

52. Encuentre la media, la mediana y la moda del siguiente conjunto de valores. [Sección 7.2]

10 4 5 7 10 3 2 3 10

53. Evalúe $3x - x^3$ para $x = 4$. [Sección 8.1]

54. Traduzca cada frase a una expresión algebraica. [Sección 8.1]

a. 4 menos que x

b. El doble del peso w incrementado en 50

55. Simplifique cada expresión. [Sección 8.2]

a. $-3(5x)$ **b.** $-4x(-7x)$

56. Multiplique. [Sección 8.2]

a. $-2(3x - 4)$ **b.** $5(3x - 2y + 4)$

57. Combine términos similares. [Sección 8.2]

a. $8x - 3x$ **b.** $4a^2 + 6a^2 + 3a^2 - a^2$

c. $4x - 3y - 5x + 2y$ **d.** $9(3x - 4) + 2x$

58. Use una comprobación para determinar si el 4 es una solución de $3x - 1 = x + 8$. [Sección 8.3]

Resuelva cada ecuación y compruebe el resultado. [Sección 8.4]

59. $3x + 2 = -13$ **60.** $\frac{y}{4} - 1 = -5$

61. $3(3y - 8) = -2(y - 4) + 3y$

62. $8 - y = -10$

Forme una ecuación y resuélvala para responder cada pregunta.

63. HORAS DE OBSERVACIÓN Para obtener un título de maestría en dificultades de aprendizaje, un estudiante de posgrado debe tener 100 horas de tiempo de observación. Si una estudiante ya ha observado por 37 horas, ¿cuántos turnos más de 3 horas debe observar? [Sección 8.5]

64. GEOMETRÍA El perímetro de un rectángulo es de 210 pies. Si la longitud es cuatro veces más larga que el ancho, ¿cuál es la longitud y el ancho del rectángulo? [Sección 8.5]

65. Identifique la base y el exponente de cada expresión. [Sección 8.6]

a. 8^9

b. $2a^3$

66. Simplifique cada expresión. [Sección 8.6]

a. p^3pp^5 **b.** $(t^5)^3$

c. $(x^2y^3)(x^3y^4)$ **d.** $(3a^2)^4$

e. $(2p^3)^2(3p^2)^3$ **f.** $[(-2.6)^2]^8$

9

Introducción a la geometría

© iStockphoto.com/Lukaz Laska

9.1 Figuras geométricas básicas; ángulos
9.2 Rectas paralelas y perpendiculares
9.3 Triángulos
9.4 Teorema de Pitágoras
9.5 Triángulos congruentes y triángulos semejantes
9.6 Cuadriláteros y otros polígonos
9.7 Perímetros y áreas de polígonos
9.8 Círculos
9.9 Volumen
Resumen y repaso
Examen
Repaso acumulativo

Carreras del campus

Topógrafo

Los topógrafos miden distancias, direcciones, elevaciones (alturas), contornos (curvas) y los ángulos entre las líneas en la superficie de la Tierra. Las topografías también se realizan en el aire y en el subterráneo. Los topógrafos con frecuencia trabajan en equipos. Utilizan una variedad de instrumentos y dispositivos electrónicos, incluyendo el Sistema de posicionamiento global (GPS por sus siglas en inglés). En general, a las personas que les gusta la topografía también les gustan las matemáticas —principalmente la geometría y la trigonometría. El campo también atrae personas con bases en geología, silvicultura, historia, ingeniería, ciencias de la computación y astronomía.

En el **Problema 83** del **Espacio para el estudio 9.5,** verá cómo un topógrafo utilizando la geometría, puede permanecer en tierra seca y aun así medir el ancho de un río.

CARGO LABORAL:
Topógrafo

EDUCACIÓN: Se requieren cursos en álgebra, geometría, trigonometría y ciencias de la computación.

PERSPECTIVA LABORAL: Se espera un crecimiento de vacantes del 21% para el 2016—mucho más rápido que el promedio de todas las profesiones.

INGRESOS ANUALES: En el 2008, el ingreso medio anual era de $53,120.

PARA MÁS INFORMACIÓN:
http://www.bls.gov/k12/math03.htm

Objetivos

1. Identificar y nombrar puntos, rectas y planos.
2. Identificar y nombrar segmentos de rectas y rayos.
3. Identificar y nombrar ángulos.
4. Usar un transportador para medir ángulos.
5. Resolver problemas que involucran ángulos adyacentes.
6. Usar la propiedad de los ángulos verticales para resolver problemas.
7. Resolver problemas que involucran ángulos complementarios y suplementarios.

© INTERFOTO/Alamy

SECCIÓN 9.1
Figuras geométricas básicas; ángulos

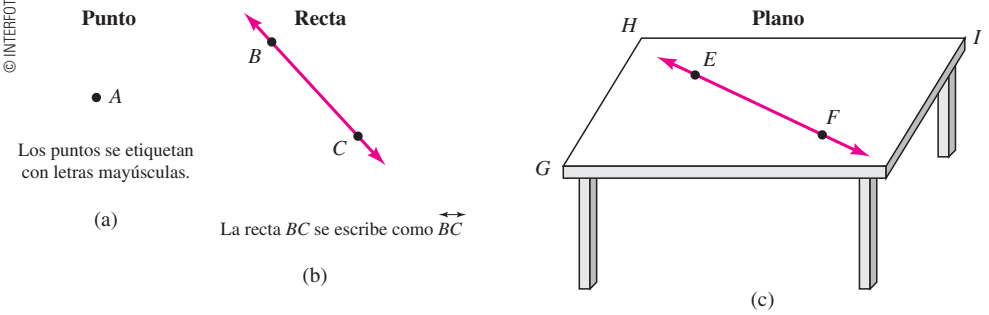
La geometría es una rama de las matemáticas que estudia las propiedades de las figuras bi y tridimensionales como triángulos, círculos, cilindros y esferas. Hace más de 5,000 años, los egipcios utilizaban la geometría para medir áreas de terreno en las planicies inundadas del Río Nilo después de las lluvias fuertes de primavera. Incluso en la actualidad, los ingenieros se maravillan del uso de la geometría de los egipcios en el diseño y construcción de las pirámides. La historia registra muchas otras aplicaciones prácticas de la geometría realizadas por los babilonios, chinos, hindúes y romanos.

El lenguaje de las matemáticas La palabra *geometría* proviene del griego *geo* (que significa tierra) y *metron* (que significa medir).

Varios intelectuales consideran a **Euclides** (330?–275? A.C.) como el mayor de los matemáticos griegos. Su libro *The Elements* es un estudio impresionante de la geometría y la teoría de números. Presenta la geometría en una forma altamente estructurada que comienza con varias suposiciones sencillas y después se extiende sobre ellas utilizando el razonamiento lógico. Por más de 2,000 años, *The Elements* fue el libro de texto que los estudiantes utilizaban en todo el mundo para aprender geometría.

1 Identificar y nombrar puntos, rectas y planos

La geometría está basada en tres palabras indefinidas: *punto, recta* y *plano.* Aunque no se hará el intento de definir estas palabras de manera formal, se puede pensar en un **punto** como una figura geométrica que tiene posición pero no longitud, ancho o profundidad. Los puntos pueden representarse en el papel trazando puntos pequeños y se etiquetan con letras mayúsculas. Por ejemplo, en la figura (a) abajo se muestra el punto A.



Las rectas están conformadas por puntos. Una recta se extiende de manera infinita en ambas direcciones, pero no tiene ancho ni profundidad. Las rectas pueden representarse en el papel trazando una línea recta con puntas de flecha en ambos extremos. Una recta se puede denotar utilizando dos puntos cualesquiera de la recta. En la figura (b), arriba, la recta que pasa a través por los puntos B y C se escribe como $\overleftrightarrow{BC}$.

Los planos también están conformados por puntos. Un plano es una superficie plana, que se extiende de manera infinita en toda dirección, que tiene largo y ancho pero no profundidad. La parte superior de una mesa, un piso o una pared es parte de un plano. Un plano se puede denotar utilizando tres puntos cualesquiera que se encuentren en el plano. En la figura (c) arriba, $\overleftrightarrow{EF}$ se encuentra en el plano GHI.

Como la figura (b) ilustra, los puntos B y C determinan de manera exacta una recta, la recta $\overleftrightarrow{BC}$. En la figura (c), los puntos E y F determinan de manera exacta una recta, la recta $\overleftrightarrow{EF}$. En general, dos puntos diferentes cualesquiera determinan de manera exacta una recta.

Como la figura (c) ilustra, los puntos G, H e I determinan de manera exacta un plano. En general tres puntos diferentes cualesquiera determinan de manera exacta un plano.

Pueden crearse otras figuras geométricas utilizando partes o combinaciones de puntos, rectas y planos.

2 Identificar y nombrar segmentos de rectas y rayos

Segmento de recta

El **segmento de recta** AB, escrito como $\overline{AB}$, es la parte de una recta que consiste en los puntos A y B y todos los puntos intermedios (vea la figura abajo). Los puntos A y B son los **puntos extremos** del segmento.

Segmento de recta

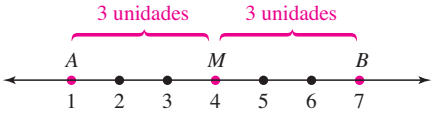
El segmento de recta AB se escribe como $\overline{AB}$.

Todo segmento de recta tiene un **punto medio,** el cual divide el segmento en dos partes de igual longitud. En la figura abajo, M es el punto medio del segmento AB, debido a que la medida de $\overline{AM}$, la cual se escribe como $m(\overline{AM})$, es igual a la medida de $\overline{MB}$ la cual se escribe como $m(\overline{MB})$.

$$m(\overline{AM}) = 4 - 1$$
$$= 3$$

y

$$m(\overline{MB}) = 7 - 4$$
$$= 3$$



Dado que la medida de ambos segmentos es de 3 unidades, se puede escribir $m(\overline{AM}) = m(\overline{MB})$.

Cuando dos segmentos de recta tienen la misma medida, se dice que son **congruentes.** Dado que $m(\overline{AM}) = m(\overline{MB})$, se puede escribir

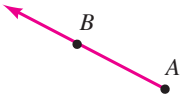
$$\overline{AM} \cong \overline{MB}$$ El símbolo ≅ se lee como "es congruente a".

El rayo es otra figura geométrica, como se muestra abajo.

Rayo

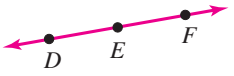
Un **rayo** es la parte de una recta que comienza en algún punto (por ejemplo, A) y continúa por siempre en una dirección. El punto A es el **punto extremo** del rayo.

Rayo



El rayo AB se escribe como $\overrightarrow{AB}$. El punto extremo del rayo siempre es el listado primero.

Para nombrar un rayo, se lista primero su punto extremo y después cualquier otro punto en el rayo. En ocasiones es posible nombrar un rayo en más de una manera. Por ejemplo, en la figura a la derecha, $\overrightarrow{DE}$ y $\overrightarrow{DF}$ nombran el mismo rayo. Esto se debe a que ambos tienen el punto D como su punto extremo y se extienden por siempre en la misma dirección. En contraste, $\overrightarrow{DE}$ y $\overrightarrow{ED}$ no son el mismo rayo. Tienen puntos extremos diferentes y un punto en direcciones opuestas.



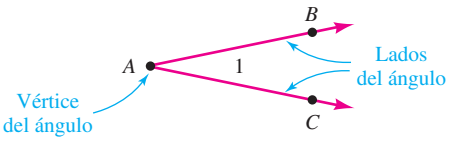
3 Identificar y nombrar ángulos

Ángulo

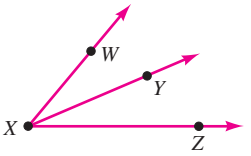
Un **Ángulo** es una figura formada por dos rayos con un punto extremo común. Al punto extremo común se le llama **vértice** y a los rayos se les llama **lados.**

El ángulo mostrado abajo puede escribirse como $\angle BAC$, $\angle CAB$, $\angle A$ o $\angle 1$. El símbolo $\angle$ significa ángulo.

Ángulo

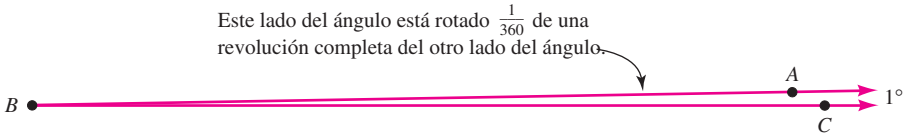


¡Cuidado! Cuando se utilizan tres letras para nombrar un ángulo, asegúrese que la letra que nombra el vértice es la letra en medio. Además, sólo se puede nombrar un ángulo utilizando únicamente la letra para el vértice cuando no hay posibilidad de confusión. Por ejemplo, en la figura a la derecha, no se puede referir a ninguno de los ángulos como simplemente $\angle X$, debido a que no se sabría si se refiere a $\angle WXY$, $\angle WXZ$ o $\angle YXZ$.



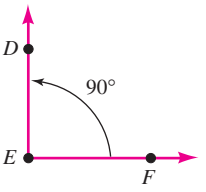
4 Usar un transportador para medir ángulos

El **grado** es una unidad de medición de un ángulo. El símbolo para el grado es un círculo pequeño elevado, °. Una medida de ángulo de 1° (se lee como "un grado") significa que un lado de un ángulo está rotado $\frac{1}{360}$ de una revolución completa alrededor del vértice del otro lado del ángulo. La medida de $\angle ABC$, mostrado abajo, es de 1°. Se puede escribir esto en símbolos como $\text{m}(\angle ABC) = 1°$.

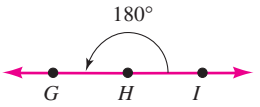


Las siguientes figuras muestran las medidas de otros varios ángulos. Una medida de ángulo de 90° es equivalente a $\frac{90}{360} = \frac{1}{4}$ de una revolución completa. Una medida de ángulo de 180° es equivalente a $\frac{180}{360} = \frac{1}{2}$ de una revolución completa y una medida de ángulo de 270° es equivalente a $\frac{270}{360} = \frac{3}{4}$ de una revolución completa.

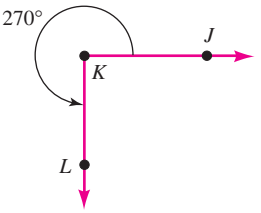
$\text{m}(\angle FED) = 90°$



$\text{m}(\angle IHG) = 180°$

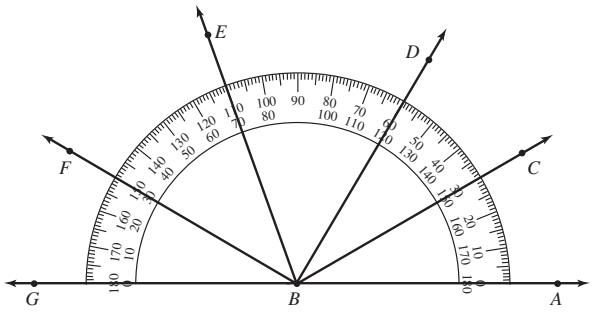


$\text{m}(\angle JKL) = 270°$



Se puede utilizar un **transportador** para medir ángulos. Para comenzar, se coloca el centro del transportador en el vértice del ángulo, con el borde del transportador alineado con un lado del ángulo, como se muestra abajo. La medida del ángulo se encuentra determinando dónde atraviesa la escala el otro lado del ángulo. Tenga cuidado de utilizar la escala apropiada, interna o externa, cuando lea una medida de un ángulo.

Si se lee el transportador de derecha a izquierda, utilizando la escala externa, se observa que $m(\angle ABC) = 30°$. Si se lee el transportador de izquierda a derecha, utilizando la escala interna, se observa que $m(\angle GBF) = 30°$.



Angulo	Medida en grados
$\angle ABC$	30°
$\angle ABD$	60°
$\angle ABE$	110°
$\angle ABF$	150°
$\angle ABG$	180°
$\angle GBF$	30°
$\angle GBC$	150°

Cuando dos ángulos tienen la misma medida, se dice que son **congruentes.** Dado que $m(\angle ABC) = 30°$ y $m(\angle GBF) = 30°$, se puede escribir

$$\angle ABC \cong \angle GBF$$ El símbolo ≅ se lee como "es congruente con".

Los ángulos se clasifican de acuerdo con su medida.

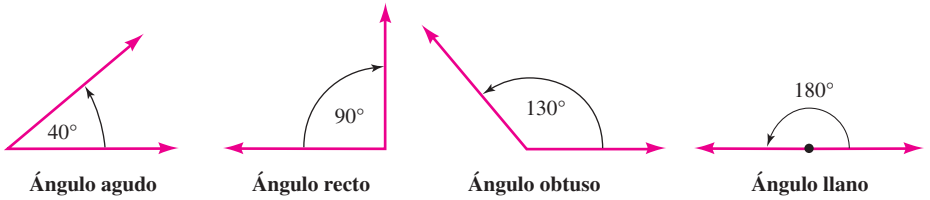
Clasificación de ángulos

Ángulos agudos: Ángulos cuyas medidas son mayores a 0° pero menores a 90°.

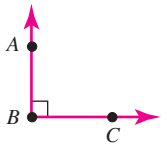
Ángulos rectos: Ángulos cuyas medidas son de 90°.

Ángulos obtusos: Ángulos cuyas medidas son mayores a 90° pero menores a 180°.

Ángulos llanos: Ángulos cuyas medidas son de 180°.

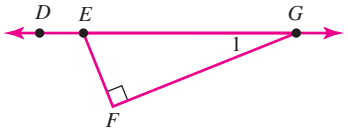


El lenguaje de las matemáticas Con frecuencia se utiliza el símbolo ⌝ para etiquetar un ángulo recto. Por ejemplo, en la figura a la derecha, el símbolo ⌝ trazado cerca del vértice de $\angle ABC$ indica que $m(\angle ABC) = 90°$.



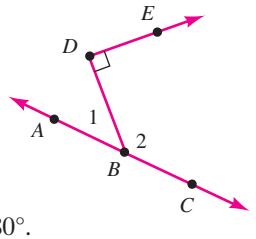
Auto-revisión 1

Clasifique $\angle EFG$, $\angle DEF$, $\angle 1$ y $\angle GED$ en la figura como un ángulo agudo, un ángulo recto, un ángulo obtuso o un ángulo llano.



Ahora intente **Problemas 57, 59 y 61**

EJEMPLO 1 Clasifique cada ángulo en la figura como un ángulo agudo, un ángulo recto, un ángulo obtuso o un ángulo llano.



Estrategia Se determinará cómo se compara con 90° o con 180° cada medida de ángulo.

POR QUÉ Los ángulos agudos, rectos, obtusos y llanos se definen con respecto a las medidas de ángulo de 90° y 180°.

Solución

Dado que $m(\angle 1) < 90°$, es un ángulo agudo.

Dado que $m(\angle 2) > 90°$ pero menor que 180°, es un ángulo obtuso.

Dado que $m(\angle BDE) = 90°$, es un ángulo recto.

Dado que $m(\angle ABC) = 180°$, es un ángulo llano.

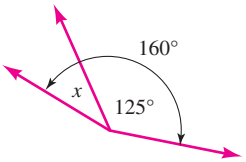
5 Resolver problemas que involucran ángulos adyacentes

A los ángulos que tienen un vértice común y un lado común se les llama **ángulos adyacentes** si están uno al lado del otro y sus interiores no se traslapan.

Consejo útil Se pueden utilizar los conceptos algebraicos de la variable y la ecuación que se introdujeron en el Capítulo 8 para resolver varios tipos de problemas geométricos.

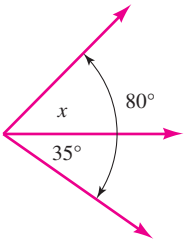
Auto-revisión 2

Use la información en la figura para encontrar x.



Ahora intente **Problema 65**

EJEMPLO 2 Dos ángulos con medidas en grados de x y 35° son ángulos adyacentes, como se muestra. Use la información en la figura para encontrar x.



Ángulos adyacentes

Estrategia Se escribirá una ecuación que involucre x que modele de manera matemática la situación.

POR QUÉ Entonces se puede resolver la ecuación para encontrar la medida de ángulo desconocida.

Solución

Dado que el total de las medidas de los dos ángulos adyacentes es de 80°, se tiene

$x + 35° = 80°$ La palabra *total* indica una *suma*.

$x + 35° - 35° = 80° - 35°$ Para despejar x, deshaga la suma de 35° restando 35° de ambos lados.

$x = 45°$ Realice las restas: $35° - 35° = 0°$ y $80° - 35° = 45°$.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 7\ 10} \\ 8\not{0} \\ -\ 35 \\ \hline 45 \end{array}$$

Por tanto, x es de 45°. Como comprobación, observe que $45° + 35° = 80°$.

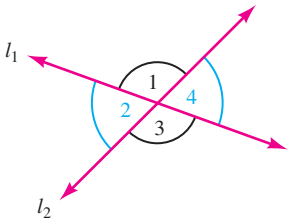
¡Cuidado! En la figura para el Ejemplo 2, se utilizó la variable x para representar una medida de ángulo desconocida. En tales casos, se asumirá que la variable "lleva" consigo las unidades asociadas de grados. Eso significa que no se tiene que escribir un símbolo ° al lado de la variable. Además, si x representa un número desconocido de grados, entonces las expresiones como $3x$, $x + 15°$ y $4x - 20°$ también tienen unidades de grados.

6 Usar la propiedad de los ángulos verticales para resolver problemas

Cuando dos rectas se intersecan, a los pares de ángulos no adyacentes se les llama **ángulos verticales.** En la siguiente figura, $\angle 1$ y $\angle 3$ son ángulos verticales y $\angle 2$ y $\angle 4$ son ángulos verticales.

Ángulos verticales

- $\angle 1$ y $\angle 3$
- $\angle 2$ y $\angle 4$



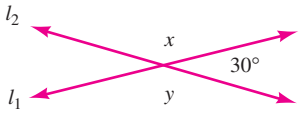
El lenguaje de las matemáticas Cuando se trabaja con dos (o más) rectas al mismo tiempo, se pueden utilizar **subíndices** para nombrar las rectas. El prefijo *sub* significa abajo o debajo, como en *sub*marino o *sub*terráneo. Para nombrar la primera recta en la figura arriba, se utiliza l_1, la cual se lee como "l sub uno". Para nombrar la segunda recta, se utiliza l_2, la cual se lee como "l sub dos".

Para ilustrar que los ángulos verticales siempre tienen la misma medida, refiérase a la figura abajo, con ángulos que tienen medidas de x, y y 30°. Dado que la medida de cualquier ángulo llano es de 180°, se tiene

$$30° + x = 180° \quad \text{y} \quad 30° + y = 180°$$
$$x = 150° \qquad\qquad y = 150°$$

Para deshacer la suma de 30°, reste 30° de ambos lados.

Dado que x y y son ambos de 150°, se concluye que $x = y$.



Observe que los ángulos que tienen las medidas x y y son ángulos verticales.

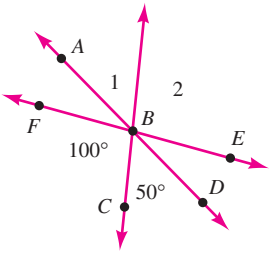
El ejemplo anterior ilustra que los ángulos verticales tienen la misma medida. Recuerde que cuando dos ángulos tienen la misma medida, se dice que son *congruentes*. Por tanto, se tiene el siguiente hecho importante.

Propiedad de los ángulos verticales

Los ángulos verticales son congruentes (tienen la misma medida).

EJEMPLO 3 Refiérase a la figura. Encuentre:

a. $m(\angle 1)$ **b.** $m(\angle ABF)$



Estrategia Para responder el inciso a, se utilizará la propiedad de los ángulos verticales. Para responder el inciso b, se escribirá una ecuación que involucre $m(\angle ABF)$ que modele de manera matemática la situación.

POR QUÉ Para el inciso a, se observa que $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ se intersecan para formar ángulos verticales. Para el inciso b, se puede resolver la ecuación para encontrar la incógnita, $m(\angle ABF)$.

Solución

a. Si se ignora $\overleftrightarrow{FE}$ por el momento, se observa que $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ se intersecan para formar el par de ángulos verticales $\angle CBD$ y $\angle 1$. Por la propiedad de los ángulos verticales,

$$\angle CBD \cong \angle 1$$

Se lee como "el ángulo CBD es congruente con el ángulo uno".

Auto-revisión 3

Refiérase a la figura para el Ejemplo 3. Encuentre:

a. $m(\angle 2)$

b. $m(\angle DBE)$

Ahora intente **Problemas 69 y 71**

Dado que los ángulos congruentes tienen la misma medida,

$$m(\angle CBD) = m(\angle 1)$$

En la figura, se proporciona $m(\angle CBD) = 50°$. Por tanto, $m(\angle 1)$ también es de 50°, y se puede escribir $m(\angle 1) = 50°$.

b. Dado que $\angle ABD$ es un ángulo llano, el *total* de las medidas de $\angle ABF$, el ángulo de 100° y el ángulo de 50° es de 180°. Si $x = m(\angle ABF)$, se tiene

$x + 100° + 50° = 180°$ La palabra *total* indica una suma.

$x + 150° = 180°$ En el lado izquierdo, combine los términos semeantes: $100° + 50° = 150°$.

$x = 30°$ Para despejar x, deshaga la suma de 150° restando 150° de ambos lados: $180° - 150° = 30°$.

Por tanto, $m(\angle ABF) = 30°$

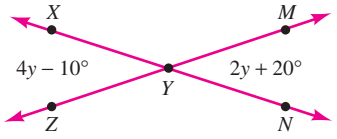
Auto-revisión 4

En la figura abajo, encuentre:

a. y

b. $m(\angle XYZ)$

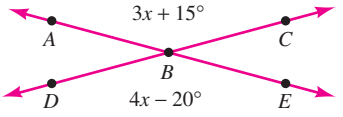
c. $m(\angle MYX)$



Ahora intente **Problema 75**

EJEMPLO 4 En la figura a la derecha, encuentre:

a. x **b.** $m(\angle ABC)$ **c.** $m(\angle CBE)$



Estrategia Se utilizará la propiedad de los ángulos verticales para escribir una ecuación que modele de manera matemática la situación.

POR QUÉ $\overleftrightarrow{AE}$ y $\overleftrightarrow{DC}$ se intersecan para formar dos pares de ángulos verticales.

Solución

a. En la figura, los dos ángulos verticales tienen medidas en grados que están representadas por las expresiones algebraicas $4x - 20°$ y $3x + 15°$. Dado que los ángulos son ángulos verticales, tienen medidas iguales.

$4x - 20° = 3x + 15°$ Iguale las expresiones algebraicas.

$4x - 20° \mathbf{- 3x} = 3x + 15° \mathbf{- 3x}$ Para eliminar 3x del lado derecho, reste 3x de ambos lados.

$x - 20° = 15°$ Combine los términos semejantes: $4x - 3x = x$ y $3x - 3x = 0$.

$x = 35°$ Para despejar x, deshaga la resta de 20° sumando 20° a ambos lados.

Por tanto, x es de 35°.

b. Para encontrar $m(\angle ABC)$, se evalúa la expresión $3x + 15°$ para $x = 35°$.

$3\mathbf{x} + 15° = 3(\mathbf{35°}) + 15°$ Sustituya 35° para x.

$= 105° + 15°$ Realice la multiplicación.

$= 120°$ Realice la suma.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1}\,35 \\ \times\,3 \\ \hline 105 \end{array}$$

Por tanto, $m(\angle ABC) = 120°$.

c. $\angle ABE$ es un ángulo llano. Dado que la medida de un ángulo llano es de 180° y que $m(\angle ABC) = 120°$, $m(\angle CBE)$ debe ser de $180° - 120°$, o de 60°.

7 Resolver problemas que involucran ángulos complementarios y suplementarios

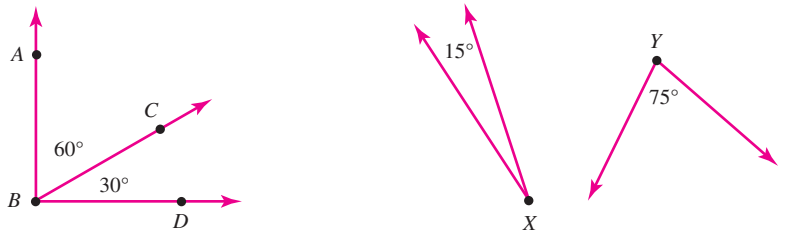
Ángulos complementarios y suplementarios

Dos ángulos son **ángulos complementarios** cuando la suma de sus medidas es de 90°.

Dos ángulos son **ángulos suplementarios** cuando la suma de sus medidas es de 180°.

En la figura (a) abajo, $\angle ABC$ y $\angle CBD$ son ángulos complementarios debido a que la suma de sus medidas es de 90°. Se dice que cada ángulo es el **complemento** del otro. En la figura (b) abajo, $\angle X$ y $\angle Y$ también son ángulos complementarios, debido a que $m(\angle X) + m(\angle Y) = 90°$. La figura (b) ilustra un hecho importante: Los ángulos complementarios no necesitan ser ángulos adyacentes.

Ángulos complementarios

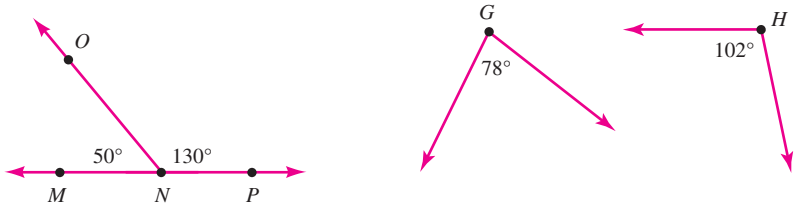


$60° + 30° = 90°$ (a)

$15° + 75° = 90°$ (b)

En la figura (a) abajo, $\angle MNO$ y $\angle ONP$ son ángulos suplementarios debido a que la suma de sus medidas es de 180°. Se dice que cada ángulo es el **suplemento** del otro. Los ángulos suplementarios no necesitan ser ángulos adyacentes. Por ejemplo, en la figura (b) de abajo, $\angle G$ y $\angle H$ son ángulos suplementarios, debido a que $m(\angle G) + m(\angle H) = 180°$.

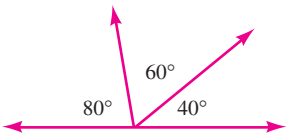
Ángulos suplementarios



$50° + 130° = 180°$ (a)

$78° + 102° = 180°$ (b)

¡Cuidado! La definición de los ángulos suplementarios requiere que la suma de *dos* ángulos sea de 180°. Tres ángulos de 40°, 60° y 80° no son suplementarios aun cuando su suma sea de 180°.



EJEMPLO 5

a. Encuentre el complemento de un ángulo de 35°.

b. Encuentre el suplemento de un ángulo de 105°.

Estrategia Se utilizarán las definiciones de los ángulos complementarios y suplementarios para escribir ecuaciones que modelen de manera matemática cada situación.

POR QUÉ Entonces se puede resolver cada ecuación para encontrar la medida de ángulo desconocida.

Auto-revisión 5

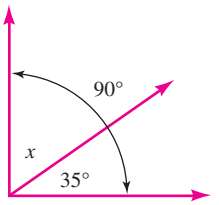
a. Encuentre el complemento de un ángulo de 50°.

b. Encuentre el suplemento de un ángulo de 50°.

Ahora intente **Problemas 77 y 79**

Solución

a. Es de utilidad dibujar una figura, como se muestra a la derecha. x representa la medida del complemento del ángulo de 35°. Dado que los ángulos son complementarios, se tiene

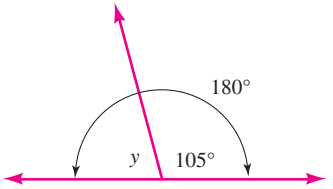


$x + 35° = 90°$ La suma de las medidas de los ángulos debe ser de 90°.

$x = 55°$ Para despejar x, deshaga la suma de 35° restando 35° de ambos lados: 90° − 35° = 55°.

El complemento de un ángulo de 35° mide 55°.

b. Es de utilidad dibujar una figura, como se muestra a la derecha. y representa la medida del suplemento del ángulo de 105°. Dado que los ángulos son suplementarios, se tiene



$y + 105° = 180°$ La suma de las medidas de los ángulos debe ser de 180°.

$y = 75°$ Para despejar y, deshaga la suma de 105° restando 105° de ambos lados: 180° − 105° = 75°.

El suplemento de un ángulo de 105° tiene una medida de 75°.

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. ángulo recto, ángulo obtuso, ángulo agudo, ángulo llano **2.** 35° **3. a.** 100° **b.** 30° **4. a.** 15° **b.** 50° **c.** 130° **5. a.** 40° **b.** 130°

SECCIÓN 9.1 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Complete los espacios.

1. Las tres palabras indefinidas en la geometría son _____, _____ y _____.

2. Un _____ de recta tiene dos puntos extremos.

3. Un _____ _____ divide un segmento de recta en dos partes de igual longitud.

4. Un _____ es la parte de una recta que comienza en algún punto y continúa por siempre en una dirección.

5. Un _____ es formado por dos rayos con un punto extremo común.

6. Un ángulo se mide en _____.

7. Se utiliza un _____ para medir ángulos.

8. La medida de un ángulo _____ es menor a 90°.

9. La medida de un ángulo _____ es de 90°.

10. La medida de un ángulo _____ es mayor a 90° pero menor a 180°.

11. La medida de un ángulo llano es de _____.

12. Cuando dos segmentos tienen la misma longitud, se dice que son _____.

13. Los ángulos _____ tienen el mismo vértice, están uno al lado del otro y sus interiores no se traslapan.

14. Cuando dos rectas se intersecan, a los pares de ángulos no adyacentes se les llama ángulos _____.

15. Cuando dos ángulos tienen la misma medida, se dice que son _____.

16. La palabra *total* indica la operación de _____.

17. La suma de dos ángulos complementarios es de _____.

18. La suma de dos ángulos _____ es de 180°.

CONCEPTOS

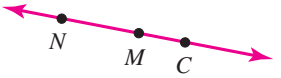
19. a. Dados dos puntos (por ejemplo, M y N), ¿cuántas rectas diferentes pasan a través de estos dos puntos?

b. Complete el espacio: En general, dos puntos diferentes determinan de manera exacta una _____.

20. Refiérase a la figura.

a. Nombre $\overrightarrow{NM}$ de otra manera.

b. ¿$\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{NM}$ nombran el mismo rayo?

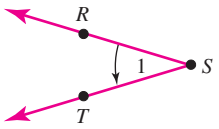


21. Considere el ángulo agudo mostrado abajo.

a. ¿Cuáles dos rayos son los lados del ángulo?

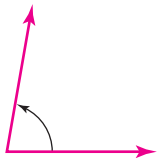
b. ¿Qué punto es el vértice del ángulo?

c. Nombre el ángulo de cuatro maneras.



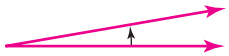
22. Estime la medida de cada ángulo. No utilice un transportador.

a.

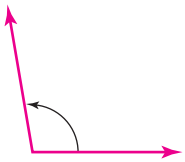


b.

c.



d.



23. Dibuje un ejemplo de cada tipo de ángulo.

a. un ángulo agudo **b.** un ángulo obtuso

c. un ángulo recto **d.** un ángulo llano

24. Complete los espacios con el símbolo correcto.

a. Si $m(\overline{AB}) = m(\overline{CD})$, entonces $\overline{AB}$ $\overline{CD}$.

b. Si $\angle ABC \cong \angle DEF$, entonces $m(\angle ABC)$ $m(\angle DEF)$.

25. a. Dibuje un par de ángulos adyacentes. Etiquételos como $\angle ABC$ y $\angle CBD$.

b. Dibuje dos rectas intersecantes. Etiquételas como rectas l_1 y l_2. Etiquete un par de ángulos verticales que se formen como $\angle 1$ y $\angle 2$.

c. Dibuje dos ángulos adyacentes complementarios.

d. Dibuje dos ángulos adyacentes suplementarios.

26. Complete el espacio:

Si $\angle MNO \cong \angle BFG$, entonces $m(\angle MNO)$ $=$ $m(\angle BFG)$.

27. Complete el espacio:

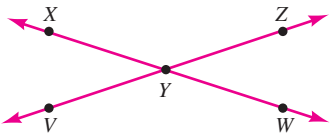
Propiedad de los ángulos verticales: los ángulos verticales son _____.

28. Refiérase a la figura abajo. Complete los espacios.

a. $\angle XYZ$ y $\angle$ _____ son ángulos verticales.

b. $\angle XYZ$ y $\angle ZYW$ son ángulos _____.

c. $\angle ZYW$ y $\angle XYV$ son ángulos _____.



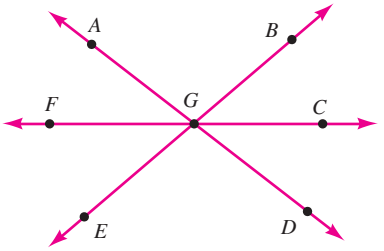
29. Refiérase a la figura abajo e indique si cada enunciado es verdadero.

a. $\angle AGF$ y $\angle BGC$ son ángulos verticales.

b. $\angle FGE$ y $\angle BGA$ son ángulos adyacentes.

c. $m(\angle AGB) = m(\angle BGC)$.

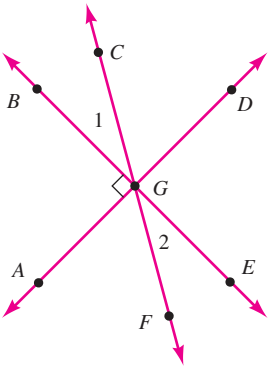
d. $\angle AGC \cong \angle DGF$.



30. Refiérase a la figura abajo e indique si los ángulos son congruentes.

a. $\angle 1$ y $\angle 2$ **b.** $\angle FGB$ y $\angle CGE$

c. $\angle AGF$ y $\angle FGE$ **d.** $\angle CGD$ y $\angle CGB$



Refiérase a la figura arriba e indique si cada enunciado es verdadero.

31. $\angle 1$ y $\angle CGD$ son ángulos adyacentes.

32. $\angle FGA$ y $\angle AGC$ son suplementarios.

33. $\angle AGB$ y $\angle BGC$ son complementarios.

34. $\angle AGF$ y $\angle 2$ son complementarios.

NOTACIÓN

Complete los espacios.

35. El símbolo $\overleftrightarrow{AB}$ se lee como "_____ AB".

36. El símbolo $\overline{AB}$ se lee como "_____ AB".

37. El símbolo $\overrightarrow{AB}$ se lee como "_____ AB".

38. m($\overline{AB}$) se lee como "la _____ del segmento AB".

39. $\angle ABC$ se lee como "el_____ ABC".

40. m($\angle ABC$) se lee como "la _____ del ángulo ABC".

41. El símbolo para _____ es un círculo pequeño elevado, °.

42. El símbolo ⌝ indica un ángulo _____.

43. El símbolo ≅ se lee como "es _____ con".

44. El símbolo l_1 puede utilizarse para nombrar una línea. Se lee como "línea l _____ uno".

PRÁCTICA GUIADA

45. Dibuje cada figura geométrica y etiquétela por completo. **Vea el Objetivo 1.**

a. El punto T

b. $\overleftrightarrow{JK}$

c. El plano ABC

46. Dibuje cada figura geométrica y etiquétela por completo. **Vea los Objetivos 2 y 3.**

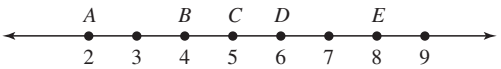
a. $\overline{RS}$

b. $\overrightarrow{PQ}$

c. $\angle XYZ$

d. $\angle L$

47. Refiérase a la figura abajo y encuentre la longitud de cada segmento. **Vea el Objetivo 2.**



a. $\overline{AB}$ **b.** $\overline{CE}$

c. $\overline{DC}$ **d.** $\overline{EA}$

48. Refiérase a la figura abajo y encuentre cada punto medio. **Vea el Objetivo 2.**

a. Encuentre el punto medio de $\overline{AD}$.

b. Encuentre el punto medio de $\overline{BE}$.

c. Encuentre el punto medio de $\overline{EA}$.

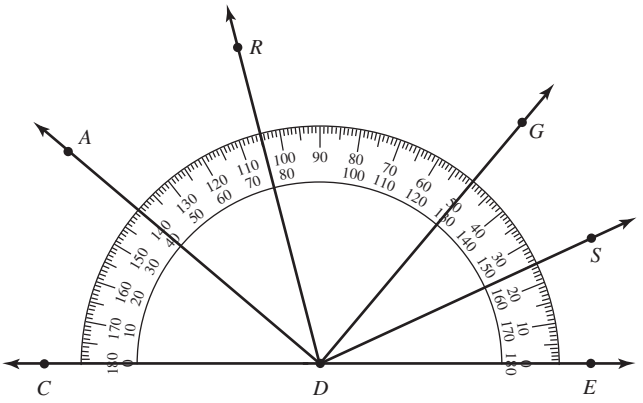
***Use el transportador para encontrar cada medida de ángulo listada abajo.* Vea el Objetivo 4.**

49. m($\angle GDE$) **50.** m($\angle ADE$)

51. m($\angle EDS$) **52.** m($\angle EDR$)

53. m($\angle CDR$) **54.** m($\angle CDA$)

55. m($\angle CDG$) **56.** m($\angle CDS$)



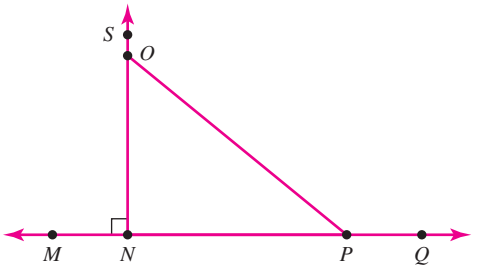
***Clasifique los siguientes ángulos en la figura como un ángulo agudo, un ángulo recto, un ángulo obtuso o un ángulo llano.* Vea el Ejemplo 1.**

57. $\angle MNO$ **58.** $\angle OPN$

59. $\angle NOP$ **60.** $\angle POS$

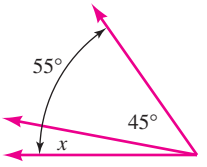
61. $\angle MPQ$ **62.** $\angle PNO$

63. $\angle QPO$ **64.** $\angle MNQ$

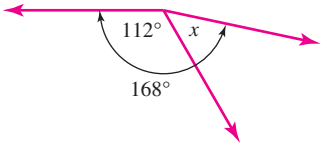


***Encuentre x.* Vea el Ejemplo 2.**

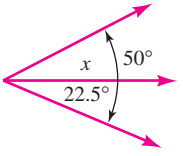
65.



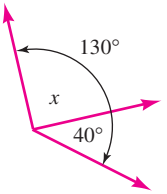
66.



67.



68.



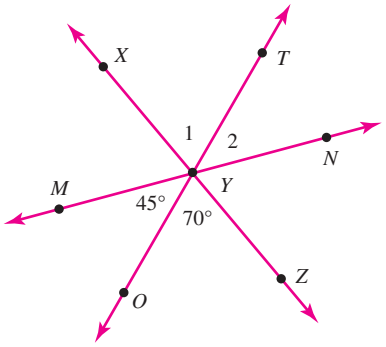
Refiérase a la figura abajo. Encuentre la medida de cada ángulo. Vea el Ejemplo 3.

69. $\angle 1$

70. $\angle MYX$

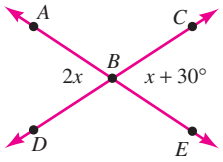
71. $\angle NYZ$

72. $\angle 2$

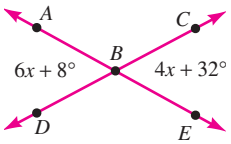


Primero encuentre x. Después encuentre $\text{m}(\angle ABD)$ ***y*** $\text{m}(\angle DBE)$. Vea el Ejemplo 4.

73.

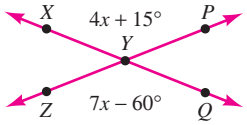


74.

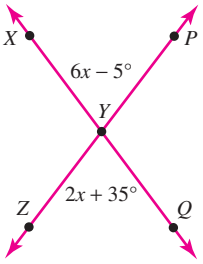


Primero encuentre x. Después encuentre $\text{m}(\angle ZYQ)$ ***y*** $\text{m}(\angle PYQ)$. Vea el Ejemplo 4.

75.



76.



x representa la medida de ángulo desconocida. Escriba una ecuación y resuélvala para encontrar x. Vea el Ejemplo 5.

77. Encuentre el complemento de un ángulo de 30°.

78. Encuentre el suplemento de un ángulo de 30°.

79. Encuentre el suplemento de un ángulo de 105°.

80. Encuentre el complemento de un ángulo de 75°.

INTÉNTELO

81. Refiérase a la figura en la siguiente columna e indique si cada enunciado es verdadero. Si el enunciado es falso. Explique por qué.

a. $\overrightarrow{GF}$ tiene al punto G como su punto extremo.

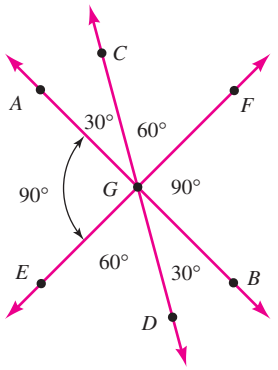
b. $\overline{AG}$ no tiene puntos extremos.

c. $\overleftrightarrow{CD}$ tiene tres puntos extremos.

d. El punto D es el vértice de $\angle DGB$.

e. $\text{m}(\angle AGC) = \text{m}(\angle BGD)$

f. $\angle AGF \cong \angle BGE$



82. Refiérase a la figura para el Problema 81 e indique si cada ángulo es un ángulo agudo, un ángulo recto, un ángulo obtuso o un ángulo llano.

a. $\angle AGC$

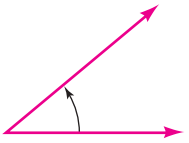
b. $\angle EGA$

c. $\angle FGD$

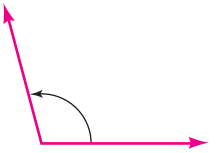
d. $\angle BGA$

Use un transportador para medir cada ángulo.

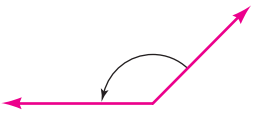
83.



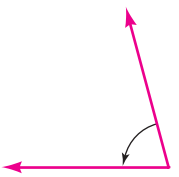
84.



85.



86.



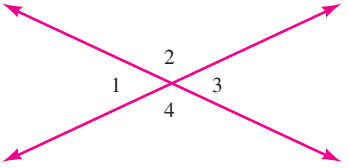
87. Refiérase a la figura abajo, en la que $\text{m}(\angle 1) = 50°$. Encuentre la medida de cada ángulo o suma de ángulos.

a. $\angle 3$

b. $\angle 4$

c. $\text{m}(\angle 1) + \text{m}(\angle 2) + \text{m}(\angle 3)$

d. $\text{m}(\angle 2) + \text{m}(\angle 4)$



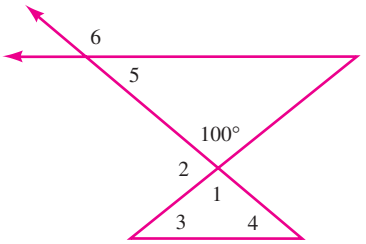
88. Refiérase a la figura abajo, en la que $\text{m}(\angle 1) + \text{m}(\angle 3) + \text{m}(\angle 4) = 180°$, $\angle 3 \cong \angle 4$ y $\angle 4 \cong \angle 5$. Encuentre la medida de cada ángulo.

a. $\angle 1$

b. $\angle 2$

c. $\angle 3$

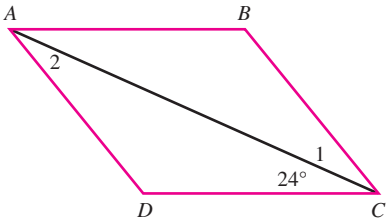
d. $\angle 6$



89. Refiérase a la figura abajo donde $\angle 1 \cong \angle ACD$, $\angle 1 \cong \angle 2$ y $\angle BAC \cong \angle 2$.

a. ¿Cuál es el complemento de $\angle BAC$?

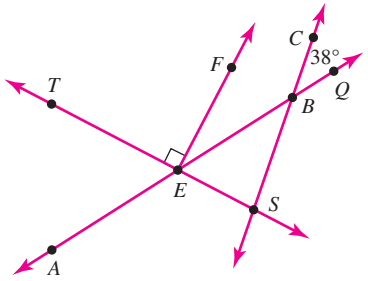
b. ¿Cuál es el suplemento de $\angle BAC$?



90. Refiérase a la figura abajo donde $\angle EBS \cong \angle BES$.

a. ¿Cuál es la medida de $\angle AEF$?

b. ¿Cuál es el suplemento de $\angle AET$?



91. Encuentre el suplemento del complemento de un ángulo de 51°.

92. Encuentre el complemento del suplemento de un ángulo de 173°.

93. Encuentre el complemento del complemento de un ángulo de 1°.

94. Encuentre el suplemento del suplemento de un ángulo de 6°.

APLICACIONES

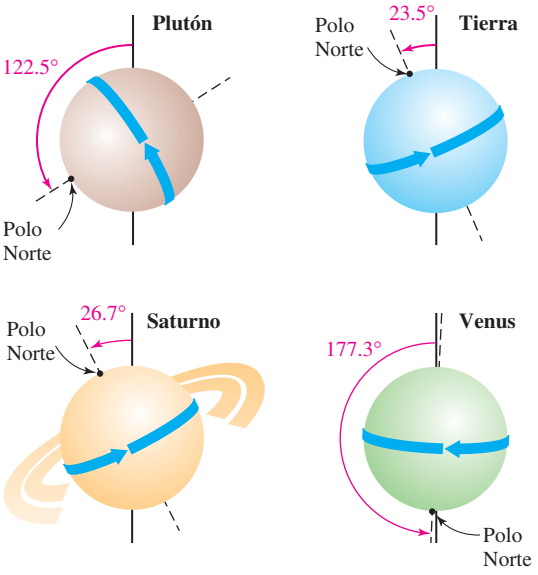
95. INSTRUMENTOS MUSICALES Suponga que usted es profesor de una banda de principiantes que describe la postura correcta necesaria para tocar varios instrumentos. Utilizando los diagramas mostrados abajo, aproxime la medida del ángulo (en grados) a la que debe sostenerse cada instrumento en relación con el cuerpo del estudiante.

a. flauta **b.** clarinete **c.** trompeta

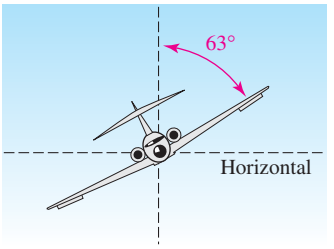
96. PLANETAS Las figuras abajo muestran la dirección de la rotación de varios planetas de nuestro sistema solar. También muestran el ángulo de inclinación de cada planeta.

a. ¿Cuáles planetas tienen un ángulo de inclinación que es un ángulo agudo?

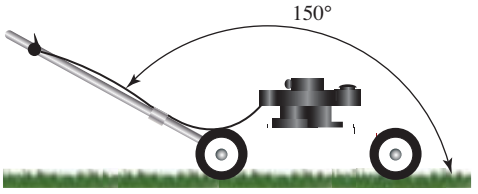
b. ¿Cuáles planetas tienen un ángulo de inclinación que es un ángulo obtuso?



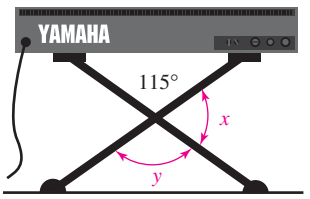
97. **a.** AVIACIÓN ¿A cuántos grados de la posición horizontal están las alas del avión?



b. JARDINERÍA ¿Qué ángulo forma el manubrio de la podadora de césped con el suelo?



98. SINTETIZADOR Encuentre x y y.



REDACCIÓN

99. FRASES Explique lo que piense que significa cada una de estas frases. ¿Cómo está involucrada la geometría?

a. El presidente dio un giro de 180 grados en el tema de la reducción de impuestos.

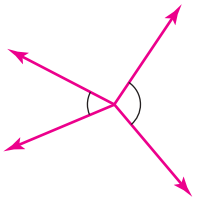
b. La patinadora realizó un "360" a medida que saltaba de la rampa.

100. En los enunciados de abajo, el símbolo ° se utiliza de dos maneras diferentes. Explique la diferencia.

$$m(\angle A) = 85° \quad \text{y} \quad 85°\text{F}$$

101. ¿Dos ángulos que son complementarios pueden ser iguales? Explique.

102. Explique por qué los ángulos remarcados abajo no son ángulos verticales.



REPASO

103. Sume: $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4}$

104. Reste: $\frac{3}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{2}$

105. Multiplique: $\frac{5}{8} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{6}{5}$

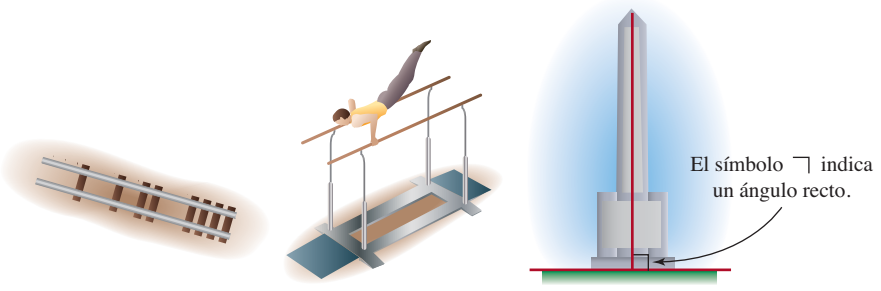
106. Divida: $\frac{12}{17} \div \frac{4}{34}$

SECCIÓN 9.2
Rectas paralelas y perpendiculares

Objetivos

1. Identificar y definir rectas paralelas y perpendiculares.
2. Identificar ángulos correspondientes, ángulos internos y ángulos alternos internos.
3. Usar las propiedades de las rectas paralelas cortadas por una transversal para encontrar medidas de ángulo desconocidas.

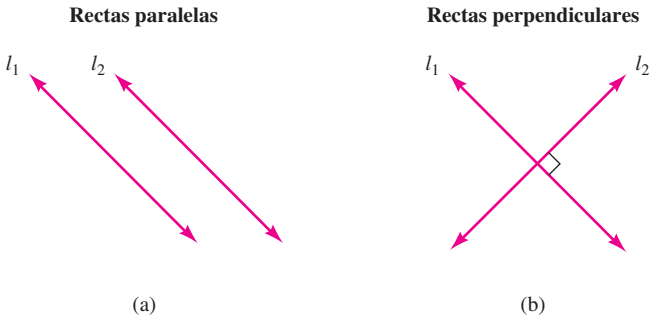
En esta sección se considerarán las rectas *paralelas* y *perpendiculares*. Dado que las rectas paralelas siempre están separadas la misma distancia, las vías del tren mostradas en la figura (a) ilustran una aplicación de las rectas paralelas. La figura (b) muestra uno de los eventos de la gimnasia para hombres, las barras paralelas. Dado que las rectas perpendiculares coinciden y forman ángulos rectos, el monumento y el suelo mostrados en la figura (c) ilustran una aplicación de las rectas perpendiculares.



(a) (b) (c)

1 Identificar y definir rectas paralelas y perpendiculares

Si dos rectas se encuentran en el mismo plano, se les llama **coplanares.** A dos rectas coplanares que no se intersecan se les llama **rectas paralelas.** Vea la figura (a) en la siguiente página. Si dos rectas no se encuentran en el mismo plano, se les llama no coplanares. A dos rectas no coplanares que no se intersecan se les llama **rectas oblicuas.**



Rectas paralelas

Las rectas paralelas son rectas coplanares que no se intersecan.

Algunas rectas que se intersecan son perpendiculares. Vea la figura (b) de arriba.

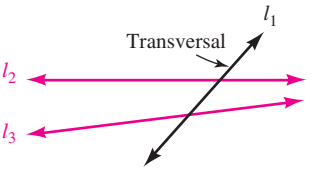
Rectas perpendiculares

Las rectas perpendiculares son rectas que se intersecan y forman ángulos rectos.

El lenguaje de las matemáticas Si las rectas l_1 (se lee como "l sub 1") y l_2 (se lee como "l sub 2") son paralelas, se puede escribir $l_1 \parallel l_2$, donde el símbolo $\parallel$ se lee como "es paralela a".

Si las rectas l_1 y l_2 son perpendiculares, se puede escribir $l_1 \perp l_2$, donde el símbolo $\perp$ se lee como "es perpendicular a".

2 Identificar ángulos correspondientes, ángulos internos y ángulos alternos internos



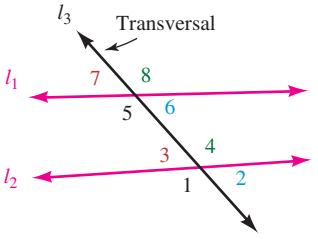
A una recta que interseca dos rectas coplanares en dos puntos distintos (diferentes) se le llama **transversal.** Por ejemplo, la recta l_1 en la figura a la derecha es una transversal que interseca las rectas l_2 y l_3.

Cuando dos rectas son cortadas por una transversal, los ocho ángulos que se forman son importantes en el estudio de las rectas paralelas. Se dan nombres descriptivos para varios pares de estos ángulos.

En la figura abajo, se forman cuatro pares de **ángulos correspondientes**.

Ángulos correspondientes

- $\angle 1$ y $\angle 5$
- $\angle 3$ y $\angle 7$
- $\angle 2$ y $\angle 6$
- $\angle 4$ y $\angle 8$



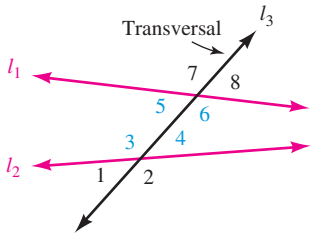
Ángulos correspondientes

Si dos rectas son cortadas por una transversal, entonces a los ángulos en el mismo lado de la transversal y en las posiciones correspondientes con respecto a las rectas se les llama ángulos correspondientes.

En la figura abajo, se forman cuatro **ángulos internos**.

Ángulos internos

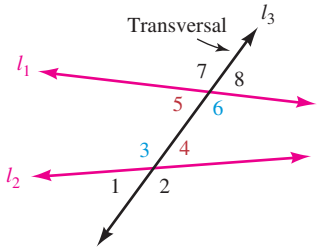
- $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$ y $\angle 6$



En la figura abajo, se forman dos pares de **ángulos alternos internos**.

Ángulos alternos internos

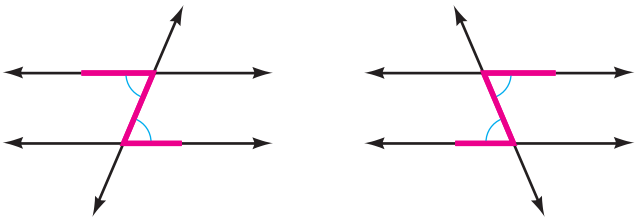
- $\angle 4$ y $\angle 5$
- $\angle 3$ y $\angle 6$



Ángulos alternos internos

Si dos rectas son cortadas por una transversal, entonces a los ángulos no adyacentes en los lados opuestos de la transversal y en el interior de las dos rectas se les llama ángulos alternos internos.

Consejo útil Los ángulos alternos internos son fáciles de identificar debido a que forman una Z o una Z invertida, como se muestra abajo.

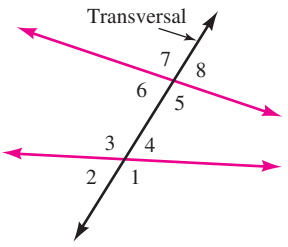


EJEMPLO 1 Refiérase a la figura abajo. Identifique:

a. todos los pares de ángulos correspondientes

b. todos los ángulos internos

c. todos los pares de ángulos alternos internos



Estrategia Cuando dos rectas son cortadas por una transversal, se forman ocho ángulos. Se considerará la posición relativa de los ángulos con respecto a las dos rectas y a la transversal.

POR QUÉ Hay cuatro pares de ángulos correspondientes, cuatro ángulos internos y dos pares de ángulos alternos internos.

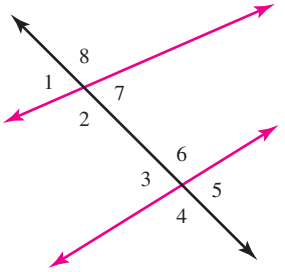
Auto-revisión 1

Refiérase a la imagen abajo. Identifique:

a. todos los pares de ángulos correspondientes

b. todos los ángulos internos

c. todos los pares de ángulos alternos internos



Ahora intente **Problema 21**

Solución

a. Para identificar los ángulos correspondientes, se examinan los ángulos a la derecha de la transversal y los ángulos a la izquierda de la transversal. Los pares de ángulos correspondientes en la figura son

- $\angle 1$ y $\angle 5$
- $\angle 2$ y $\angle 6$
- $\angle 4$ y $\angle 8$
- $\angle 3$ y $\angle 7$

b. Para identificar los ángulos internos, se determinan los ángulos en el interior de las dos rectas cortadas por la transversal. Los ángulos internos son

$\angle 3, \angle 4, \angle 5$ y $\angle 6$

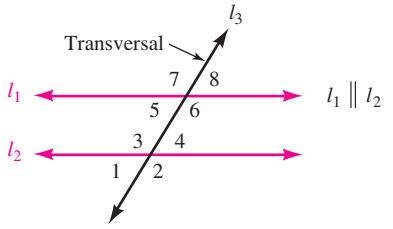
c. Los ángulos alternos internos son los ángulos no adyacentes en los lados opuestos de la transversal en el interior de las dos rectas. Por tanto, los pares de ángulos alternos internos en la figura son

- $\angle 3$ y $\angle 5$
- $\angle 4$ y $\angle 6$

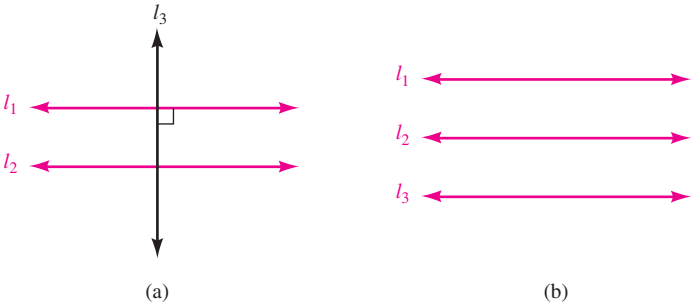
3 Usar las propiedades de las rectas paralelas cortadas por una transversal para encontrar medidas de ángulo desconocidas

Las rectas que son cortadas por una transversal pueden o pueden no ser paralelas. Cuando un par de rectas paralelas son cortadas por una transversal, se pueden realizar varias observaciones importantes acerca de los ángulos que se forman.

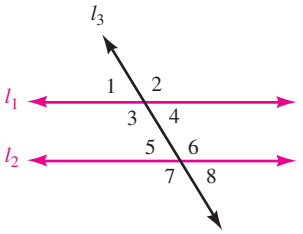
1. **Propiedad de los ángulos correspondientes:** Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, cada par de ángulos correspondientes son congruentes. En la figura abajo, si $l_1 \parallel l_2$, entonces $\angle 1 \cong \angle 5$, $\angle 3 \cong \angle 7$, $\angle 2 \cong \angle 6$ y $\angle 4 \cong \angle 8$.
2. **Propiedad de los ángulos alternos internos:** Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, los ángulos alternos interiores son congruentes. En la figura abajo, si $l_1 \parallel l_2$, entonces $\angle 3 \cong \angle 6$ y $\angle 4 \cong \angle 5$.
3. **Propiedad de los ángulos internos:** Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, los ángulos interiores en el mismo lado de la transversal son suplementarios. En la figura abajo, si $l_1 \parallel l_2$, entonces $\angle 3$ es suplementario a $\angle 5$ y $\angle 4$ es suplementario a $\angle 6$.



4. Si una transversal es perpendicular a una de las rectas paralelas, también es perpendicular a la otra recta. En la figura (a) abajo, si $l_1 \parallel l_2$ y $l_3 \perp l_1$, entonces $l_3 \perp l_2$.
5. Si dos rectas son paralelas a una tercera recta, son paralelas entre sí. En la figura (b) abajo, si $l_1 \parallel l_2$ y $l_1 \parallel l_3$, entonces $l_2 \parallel l_3$.



EJEMPLO 2 Refiérase a la figura. Si $l_1 \parallel l_2$ y $m(\angle 3) = 120°$, encuentre las medidas de los otros siete ángulos que están etiquetados.



Estrategia Se buscarán los ángulos verticales, los ángulos suplementarios y los ángulos alternos internos en la figura.

POR QUÉ Los aspectos que se han estudiado acerca de los ángulos verticales, los ángulos suplementarios y los ángulos alternos internos permiten utilizar las medidas de ángulo conocidas para encontrar las medidas de ángulos desconocidas.

Solución

$m(\angle 1) = 60°$	$\angle 3$ y $\angle 1$ son suplementarios: $m(\angle 3) + m(\angle 1) = 180°$.
$m(\angle 2) = 120°$	Los ángulos verticales son congruentes: $m(\angle 2) = m(\angle 3)$.
$m(\angle 4) = 60°$	Los ángulos verticales son congruentes: $m(\angle 4) = m(\angle 1)$.
$m(\angle 5) = 60°$	Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, los ángulos alternos internos son congruentes: $m(\angle 5) = m(\angle 4)$.
$m(\angle 6) = 120°$	Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, los ángulos alternos internos son congruentes: $m(\angle 6) = m(\angle 3)$.
$m(\angle 7) = 120°$	Los ángulos verticales son congruentes: $m(\angle 7) = m(\angle 6)$.
$m(\angle 8) = 60°$	Los ángulos verticales son congruentes: $m(\angle 8) = m(\angle 5)$.

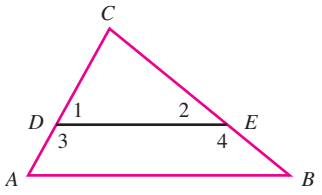
Auto-revisión 2

Refiérase a la figura para el Ejemplo 2. Si $l_1 \parallel l_2$ y $m(\angle 8) = 50°$, encuentre las medidas de los otros siete ángulos que están etiquetados.

Ahora intente **Problema 23**

Algunas figuras geométricas contienen dos transversales.

EJEMPLO 3 Refiérase a la figura. Si $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$, ¿cuáles pares de ángulos son congruentes?



Estrategia Se utilizará la propiedad de los ángulos correspondientes dos veces para encontrar dos pares de ángulos congruentes.

POR QUÉ $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ son las transversales que cortan los segmentos de recta paralelos $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$.

Solución Dado que $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ es una transversal que los corta, los ángulos correspondientes son congruentes. Por lo que se tiene

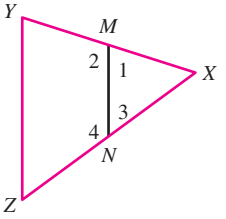
$$\angle A \cong \angle 1$$

Dado que $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ es una transversal que los corta, los ángulos correspondientes deben ser congruentes. Por lo que se tiene

$$\angle B \cong \angle 2$$

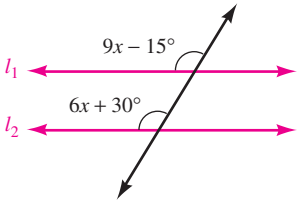
Auto-revisión 3

Refiérase a la figura abajo. Si $\overline{YZ} \parallel \overline{MN}$, ¿cuáles pares de ángulos son congruentes?



Ahora intente **Problema 25**

EJEMPLO 4 En la figura, $l_1 \parallel l_2$. Encuentre x.



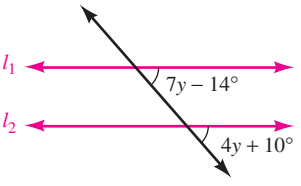
Estrategia Se utilizará la propiedad de los ángulos correspondientes para escribir una ecuación que modele de manera matemática la situación.

POR QUÉ Entonces se puede resolver la ecuación para encontrar x.

Solución En la figura, los ángulos correspondientes tienen las medidas en grados que están representadas por las expresiones algebraicas $9x - 15°$ y $6x + 30°$. Dado que $l_1 \parallel l_2$, este par de ángulos correspondientes son congruentes.

Auto-revisión 4

En la figura abajo, $l_1 \parallel l_2$. Encuentre y.



Ahora intente **Problema 27**

$9x - 15° = 6x + 30°$ Dado que los ángulos son congruentes, sus medidas son iguales.

$3x - 15° = 30°$ Para eliminar 6x del lado derecho, reste 6x de ambos lados.

$3x = 45°$ Para despejar el término variable 3x, deshaga la resta de 15° sumando 15° a ambos lados: 30° + 15° = 45°.

$x = 15°$ Para despejar x, deshaga la multiplicación por 3 dividiendo ambos lados entre 3.

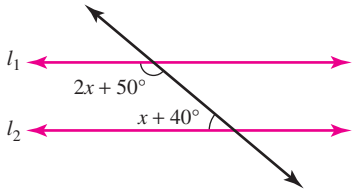
Por tanto, x es de 15°.

Auto-revisión 5

En la figura abajo, $l_1 \parallel l_2$.

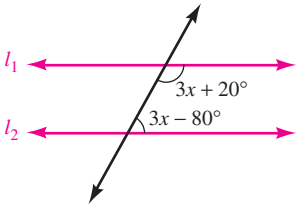
a. Encuentre x.

b. Encuentre las medidas de los ángulos etiquetados en la figura.



Ahora intente **Problema 29**

EJEMPLO 5 En la figura abajo, $l_1 \parallel l_2$.



a. Encuentre x.

b. Encuentre las medidas de los ángulos etiquetados en la figura.

Estrategia Se utilizará la propiedad de los ángulos alternos internos para escribir una ecuación que modele de manera matemática la situación.

POR QUÉ Entonces se puede resolver la ecuación para encontrar x.

Solución

a. Debido a que los ángulos son ángulos internos en el mismo lado de la transversal, son suplementarios.

$3x - 80° + 3x + 20° = 180°$ La suma de las medidas de dos ángulos suplementarios es de 180°.

$6x - 60° = 180°$ Combine los términos semejantes: 3x + 3x = 6x.

$6x = 240°$ Para deshacer la resta de 60°, sume 60° a ambos lados: 180° + 60° = 240°.

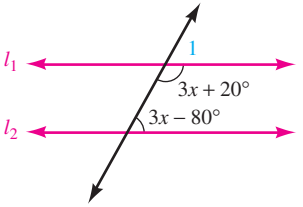
$x = 40°$ Para despejar x, deshaga la multiplicación por 6 dividiendo ambos lados entre 6.

Por tanto, x es de 40°.

Este problema puede resolverse utilizando un método diferente. En la figura abajo, se observa que $\angle 1$ y el ángulo con medida $3x - 80°$ son ángulos correspondientes.

Debido a que l_1 y l_2 son paralelas, todos los pares de ángulos correspondientes son congruentes. Por tanto,

$m(\angle 1) = 3x - 80°$



En la figura, también se observa que $\angle 1$ y el ángulo con medida $3x + 20°$ son suplementarios. Eso significa que la suma de sus medidas debe ser de 180°. Se tiene

$\mathbf{m(\angle 1)} + 3x + 20° = 180°$

$\mathbf{3x - 80°} + 3x + 20° = 180°$ Reemplace m(∠1) con 3x − 80°.

Esta es la misma ecuación que se obtuvo en la solución anterior. Cuando se resuelve, se encuentra que x es de 40°.

b. Para encontrar las medidas de los ángulos en la figura, se evalúan las expresiones $3x + 20°$ y $3x - 80°$ para $x = 40°$.

$$3x + 20° = 3(40°) + 20° = 120° + 20° = 140°$$

$$3x - 80° = 3(40°) - 80° = 120° - 80° = 40°$$

Las medidas de los ángulos etiquetados en la figura son de 140° y 40°.

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

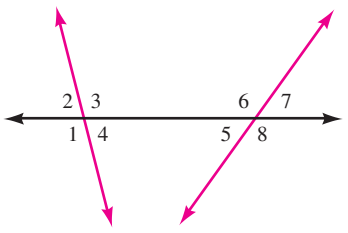
1. a. $\angle 1$ y $\angle 3$, $\angle 2$ y $\angle 4$, $\angle 8$ y $\angle 6$, $\angle 7$ y $\angle 5$ **b.** $\angle 2$, $\angle 7$, $\angle 3$ y $\angle 6$ **c.** $\angle 2$ y $\angle 6$, $\angle 7$ y $\angle 3$
2. $m(\angle 5) = 50°$, $m(\angle 7) = 130°$, $m(\angle 6) = 130°$, $m(\angle 3) = 130°$, $m(\angle 4) = 50°$, $m(\angle 1) = 50°$ y $m(\angle 2) = 130°$ **3.** $\angle 1 \cong \angle Y$, $\angle 3 \cong \angle Z$ **4.** 8°
5. a. 30° **b.** 110°, 70°

SECCIÓN 9.2 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Complete los espacios.

1. A dos rectas que se encuentran en el mismo plano se les llama _____. A dos rectas que se encuentran en planos diferentes se les llama _____.
2. A dos rectas coplanares que no se intersecan se les llama rectas _____. A dos rectas no coplanares que no se intersecan se les llama rectas _____.
3. Las rectas _____ son rectas que se intersecan y forman ángulos rectos.
4. A una recta que interseca dos rectas coplanares en dos puntos distintos (diferentes) se le llama _____.
5. En la figura de abajo, $\angle 4$ y $\angle 6$ son ángulos _____ interiores.



6. En la figura arriba, $\angle 2$ y $\angle 6$ son ángulos _____.

CONCEPTOS

7. **a.** Dibuje dos rectas paralelas. Etiquételas como l_1 y l_2.

   b. Dibuje dos rectas que no sean paralelas. Etiquételas como l_1 y l_2.

8. **a.** Dibuje dos rectas perpendiculares. Etiquételas como l_1 y l_2.

   b. Dibuje dos rectas que no sean perpendiculares. Etiquételas como l_1 y l_2.

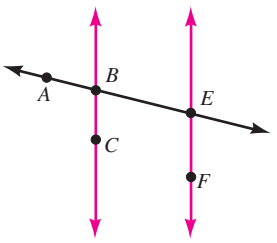
9. **a.** Dibuje dos rectas paralelas cortadas por una transversal. Etiquételas como l_1 y l_2 y etiquete la transversal como l_3.

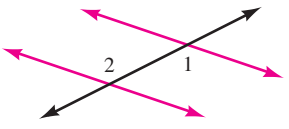
   b. Dibuje dos rectas que no sean paralelas cortadas por una transversal. Etiquételas como l_1 y l_2 y etiquete la transversal como l_3.

10. Dibuje tres rectas paralelas. Etiquételas como l_1, l_2, y l_3.

En los Problemas 11–14, dos rectas paralelas son cortadas por una transversal. Complete los espacios.

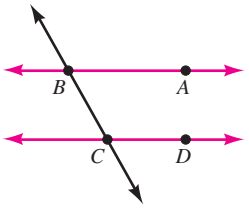
11. En la figura abajo, a la izquierda, $\angle ABC \cong \angle BEF$. Cuando dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, los ángulos _____ son congruentes.
12. En la figura abajo, a la derecha, $\angle 1 \cong \angle 2$. Cuando dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, los ángulos _____ _____ son congruentes.

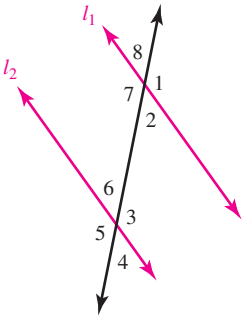




13. En la figura abajo, a la izquierda, $m(\angle ABC) + m(\angle BCD) = 180°$. Cuando dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, los ángulos _____ en el mismo lado de la transversal son suplementarios.

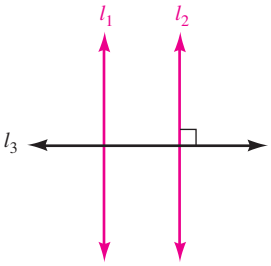
14. En la figura abajo, a la derecha, $\angle 8 \cong \angle 6$. Cuando dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, los ángulos _____ son congruentes.

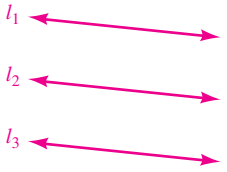




15. En la figura abajo, a la izquierda, $l_1 \parallel l_2$. ¿Qué puede concluir acerca de l_1 y l_3?

16. En la figura abajo, a la derecha, $l_1 \parallel l_2$ y $l_2 \parallel l_3$. ¿Qué puede concluir acerca de l_1 y l_3?





NOTACIÓN

Complete los espacios.

17. El símbolo ⌝ indica un ángulo _____.

18. El símbolo $\parallel$ se lee como "es _____ a".

19. El símbolo $\perp$ se lee como "es _____ a".

20. El símbolo l_1 se lee como "recta l _____ uno".

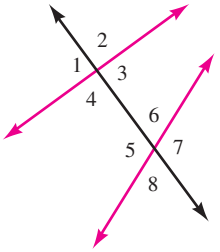
PRÁCTICA GUIADA

21. Refiérase a la figura abajo e identifique cada uno de los siguientes. **Vea el Ejemplo 1.**

a. ángulos correspondientes

b. ángulos internos

c. ángulos alternos interiores

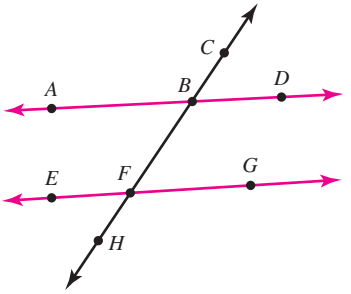


22. Refiérase a la figura abajo e identifique cada uno de los siguientes. **Vea el Ejemplo 1.**

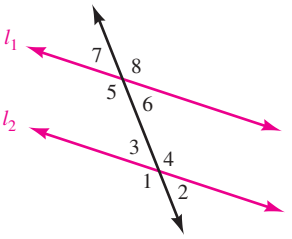
a. ángulos correspondientes

b. ángulos internos

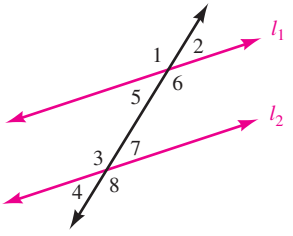
c. ángulos alternos internos



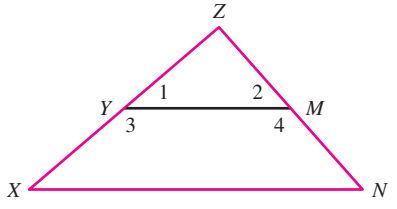
23. En la figura abajo, $l_1 \parallel l_2$ y $m(\angle 4) = 130°$. Encuentre las medidas de los otros siete ángulos que están etiquetados. **Vea el Ejemplo 2.**



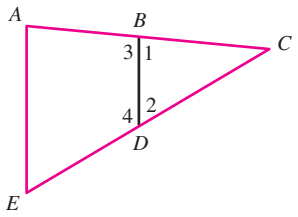
24. En la figura abajo, $l_1 \parallel l_2$ y $m(\angle 2) = 40°$. Encuentre las medidas de los otros siete ángulos que están etiquetados. **Vea el Ejemplo 2.**



25. En la figura abajo, $\overline{YM} \parallel \overline{XN}$. ¿Cuáles pares de ángulos son congruentes? **Vea el Ejemplo 3.**

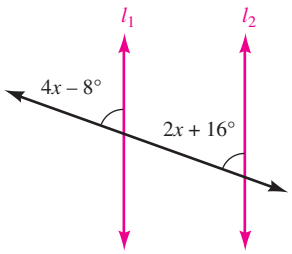


26. En la figura abajo, $\overline{AE} \parallel \overline{BD}$. ¿Cuáles pares de ángulos son congruentes? **Vea el Ejemplo 3.**

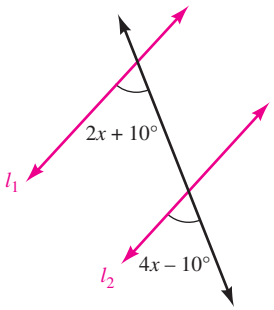


En los Problemas 27 y 28, $l_1 \parallel l_2$. Primero encuentre x. Después determine la medida de cada ángulo que está etiquetado en la figura. **Vea el Ejemplo 4.**

27.

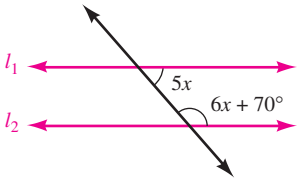


28.

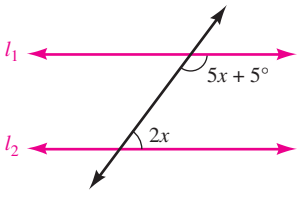


En los Problemas 29 y 30, $l_1 \parallel l_2$. Primero encuentre x. Después determine la medida de cada ángulo que está etiquetado en la figura. **Vea el Ejemplo 5.**

29.



30.



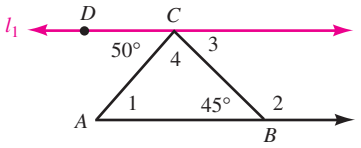
INTÉNTELO

31. En la figura abajo, $l_1 \parallel AB$. Encuentre:

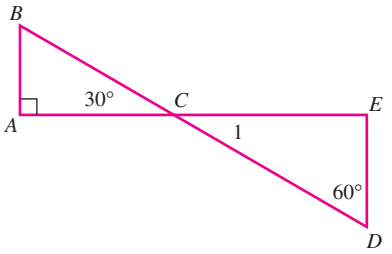
a. $m(\angle 1), m(\angle 2), m(\angle 3)$ y $m(\angle 4)$

b. $m(\angle 3) + m(\angle 4) + m(\angle ACD)$

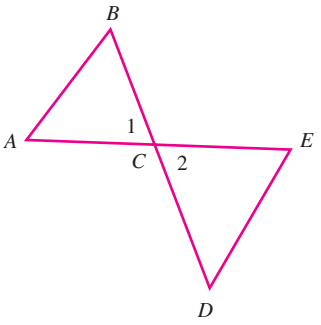
c. $m(\angle 1) + m(\angle ABC) + m(\angle 4)$



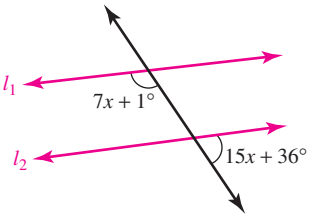
32. En la figura abajo, $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$. Encuentre $m(\angle B)$, $m(\angle E)$ y $m(\angle 1)$.



33. En la figura abajo, $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$. ¿Qué pares de ángulos son congruentes? Explique su razonamiento.

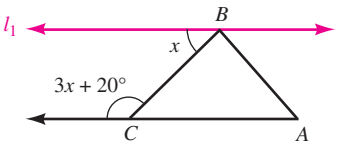


34. En la figura abajo, $l_1 \parallel l_2$. Encuentre x.

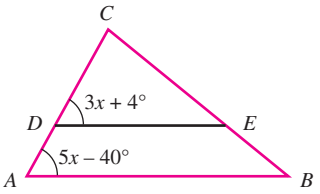


En los Problemas 35–38, primero encuentre x. Después determine la medida de cada ángulo que está etiquetado en la figura.

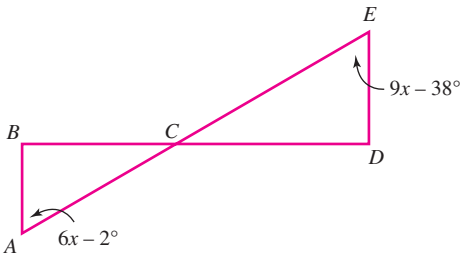
35. $l_1 \parallel \overline{CA}$



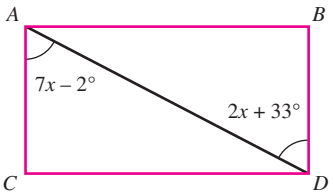
36. $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$



37. $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$

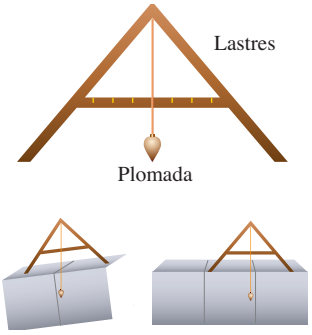


38. $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$

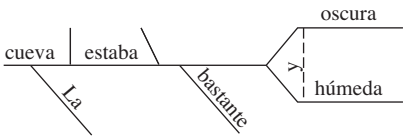


APLICACIONES

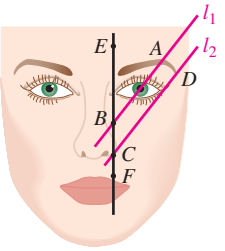
39. CONSTRUCCIÓN DE PIRÁMIDES Los egipcios utilizaron un dispositivo llamado **lastre** para saber si las piedras estaban niveladas de manera apropiada. Un lastre (mostrado abajo) está conformado por un bastidor en forma de A y una plomada suspendida del pico del bastidor. ¿Cómo pudiera un constructor utilizar un lastre para saber si las dos piedras a la izquierda no están niveladas y que las tres piedras a la derecha están niveladas?



40. REALIZAR UN DIAGRAMA DE ENUNCIADOS Los profesores de inglés hacen que sus estudiantes diagramen enunciados para ayudarles a estructurar enunciados de manera apropiada. Abajo se muestra un diagrama del enunciado *La cueva estaba bastante oscura y húmeda*. Indique los pares de rectas paralelas y perpendiculares utilizadas en el diagrama.



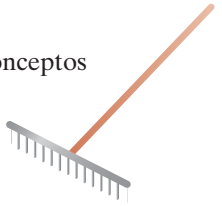
41. CONSEJOS DE BELLEZA La figura a la derecha muestra cómo ilustra un sitio web la "geometría" de las cejas ideales. Si $l_1 \parallel l_2$ y $m(\angle DCF) = 130°$, encuentre $m(\angle ABE)$.



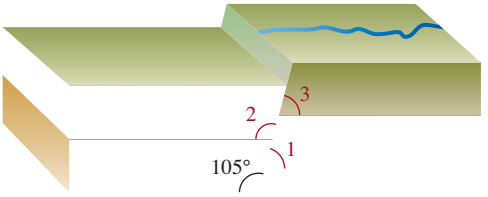
42. PINTADO DE SEÑALAMIENTOS Para varios pintores de señalamientos, la letra más difícil de pintar es la E mayúscula debido a todos los ángulos rectos involucrados. ¿Cuántos ángulos rectos hay?

43. COLOCAR PAPEL TAPIZ Explique por qué los conceptos de *perpendicular* y *paralelo* son importantes cuando se coloca papel tapiz.

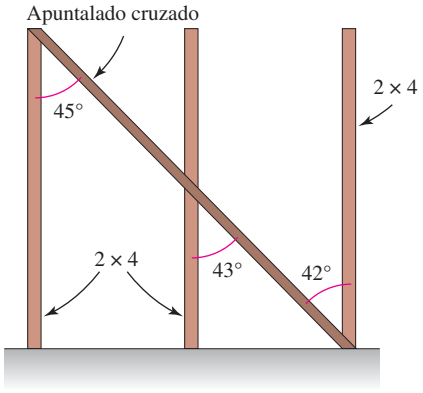
44. HERRAMIENTAS ¿Cuáles conceptos geométricos se observan en el diseño del rastrillo mostrado aquí?



45. SISMOLOGÍA La figura abajo muestra cómo ocurre una falla cuando dos bloques de tierra se separan y una parte se despliega. Determine las medidas de $\angle 1$, $\angle 2$ y $\angle 3$.

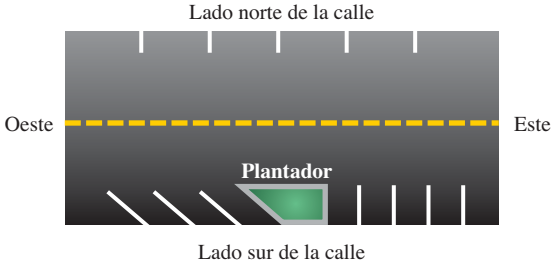


46. CARPINTERÍA Un carpintero apuntala de manera cruzada tres 2×4 como se muestra abajo y después utiliza una herramienta para medir los tres ángulos remarcados en rojo. ¿Los 2×4 son paralelos? Explique su respuesta.

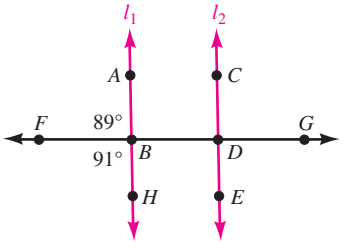


REDACCIÓN

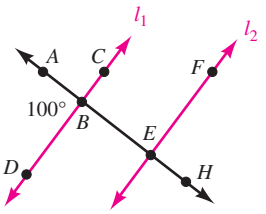
47. DISEÑO DE ESTACIONAMIENTOS Utilizando los términos de esta sección, escriba un párrafo que describa el diseño del estacionamiento mostrado abajo.



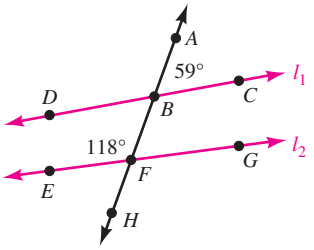
48. En la figura abajo, $l_1 \parallel l_2$. Explique por qué $\text{m}(\angle BDE) = 91°$.



49. En la figura siguiente, $l_1 \parallel l_2$. Explique por qué $\text{m}(\angle FEH) = 100°$.



50. En la figura abajo, $l_1 \parallel l_2$. Explique por qué la figura debe estar mal etiquetada.



51. ¿Los pares de ángulos alternos interiores siempre son congruentes? Explique.

52. ¿Los pares de ángulos interiores en el mismo lado de una transversal siempre son suplementarios? Explique.

REPASO

53. Encuentre el 60% de 120.

54. ¿80% de qué número es 400?

55. ¿Qué porcentaje de 500 es 225?

56. Simplifique: $3.45 + 7.37 \cdot 2.98$

57. ¿Todo número natural es un entero?

58. Multiplique: $2\frac{1}{5} \cdot 4\frac{3}{7}$

59. Exprese la frase como una razón en los términos más bajos: 4 onzas a 12 onzas

60. Convierta 5,400 miligramos a kilogramos.

Objetivos

1. Clasificar polígonos.
2. Clasificar triángulos.
3. Identificar triángulos isósceles.
4. Encontrar medidas de ángulo desconocidas de triángulos.

SECCIÓN 9.3
Triángulos

Ahora se explicarán las figuras geométricas llamadas *polígonos.* Se observan estas formas todos los días. Por ejemplo, las paredes de la mayoría de edificios son de forma rectangular. Algunas baldosas y patrones de piso de vinilo utilizan la forma de un pentágono o un hexágono. Los señalamientos de alto están en la forma de un octágono.

En esta sección, se enfocará en un tipo específico de polígono llamado *triángulo.* Las formas triangulares son especialmente importantes debido a que los triángulos contribuyen resistencia y estabilidad a paredes y torres. Los techos de gablete son triangulares, como lo son los lados de muchas rampas.

© William Owens/Alamy

La casa de los siete gabletes en Salem, Massachusetts

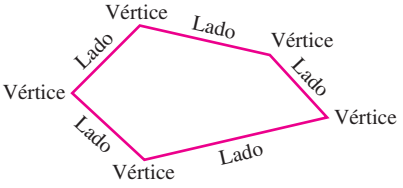
1 Clasificar polígonos

Polígono

Un **polígono** es una figura geométrica cerrada con al menos tres segmentos de recta por sus lados.

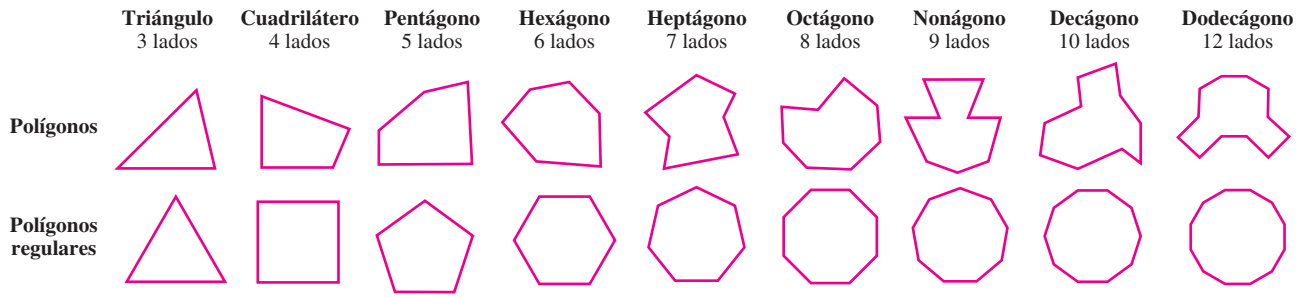
Los polígonos se forman acomodando segmentos de recta de tal manera que

- dos segmentos de recta no se intersequen, excepto en sus puntos extremos y
- los segmentos de recta no tengan un punto extremo común que se encuentre en la misma recta.



A los segmentos de recta que forman un polígono se les llama **lados.** Al punto donde dos lados de un polígono se intersecan se le llama **vértice** del polígono. El polígono mostrado a la derecha tiene 5 lados y 5 vértices.

Los polígonos se clasifican de acuerdo con el número de lados que tienen. Por ejemplo, en la figura abajo, se observa que a un polígono con cuatro lados se le llama *cuadrilátero* y a un polígono con ocho lados se le llama *octágono.* Si un polígono tiene lados que son de la misma longitud y ángulos que tienen la misma medida, se le llama **polígono regular.**



Auto-revisión 1

Dé el número de vértices de:

a. un cuadrilátero

b. un pentágono

Ahora intente **Problemas 25 y 27**

EJEMPLO 1 Dé el número de vértices de:

a. un triángulo **b.** un hexágono

Estrategia Se determinará el número de ángulos que tiene cada polígono.

POR QUÉ El número de sus vértices es igual al número de sus ángulos.

Solución

a. A partir de la figura en la página anterior, se observa que un triángulo tiene tres ángulos y por tanto tres vértices.

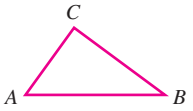
b. A partir de la figura en la página anterior, se observa que un hexágono tiene seis ángulos y por tanto seis vértices.

Consejo útil A partir de los resultados del Ejemplo 1, se observa que *el número de vértices de un polígono es igual al número de sus lados.*

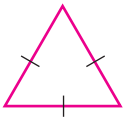
2 Clasificar triángulos

Un **triángulo** es un polígono con tres lados (y tres vértices). Recuerde que en la geometría los puntos se etiquetan con letras mayúsculas. Se pueden utilizar letras mayúsculas para designar los vértices de un triángulo para denotar el triángulo. Por ejemplo, cuando se refiere al triángulo en el margen derecho, con vértices A, B y C, se puede utilizar la notación $\triangle ABC$ (se lee como "triángulo ABC").

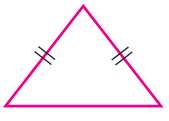
El lenguaje de las matemáticas Cuando se denota un triángulo, se puede comenzar con cualquier vértice. Después se mueve alrededor de la figura en sentido de las manecillas del reloj (o en sentido contrario a las manecillas del reloj) a medida que se listan los vértices restantes. Otras maneras de nombrar el triángulo mostrado aquí son $\triangle ACB$, $\triangle BCA$, $\triangle BAC$, $\triangle CAB$ y $\triangle CBA$.



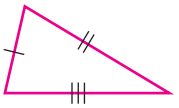
El lenguaje de las matemáticas Las figuras abajo muestran cómo se pueden clasificar los triángulos de acuerdo a las longitudes de sus lados. Las **marcas gruesas** sencillas trazadas en cada lado del triángulo equilátero indican que los lados son de igual longitud. Las marcas gruesas dobles trazadas en dos de los lados del triángulo isósceles indican que tienen la misma longitud. Cada lado del triángulo escaleno tiene un número diferente de marcas gruesas para indicar que los lados tienen longitudes diferentes.



Triángulo equilátero
(todos los lados de la misma longitud)



Triángulo isósceles
(al menos dos lados de la misma longitud)

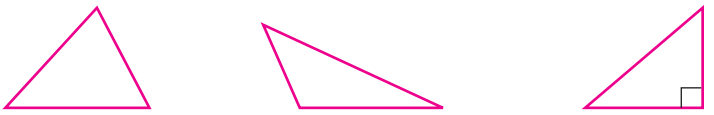


Triángulo escaleno
(ningún lado de la misma longitud)

El lenguaje de las matemáticas Dado que todo ángulo de un triángulo equilátero tiene la misma medida, un triángulo equilátero también es equiángulo.

El lenguaje de las matemáticas Dado que los triángulos equiláteros tienen al menos dos lados de la misma longitud, también son isósceles. Sin embargo, los triángulos isósceles no son necesariamente equiláteros.

Los triángulos también pueden clasificarse por medio de sus ángulos, como se muestra abajo.



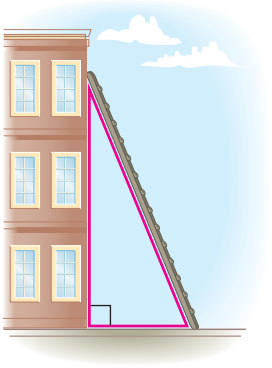
Triángulo agudo
(tiene tres ángulos agudos)

Triángulo obtuso
(tiene un ángulo obtuso)

Triángulo rectángulo
(tiene un ángulo recto)

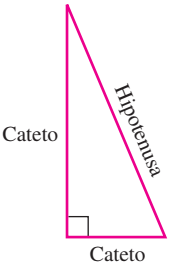
Los triángulos rectángulos tienen muchas aplicaciones en el mundo real. Por ejemplo, en la figura (a) abajo, se observa que se forma un triángulo rectángulo cuando se coloca una escalera contra la pared de un edificio.

Al lado más largo de un triángulo rectángulo se le llama **hipotenusa** y a los otros dos se les llama **catetos.** La hipotenusa de un triángulo rectángulo siempre es opuesta al ángulo de 90° (recto). Los catetos de un triángulo rectángulo son adyacentes (al lado del) al ángulo recto, como se muestra en la figura (b).



(a)

Triángulos rectángulos

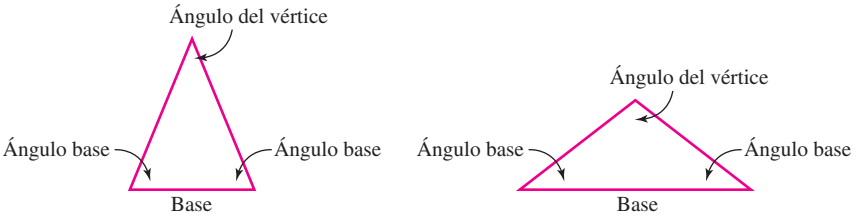


(b)

3 Identificar triángulos isósceles

En un triángulo isósceles, a los ángulos opuestos a los lados de igual longitud se les llama **ángulos base,** los lados de igual longitud forman el **ángulo del vértice** y al tercer lado se le llama **base.** Abajo se muestran dos ejemplos de triángulos isósceles.

Triángulos isósceles

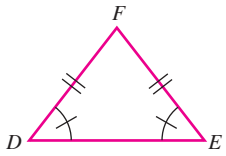


Se ha visto que los triángulos isósceles tienen dos lados de igual longitud. El **teorema del triángulo isósceles** enuncia que tales triángulos tienen una característica importante: Sus ángulos base son congruentes.

Teorema del triángulo isósceles

Si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces los ángulos opuestos de esos lados son congruentes.

El lenguaje de las matemáticas Pueden utilizarse **marcas gruesas** para designar los lados de un triángulo que tienen las mismas longitudes. También se pueden utilizar para designar los ángulos de un triángulo con la misma medida. Por ejemplo, se puede mostrar que los ángulos base del triángulo isósceles abajo son congruentes utilizando marcas gruesas sencillas.



$\angle D$ es opuesto a $\overline{FE}$ y $\angle E$ es opuesto a $\overline{FD}$. Por el teorema del triángulo isósceles, si $m(\overline{FD}) = m(\overline{FE})$, entonces $m(\angle D) = m(\angle E)$.

Si se escribe un enunciado matemático en la forma *si p . . . , entonces q . . .* , al enunciado *si q . . . , entonces p . . .* se le llama su **conversa.** Las conversas de algunos enunciados son verdaderas, mientras que las conversas de otros enunciados son falsas. Es interesante observar que la conversa del teorema del triángulo isósceles es verdadera.

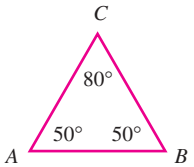
Conversa del teorema del triángulo isósceles

Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces los lados opuestos a los ángulos tienen la misma longitud y el triángulo es isósceles.

EJEMPLO 2 ¿El triángulo mostrado aquí es un triángulo isósceles?

Estrategia Se considerarán las medidas de los ángulos del triángulo.

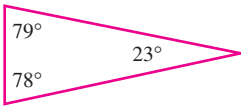
POR QUÉ Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces los lados opuestos a los ángulos tienen la misma longitud y el triángulo es isósceles.



Solución $\angle A$ y $\angle B$ tienen la misma medida, 50°. Por la conversa del teorema del triángulo isósceles, si $m(\angle A) = m(\angle B)$, se sabe que $m(\overline{BC}) = m(\overline{AC})$ y el $\triangle ABC$ es isósceles.

Auto-revisión 2

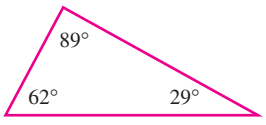
¿El triángulo mostrado abajo es un triángulo isósceles?



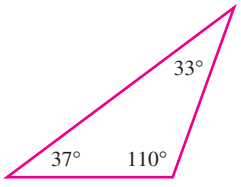
Ahora intente **Problemas 33 y 35**

4 Encontrar medidas de ángulo desconocidas de triángulos

Si dibuja varios triángulos y mide con cuidado cada ángulo con un transportador, encontrará que la suma de las medidas de los ángulos de cada triángulo es de 180°. Abajo se muestran dos ejemplos.



$62° + 89° + 29° = 180°$



$37° + 110° + 33° = 180°$

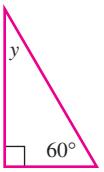
Otra manera de mostrar este hecho importante acerca de la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo se explica en el Problema 82 del Espacio para el estudio al final de esta sección.

Ángulos de un triángulo

La suma de las medidas de los ángulos de cualquier triángulo es de 180°.

Auto-revisión 3

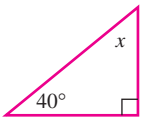
En la figura, encuentre y.



Ahora intente **Problema 37**

EJEMPLO 3

En la figura, encuentre x.



Estrategia Se utilizará el hecho de que la suma de las medidas de los ángulos de cualquier triángulo es de 180° para escribir una ecuación que modele la situación.

POR QUÉ Entonces se puede resolver la ecuación para encontrar la medida de ángulo desconocida, x.

Solución Dado que la suma de las medidas de los ángulos de cualquier triángulo es de 180°, se tiene

$x + 40° + 90° = 180°$ El símbolo ⌝ indica que la medida del ángulo es de 90°.

$x + 130° = 180°$ Realice la suma.

$x = 50°$ Para despejar x, deshaga la suma de 130° restando 130° de ambos lados.

$$\begin{array}{r} 90 \\ +\,40 \\ \hline 130 \end{array}$$

Por tanto, x es de 50°.

Auto-revisión 4

En $\triangle DEF$, la medida de $\angle D$ excede la medida de $\angle E$ en 5° y la medida de $\angle F$ es tres veces la medida de $\angle E$. Encuentre la medida de cada ángulo de $\triangle DEF$.

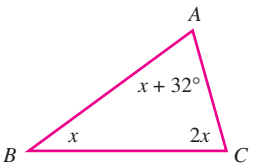
Ahora intente **Problema 41**

EJEMPLO 4

En la figura, encuentre la medida de cada ángulo de $\triangle ABC$.

Estrategia Se utilizará el hecho de que la suma de las medidas de los ángulos de cualquier triángulo es de 180° para escribir una ecuación que modele la situación.

POR QUÉ Entonces se puede resolver la ecuación para encontrar la medida de ángulo desconocida, x y utilizarla para evaluar las expresiones $2x$ y $x + 32°$.



Solución

$x + 32° + x + 2x = 180°$ La suma de las medidas de los ángulos de cualquier triángulo es de 180°.

$4x + 32° = 180°$ Combine los términos similares: $x + x + 2x = 4x$.

$4x + 32° - \mathbf{32°} = 180° - \mathbf{32°}$ Para despejar el término variable, 4x, reste 32° de ambos lados.

$4x = 148°$ Realice las restas.

$\frac{4x}{\mathbf{4}} = \frac{148°}{\mathbf{4}}$ Para despejar x, divida ambos lados entre 4.

$x = 37°$ Realice las divisiones. Esta es la medida de $\angle B$.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 7\,10} \\ 1\not{8}\not{0} \\ -\,32 \\ \hline 148 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 37 \\ 4\overline{)148} \\ -\,12 \\ \hline 28 \\ -\,28 \\ \hline 0 \end{array}$$

Para encontrar las medidas de $\angle A$ y $\angle C$, se evaluarán las expresiones $x + 32°$ y $2x$ para $x = 37°$.

$x + 32° = \mathbf{37°} + 32°$ Sustituya el 37 para x.
$= 69°$

$2x = 2(\mathbf{37°})$ Sustituya el 37 para x.
$= 74°$

La medida de $\angle B$ es de 37°, la medida de $\angle A$ es de 69°, y la medida de $\angle C$ es de 74°.

Auto-revisión 5

Si un ángulo base de un triángulo isósceles mide 33°, ¿cuál es la medida del ángulo del vértice?

Ahora intente **Problema 45**

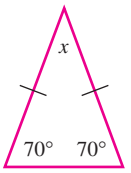
EJEMPLO 5

Si un ángulo base de un triángulo isósceles mide 70°, ¿cuál es la medida del ángulo del vértice?

Estrategia Se utilizará el teorema del triángulo isósceles y el hecho de que la suma de las medidas de los ángulos de cualquier triángulo es de 180° para escribir una ecuación que modele la situación.

POR QUÉ Entonces se puede resolver la ecuación para encontrar la medida de ángulo desconocida.

Solución Por el teorema del triángulo isósceles, si uno de los ángulos base mide 70°, el otro también. (Vea la figura a la derecha.) Si x representa la medida del ángulo del vértice, se tiene



$$x + 70° + 70° = 180°$$ La suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es de 180°.

$$x + 140° = 180°$$ Combine los términos semejantes: 70° + 70° = 140°.

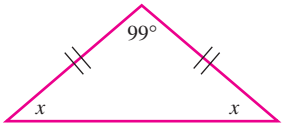
$$x = 40°$$ Para despejar x, deshaga la suma de 140° restando 140° de ambos lados.

El ángulo del vértice mide 40°.

EJEMPLO 6 Si el ángulo del vértice de un triángulo isósceles mide 99°, ¿cuáles son las medidas de los ángulos base?

Estrategia Se utilizará el hecho de que los ángulos base de un triángulo isósceles tienen la misma medida y que la suma de las medidas de los ángulos de cualquier triángulo es de 180° para escribir una ecuación que modele de manera matemática la situación.

POR QUÉ Entonces se puede resolver la ecuación para encontrar las medidas de ángulo desconocidas.



Solución Los ángulos base de un triángulo isósceles tienen la misma medida. Si x representa la medida de un ángulo base, la medida del otro ángulo también es x. (Vea la figura a la derecha.) Dado que la suma de las medidas de los ángulos de cualquier triángulo es de 180°, la suma de las medidas de los ángulos base y del ángulo vértice es de 180°. Se puede utilizar este hecho para formar una ecuación.

$$x + x + 99° = 180°$$

$$2x + 99° = 180°$$ Combine los términos semejantes: x + x = 2x.

$$2x = 81°$$ Para despejar el término variable, 2x, deshaga la suma de 99° restando 99° de ambos lados.

$$\frac{2x}{2} = \frac{81°}{2}$$ Para despejar x, deshaga la multiplicación por 2 dividiendo ambos lados entre 2.

$$x = 40.5°$$

$$\begin{array}{r} 40.5 \\ 2\overline{)81.0} \\ -8 \\ \hline 01 \\ -0 \\ \hline 10 \\ -10 \\ \hline 0 \end{array}$$

La medida de cada ángulo base es de 40.5°.

Auto-revisión 6

Si el ángulo del vértice de un triángulo isósceles mide 57°, ¿cuáles son las medidas de los ángulos base?

Ahora intente **Problema 49**

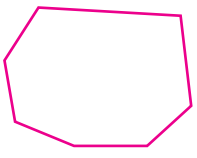
RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. a. 4 **b.** 5 **2.** no **3.** 30° **4.** $m(\angle D) = 40°, m(\angle E) = 35°, m(\angle F) = 105°$ **5.** 114° **6.** 61.5°

SECCIÓN 9.3 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Complete los espacios.



1. Un _____ es una figura geométrica cerrada con al menos tres segmentos de recta por sus lados.
2. El polígono mostrado a la derecha tiene siete _____ y siete vértices.
3. A un punto donde dos lados de un polígono se intersecan se le llama _____ del polígono.
4. Un polígono _____ tiene lados que son de la misma longitud y ángulos que tienen la misma medida.
5. A un triángulo con tres lados de igual longitud se le llama triángulo _____. Un triángulo _____ tiene al menos dos lados de igual longitud. Un triángulo _____ no tiene lados de igual longitud.

6. Un triángulo _____ tiene tres ángulos agudos. Un triángulo _____ tiene un ángulo obtuso. Un triángulo _____ tiene un ángulo recto.

7. Al lado más largo de un triángulo rectángulo se le llama _____. A los otros dos lados de un triángulo rectángulo se les llama _____.

8. Los ángulos _____ de un triángulo isósceles tienen la misma medida. Los lados de igual longitud de un triángulo isósceles forman el ángulo del _____.

9. En esta sección, se explicó el total de las medidas de los ángulos de un triángulo. La palabra *total* indica la operación _____.

10. Complete la tabla.

Número de lados	Nombre del polígono
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
12	

CONCEPTOS

11. Dibuje un ejemplo de cada tipo de polígono regular.

a. hexágono **b.** octágono

c. cuadrilátero **d.** triángulo

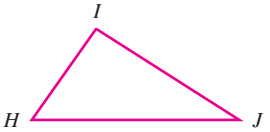
e. pentágono **f.** decágono

12. Refiérase al triángulo abajo.

a. ¿Cuáles son los nombres de los vértices del triángulo?

b. ¿Cuántos lados tiene el triángulo? Nómbrelos.

c. Use los vértices para nombrar este triángulo de tres maneras.



13. Dibuje un ejemplo de cada tipo de triángulo.

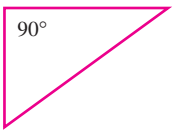
a. isósceles **b.** equilátero

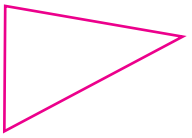
c. escaleno **d.** obtuso

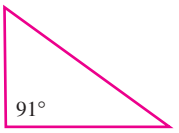
e. rectángulo **f.** agudo

14. Clasifique cada triángulo como un triángulo agudo, obtuso o rectángulo.

a.

b. 

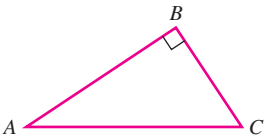
c. 

d. 

15. Refiérase al triángulo mostrado abajo.

a. ¿Cuál es la medida de $\angle B$?

b. ¿Qué tipo de triángulo es?



c. ¿Cuáles dos segmentos de recta forman los catetos?

d. ¿Cuál segmento de recta es la hipotenusa?

e. ¿Cuál lado del triángulo es el más largo?

f. ¿Cuál lado es opuesto a $\angle B$?

16. Complete los espacios.

a. A los lados de un triángulo rectángulo que son adyacentes al ángulo recto se les llama _____.

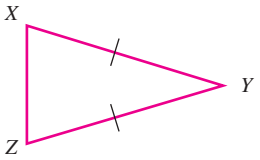
b. La hipotenusa de un triángulo rectángulo es el lado _____ al ángulo recto.

17. Complete los espacios.

a. El teorema del triángulo _____ enuncia que si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces los ángulos opuestos a esos lados son congruentes.

b. La _____ del teorema del triángulo isósceles enuncia que si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces los lados opuestos a los ángulos tienen la misma longitud y el triángulo es isósceles.

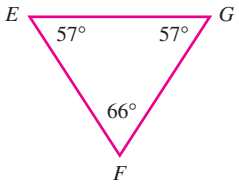
18. Refiérase al triángulo dado.



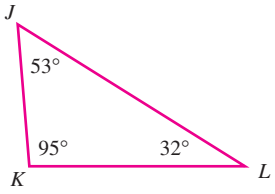
- **a.** ¿Cuáles dos lados son de la misma longitud?
- **b.** ¿Qué tipo de triángulo es $\triangle XYZ$?
- **c.** Nombre los ángulos base.
- **d.** ¿Cuál lado es opuesto al $\angle X$?
- **e.** ¿Cuál es el ángulo del vértice?
- **f.** ¿Cuál ángulo es opuesto al lado $\overline{XY}$?
- **g.** ¿Cuáles dos ángulos son congruentes?

19. Refiérase al triángulo abajo.

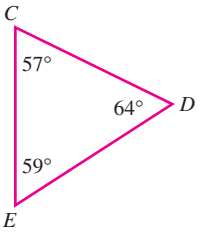
- **a.** ¿Qué se conoce acerca de $\overline{EF}$ y $\overline{GF}$?
- **b.** ¿Qué tipo de triángulo es $\triangle EFG$?



20.
- **a.** Encuentre la suma de las medidas de los ángulos de $\triangle JKL$, mostrado en la figura (a).
- **b.** Encuentre la suma de las medidas de los ángulos de $\triangle CDE$, mostrado en la figura (b).
- **c.** ¿Cuál es la *suma* de las medidas de los ángulos de cualquier triángulo?



(a)



(b)

NOTACIÓN

Complete los espacios.

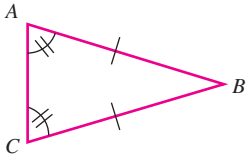
21. El símbolo $\triangle$ significa _____.

22. El símbolo $m(\angle A)$ significa la _____ del ángulo A.

Refiérase al triángulo abajo.

23. ¿Qué hecho indican las marcas gruesas acerca de los lados de $\triangle ABC$?

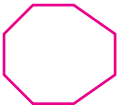
24. ¿Qué hecho indican las marcas gruesas acerca de los ángulos de $\triangle ABC$?

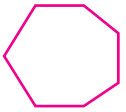


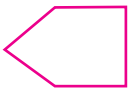
PRÁCTICA GUIADA

Para cada polígono, dé el número de lados que tiene, dé su nombre y después dé el número de vértices que tiene. Vea el Ejemplo 1.

25. **a.** **b.**

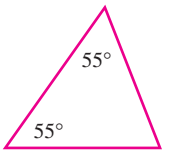
26. **a.** **b.** 

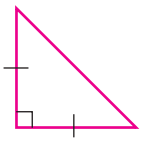
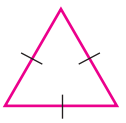
27. **a.**  **b.**

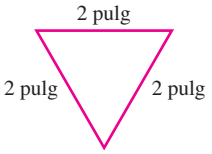
28. **a.**  **b.**

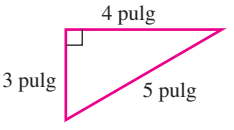
Clasifique cada triángulo como un triángulo equilátero, un triángulo isósceles o un triángulo escaleno. Vea el Objetivo 2.

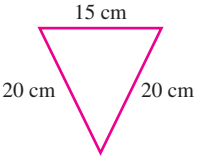
29. **a.**

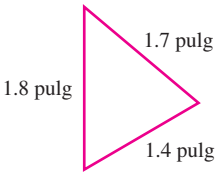
b. 

30. **a.**  **b.** 

31. **a.** 

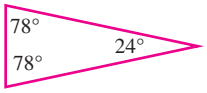
b. 

32. **a.** 

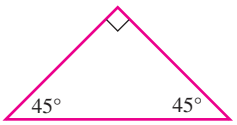
b. 

Enuncie si cada uno de los triángulos es un triángulo isósceles. **Vea el Ejemplo 2.**

33.

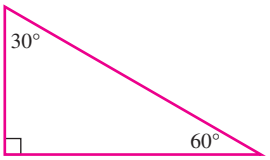


34.



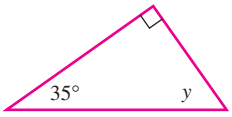
35.

36.

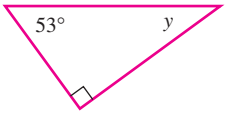


Encuentre y. **Vea el Ejemplo 3.**

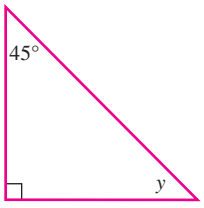
37.



38.



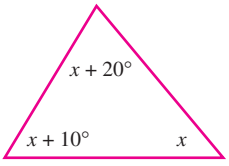
39.



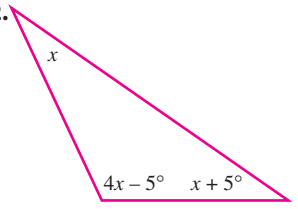
40.

Las medidas en grados de los ángulos de un triángulo están representadas por expresiones algebraicas. Encuentre primero x. Después determina la medida de cada ángulo del triángulo. **Vea el Ejemplo 4.**

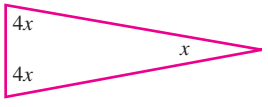
41.



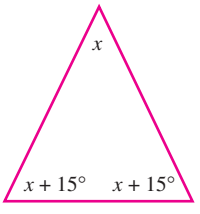
42.



43.



44.



Encuentre la medida del ángulo del vértice de cada triángulo isósceles proporcionada la siguiente información. **Vea el Ejemplo 5.**

45. La medida de un ángulo base es de 56°.

46. La medida de un ángulo base es de 68°.

47. La medida de un ángulo base es de 85.5°.

48. La medida de un ángulo base es de 4.75°.

Encuentre la medida de un ángulo base de cada triángulo isósceles proporcionada la siguiente información. **Vea el Ejemplo 6.**

49. La medida del ángulo del vértice es de 102°.

50. La medida del ángulo del vértice es de 164°.

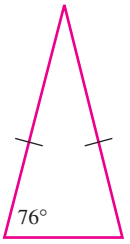
51. La medida del ángulo del vértice es de 90.5°.

52. La medida del ángulo del vértice es de 2.5°.

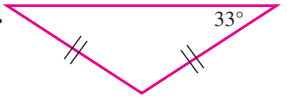
INTÉNTELO

Encuentre la medida de cada ángulo del vértice.

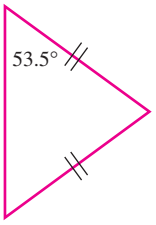
53.



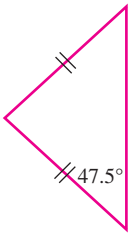
54.



55.



56.



Se proporcionan las medidas de dos ángulos de $\triangle ABC$. Encuentre la medida del tercer ángulo.

57. $m(\angle A) = 30°$ y $m(\angle B) = 60°$; encuentre $m(\angle C)$.

58. $m(\angle A) = 45°$ y $m(\angle C) = 105°$; encuentre $m(\angle B)$.

59. $m(\angle B) = 100°$ y $m(\angle A) = 35°$; encuentre $m(\angle C)$.

60. $m(\angle B) = 33°$ y $m(\angle C) = 77°$; encuentre $m(\angle A)$.

61. $m(\angle A) = 25.5°$ y $m(\angle B) = 63.8°$; encuentre $m(\angle C)$.

62. $m(\angle B) = 67.25°$ y $m(\angle C) = 72.5°$; encuentre $m(\angle A)$.

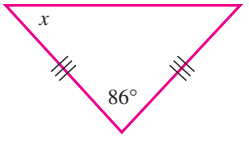
63. $m(\angle A) = 29°$ y $m(\angle C) = 89.5°$; encuentre $m(\angle B)$.

64. $m(\angle A) = 4.5°$ y $m(\angle B) = 128°$; encuentre $m(\angle C)$.

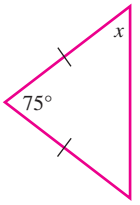
En los Problemas 65–68, encuentre x.

65.

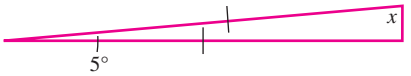
66.



67.



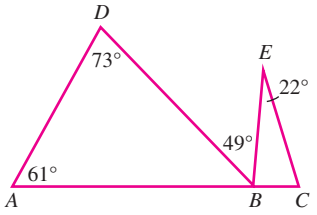
68.



69. Un ángulo de un triángulo isósceles tiene una medida de 39°. ¿Cuáles son las medidas posibles de los otros ángulos?

70. Un ángulo de un triángulo isósceles tiene una medida de 2°. ¿Cuáles son las medidas posibles de los otros ángulos?

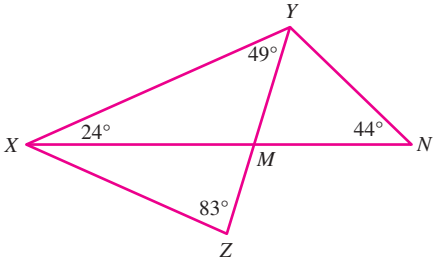
71. Encuentre m($\angle C$).



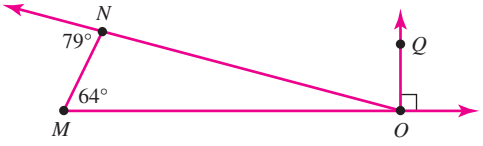
72. Encuentre:

a. m($\angle MXZ$)

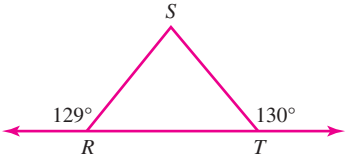
b. m($\angle MYN$)



73. Encuentre m($\angle NOQ$).



74. Encuentre m($\angle S$).



APLICACIONES

75. POLÍGONOS EN LA NATURALEZA Como se observa abajo, una estrella de mar se ajusta a la forma de un pentágono. ¿Qué forma de polígono se observa en cada uno de los otros objetos?

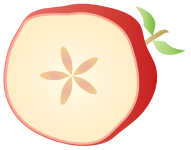
a. limón

b. chile

c. manzana

(a)

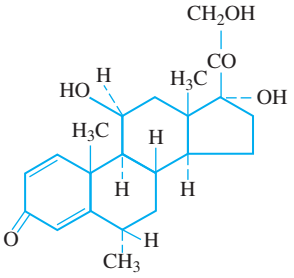
(b)



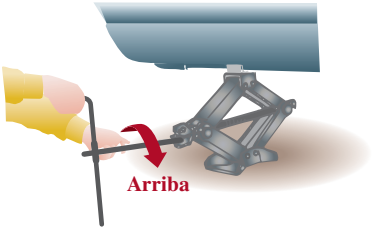
(c)

76. QUÍMICA Se utilizan polígonos para representar la estructura química de los compuestos. En la figura abajo, ¿qué tipos de polígonos se utilizan para representar la metilprednisolona, la sustancia activa en un medicamento antiinflamatorio?

Metilprednisolona



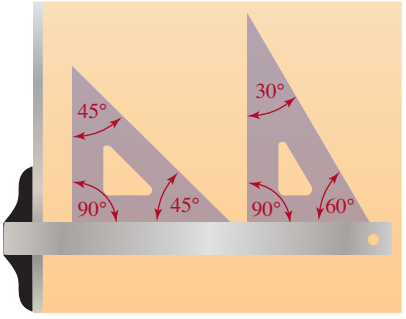
77. GATO PARA AUTOMÓVILES Refiérase a la figura abajo. No importa qué tanto se eleve el gato, siempre forma triángulos isósceles. Explique por qué.



78. CABALLETES Refiérase a la figura abajo. ¿Qué tipo de triángulo estudiado en esta sección se utiliza en el diseño de las patas del caballete?

79. BILLAR La taquera mostrada abajo se utiliza para colocar las bolas de billar cuando se comienza un juego. Aunque no coincide con la definición estricta de un polígono, la taquera tiene una forma muy parecida a la de un triángulo explicado en esta sección. ¿Qué tipo de triángulo?

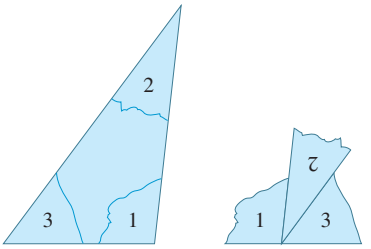
80. DISEÑO Entre las herramientas utilizadas en el diseño están los dos triángulos de plástico transparente mostrados abajo. Clasifique cada uno de acuerdo a las longitudes de sus lados y después de acuerdo con sus medidas de ángulo.



REDACCIÓN

81. En esta sección se explicó la definición de un pentágono. ¿Qué es *el* Pentágono? ¿Por qué se nombra así?

82. Una estudiante corta una forma triangular de papel de construcción azul y etiqueta los ángulos $\angle 1$, $\angle 2$, y $\angle 3$, como se muestra en la figura (a) abajo. Después desprende cada una de las tres esquinas y las acomoda como se muestra en la figura (b). Explique qué importante concepto geométrico ilustra este modelo.



(a) (b)

83. Explique por qué un triángulo no puede tener dos ángulos rectos.

84. Explique por qué un triángulo no puede tener dos ángulos obtusos.

REPASO

85. Encuentre el 20% de 110.

86. Encuentre el 15% de 50.

87. ¿Qué porcentaje de 200 es 80?

88. ¿20% de qué número es 500?

89. Evalúe: $0.85 \div 2(0.25)$

90. PRIMEROS AUXILIOS Cuando comprobaba el pulso de una víctima de accidente, un paramédico contó 13 latidos durante un periodo de 15 segundos. ¿Cuántos latidos esperaría en 60 segundos?

SECCIÓN 9.4

Teorema de Pitágoras

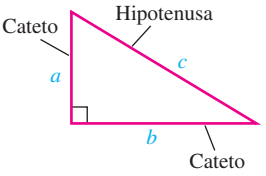
Objetivos

1. Usar el teorema de Pitágoras para encontrar la longitud exacta de un lado de un triángulo rectángulo.
2. Usar el teorema de Pitágoras para aproximar la longitud de un lado de un triángulo rectángulo.
3. Usar la conversa del teorema de Pitágoras.

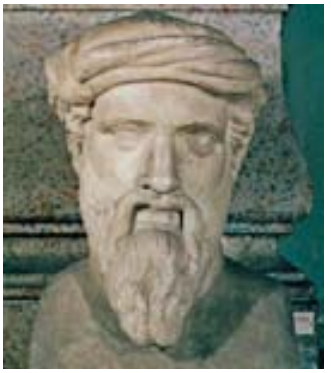
Un **teorema** es un enunciado matemático que puede demostrarse. En esta sección se explicará uno de los teoremas de la geometría más ampliamente utilizados—el teorema de Pitágoras. Se nombra en honor al matemático griego que vivió hace alrededor de 2,500 años. Se piensa que ha sido el primero en desarrollar una demostración para él. El teorema de Pitágoras expresa la relación entre las longitudes de los lados de cualquier triángulo rectángulo.

1 Usar el teorema de Pitágoras para encontrar la longitud exacta de un lado de un triángulo rectángulo

Recuerde que un triángulo rectángulo es un triángulo que tiene un ángulo recto (un ángulo con una medida de 90°). En un triángulo rectángulo, al lado más largo se le llama **hipotenusa.** Es el lado opuesto al ángulo recto. A los otros dos lados se les llama **catetos.** Es práctica común hacer que la variable c represente la longitud de la hipotenusa y que las variables a y b representen las longitudes de los catetos como se muestra a la derecha.



Si se conocen las longitudes de dos lados cualesquiera de un triángulo rectángulo, se puede encontrar la longitud del tercer lado utilizando el **teorema de Pitágoras.**



Pitágoras

© SEF/Art Resource, NY

Teorema de Pitágoras

Si a y b son las longitudes de los dos catetos de un triángulo rectángulo y c es la longitud de la hipotenusa, entonces

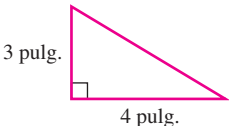
$$a^2 + b^2 = c^2$$

En palabras, el teorema de Pitágoras se expresa como a continuación:

En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de las longitudes de los dos catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa.

¡Cuidado! Cuando se utiliza la **ecuación de Pitágoras** $a^2 + b^2 = c^2$, se puede hacer que a represente la longitud de cualquier cateto del triángulo rectángulo. Después se puede hacer que b represente la longitud del otro cateto. La variable c siempre debe representar la longitud de la hipotenusa.

EJEMPLO 1 Encuentre la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo mostrado abajo.

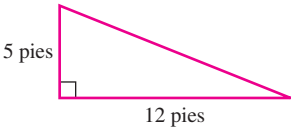


Estrategia Se utilizará el teorema de Pitágoras para encontrar la longitud de la hipotenusa.

POR QUÉ Si se conocen las longitudes de dos lados cualesquiera de un triángulo rectángulo, se puede encontrar la longitud del tercer lado utilizando el teorema de Pitágoras.

Auto-revisión 1

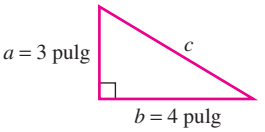
Encuentre la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo mostrado abajo.



Ahora intente **Problema 15**

Solución Se hará que $a = 3$ y $b = 4$, y se sustituirá en la ecuación de Pitágoras para encontrar c.

$a^2 + b^2 = c^2$ Esta es la ecuación de Pitágoras.
$3^2 + 4^2 = c^2$ Sustituya el 3 para a y el 4 para b.
$9 + 16 = c^2$ Evalúe cada expresión exponencial.
$25 = c^2$ Realice la suma.
$c^2 = 25$ Invierta los lados de la ecuación para que c^2 esté a la izquierda.



Para encontrar c, se debe encontrar un número que, cuando se eleva al cuadrado, sea el 25. Existen dos números, uno positivo y uno negativo: son las raíces cuadradas del 25. Dado que c representa la longitud de un lado de un triángulo, c no puede ser negativa. Por esta razón, sólo se necesita encontrar la raíz cuadrada positiva del 25 para obtener c.

$c = \sqrt{25}$ Se utiliza el símbolo $\sqrt{\ }$ para indicar la raíz cuadrada positiva de un número.
$c = 5$ $\sqrt{25} = 5$ debido a que $5^2 = 25$.

La longitud de la hipotenusa es de 5 pulg.

Consejo útil El teorema de Pitágoras se utiliza para encontrar los lados de los triángulos rectángulos. Una calculadora con una tecla de raíz cuadrada $\boxed{\sqrt{\ }}$ con frecuencia es de utilidad en la etapa final del proceso de solución cuando se debe encontrar la raíz cuadrada positiva de un número.

Auto-revisión 2

En el Ejemplo 2, ¿las cuadrillas pueden comunicarse por radio si la distancia del punto B al punto C permanece igual pero la distancia del punto A al punto C aumenta a 2,520 yardas?

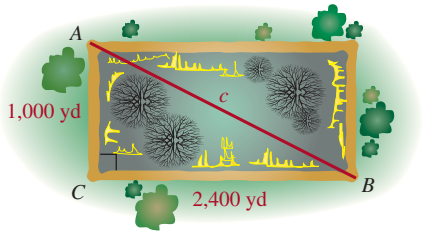
Ahora intente **Problemas 19 y 43**

EJEMPLO 2 ***Extinción de incendios*** Para extinguir un incendio forestal, el departamento de silvicultura planea clarificar un cortafuegos rectangular alrededor del fuego, como se muestra en la siguiente figura. Las cuadrillas están equipadas con comunicaciones móviles que tienen un alcance de 3,000 yardas. ¿Las cuadrillas en los puntos A y B permanecen en contacto por radio?

Estrategia Se utilizará el teorema de Pitágoras para encontrar la distancia entre los puntos A y B.

POR QUÉ Si la distancia es menor a 3,000 yardas, las cuadrillas pueden comunicarse por radio. Si es mayor a 3,000 yardas, no pueden.

Solución Los segmentos de línea que conectan los puntos A, B y C forman un triángulo rectángulo. Para encontrar la distancia c del punto A al punto B, se puede utilizar la ecuación de Pitágoras, sustituyendo el 2,400 para a y el 1,000 para b y resolviendo para c.



$a^2 + b^2 = c^2$ Esta es la ecuación de Pitágoras.
$2{,}400^2 + 1{,}000^2 = c^2$ Sustituya para a y b.
$5{,}760{,}000 + 1{,}000{,}000 = c^2$ Evalúe cada expresión exponencial.
$6{,}760{,}000 = c^2$ Realice la suma.
$c^2 = 6{,}760{,}000$ Invierta los lados de la ecuación para que c^2 está a la izquierda.
$c = \sqrt{6{,}760{,}000}$ Si $c^2 = 6{,}760{,}000$, entonces c debe ser una raíz cuadrada del 6,760,000. Debido a que c representa una longitud, debe ser la raíz cuadrada positiva del 6,760,000.
$c = 2{,}600$ Use una calculadora para encontrar la raíz cuadrada.

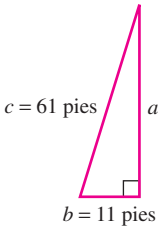
Las dos cuadrillas están separadas 2,600 yardas. Debido a que esta distancia es menor al alcance de 3,000 yardas de los radios, pueden comunicarse por radio.

EJEMPLO 3 En la figura se proporcionan las longitudes de dos lados de un triángulo rectángulo. Encuentre la longitud del lado faltante.

Estrategia Se utilizará el teorema de Pitágoras para encontrar la longitud del lado faltante.

POR QUÉ Si se conocen las longitudes de dos lados cualesquiera de un triángulo rectángulo, se puede encontrar la longitud del tercer lado utilizando el teorema de Pitágoras.

Solución Se puede sustituir el 11 para a o b, pero el 61 se debe sustituir para la longitud c de la hipotenusa. Si se elige sustituir el 11 para b, se puede encontrar la longitud del lado desconocida a como a continuación.



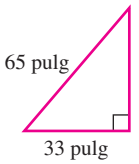
$a^2 + b^2 = c^2$	Esta es la ecuación de Pitágoras.
$a^2 + 11^2 = 61^2$	Sustituya el 11 para b y el 61 para c.
$a^2 + 121 = 3{,}721$	Evalúe cada expresión exponencial.
$a^2 + 121 - 121 = 3{,}721 - 121$	Para despejar a^2 en el lado izquierdo, reste el 121 de ambos lados.
$a^2 = 3{,}600$	Realice la resta.
$a = \sqrt{3{,}600}$	Si $a^2 = 3{,}600$, entonces a debe ser la raíz cuadrada del 3,600. Debido a que a representa una longitud, debe ser la raíz cuadrada positiva del 3,600.
$a = 60$	Use una calculadora, si es necesario, para encontrar la raíz cuadrada.

$$\begin{array}{r} 3{,}721 \\ -\,121 \\ \hline 3{,}600 \end{array}$$

La longitud del lado faltante es de 60 pies.

Auto-revisión 3

En la figura se proporcionan las longitudes de dos lados de un triángulo rectángulo. Encuentre la longitud del lado faltante.

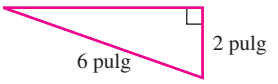


Ahora intente **Problema 23**

2 Usar el teorema de Pitágoras para aproximar la longitud de un lado de un triángulo rectángulo

Cuando se utiliza el teorema de Pitágoras para encontrar la longitud de un lado de un triángulo rectángulo, en algunas ocasiones la solución es la raíz cuadrada de un número que no es un cuadrado perfecto. En ese caso, se puede utilizar una calculadora para *aproximar* la raíz cuadrada.

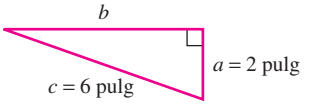
EJEMPLO 4 Refiérase al triángulo rectángulo mostrado aquí. Encuentre la longitud del lado faltante. Dé la respuesta exacta y una aproximación a la centésima más cercana.



Estrategia Se utilizará el teorema de Pitágoras para encontrar la longitud del lado faltante.

POR QUÉ Si se conocen las longitudes de dos lados cualesquiera de un triángulo rectángulo, se puede encontrar la longitud del tercer lado utilizando el teorema de Pitágoras.

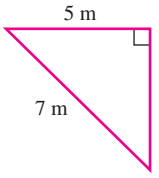
Solución Se puede sustituir el 2 para a o b, pero el 6 se debe sustituir para la longitud c de la hipotenusa. Si se elige sustituir el 2 para a, se puede encontrar la longitud del lado desconocida a como b continuación.



$a^2 + b^2 = c^2$	Esta es la ecuación de Pitágoras.
$2^2 + b^2 = 6^2$	Sustituya el 2 para a y el 6 para c.
$4 + b^2 = 36$	Evalúe cada expresión exponencial.
$4 + b^2 - 4 = 36 - 4$	Para despejar b^2 en el lado izquierdo, deshaga la suma del 4 restando el 4 de ambos lados.
$b^2 = 32$	Realice la resta.

Auto-revisión 4

Refiérase al triángulo mostrado abajo. Encuentre la longitud del lado faltante. Dé la respuesta exacta y una aproximación a la centésima más cercana.



Ahora intente **Problema 35**

Se debe encontrar un número que, cuando se eleve al cuadrado, sea el 32. Dado que b representa la longitud de un lado de un triángulo, sólo se considera la raíz cuadrada positiva.

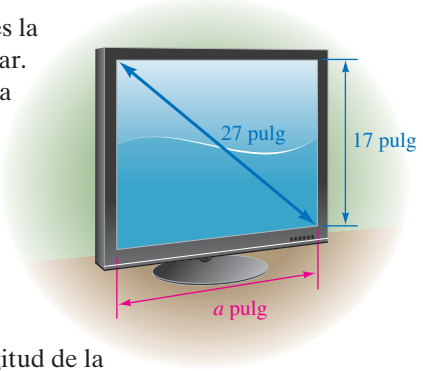
$b = \sqrt{32}$ Esta es la longitud exacta.

La longitud del lado faltante es de exactamente $\sqrt{32}$ pulgadas de largo. Dado que el 32 no es un cuadrado perfecto, su raíz cuadrada no es un número entero. Se puede utilizar una calculadora para *aproximar* $\sqrt{32}$. A la centésima más cercana, la longitud del lado faltante es de 5.66 pulgadas.

$\sqrt{32}$ pulg $\approx$ 5.66 pulg

Utilizando su CALCULADORA Encontrar el ancho de una pantalla de TV

El tamaño de una pantalla de televisión es la medida diagonal de su pantalla rectangular. Para encontrar la longitud de una pantalla de 27 pulgadas que es de 17 pulgadas de alto, se utiliza el teorema de Pitágoras con $c = 27$ y $b = 17$.



$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$27^2 = a^2 + 17^2$$
$$27^2 - 17^2 = a^2$$

Dado que la variable a representa la longitud de la pantalla de la televisión, debe ser positiva. Para encontrar a, se encuentre la raíz cuadrada positiva del resultado cuando se resta 17^2 de 27^2.

Utilizando un símbolo de radical para indicar esto, se tiene

$$\sqrt{27^2 - 17^2} = a$$

Se puede evaluar la expresión en el lado izquierdo introduciendo:

[ ] 27 [x^2] [−] 17 [x^2] [ ] [$\sqrt{\ }$] 20.97617696

A la pulgada más cercana, la longitud de la pantalla de la televisión es de 21 pulgadas.

3 Usar la conversa del teorema de Pitágoras

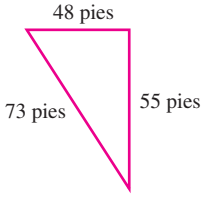
Si se escribe un enunciado matemático en la forma *si p . . . , entonces q . . .* , al enunciado *si q . . . , entonces p . . .* se le llama su **conversa.** Las conversas de algunos enunciados son verdaderas, mientras que las conversas de otros enunciados son falsas. Es interesante observar que la conversa del teorema de Pitágoras es verdadera.

Conversa del teorema de Pitágoras

Si un triángulo tiene tres lados de longitudes a, b y c, tales que $a^2 + b^2 = c^2$, entonces el triángulo es un triángulo rectángulo.

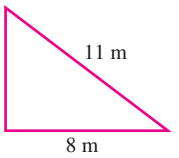
Auto-revisión 5

¿El triángulo abajo es un triángulo rectángulo?



Ahora intente **Problema 39**

EJEMPLO 5 ¿El triángulo mostrado aquí es un triángulo rectángulo?



Estrategia Se sustituirán las longitudes de los lados, 6, 8 y 11, en la ecuación de Pitágoras $a^2 + b^2 = c^2$.

POR QUÉ Por la conversa del teorema de Pitágoras, el triángulo es un triángulo rectángulo si resulta un enunciado verdadero. El triángulo no es un triángulo rectángulo si resulta un enunciado falso.

Solución Se debe sustituir el lado más largo, 11, para c, debido a que es la hipotenusa posible. Las longitudes de 6 y 8 pueden sustituirse para a o b.

$a^2 + b^2 = c^2$ Esta es la ecuación de Pitágoras.

$6^2 + 8^2 \stackrel{?}{=} 11^2$ Sustituya el 6 para a, el 8 para b y el 11 para c.

$36 + 64 \stackrel{?}{=} 121$ Evalúe cada expresión exponencial.

$100 = 121$ Este es un enunciado falso.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 36 \\ +\,64 \\ \hline 100 \end{array}$$

Dado que $100 \neq 121$, el triángulo no es un triángulo rectángulo.

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. 13 pies **2.** no **3.** 56 pulg **4.** $\sqrt{24}$ m $\approx$ 4.90 m **5.** sí

SECCIÓN 9.4 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Complete los espacios.

1. En un triángulo rectángulo, al lado opuesto al ángulo de 90° se le llama _____. A los otros dos lados se les llama _____.

2. El teorema de Pitágoras se nombró en honor del matemático griego _____, quién se piensa que fue el primero en haberlo probado.

3. El teorema de _____ enuncia que en cualquier triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los dos catetos.

4. A $a^2 + b^2 = c^2$ se le llama _____ de Pitágoras.

CONCEPTOS

Complete los espacios.

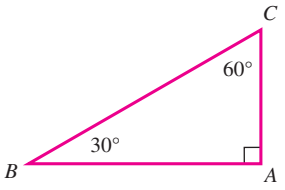
5. Si a y b son las longitudes de los dos catetos de un triángulo rectángulo y c es la hipotenusa, entonces $\square + \square = \square$.

6. Las dos soluciones de $c^2 = 36$ son $c = \square$ ó $c = \square$. Si c representa la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, entonces se puede descartar la solución de $\square$.

7. La conversa del teorema de Pitágoras: Si un triángulo tiene tres lados de longitudes a, b y c, tales que $a^2 + b^2 = c^2$, entonces el triángulo es un triángulo _____.

8. Use un transportador para dibujar un ejemplo de un triángulo rectángulo.

9. Refiérase al triángulo a la derecha.



a. ¿Cuál lado es la hipotenusa?

b. ¿Cuál lado es el cateto más largo?

c. ¿Cuál lado es el cateto más corto?

10. ¿Cuál es el primer paso cuando se resuelve para b la ecuación $25 + b^2 = 81$?

NOTACIÓN

Complete la solución para resolver la ecuación, donde $a > 0$ y $c > 0$.

11. $8^2 + 6^2 = c^2$

$\square + 36 = c^2$

$\square = c^2$

$\sqrt{\square} = c$

$10 = c$

12. $a^2 + 15^2 = 17^2$

$a^2 + \square = \square$

$a^2 + 225 - \square = 289 - \square$

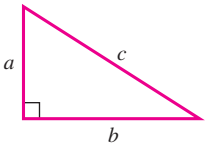
$a^2 = \square$

$a = \sqrt{\square}$

$a = \square$

PRÁCTICA GUIADA

Encuentre la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo mostrado abajo si tiene las siguientes longitudes de los lados. Vea los Ejemplos 1 y 2.



13. $a = 6$ pies y $b = 8$ pies

14. $a = 12$ mm y $b = 9$ mm

15. $a = 5$ m y $b = 12$ m

16. $a = 16$ pulg y $b = 12$ pulg

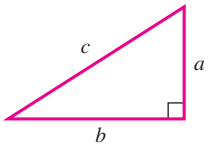
17. $a = 48$ mi y $b = 55$ mi

18. $a = 80$ pies y $b = 39$ pies

19. $a = 88$ cm y $b = 105$ cm

20. $a = 132$ mm y $b = 85$ mm

Refiérase al triángulo rectángulo abajo. Vea el Ejemplo 3.



21. Encuentre b si $a = 10$ cm y $c = 26$ cm.

22. Encuentre b si $a = 14$ pulg y $c = 50$ pulg

23. Encuentre a si $b = 18$ m y $c = 82$ m

24. Encuentre a si $b = 9$ yd y $c = 41$ yd

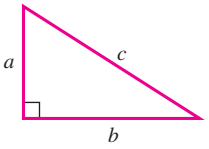
25. Encuentre a si $b = 21$ m y $c = 29$ m

26. Encuentre a si $b = 16$ yd y $c = 34$ yd

27. Encuentre b si $a = 180$ m y $c = 181$ m

28. Encuentre b si $a = 630$ pies y $c = 650$ pies

Se proporcionan las longitudes de dos lados de un triángulo rectángulo. Encuentre la longitud del lado faltante. Dé la respuesta exacta y una aproximación a la centésima más cercana. Vea el Ejemplo 4.



29. $a = 5$ cm y $c = 6$ cm

30. $a = 4$ pulg y $c = 8$ pulg

31. $a = 12$ m y $b = 8$ m

32. $a = 10$ pies y $b = 4$ pies

33. $a = 9$ pulg y $b = 3$ pulg

34. $a = 5$ mi y $b = 7$ mi

35. $b = 4$ pulg y $c = 6$ pulg

36. $b = 9$ mm y $c = 12$ mm

¿Un triángulo con las siguientes longitudes de los lados es un triángulo rectángulo? Vea el Ejemplo 5.

37. 12, 14, 15

38. 15, 16, 22

39. 33, 56, 65

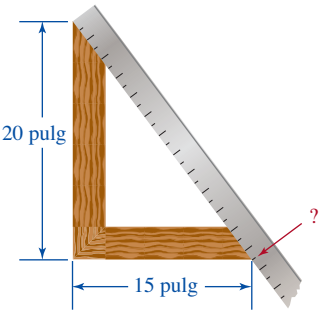
40. 20, 21, 29

APLICACIONES

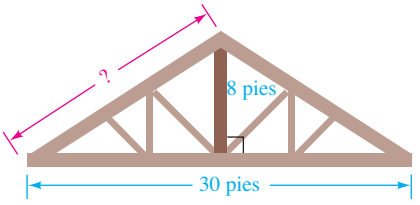
41. AJUSTE DE ESCALERAS Una escalera de 20 pies alcanza una ventana 16 pies sobre el suelo. ¿Qué tan lejos de la pared está la base de la escalera?

42. LONGITUD DE CABLES DE SUJECIÓN Se va a sujetar una torre de 30 pies por medio de tres cables de sujeción unidos a la parte superior de la torre y al suelo en posiciones a 20 pies de su base. ¿Cuánto cable se necesita? Redondee a la décima más cercana.

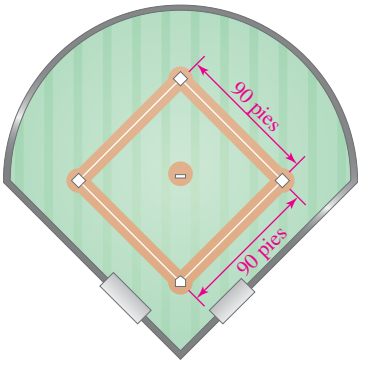
43. MARCOS PARA FOTOGRAFÍAS Después de pegar y clavar entre sí dos piezas de moldura para marco para fotografías, un hacedor de marcos comprueba su trabajo realizando una medición diagonal. Si los lados del marco forman un ángulo recto, ¿qué medición debe leer el hacedor de marcos en la barra para medir de una yarda?



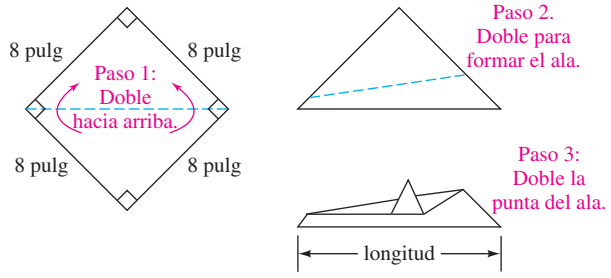
44. CARPINTERÍA El hastial del techo mostrado está dividido a la mitad por un refuerzo vertical, de 8 pies de altura. Encuentre la longitud de la línea del techo.



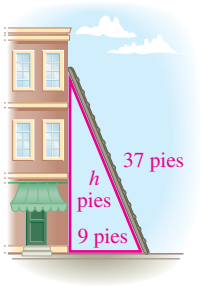
45. BÉISBOL Un diamante de beisbol es un cuadrado con lados de 90 pies de largo. ¿Qué tan lejos del plato de home está la segunda base? Redondee a la centésima más cercana.



46. AVIÓN DE PAPEL La figura abajo proporciona las instrucciones para hacer un avión de papel a partir de una pieza cuadrada de papel con lados de 8 pulgadas de largo. Encuentre la longitud del avión cuando se completa en el Paso 3. Redondee a la centésima más cercana.



47. EXTINCIÓN DE INCENDIOS La base de la escalera de 37 pies mostrada en la figura abajo está a 9 pies de la pared. ¿La parte superior alcanzará la cornisa de una ventana que está 35 pies sobre el suelo? Explique cómo llegó a su respuesta.

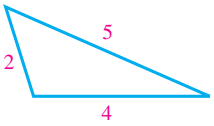


48. DAÑO POR VIENTO Se cayó un árbol durante una tempestad. Encuentre la altura del árbol cuando estaba de pie.

REDACCIÓN

49. Enuncie el teorema de Pitágoras en sus propias palabras.

50. Cuando las longitudes de los lados del triángulo mostrado abajo se sustituyen en la ecuación $a^2 + b^2 = c^2$, el resultado es un enunciado falso. Explique por qué.



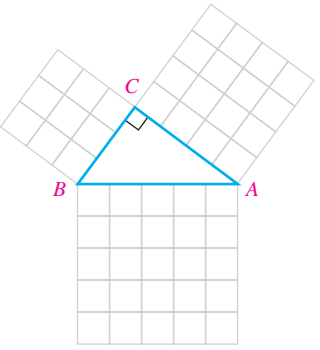
$a^2 + b^2 = c^2$

$2^2 + 4^2 = 5^2$

$4 + 16 = 25$

$20 = 25$

51. En la figura abajo, se han dibujado cuadrados de igual tamaño en los lados del triángulo rectángulo $\triangle ABC$. Explique cómo esta figura demuestra que $3^2 + 4^2 = 5^2$.



52. En la película *The Wizard of Oz,* el espantapájaros estaba en la búsqueda de un cerebro. Para comprobar que había encontrado uno, recitó lo siguiente:

"La suma de las raíces cuadradas de dos lados cualesquiera de un triángulo isósceles es igual a la raíz cuadrada del lado restante".

Desafortunadamente, este enunciado no es verdadero. Corríjalo de tal manera que enuncie el teorema de Pitágoras.

REPASO

Use una comprobación para determinar si el número proporcionado es una solución de la ecuación.

53. $2b + 3 = -15, -8$

54. $5t - 4 = -16, -2$

55. $0.5x = 2.9, 5$

56. $1.2 + x = 4.7, 3.5$

57. $33 - \frac{x}{2} = 30, -6$

58. $\frac{x}{4} + 98 = 100, -8$

59. $3x - 2 = 4x - 5, 12$

60. $5y + 8 = 3y - 2, 5$

Objetivos

1. Identificar partes correspondientes de triángulos congruentes.
2. Usar las propiedades de la congruencia para comprobar que dos triángulos son congruentes.
3. Determinar si dos triángulos son semejantes.
4. Usar triángulos semejantes para encontrar longitudes desconocidas en problemas de aplicación.

© iStockphoto.com/Lucinda Deitman

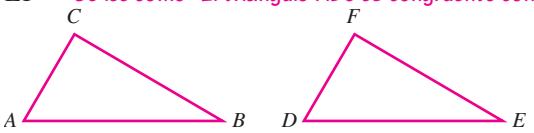
SECCIÓN 9.5
Triángulos congruentes y triángulos semejantes

En la vida diaria se observan varios tipos de triángulos. Cometas, velas, techos, totopos y rampas con forma triangular son sólo unos cuantos ejemplos. En esta sección se explicará cómo comparar el tamaño y la forma de dos triángulos dados. A partir de esta comparación, se pueden hacer observaciones acerca de las longitudes de sus lados y de las medidas de sus ángulos.

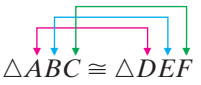
1 Identificar partes correspondientes de triángulo congruentes

En pocas palabras, dos figuras geométricas son congruentes si tienen la misma forma y tamaño. Por ejemplo, si $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ mostrados abajo son congruentes, se puede escribir

$\triangle ABC \cong \triangle DEF$ Se lee como "El triángulo ABC es congruente con el triángulo DEF."



Una manera de determinar si dos triángulos son congruentes es observar si un triángulo puede colocarse sobre el otro triángulo de tal forma que se ajuste de manera exacta. Cuando se escribe $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, se está mostrando cómo se relacionan los vértices de un triángulo con los vértices del otro triángulo para obtener un "ajuste perfecto". A esta relación de puntos se le llama **correspondencia.**



$A \leftrightarrow D$ Se lee como "El punto A corresponde con el punto D".

$B \leftrightarrow E$ Se lee como "El punto B corresponde con el punto E".

$C \leftrightarrow F$ Se lee como "El punto C corresponde con el punto F".

Cuando se establece una correspondencia entre los vértices de dos triángulos congruentes, también se establece una correspondencia entre los ángulos y los lados de los triángulos. A los ángulos correspondientes y a los lados correspondientes de los triángulos congruentes se les llama **partes correspondientes.** *Las partes correspondientes de los triángulos congruentes siempre son congruentes.* Es decir, las partes correspondientes de los triángulos congruentes siempre tienen la misma medida. Para los triángulos congruentes mostrados arriba, se tiene

$$m(\angle A) = m(\angle D) \quad m(\angle B) = m(\angle E) \quad m(\angle C) = m(\angle F)$$
$$m(\overline{BC}) = m(\overline{EF}) \quad m(\overline{AC}) = m(\overline{DF}) \quad m(\overline{AB}) = m(\overline{DE})$$

Triángulos congruentes

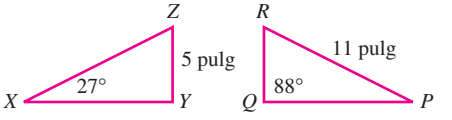
Dos triángulos son congruentes si y sólo si sus vértices pueden relacionarse de tal manera que los lados correspondientes y los ángulos correspondientes sean congruentes.

EJEMPLO 1 Refiérase a la figura abajo, donde $\triangle XYZ \cong \triangle PQR$.

a. Nombre las seis partes correspondientes congruentes de los triángulos.

b. Encuentre $m(\angle P)$.

c. Encuentre $m(\overline{XZ})$.



Estrategia Se establecerá la correspondencia entre los vértices de $\triangle XYZ$ y los vértices de $\triangle PQR$.

POR QUÉ Esto, a su vez, establecerá una correspondencia entre los ángulos y los lados correspondientes congruentes de los triángulos.

Solución

a. La correspondencia entre los vértices es

$$\triangle XYZ \cong \triangle PQR$$

$$X \leftrightarrow P \qquad Y \leftrightarrow Q \qquad Z \leftrightarrow R$$

Las partes correspondientes de los triángulos congruentes son congruentes. Por tanto, los ángulos correspondientes congruentes son

$$\angle X \cong \angle P \qquad \angle Y \cong \angle Q \qquad \angle Z \cong \angle R$$

Los lados correspondientes congruentes son

$$\overline{YZ} \cong \overline{QR} \qquad \overline{XZ} \cong \overline{PR} \qquad \overline{XY} \cong \overline{PQ}$$

b. A partir de la figura, se observa que $m(\angle X) = 27°$. Dado que $\angle X \cong \angle P$, se tiene que $m(\angle P) = 27°$.

c. A partir de la figura, se observa que $m(\overline{PR}) = 11$ pulgadas. Dado que $\overline{XZ} \cong \overline{PR}$, se tiene que $m(\overline{XZ}) = 11$ pulgadas.

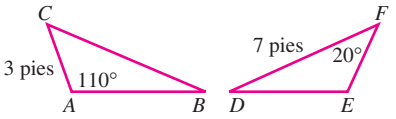
Auto-revisión 1

Refiérase a la figura abajo, donde $\triangle ABC \cong \triangle EDF$.

a. Nombre las seis partes correspondientes congruentes de los triángulos.

b. Encuentre $m(\angle C)$.

c. Encuentre $m(\overline{FE})$.



Ahora intente **Problema 33**

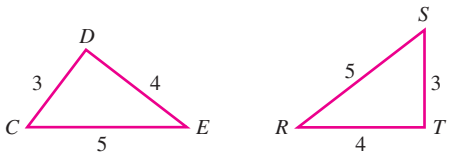
2 Usar las propiedades de la congruencia para comprobar que dos triángulos son congruentes

En algunas ocasiones es posible concluir que dos triángulos son congruentes sin tener que mostrar que los tres pares de ángulos correspondientes son congruentes y que los tres pares de lados correspondientes son congruentes. Para hacer esto, se aplica una de las siguientes propiedades.

Propiedad LLL

Si tres lados de un triángulo son congruentes con los tres lados de un segundo triángulo, los triángulos son congruentes.

Se puede mostrar que los triángulos mostrados abajo son congruentes por medio de la propiedad LLL:



$\overline{CD} \cong \overline{ST}$ Dado que $m(\overline{CD}) = 3$ y $m(\overline{ST}) = 3$, los segmentos son congruentes.

$\overline{DE} \cong \overline{TR}$ Dado que $m(\overline{DE}) = 4$ y $m(\overline{TR}) = 4$, los segmentos son congruentes.

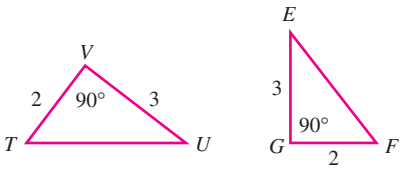
$\overline{EC} \cong \overline{RS}$ Dado que $m(\overline{EC}) = 5$ y $m(\overline{RS}) = 5$, los segmentos son congruentes.

Por tanto, $\triangle CDE \cong \triangle STR$.

Propiedad LAL

Si dos lados y el ángulo entre ellos en un triángulo son congruentes, respectivamente, con dos lados y el ángulo entre ellos en un segundo triángulo, los triángulos son congruentes.

Se puede mostrar que los triángulos que aparecen abajo son congruentes por medio de la propiedad LAL:



$\overline{TV} \cong \overline{FG}$ Dado que $m(\overline{TV}) = 2$ y $m(\overline{FG}) = 2$, los segmentos son congruentes.

$\angle V \cong \angle G$ Dado que $m(\angle V) = 90°$ y $m(\angle G) = 90°$, los ángulos son congruentes.

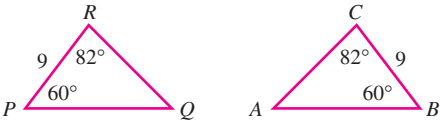
$\overline{UV} \cong \overline{EG}$ Dado que $m(\overline{UV}) = 3$ y $m(\overline{EG}) = 3$, los segmentos son congruentes.

Por tanto, $\triangle TVU \cong \triangle FGE$.

Propiedad ALA

Si dos ángulos y un lado entre ellos en un triángulo son congruentes, respectivamente, con dos ángulos y el lado entre ellos en un segundo triángulo, los triángulos son congruentes.

Se puede mostrar que los triángulos mostrados a continuación son congruentes por medio de la propiedad ALA:



$\angle P \cong \angle B$ Dado que $m(\angle P) = 60°$ y $m(\angle B) = 60°$, los ángulos son congruentes.

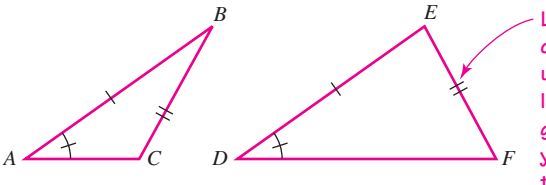
$\overline{PR} \cong \overline{BC}$ Dado que $m(\overline{PR}) = 9$ y $m(\overline{BC}) = 9$, los segmentos son congruentes.

$\angle R \cong \angle C$ Dado que $m(\angle R) = 82°$ y $m(\angle C) = 82°$, los ángulos son congruentes.

Por tanto, $\triangle PQR \cong \triangle BAC$.

¡Cuidado! No existe una propiedad LLA. Para ilustrar esto, considere los triángulos mostrados abajo. Dos lados y un ángulo de $\triangle ABC$ son congruentes con dos lados y un ángulo de $\triangle DEF$. Pero el ángulo congruente no está entre los lados congruentes.

A esta situación se le refiere como LLA. Obviamente, los triángulos no son congruentes debido a que no tienen la misma forma y tamaño.

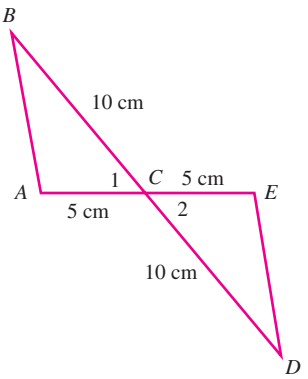


Las marcas gruesas indican partes congruentes. Es decir, los lados con una marca gruesa son de la misma longitud, los lados con dos marcas gruesas son de la misma longitud y los ángulos con una marca gruesa tienen la misma medida.

EJEMPLO 2 Explique por qué los triángulos en la figura de la siguiente página son congruentes.

Estrategia Se mostrará que dos lados y el ángulo entre ellos en un triángulo son congruentes, respectivamente, con dos lados y el ángulo entre ellos en un segundo triángulo.

POR QUÉ Entonces se sabe que los dos triángulos son congruentes por la propiedad LAL.



Solución Dado que los ángulos verticales son congruentes,

$$\angle 1 \cong \angle 2$$

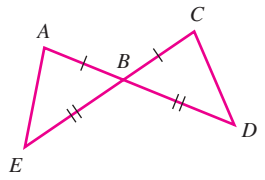
A partir de la figura, se observa que

$$\overline{AC} \cong \overline{EC} \quad \text{y} \quad \overline{BC} \cong \overline{DC}$$

Dado que dos lados y el ángulo entre ellos en un triángulo son congruentes, respectivamente, con dos lados y el ángulo entre ellos en un segundo triángulo, $\triangle ABC \cong \triangle EDC$ por la propiedad LAL.

Auto-revisión 2

¿Los triángulos en la figura abajo son congruentes? Explique por qué sí o por qué no.



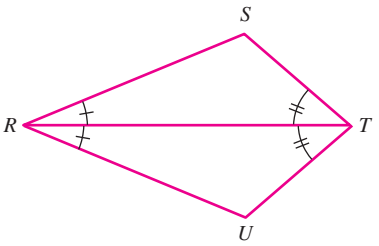
Ahora intente **Problema 35**

EJEMPLO 3

¿Son congruentes $\triangle RST$ y $\triangle RUT$ en la figura a la derecha?

Estrategia Se mostrará que dos ángulos y el lado entre ellos en un triángulo son congruentes, respectivamente, con dos ángulos y el lado entre ellos en un segundo triángulo.

POR QUÉ Entonces se sabe que los dos triángulos son congruentes por la propiedad ALA.



Solución A partir de las marcas en la figura, se sabe que dos pares de ángulos son congruentes.

$\angle SRT \cong \angle URT$ Estos ángulos están marcados con una marca gruesa, la cual indica que tienen la misma medida.

$\angle STR \cong \angle UTR$ Estos ángulos están marcados con 2 marcas gruesas, lo cual indica que tienen la misma medida.

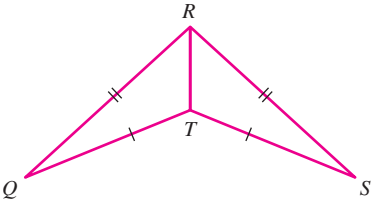
A partir de la figura, se observa que los triángulos tienen el lado $\overline{RT}$ en común. Además, $\overline{RT}$ está entre cada uno de los pares de ángulos congruentes listados arriba. Dado que todo segmento es congruente consigo mismo, también se tiene

$$\overline{RT} \cong \overline{RT}$$

Conociendo que dos ángulos y el lado entre ellos en $\triangle RST$ son congruentes, respectivamente, con dos ángulos y el lado entre ellos en $\triangle RUT$, se puede concluir que $\triangle RST \cong \triangle RUT$ por la propiedad ALA.

Auto-revisión 3

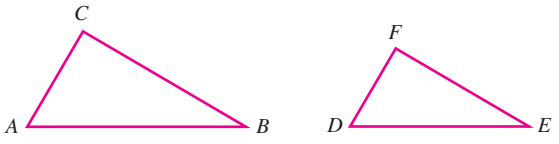
¿Los triángulos en la siguiente figura son congruentes? Explique por qué sí o por qué no.



Ahora intente **Problema 37**

3 Determinar si dos triángulos son semejantes

Se ha visto que los triángulos congruentes tienen la misma forma y tamaño. Los **triángulos semejantes** tienen la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño. Es decir, un triángulo es un modelo a escala exacto del otro triángulo. Si los triángulos en la figura abajo son semejantes, se puede escribir $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (se lee el símbolo $\sim$ como "es semejante a").



Consejo útil Observe que los triángulos congruentes siempre son semejantes, pero los triángulos semejantes no siempre son congruentes.

La definición formal de los triángulos semejantes requiere que se establezca una correspondencia entre los vértices de los triángulos. La definición también involucra la palabra *proporcional*.

Recuerde que una **proporción** enuncia de manera matemática que dos razones (fracciones) son iguales. Un ejemplo de una proporción es

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$$

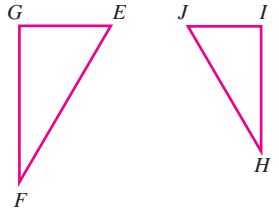
En este caso se dice que $\frac{1}{2}$ y $\frac{4}{8}$ son *proporcionales*.

Triángulos semejantes

Dos triángulos son semejantes si y sólo si sus vértices pueden relacionarse de tal manera que los ángulos correspondientes sean congruentes y las longitudes de los lados correspondientes sean proporcionales.

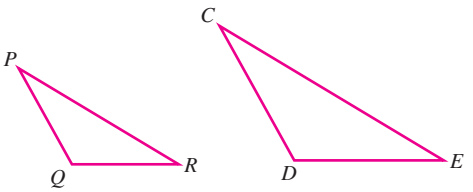
Auto-revisión 4

Si $\triangle GEF \sim \triangle IJH$, nombre los ángulos congruentes y los lados que son proporcionales.



Ahora intente **Problema 39**

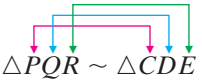
EJEMPLO 4 Refiérase a la figura abajo. Si $\triangle PQR \sim \triangle CDE$, nombre los ángulos congruentes y los lados que son proporcionales.



Estrategia Se establecerá la correspondencia entre los vértices de $\triangle PQR$ y los vértices de $\triangle CDE$.

POR QUÉ Esto, a su vez, establecerá una correspondencia entre los ángulos correspondientes congruentes y los lados proporcionales de los triángulos.

Solución Cuando se escribe $\triangle PQR \sim \triangle CDE$, se establece una correspondencia entre los vértices de los triángulos.



Dado que los triángulos son semejantes, los ángulos correspondientes son congruentes:

$$\angle P \cong \angle C \qquad \angle Q \cong \angle D \qquad \angle R \cong \angle E$$

Las longitudes de los lados correspondientes son proporcionales. Para simplificar la notación, se hará que $PQ = \text{m}(\overline{PQ})$, $CD = \text{m}(\overline{CD})$, $QR = \text{m}(\overline{QR})$, etc.

$$\frac{PQ}{CD} = \frac{QR}{DE} \qquad \frac{QR}{DE} = \frac{PR}{CE} \qquad \frac{PQ}{CD} = \frac{PR}{CE}$$

Escrita de una manera compacta, se tiene

$$\frac{PQ}{CD} = \frac{QR}{DE} = \frac{PR}{CE}$$

Propiedad de los triángulos semejantes

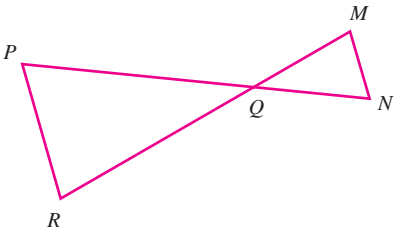
Si dos triángulos son semejantes, todos los pares de lados correspondientes están en proporción.

Es posible concluir que dos triángulos son semejantes sin tener que mostrar que los tres pares de ángulos correspondientes son congruentes y que las longitudes de los tres pares de lados correspondientes son proporcionales.

Teorema de semejanza AAA

Si los ángulos de un triángulo son congruentes a los ángulos correspondientes de otro triángulo, los triángulos son semejantes.

EJEMPLO 5 En la figura a la derecha, $\overline{PR} \parallel \overline{MN}$. ¿$\triangle PQR$ y $\triangle NQM$ son triángulos semejantes?



Estrategia Se mostrará que los ángulos de un triángulo son congruentes con los ángulos correspondientes de otro triángulo.

POR QUÉ Entonces se sabe que los dos triángulos son semejantes por la propiedad AAA.

Solución Dado que los ángulos verticales son congruentes,

$\angle PQR \cong \angle NQM$ Este es un par de ángulos correspondientes congruentes.

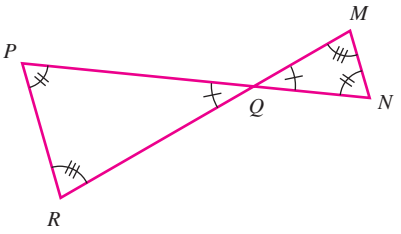
En la figura, se puede ver a $\overleftrightarrow{PN}$ como una transversal que corta los segmentos de recta paralelos $\overline{PR}$ y $\overline{MN}$. Dado que los ángulos alternos internos son entonces congruentes, se tiene:

$\angle RPQ \cong \angle MNQ$ Este es un segundo par de ángulos correspondientes congruentes.

Además, se puede ver a $\overleftrightarrow{RM}$ como una transversal que corta los segmentos de recta paralelos $\overline{PR}$ y $\overline{MN}$. Dado que los ángulos alternos internos son entonces congruentes, se tiene:

$\angle QRP \cong \angle QMN$ Este es un tercer par de ángulos correspondientes congruentes.

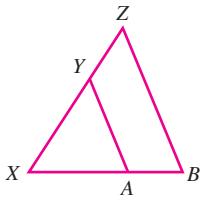
Estas observaciones se resumen en la figura a la derecha. Se observa que los ángulos correspondientes de $\triangle PQR$ son congruentes con los ángulos correspondientes de $\triangle NQM$. Por el teorema de semejanza AAA, se puede concluir que



$\triangle PQR \sim \triangle NQM$

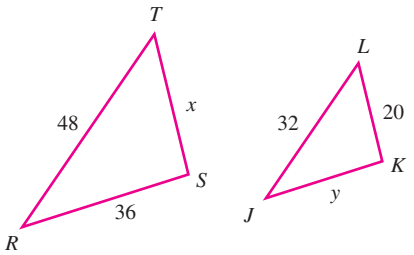
Auto-revisión 5

En la figura abajo, $\overline{YA} \parallel \overline{ZB}$. ¿$\triangle XYA$ y $\triangle XZB$ son triángulos semejantes?



Ahora intente **Problemas 41 y 43**

EJEMPLO 6 En la figura abajo, $\triangle RST \sim \triangle JKL$. Encuentre: **a.** x **b.** y



Estrategia Para encontrar x, se escribirá una proporción de los lados correspondientes de tal manera que x sea la única incógnita. Después se resolverá la proporción para x. Se utilizará un método similar para encontrar y.

POR QUÉ Dado que $\triangle RST \sim \triangle JKL$, se sabe que las longitudes de los lados correspondientes de $\triangle RST$ y $\triangle JKL$ son proporcionales.

Solución

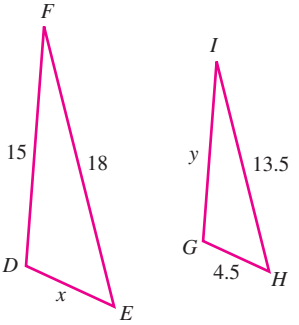
a. Cuando se escribe $\triangle RST \sim \triangle JKL$, se establece una correspondencia entre los vértices de los dos triángulos.

$\triangle RST \sim \triangle JKL$

Auto-revisión 6

En la figura abajo, $\triangle DEF \sim \triangle GHI$. Encuentre:

a. x **b.** y



Ahora intente **Problema 53**

Las longitudes de los lados correspondientes de estos triángulos semejantes son proporcionales.

$$\frac{RT}{JL} = \frac{ST}{KL}$$ Cada fracción es una razón de la longitud de un lado de $\triangle RST$ con la longitud de su lado correspondiente de $\triangle JKL$.

$$\frac{48}{32} = \frac{x}{20}$$ Sustituya: $RT = 48$, $JL = 32$, $ST = x$, y $KL = 20$.

$$48(20) = 32x$$ Encuentre cada producto cruzado e iguálelos.

$$960 = 32x$$ Realice la multiplicación.

$$30 = x$$ Para despejar x, deshaga la multiplicación por 32 dividiendo ambos lados entre 32.

$$\begin{array}{r} 48 \\ \times 20 \\ \hline 960 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 30 \\ 32\overline{)960} \\ -96 \\ \hline 00 \\ -00 \\ \hline 0 \end{array}$$

Por tanto, x es de 30.

b. Para encontrar y, se escribe una proporción de las longitudes de los lados correspondientes de tal manera que y sea la única incógnita.

$$\frac{RT}{JL} = \frac{RS}{JK}$$

$$\frac{48}{32} = \frac{36}{y}$$ Sustituya: $RT = 48$, $JL = 32$, $RS = 36$, y $JK = y$.

$$48y = 32(36)$$ Encuentre cada producto cruzado e iguálelos.

$$48y = 1{,}152$$ Realice la multiplicación.

$$y = 24$$ Para despejar y, deshaga la multiplicación por 48 dividiendo ambos lados entre 48.

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times 32 \\ \hline 72 \\ 1080 \\ \hline 1152 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 24 \\ 48\overline{)1{,}152} \\ -96 \\ \hline 192 \\ -192 \\ \hline 0 \end{array}$$

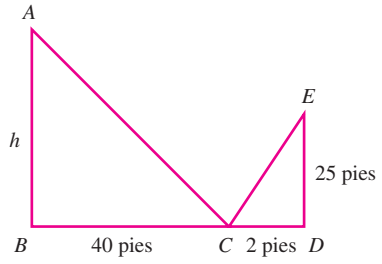
Por tanto, y es de 24.

4 Usar triángulos semejantes para encontrar longitudes desconocidas en problemas de aplicación

Pueden utilizarse triángulos semejantes y proporciones para encontrar longitudes que por lo regular serían difíciles de medir. Por ejemplo, se pueden utilizar las propiedades reflectantes de un espejo para calcular la altura de un asta bandera mientras se permanece en el suelo.

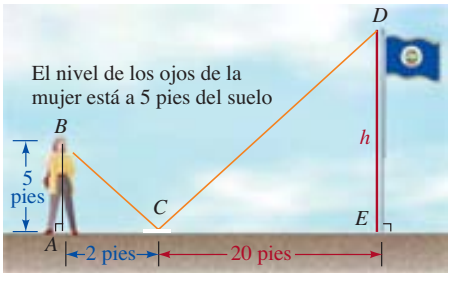
Auto-revisión 7

En la figura abajo, $\triangle ABC \sim \triangle EDC$. Encuentre h.



Ahora intente **Problema 85**

EJEMPLO 7 Para determinar la altura de un asta bandera, una mujer camina a un punto a 20 pies de su base. Después toma un espejo de su bolso, lo coloca en el suelo y camina otros 2 pies, donde ella puede observar la parte superior del asta reflejada en el espejo. Encuentre la altura del asta.



Estrategia Se mostrará que $\triangle ABC \sim \triangle EDC$.

POR QUÉ Entonces se puede escribir una proporción de los lados correspondientes de tal manera que h sea la única incógnita y se puede resolver para h la proporción.

Solución Para mostrar que $\triangle ABC \sim \triangle EDC$, se comienza aplicando un hecho importante sobre los espejos. Cuando un haz de luz incide sobre un espejo, es reflejado al mismo ángulo en el que incide sobre el espejo. Por tanto, $\angle BCA \cong \angle DCE$.

Además, $\angle A \cong \angle E$ debido a que la mujer y el asta bandera son perpendiculares al suelo. Por último, si dos pares de ángulos correspondientes son congruentes, se tiene que el tercer par de ángulos correspondientes también son congruentes: $\angle B \cong \angle D$. Por el teorema de semejanza AAA, se concluye que $\triangle ABC \sim \triangle EDC$.

Dado que los triángulos son semejantes, las longitudes de sus lados correspondientes están en proporción. Si h representa la altura del asta bandera, se puede encontrar h resolviendo la siguiente proporción.

Altura del asta bandera → $\frac{h}{5} = \frac{20}{2}$ ← Distancia del asta bandera al espejo
Altura de la mujer → ← Distancia de la mujer al espejo

$2h = 5(20)$ Encuentre cada producto cruzado e iguálelos.
$2h = 100$ Realice la multiplicación.
$h = 50$ Para despejar h, divida ambos lados entre 2.

El esta bandera es de 50 pies de alto.

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. a. $\angle A \cong \angle E, \angle B \cong \angle D, \angle C \cong \angle F, \overline{AB} \cong \overline{ED}, \overline{BC} \cong \overline{DF}, \overline{CA} \cong \overline{FE}$ **b.** 20° **c.** 3 pies **2.** sí, por la propiedad LAL **3.** sí, por la propiedad LLL **4.** $\angle G \cong \angle I, \angle E \cong \angle J, \angle F \cong \angle H; \frac{EG}{JI} = \frac{GF}{IH}, \frac{GF}{IH} = \frac{FE}{HJ}, \frac{EG}{JI} = \frac{FE}{HJ}$ **5.** sí, por el teorema de semejanza AAA: $\angle X \cong \angle X, \angle XYA \cong \angle XZB, \angle XAY \cong \angle XBZ$ **6. a.** 6 **b.** 11.25 **7.** 500 pies

SECCIÓN 9.5 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Complete los espacios.

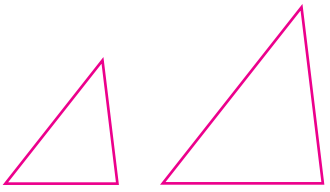
1. Los triángulos _____ tienen el mismo tamaño y la misma forma.
2. Cuando se relacionan los vértices de $\triangle ABC$ con los vértices de $\triangle DEF$, como se muestra abajo, a esta relación de puntos se le llama _____.

$A \leftrightarrow D \qquad B \leftrightarrow E \qquad C \leftrightarrow F$

3. Se dice que dos ángulos o dos segmentos de recta con la misma medida son _____.
4. Las _____ correspondientes de triángulos congruentes son congruentes.
5. Si dos triángulos son _____, tienen la misma forma pero no necesariamente el mismo tamaño.
6. Al enunciado matemático de que dos razones (fracciones) son iguales, como $\frac{x}{18} = \frac{4}{9}$, se le llama _____.

CONCEPTOS

7. Refiérase a los triángulos abajo.

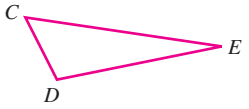


a. ¿Estos triángulos parecen ser congruentes? Explique por qué sí o por qué no.

b. ¿Estos triángulos parecen ser semejantes? Explique por qué sí o por qué no.

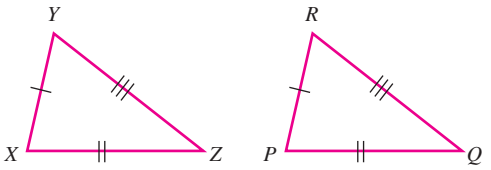
8. a. Dibuje un triángulo que sea congruente con $\triangle CDE$ mostrado abajo. Etiquételo como $\triangle ABC$.

b. Dibuje un triángulo que sea semejante a, pero no congruente con, $\triangle CDE$. Etiquételo como $\triangle MNO$.

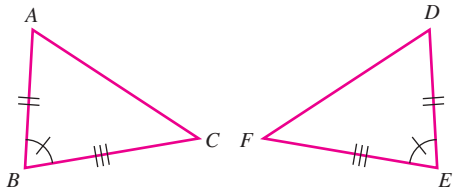


Complete los espacios.

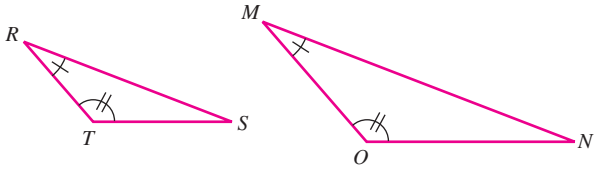
9. $\triangle XYZ \cong \triangle$ _____



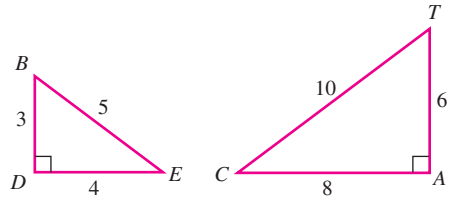
10. $\triangle$ _____ $\cong \triangle DEF$



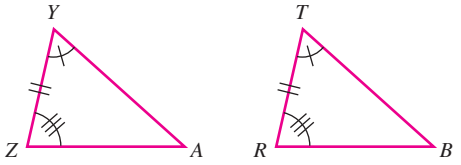
11. $\triangle RST \sim \triangle$ _____



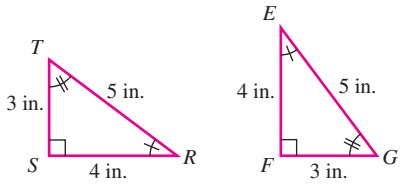
12. $\triangle$ _____ $\sim \triangle TAC$



13. Nombre las seis partes correspondientes de los triángulos congruentes mostrados abajo.



14. Nombre las seis partes correspondientes de los triángulos congruentes mostrados abajo.



Complete los espacios.

15. Dos triángulos son _____ si y sólo si sus vértices pueden relacionarse de tal manera que los lados correspondientes y los ángulos correspondientes sean congruentes.

16. Propiedad LLL: Si tres _____ de un triángulo son congruentes a tres _____ de un segundo triángulo, los triángulos son congruentes.

17. Propiedad LAL: Si dos lados y el _____ entre ellos en un triángulo son congruentes, respectivamente, con los dos lados y el _____ entre ellos en un segundo triángulo, los triángulos son congruentes.

18. Propiedad ALA: Si dos ángulos y el _____ entre ellos en un triángulo son congruentes, respectivamente, con dos ángulos y el _____ entre ellos en un segundo triángulo, los triángulos son congruentes.

Resuelva cada proporción.

19. $\dfrac{x}{15} = \dfrac{20}{3}$

20. $\dfrac{5}{8} = \dfrac{35}{x}$

21. $\dfrac{h}{2.6} = \dfrac{27}{13}$

22. $\dfrac{11.2}{4} = \dfrac{h}{6}$

Complete los espacios.

23. Dos triángulos son semejantes si y sólo si sus vértices pueden relacionarse de tal manera que los ángulos correspondientes sean congruentes y las longitudes de los lados correspondientes sean _____.

24. Si los ángulos de un triángulo son congruentes con los ángulos correspondientes de otro triángulo, los triángulos son _____.

25. Los triángulos congruentes siempre son semejantes, pero los triángulos semejantes no siempre son _____.

26. Para ciertos problemas de aplicación, pueden utilizarse triángulos semejantes y _____ para encontrar longitudes que por lo regular serían difíciles de medir.

NOTACIÓN

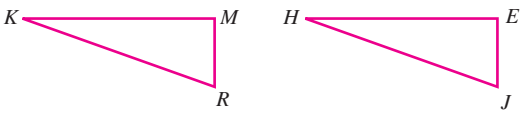
Complete los espacios.

27. El símbolo $\cong$ se lee como "____ _____ ____".

28. El símbolo $\sim$ se lee como "____ _____ ____".

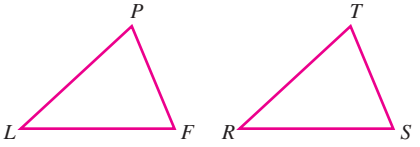
29. Use marcas gruesas para mostrar las partes congruentes de los triángulos mostrados abajo.

$\angle K \cong \angle H \qquad \overline{KR} \cong \overline{HJ} \qquad \angle M \cong \angle E$



30. Use marcas gruesas para mostrar las partes congruentes de los triángulos mostrados abajo.

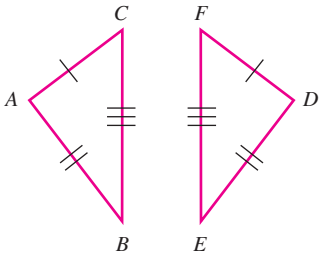
$\angle P \cong \angle T \qquad \overline{LP} \cong \overline{RT} \qquad \overline{FP} \cong \overline{ST}$



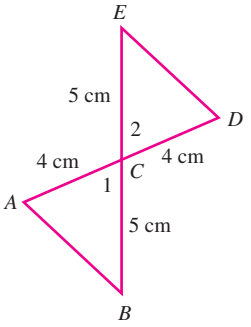
PRÁCTICA GUIADA

Nombre las seis partes correspondientes de los triángulos congruentes. **Vea el Objetivo 1.**

31. $\overline{AC} \cong$ ___
$\overline{DE} \cong$ ___
$\overline{BC} \cong$ ___
$\angle A \cong$ ___
$\angle E \cong$ ___
$\angle F \cong$ ___



32. $\overline{AB} \cong$ ___
$\overline{EC} \cong$ ___
$\overline{AC} \cong$ ___
$\angle D \cong$ ___
$\angle B \cong$ ___
$\angle 1 \cong$ ___



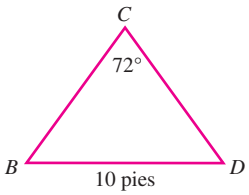
33. Refiérase a la figura abajo, donde $\triangle BCD \cong \triangle MNO$.

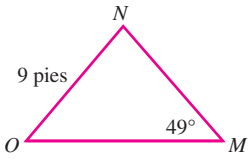
a. Nombre las seis partes correspondientes congruentes de los triángulos. **Vea el Ejemplo 1.**

b. Encuentre m($\angle N$).

c. Encuentre m($\overline{MO}$).

d. Encuentre m($\overline{CD}$).





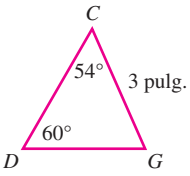
34. Refiérase a la figura abajo, donde $\triangle DCG \cong \triangle RST$.

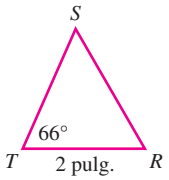
a. Nombre las seis partes correspondientes congruentes de los triángulos. **Vea el Ejemplo 1.**

b. Encuentre m($\angle R$).

c. Encuentre m($\overline{DG}$).

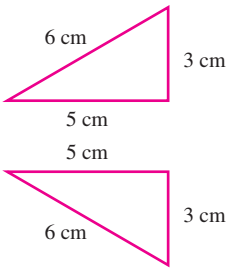
d. Encuentre m($\overline{ST}$).



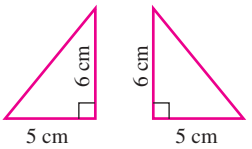


Determine si cada par de triángulos es congruente. Si lo son, indique por qué. **Vea los Ejemplos 2 y 3.**

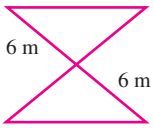
35.



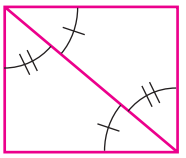
36.



37.



38.



39. Refiérase a los triángulos semejantes mostrados abajo. **Vea el Ejemplo 4.**

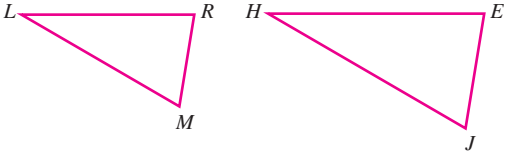
a. Nombre los 3 pares de ángulos congruentes.

b. Complete cada proporción.

$$\frac{LM}{HJ} = \frac{\square}{JE} \qquad \frac{MR}{JE} = \frac{\square}{HE} \qquad \frac{\square}{HJ} = \frac{LR}{HE}$$

c. Se puede escribir la respuesta para el inciso *b* en una forma más compacta:

$$\frac{LM}{\square} = \frac{MR}{\square} = \frac{\square}{HE}$$



40. Refiérase a los triángulos semejantes mostrados abajo. **Vea el Ejemplo 4.**

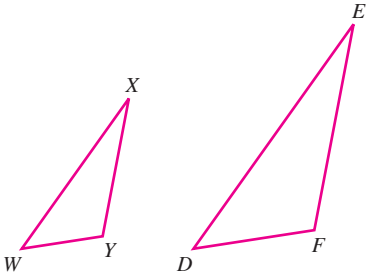
a. Nombre los 3 pares de ángulos congruentes.

b. Complete cada proporción.

$$\frac{WY}{DF} = \frac{\square}{FE} \qquad \frac{WX}{\square} = \frac{YX}{FE} \qquad \frac{\square}{EF} = \frac{WY}{DF}$$

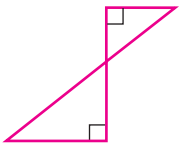
c. Se puede escribir la respuesta para el inciso *b* en una forma más compacta:

$$\frac{\square}{DF} = \frac{YX}{\square} = \frac{WX}{\square}$$

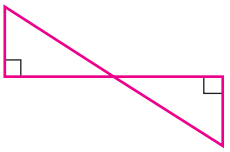


Indique si los triángulos son semejantes. Vea el Ejemplo 5.

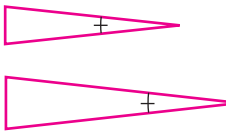
41.



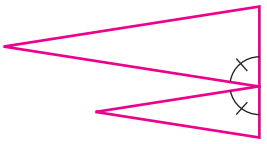
42.



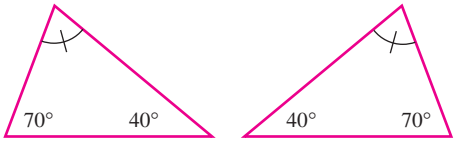
43.



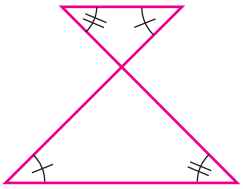
44.



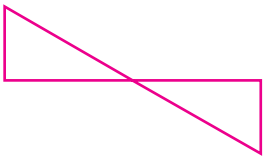
45.



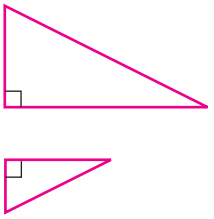
46.



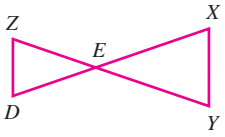
47.



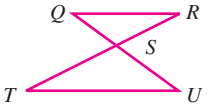
48.



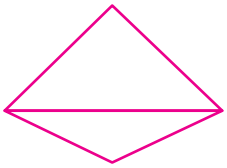
49. $\overline{XY} \parallel \overline{ZD}$



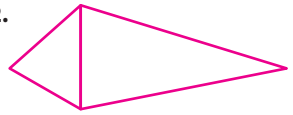
50. $\overline{QR} \parallel \overline{TU}$



51.

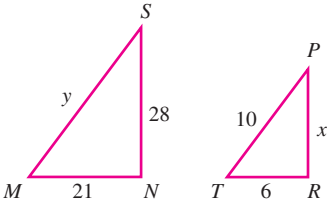


52.

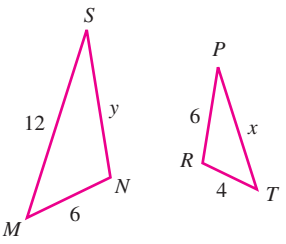


En los Problemas 53 y 54, $\triangle MSN \sim \triangle TPR$. ***Encuentre*** x ***y*** y. Vea el Ejemplo 6.

53.

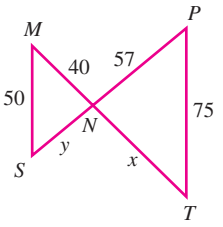


54.

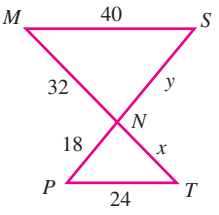


En los Problemas 55 y 56, $\triangle MSN \sim \triangle TPN$. ***Encuentre*** x ***y*** y. Vea el Ejemplo 6.

55.



56.



INTÉNTELO

Indique si cada enunciado es verdadero. Si un enunciado es falso, indique por qué.

57. Si tres lados de un triángulo son de la misma longitud que los tres lados correspondientes de un segundo triángulo, los triángulos son congruentes.

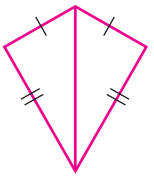
58. Si dos lados de un triángulo son de la misma longitud que dos lados de un segundo triángulo, los triángulos son congruentes.

59. Si dos lados y un ángulo de un triángulo son congruentes, respectivamente, con dos lados y un ángulo de un segundo triángulo, los triángulos son congruentes.

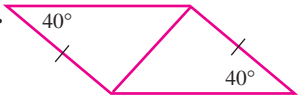
60. Si dos ángulos y el lado entre ellos en un triángulo son congruentes, respectivamente, con dos ángulos y el lado entre ellos en un segundo triángulo, los triángulos son congruentes.

Determine si cada par de triángulos es congruente. Si lo son, indique por qué.

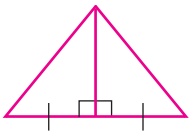
61.



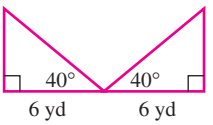
62.



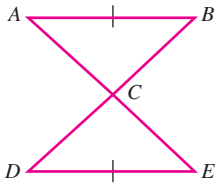
63.



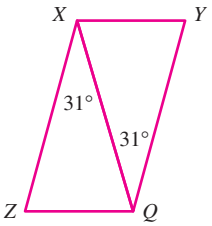
64.



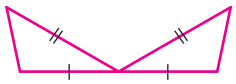
65. $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$



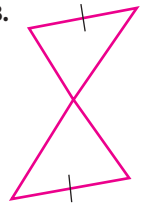
66. $\overline{XY} \parallel \overline{ZQ}$



67.

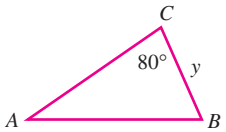


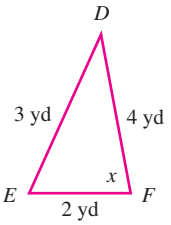
68.



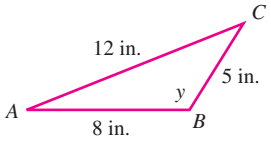
En los Problemas 69 y 70, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$***. Encuentre*** x ***y*** y***.***

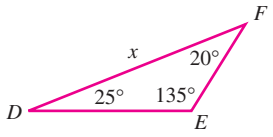
69.





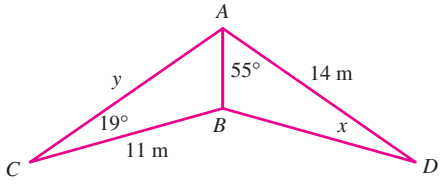
70.



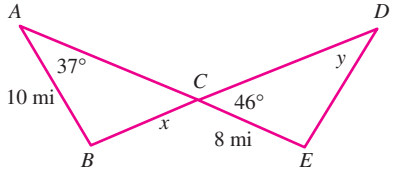


En los Problemas 71 y 72, encuentre x ***y*** y***.***

71. $\triangle ABC \cong \triangle ABD$

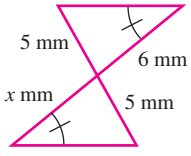


72. $\triangle ABC \cong \triangle DEC$

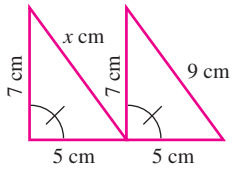


En los Problemas 73–76, encuentre x***.***

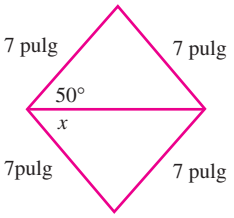
73.



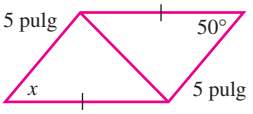
74.



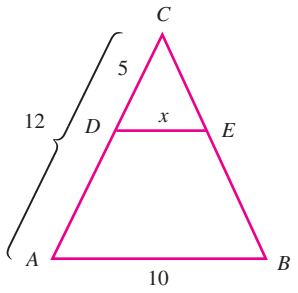
75.



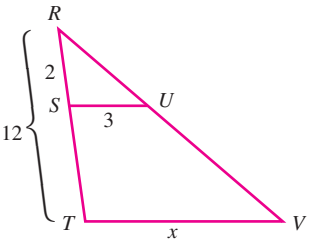
76.



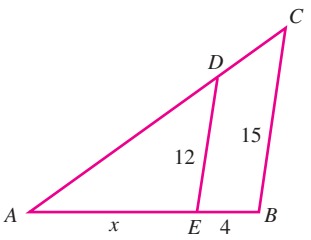
77. Si $\overline{DE}$ en la figura abajo es paralelo a $\overline{AB}$, $\triangle ABC$ será semejante a $\triangle DEC$. Encuentre x.



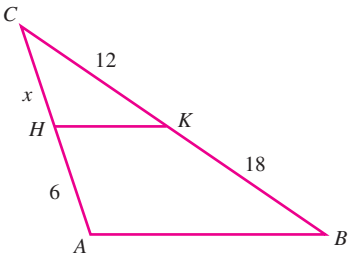
78. Si $\overline{SU}$ en la figura abajo es paralelo a $\overline{TV}$, $\triangle SRU$ será semejante a $\triangle TRV$. Encuentre x.



79. Si $\overline{DE}$ en la figura abajo es paralelo a $\overline{CB}$, $\triangle EAD$ será semejante a $\triangle BAC$. Encuentre x.

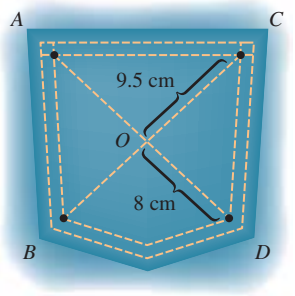


80. Si $\overline{HK}$ en la figura abajo es paralelo a $\overline{AB}$, $\triangle HCK$ será semejante a $\triangle ACB$. Encuentre x.

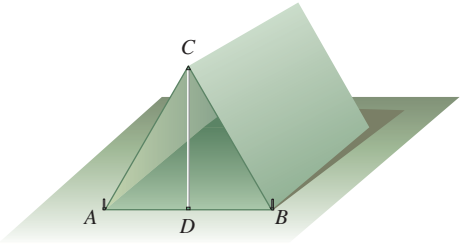


APLICACIONES

81. COSTURA Abajo se muestra el patrón que se cose en el bolsillo trasero de un par de jeans. Si $\triangle AOB \cong \triangle COD$, ¿qué tan largo es el hilvanado del punto A al punto D?



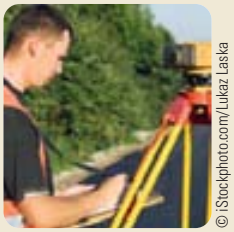
82. CAMPISMO La base del poste de una tienda se coloca en el punto medio entre la estaca en el punto A y la estaca en el punto B y es perpendicular al suelo, como se muestra abajo. Explique por qué $\triangle ACD \cong \triangle BCD$.



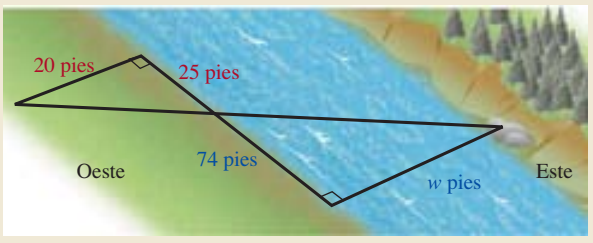
83. Una cuadrilla de topógrafos necesita encontrar el ancho del río mostrado abajo. Debido a una corriente peligrosa, deciden permanecer en el lado oeste del río y utilizar la geometría para encontrar su ancho. Su método es crear dos triángulos rectángulos semejantes en la tierra seca. Después dibujar y resolver una proporción para encontrar w. ¿Cuál es el ancho del río?

Carreras del campus

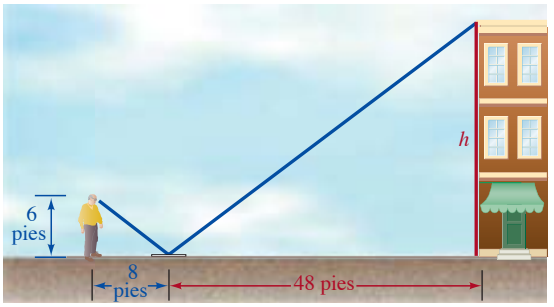
Topógrafo



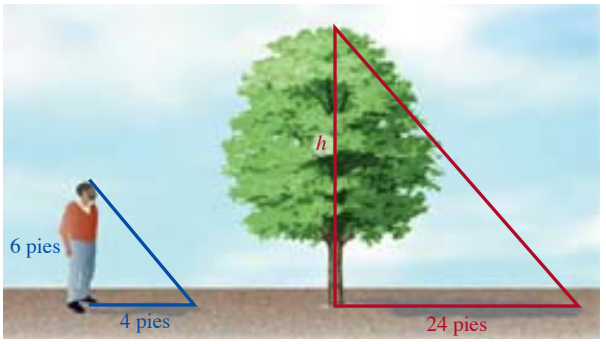
© iStockphoto.com/Lukaz Laska



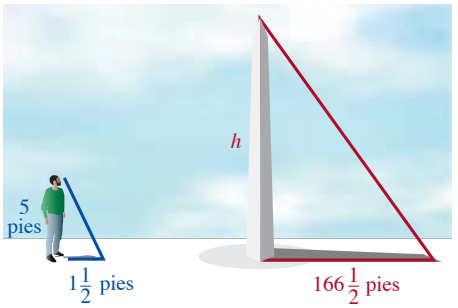
84. ALTURA DE UN EDIFICIO Un hombre coloca un espejo en el suelo y ve la reflexión en la parte superior de un edificio, como se muestra abajo. Encuentre la altura del edificio.



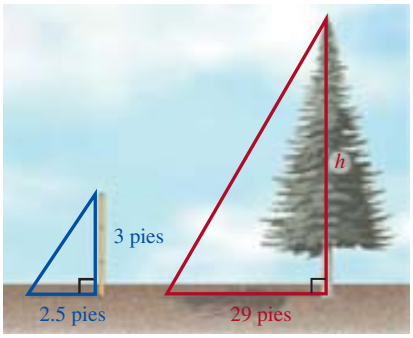
85. ALTURA DE UN ÁRBOL El árbol mostrado abajo proyecta una sombra de 24 pies de largo cuando un hombre de 6 pies de alto proyecta una sombra de 4 pies de largo. Encuentre la altura del árbol.



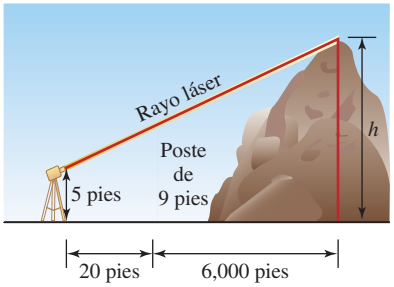
86. WASHINGTON, D.C. El Monumento a Washington proyecta una sombra de $166\frac{1}{2}$ pies al mismo tiempo que un turista de 5 pies de alto proyecta una sombra de $1\frac{1}{2}$ pies. Encuentre la altura del monumento.



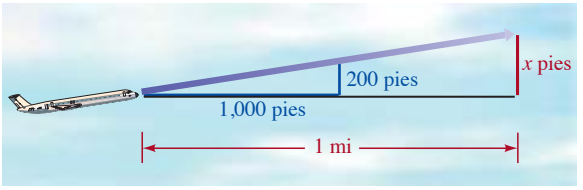
87. ALTURA DE UN ÁRBOL Un árbol proyecta una sombra de 29 pies al mismo tiempo que una vara para medir de una yarda vertical proyecta una sombra de 2.5 pies. Encuentre la altura del árbol.



88. GEOGRAFÍA El diagrama mostrado abajo muestra cómo se apuntaba un rayo láser sobre la parte superior de un poste a la parte superior de una montaña para determinar la elevación de la montaña. Encuentre h.



89. TRAYECTORIA DE VUELO Un avión asciende 200 pies a medida que vuela una distancia horizontal de 1,000 pies, como se muestra en la siguiente figura. ¿Cuánta altitud se gana a medida que vuela una distancia horizontal de 1 milla? (*Sugerencia:* 1 milla = 5,280 pies.)



REDACCIÓN

90. Indique si el enunciado es verdadero o falso. Explique su respuesta.

a. Los triángulos congruentes siempre son semejantes.

b. Los triángulos semejantes siempre son congruentes.

91. Explique por qué no existe una propiedad LLA para triángulos congruentes.

REPASO

Encuentre el mcm de los números proporcionados.

92. 16, 20 **93.** 21, 27

Encuentre el MFC de los números proporcionados.

94. 18, 96 **95.** 63, 84

SECCIÓN 9.6
Cuadriláteros y otros polígonos

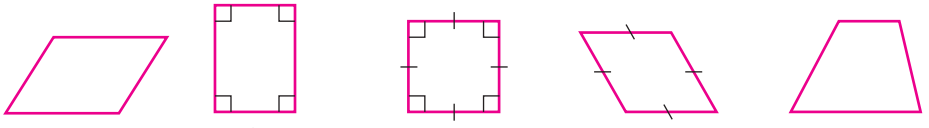
Objetivos

1. Clasificar cuadriláteros.
2. Usar las propiedades de los rectángulos para encontrar medidas de ángulos y longitudes de lados desconocidas.
3. Encontrar medidas de ángulos desconocidas de trapezoides.
4. Usar la fórmula para la suma de las medidas de los ángulos de un polígono.

Recuerde a partir de la Sección 9.3 que un polígono es una figura geométrica cerrada con al menos tres segmentos de recta para sus lados. En esta sección se enfocará en los polígonos con cuatro lados, llamados *cuadriláteros*. Un tipo de cuadrilátero es el *cuadrado*. Los juegos de mesa para Monopolio y Scrabble tienen una forma cuadrada. Otro tipo de cuadrilátero es el *rectángulo*. La mayoría de los marcos para fotografías y varios espejos son rectangulares. Las navajas multiusos y las aletas para nadar tienen formas que son ejemplos de un tercer tipo de cuadrilátero, llamado *trapezoide*.

1 Clasificar cuadriláteros

Un **cuadrilátero** es un polígono con cuatro lados. Abajo se muestran algunos cuadriláteros.



Paralelogramo (Lados opuestos paralelos)

Rectángulo (Paralelogramo con cuatro ángulos rectos)

Cuadrado (Rectángulo con lados de igual longitud)

Rombo (Paralelogramo con lados de igual longitud)

Trapezoide (Exactamente dos lados paralelos)

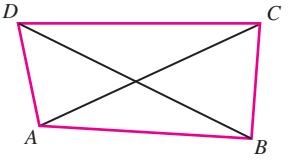
© iStockphoto.com/Tomasz Pietryszek

Se pueden utilizar letras mayúsculas para etiquetar los vértices de un cuadrilátero para nombrarlo. Por ejemplo, cuando se refiere al cuadrilátero mostrado a la derecha, con los vértices A, B, C y D, se puede utilizar la notación cuadrilátero $ABCD$.

Cuadrilátero *ABCD*

El lenguaje de las matemáticas Cuando se nombra un cuadrilátero (o cualquier otro polígono), se puede comenzar con cualquier vértice. Después se mueve alrededor de la figura en sentido de las manecillas del reloj (o en sentido contrario a las manecillas del reloj) a medida que se listan los vértices restantes. Algunas otras formas de nombrar el cuadrilátero arriba son cuadrilátero $ADCB$, cuadrilátero $CDAB$ y cuadrilátero $DABC$. No sería aceptable nombrarlo como cuadrilátero $ACDB$, debido a que los vértices no estarían listados en sentido de las manecillas del reloj (o en sentido contrario a las manecillas del reloj).

A un segmento que une dos vértices no consecutivos de un polígono se le llama **diagonal** del polígono. El cuadrilátero $ABCD$ que se muestra abajo tiene dos diagonales, $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.



2 Usar las propiedades de los rectángulos para encontrar medidas de ángulos y longitudes de lados desconocidas

Recuerde que un **rectángulo** es un cuadrilátero con cuatro ángulos rectos. El rectángulo es probablemente la más común y reconocible de todas las figuras geométricas. Por ejemplo, la mayoría de las puertas y ventanas son de forma rectangular. Los límites de un campo de futbol soccer y de las canchas de basquetbol son rectangulares. Incluso los billetes, como los de \$1, \$5 y \$20, tienen la forma de un rectángulo. Los rectángulos tienen varias características importantes.

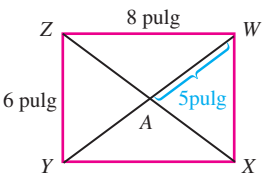
Propiedades de los rectángulos

En cualquier rectángulo:

1. Los cuatro ángulos son ángulos rectos.
2. Los lados opuestos son paralelos.
3. Los lados opuestos tienen la misma longitud.
4. Las diagonales tienen la misma longitud.
5. Las diagonales se intersecan en sus puntos medios.

EJEMPLO 1 En la figura, el cuadrilátero $WXYZ$ es un rectángulo. Encuentre cada medida:

a. $m(\angle YXW)$ **b.** $m(\overline{XY})$ **c.** $m(\overline{WY})$ **d.** $m(\overline{XZ})$



Estrategia Se utilizarán las propiedades de los rectángulos para encontrar las medidas de ángulo desconocidas y las medidas de los segmentos de línea desconocidas.

POR QUÉ El cuadrilátero $WXYZ$ es un rectángulo.

Solución

a. En cualquier rectángulo, los cuatro ángulos son rectos. Por tanto, $\angle YXW$ es un ángulo recto y $m(\angle YXW) = 90°$.

b. $\overline{XY}$ y $\overline{WZ}$ son lados opuestos del rectángulo, por lo que tienen la misma longitud. Dado que la longitud de $\overline{WZ}$ es de 8 pulgadas, $m(\overline{XY})$ también es de 8 pulgadas.

c. $\overline{WY}$ y $\overline{ZX}$ son diagonales del rectángulo y se intersecan en sus puntos medios. Esto significa que el punto A es el punto medio de $\overline{WY}$. Dado que la longitud de $\overline{WA}$ es 5 pulgadas, $m(\overline{WY})$ es de $2 \cdot 5$ pulgadas, o de 10 pulgadas.

d. Las diagonales de un rectángulo son de igual longitud. En el inciso c, se encontró que la longitud de $\overline{WY}$ es de 10 pulgadas. Por tanto, $m(\overline{XZ})$ también es de 10 pulgadas.

Auto-revisión 1

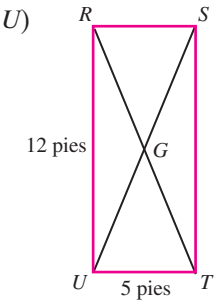
En el rectángulo $RSTU$ mostrado abajo, la longitud de $\overline{RT}$ es de 13 pies. Encuentre cada medida:

a. $m(\angle SRU)$

b. $m(\overline{ST})$

c. $m(\overline{TG})$

d. $m(\overline{SG})$



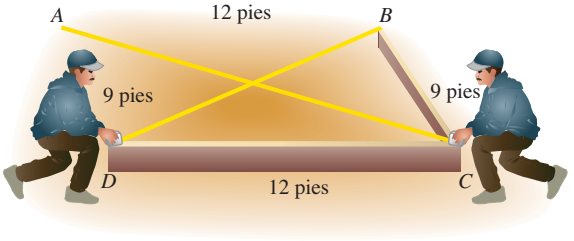
Ahora intente **Problema 27**

Se ha visto que si un cuadrilátero tiene cuatro ángulos rectos, es un rectángulo. Los siguientes enunciados establecen algunas condiciones que debe cumplir un paralelogramo para asegurar que es un rectángulo.

Paralelogramos que son rectángulos

1. Si un paralelogramo tiene un ángulo recto, entonces el paralelogramo es un rectángulo.
2. Si las diagonales de un paralelogramo son congruentes, entonces el paralelogramo es un rectángulo.

EJEMPLO 2 ***Construcción*** Un carpintero desea construir un cobertizo con una base de 9 pies por 12 pies. ¿Cómo puede asegurarse que la base tiene cuatro esquinas con ángulos rectos?



Estrategia El carpintero debe encontrar las longitudes de las diagonales de la base.

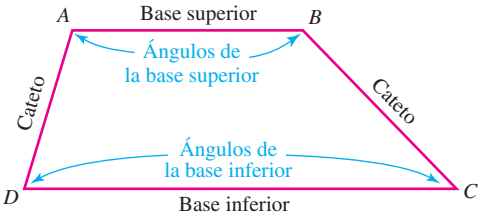
POR QUÉ Si las diagonales son congruentes, entonces la base es de forma rectangular y las esquinas son ángulos rectos.

Solución La base de cuatro lados, la cual se etiquetará como el paralelogramo $ABCD$, tiene lados opuestos de igual longitud. El carpintero puede utilizar una cinta para medir para encontrar las longitudes de las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$. Si estas diagonales son de igual longitud, la base será un rectángulo y tendrá ángulos rectos como sus cuatro esquinas. A este proceso se le refiere de manera común como "cuadrar una base". Los hacedores de marcos para fotografías emplean un proceso similar para asegurarse que sus marcos tienen esquinas de 90°.

Ahora intente **Problema 59**

3 Encontrar medidas de ángulos desconocidas de trapezoides

Un **trapezoide** es un cuadrilátero con exactamente dos lados paralelos. Para el trapezoide mostrado en la siguiente página, a los lados paralelos $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ se les llama **bases.** Para distinguir las dos bases, se referirá a $\overline{AB}$ como la **base superior** y a $\overline{DC}$ como la **base inferior.** A los ángulos en cualquier lado de la base superior se les llama **ángulos base superiores** y a los ángulos en cualquier lado de la base inferior se les llama **ángulos base inferiores.** A los lados no paralelos se les llama **catetos.**

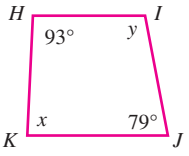


Trapezoide

En la figura arriba, se puede ver a $\overleftrightarrow{AD}$ como una transversal que corta las rectas paralelas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{DC}$. Dado que $\angle A$ y $\angle D$ son ángulos interiores en el mismo lado de una transversal, son suplementarios. De manera similar, $\overleftrightarrow{BC}$ es una transversal que corta las rectas paralelas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{DC}$. Dado que $\angle B$ y $\angle C$ son ángulos interiores en el mismo lado de una transversal, también son suplementarios. Estas observaciones conducen a la conclusión de que *siempre hay dos pares de ángulos suplementarios en cualquier trapezoide.*

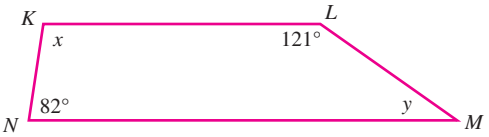
Auto-revisión 3

Refiérase al trapezoide $HIJK$ abajo, con $\overline{HI} \parallel \overline{KJ}$. Encuentre x y y.



Ahora intente **Problema 29**

EJEMPLO 3 Refiérase al trapezoide $KLMN$ abajo, con $\overline{KL} \parallel \overline{NM}$. Encuentre x y y.



Estrategia Se utilizará la propiedad de los ángulos interiores dos veces para escribir dos ecuaciones que modelen de manera matemática la situación.

POR QUÉ Entonces se pueden resolver las ecuaciones para encontrar x y y.

Solución $\angle K$ y $\angle N$ son ángulos interiores en el mismo lado de la transversal $\overleftrightarrow{KN}$ que corta los segmentos de recta paralelos $\overline{KL}$ y $\overline{NM}$. De manera similar $\angle L$ y $\angle M$ son ángulos interiores en el mismo lado de la transversal $\overleftrightarrow{LM}$ que corta los segmentos de recta paralelos $\overline{KL}$ y $\overline{NM}$. Recuerde que si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, los ángulos interiores en el mismo lado de la transversal son suplementarios. Se puede utilizar este hecho dos veces—una vez para encontrar x y una segunda vez para encontrar y.

$$\mathbf{m}(\angle K) + \mathbf{m}(\angle N) = 180^\circ$$ La suma de las medidas de los ángulos suplementarios es de 180°.

$$x + 82^\circ = 180^\circ$$ Sustituya x para $m(\angle K)$ y 82° para $m(\angle N)$.

$$x = 98^\circ$$ Para despejar x, reste 82° de ambos lados.

$$\begin{array}{r} {}^{17}\not{1}{}^{10}\not{8}\not{0} \\ -\,82 \\ \hline 98 \end{array}$$

Por tanto, x es de 98°.

$$\mathbf{m}(\angle L) + \mathbf{m}(\angle M) = 180^\circ$$ La suma de las medidas de los ángulos suplementarios es de 180°.

$$121^\circ + y = 180^\circ$$ Sustituya 121° para $m(\angle L)$ y y para $m(\angle M)$.

$$y = 59^\circ$$ Para despejar y, reste 121° de ambos lados.

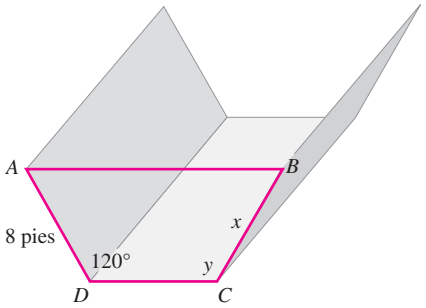
$$\begin{array}{r} {}^{7}\not{1}{}^{10}\not{8}\not{0} \\ -\,121 \\ \hline 59 \end{array}$$

Por tanto, y es de 59°.

Si los lados no paralelos de un trapezoide son de la misma longitud, se le llama **trapezoide isósceles.** La figura a la derecha muestra el trapezoide isósceles $DEFG$ con $\overline{DG} \cong \overline{EF}$. En un trapezoide isósceles, *ambos pares de ángulos base son congruentes.* En la figura, $\angle D \cong \angle E$ y $\angle G \cong \angle F$.

Trapezoide isósceles

EJEMPLO 4 ***Paisajismo*** La sección transversal de una zanja de drenaje mostrada abajo es un trapezoide isósceles con $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$. Encuentre x y y.



Estrategia Se compararán los lados no paralelos y se comparará un par de ángulos base del trapezoide para encontrar cada incógnita.

POR QUÉ Los lados no paralelos de un trapezoide isósceles tienen la misma longitud y ambos pares de ángulos base son congruentes.

Solución Dado que $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ son los lados no paralelos de un trapezoide isósceles, $m(\overline{AD})$ y $m(\overline{BC})$ son iguales y x es de 8 pies.

Dado que $\angle D$ y $\angle C$ son un par de ángulos base de un trapezoide isósceles, son congruentes y $m(\angle D) = m(\angle C)$. Por tanto, y es de 120°.

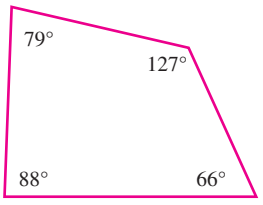
Auto-revisón 4

Refiérase al trapezoide isósceles mostrado abajo con $\overline{RS} \parallel \overline{UT}$. Encuentre x y y.

Ahora intente **Problema 31**

4 Usar la fórmula para la suma de las medidas de los ángulos de un polígono

En la figura mostrada abajo, se utilizó un transportador para encontrar la medida de cada ángulo del cuadrilátero. Cuando se suman las cuatro medidas, el resultado es de 360°.

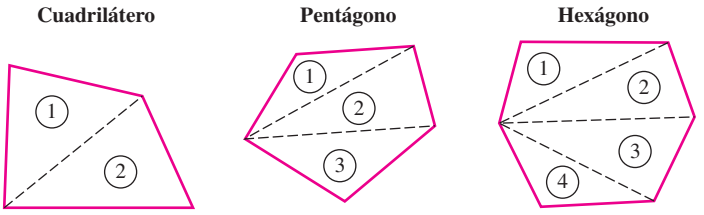


$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2\,3} \\ 88 \\ 79 \\ 127 \\ +\,66 \\ \hline 360 \end{array}$$

$88° + 79° + 127° + 66° = 360°$

Esto ilustra un hecho importante acerca de los cuadriláteros. La suma de las medidas de los ángulos de *cualquier* cuadrilátero es de 360°. Esto puede mostrarse utilizando el diagrama en la figura (a) en la siguiente página. En la figura, el cuadrilátero está dividido en dos triángulos. Dado que la suma de las medidas de los ángulos de cualquier triángulo es de 180°, la suma de las medidas de los ángulos del cuadrilátero es de $2 \cdot 180°$, o de 360°.

Puede utilizarse un método similar para encontrar la suma de las medidas de los ángulos de cualquier pentágono o hexágono. El pentágono en la figura (b) está dividido en tres triángulos. La suma de las medidas de los ángulos del pentágono es de $3 \cdot 180°$, o de 540°. El hexágono en la figura (c) está dividido en cuatro triángulos. La suma de las medidas de los ángulos del hexágono es de $4 \cdot 180°$, o de 720°. En general, un polígono con n lados puede dividirse en $n - 2$ triángulos. Por tanto, la suma de las medidas de los ángulos de un polígono puede encontrarse multiplicando 180° por $n - 2$.



$2 \cdot 180° = 360°$ (a)

$3 \cdot 180° = 540°$ (b)

$4 \cdot 180° = 720°$ (c)

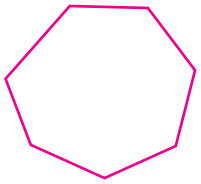
Suma de los ángulos de un polígono

La suma S, en grados, de las medidas de los ángulos de un polígono con n lados está dada por la fórmula

$$S = (n - 2)180°$$

Auto-revisión 5

Encuentre la suma de las medidas de los ángulos del polígono mostrado abajo.



Ahora intente **Problema 33**

EJEMPLO 5 Encuentre la suma de las medidas de los ángulos de un polígono con 13 lados.

Estrategia Se sustituirá el 13 para n en la fórmula $S = (n - 2)180°$ y se evaluará el lado derecho.

POR QUÉ La variable S representa la suma desconocida de las medidas de los ángulos del polígono.

Solution

$S = (n - 2)180°$ Esta es la fórmula para la suma de las medidas de los ángulos de un polígono.

$S = (13 - 2)180°$ Sustituya el 13 para n, el número de lados.

$= (11)180°$ Realice la resta dentro de los paréntesis.

$= 1{,}980°$ Realice la multiplicación.

$$\begin{array}{r} 180 \\ \times 11 \\ \hline 180 \\ 1800 \\ \hline 1{,}980 \end{array}$$

La suma de las medidas de los ángulos de un polígono con 13 lados es de 1,980°.

Auto-revisión 6

La suma de las medidas de los ángulos de un polígono es de 1,620°. Encuentre el número de lados que tiene el polígono.

Ahora intente **Problema 41**

EJEMPLO 6 La suma de las medidas de los ángulos de un polígono es de 1,080°. Encuentre el número de lados que tiene el polígono.

Estrategia Se sustituirá el 1,080° para S en la fórmula $S = (n - 2)180°$ y se resolverá para n.

POR QUÉ La variable n representa el número desconocido de lados del polígono.

Solución

$S = (n - 2)180°$ Esta es la fórmula para la suma de las medidas de los ángulos de un polígono.

$1{,}080° = (n - 2)180°$ Sustituya 1,080° para S, la suma de las medidas de los ángulos.

$1{,}080° = 180°n - 360°$ Distribuya la multiplicación por 180°.

$1{,}080° + 360° = 180°n - 360° + 360°$ Para despejar $180°n$, sume 360° a ambos lados.

$1{,}440° = 180°n$ Realice las sumas.

$\frac{1{,}440°}{180°} = \frac{180°n}{180°}$ Para despejar n, divida ambos lados entre 180°.

$8 = n$ Realice la división.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 1{,}080 \\ +\ 360 \\ \hline 1{,}440 \end{array} \qquad 180\overline{)1{,}440}\ 8,\ -1\,440,\ 0$$

El polígono tiene 8 lados. Es un octágono.

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. a. 90° **b.** 12 pies **c.** 6.5 pies **d.** 6.5 pies **3.** 87°, 101° **4.** 10 pulg, 58° **5.** 900° **6.** 11 lados

SECCIÓN 9.6 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Complete los espacios.

1. Un _____ es un polígono con cuatro lados.
2. Un _____ es un cuadrilátero con lados opuestos paralelos.
3. Un _____ es un cuadrilátero con cuatro ángulos rectos.
4. Un rectángulo con todos los lados de igual longitud es un _____.
5. Un _____ es un paralelogramo con cuatro lados de igual longitud.
6. A un segmento que une dos vértices no consecutivos de un polígono se le llama _____ del polígono.
7. Un _____ tiene dos lados que son paralelos y dos lados que no son paralelos. A los lados paralelos se les llama _____. Los catetos de un trapezoide _____ tienen la misma longitud.
8. Un polígono _____ tiene lados que son de la misma longitud y ángulos que son de la misma medida.

CONCEPTOS

9. Refiérase al polígono abajo.

a. ¿Cuántos vértices tiene? Lístelos.

b. ¿Cuántos lados tiene? Lístelos.

c. ¿Cuántas diagonales tiene? Lístelas.

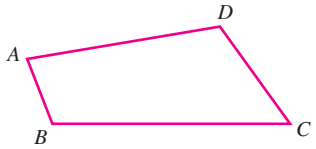
d. Indique cuáles de las siguientes maneras son aceptables para nombrar el polígono.

cuadrilátero $ABCD$

cuadrilátero $CDBA$

cuadrilátero $ACBD$

cuadrilátero $BADC$



10. Dibuje un ejemplo de cada tipo de cuadrilátero.

a. rombo **b.** paralelogramo

c. trapezoide **d.** cuadrado

e. rectángulo **f.** trapezoide isósceles

11. Abajo se muestra un paralelogramo. Complete los espacios.

a. $\overline{ST} \parallel$ ___ **b.** $\overline{SV}$ ___ $\overline{TU}$

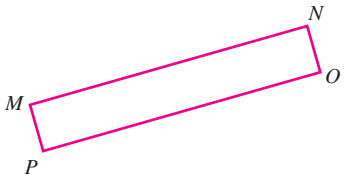
12. Refiérase al rectángulo abajo.

a. ¿Cuántos ángulos rectos tiene el rectángulo? Lístelos.

b. ¿Cuáles lados son paralelos?

c. ¿Cuáles lados son de igual longitud?

d. Copie la figura y dibuje las diagonales. Llame al punto donde las diagonales se intersecan punto X. ¿Cuántas diagonales tiene la figura? Lístelas.



13. Complete los espacios. En cualquier rectángulo:

a. Los cuatro ángulos son ángulos _____.

b. Los lados opuestos son _____.

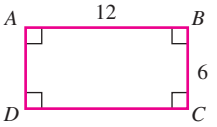
c. Los lados opuestos tienen igual _____.

d. Las diagonales tienen igual _____.

e. Las diagonales se intersecan en sus _____.

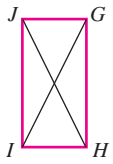
14. Refiérase a la figura abajo.

a. ¿Cuál es m($\overline{CD}$)? **b.** ¿Cuál es m($\overline{AD}$)?



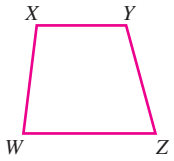
15. En la figura abajo, $\overline{TR} \parallel \overline{DF}$, $\overline{DT} \parallel \overline{FR}$, y m($\angle D$) = 90°. ¿Qué tipo de cuadrilátero es $DTRF$?

16. Refiérase al paralelogramo mostrado abajo. Si $m(\overline{GI}) = 4$ y $m(\overline{HJ}) = 4$, ¿qué tipo de figura es el cuadrilátero $GHIJ$?



17. **a.** ¿Todo rectángulo es un cuadrado?
b. ¿Todo cuadrado es un rectángulo?
c. ¿Todo paralelogramo es un rectángulo?
d. ¿Todo rectángulo es un paralelogramo?
e. ¿Todo rombo es un cuadrado?
f. ¿Todo cuadrado es un rombo?

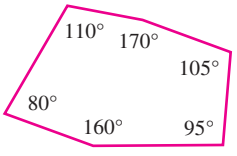
18. Abajo se muestra el trapezoide $WXYZ$. ¿Cuáles lados son paralelos?



19. Abajo se muestra el trapezoide $JKLM$.

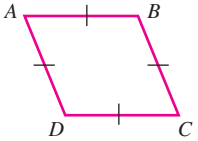
a. ¿Qué tipo de trapezoide es este?
b. ¿Cuáles ángulos son los ángulos base inferiores?
c. ¿Cuáles ángulos son los ángulos base superiores?
d. Complete los espacios:
$m(\angle J) = m(\quad)$
$m(\angle K) = m(\quad)$
$m(\overline{JK}) = m(\quad)$

20. Encuentre la suma de las medidas de los ángulos del hexágono abajo.

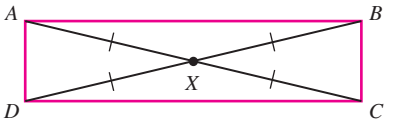


NOTACIÓN

21. ¿Qué indican las marcas gruesas en la figura?



22. Abajo se muestra el rectángulo $ABCD$. ¿Qué indican las marcas gruesas acerca del punto X?



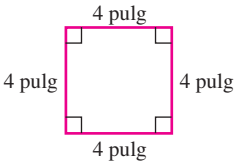
23. En la fórmula $S = (n - 2)180°$, ¿qué representa S? ¿Qué representa n?

24. Suponga que $n = 12$. ¿Qué es $(n - 2)180°$?

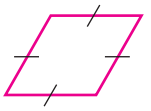
PRÁCTICA GUIADA

En los Problemas 25 y 26, clasifique cada cuadrilátero como un rectángulo, un cuadrado, un rombo o un trapezoide. Algunas figuras pueden clasificarse de manera correcta en más de una forma. Vea el Objetivo 1.

25. **a.**

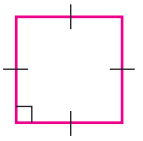


b.

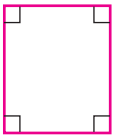


c.

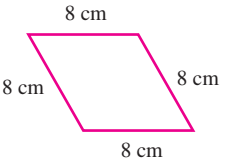
d.



26. **a.**

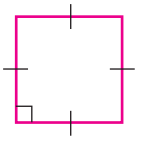


b.



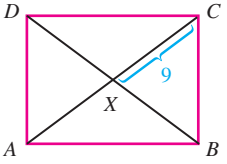
c.

d.



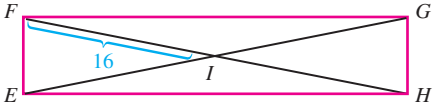
27. Abajo se muestra el rectángulo $ABCD$. Vea el Ejemplo 1.

a. ¿Cuál es $m(\angle DCB)$?
b. ¿Cuál es $m(\overline{AX})$?
c. ¿Cuál es $m(\overline{AC})$?
d. ¿Cuál es $m(\overline{BD})$?



28. Abajo se muestra el rectángulo $EFGH$. Vea el Ejemplo 1.

a. Encuentre $m(\angle EHG)$.
b. Encuentre $m(\overline{FH})$.
c. Encuentre $m(\overline{EI})$.
d. Encuentre $m(\overline{EG})$.

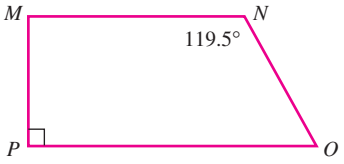


29. Refiérase al trapezoide mostrado abajo. **Vea el Ejemplo 3.**

a. Encuentre x. **b.** Encuentre y.

30. Refiérase al trapezoide $MNOP$ mostrado abajo. **Vea el Ejemplo 3.**

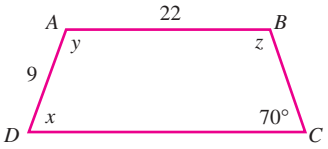
a. Encuentre m($\angle O$). **b.** Encuentre m($\angle M$).



31. Refiérase al trapezoide isósceles mostrado abajo. **Vea el Ejemplo 4.**

a. Encuentre m($\overline{BC}$). **b.** Encuentre x.

c. Encuentre y. **d.** Encuentre z.

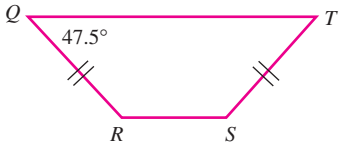


32. Refiérase al trapezoide mostrado abajo. **Vea el Ejemplo 4.**

a. Encuentre m($\angle T$).

b. Encuentre m($\angle R$).

c. Encuentre m($\angle S$).



***Encuentre la suma de las medidas de los ángulos del polígono.* Vea el Ejemplo 5.**

33. Un polígono con 14 lados

34. Un polígono con 15 lados

35. Un polígono con 20 lados

36. Un polígono con 22 lados

37. Un octágono

38. Un decágono

39. Un dodecágono

40. Un nonágono

***Encuentre el número de lados que tiene un polígono si la suma de las medidas de sus ángulos es el número proporcionado.* Vea el Ejemplo 6.**

41. 540° **42.** 720°

43. 900° **44.** 1,620°

45. 1,980° **46.** 1,800°

47. 2,160° **48.** 3,600°

INTÉNTELO

49. Refiérase al rectángulo $ABCD$ mostrado abajo.

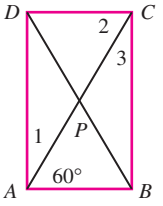
a. Encuentre m($\angle 1$).

b. Encuentre m($\angle 3$).

c. Encuentre m($\angle 2$).

d. Si m($\overline{AC}$) es de 8 cm, encuentre m($\overline{BD}$).

e. Encuentre m($\overline{PD}$).

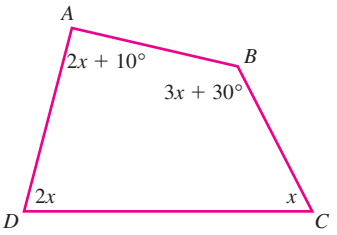


50. El siguiente problema apareció en un cuestionario. Explique por qué el profesor debió haber cometido un error cuando mecanografió el problema.

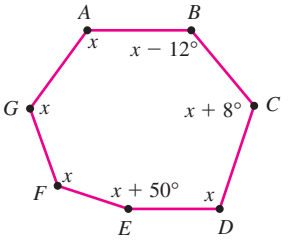
La suma de las medidas de los ángulos de un polígono es de 1,000°. ¿Cuántos lados tiene el polígono?

Para los Problemas 51 y 52, encuentre x. Después encuentre la medida de cada ángulo del polígono.

51.



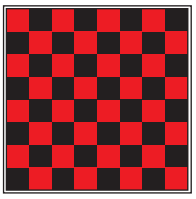
52.



APLICACIONES

53. CUADRILÁTEROS EN LA VIDA DIARIA ¿Qué forma de cuadrilátero observa en cada uno de los siguientes objetos?

a. podio (porción superior) **b.** tablero de ajedrez



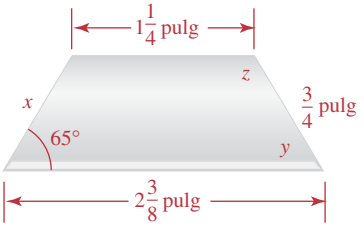
c. billete de un dólar **d.** aleta para nadar

e. Ventana lateral de la caja de una camioneta

54. DIAGRAMA DE FLUJO Un diagrama de flujo muestra una secuencia de pasos a desarrollar por una computadora para resolver un problema proporcionado. Cuando se diseña un diagrama de flujo, el programador utiliza un conjunto de símbolos estandarizados para representar varias operaciones a desarrollar por la computadora. Localice un rectángulo, un rombo y un paralelogramo en el diagrama de flujo a la derecha.

55. BEISBOL Refiérase a la figura a la derecha. Encuentre la suma de las medidas de los ángulos del plato de home.

56. HERRAMIENTAS La navaja multiuso mostrada abajo tiene la forma de un trapezoide isósceles. Encuentre x, y y z.



REDACCIÓN

57. Explique por qué un cuadrado es un rectángulo.

58. Explique por qué un trapezoide no es un paralelogramo.

59. ELABORACIÓN DE UN MARCO Después de pegar y clavar las piezas de un marco para fotografías, no le parece bien a una hacedora de marcos. (Vea la figura a la derecha). ¿Cómo puede utilizar una cinta para medir para asegurarse que las esquinas son ángulos de 90° (rectos)?

60. Un decágono es un polígono con diez lados. ¿Cómo pudiera llamarse un polígono con cien lados? ¿Con mil lados? ¿Con un millón de lados?

REPASO

Escriba cada número en palabras.

61. 254,309

62. 504,052,040

63. 82,000,415

64. 51,000,201,078

SECCIÓN 9.7

Perímetros y áreas de polígonos

Objetivos

1. Encontrar el perímetro de un polígono.
2. Encontrar el área de un polígono.
3. Encontrar el área de figuras que son combinaciones de polígonos.

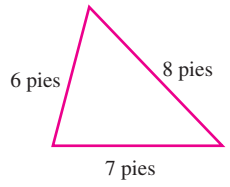
En esta sección se explicará cómo encontrar perímetros y áreas de polígonos. El encontrar perímetros es importante cuando se estima el costo de cercar un jardín o de la instalación de una moldura de techo en una habitación. El encontrar el área es importante cuando se calcula el costo de un alfombrado, de pintar una habitación o de fertilizar un césped.

1 Encontrar el perímetro de un polígono

Imagen Copyright iofoto, 2009. Utilizada bajo licencia de Shutterstock.com

El **perímetro** de un polígono es la distancia alrededor de él. Para encontrar el perímetro P de un polígono, simplemente se suman las longitudes de sus lados.

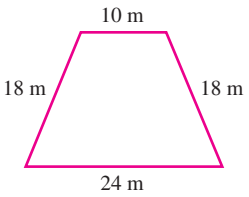
Triángulo



$P = 6 + 7 + 8$
$= 21$

El perímetro es de 21 pies.

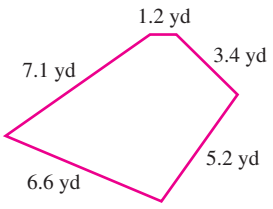
Cuadrilátero



$P = 10 + 18 + 24 + 18$
$= 70$

El perímetro es de 70 m.

Pentágono



$P = 1.2 + 7.1 + 6.6 + 5.2 + 3.4$
$= 23.5$

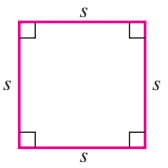
El perímetro es de 23.5 yd.

Para algunos polígonos, como un cuadrado y un rectángulo, se pueden simplificar los cálculos utilizando una fórmula para el perímetro. Dado que un cuadrado tiene cuatro lados de igual longitud s, su perímetro P es $s + s + s + s$, ó $4s$.

Perímetro de un cuadrado

Si un cuadrado tiene un lado de longitud s, su perímetro P está dado por la fórmula

$$P = 4s$$



EJEMPLO 1 Encuentre el perímetro de un cuadrado cuyos lados son de 7.5 metros de largo.

Estrategia Se sustituirá el 7.5 para x en la fórmula $P = 4s$ y se evaluará el lado derecho.

POR QUÉ La variable P representa el perímetro desconocido del cuadrado.

Solución

$P = 4s$ Esta es la fórmula para el perímetro de un cuadrado.
$P = 4(7.5)$ Sustituya el 7.5 para s, la longitud de un lado del cuadrado.
$P = 30$ Realice la multiplicación.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2}\\ 7.5\\ \times\ 4\\ \hline 30.0 \end{array}$$

El perímetro del cuadrado es de 30 metros.

Auto-revisión 1

Un tablero de Scrabble tiene una forma cuadrada con lados de 38.5 cm de longitud. Encuentre el perímetro del tablero.

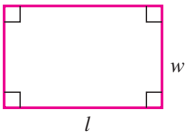
Ahora intente Problemas 17 y 19

Dado que un rectángulo tiene dos longitudes l y dos anchos w, su perímetro P está dado por $l + w + l + w$, ó $2l + 2w$.

Perímetro de un rectángulo

Si un rectángulo tiene longitud l y ancho w, su perímetro P está dado por la fórmula

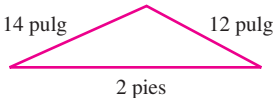
$$P = 2l + 2w$$



¡Cuidado! Cuando se encuentra el perímetro de un rectángulo, las longitudes de los lados deben expresarse en las mismas unidades.

Auto-revisión 2

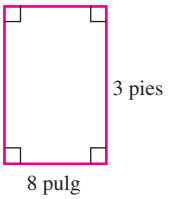
Encuentre el perímetro del triángulo mostrado abajo, en pulgadas.



Ahora intente **Problema 21**

EJEMPLO 2

Encuentre el perímetro del rectángulo mostrado a la derecha, en pulgadas.



Estrategia Se expresará el ancho del rectángulo en pulgadas y después se utilizará la fórmula $P = 2l + 2w$ para encontrar el perímetro de la figura.

POR QUÉ Sólo se pueden sumar cantidades que están medidas en las mismas unidades.

Solución Dado que 1 pie = 12 pulgadas, se puede convertir 3 pies a pulgadas multiplicando los 3 pies por el factor de conversión de unidades $\frac{12 \text{ pulg}}{1 \text{ pie}}$.

$$3 \text{ pies} = 3 \text{ pies} \cdot \frac{\mathbf{12 \text{ pulg}}}{\mathbf{1 \text{ pie}}}$$ Multiplique por 1: $\frac{12 \text{ pulg}}{1 \text{ pie}} = 1$.

$$= \frac{3 \text{ pies}}{1} \cdot \frac{12 \text{ pulg}}{1 \text{ pie}}$$ Escriba 3 pies como una fracción. Elimine las unidades comunes de pies del numerador y el denominador. Las unidades de pulgadas permanecen.

$$= 36 \text{ pulg}$$ Realice la multiplicación.

El ancho del rectángulo es de 36 pulgadas. Ahora se puede sustituir el 8 para l, el largo, y el 36 para w, el ancho, en la fórmula para el perímetro de un rectángulo.

$$P = 2l + 2w$$ Esta es la fórmula para el perímetro de un rectángulo.

$$P = 2(8) + 2(36)$$ Sustituya el 8 para l, el largo, y el 36 para w, el ancho.

$$= 16 + 72$$ Realice la multiplicación.

$$= 88$$ Realice la suma.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1}\\ 36\\ \times 2\\ \hline 72 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 16\\ +72\\ \hline 88 \end{array}$$

El perímetro del rectángulo es de 88 pulgadas.

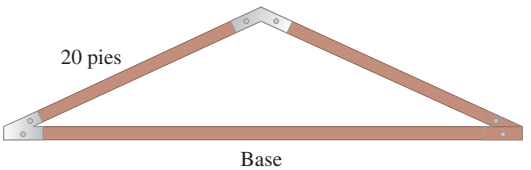
Auto-revisión 3

El perímetro de un triángulo isósceles es de 58 metros. Si uno de sus lados de igual longitud es de 15 metros de largo, ¿de qué largo es su base?

Ahora intente **Problema 25**

EJEMPLO 3

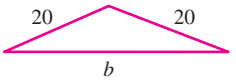
Ingeniería estructural La armadura mostrada abajo está conformada por tres partes que forman un triángulo isósceles. Si se utilizaron 76 pies lineales de madera para formar la armadura, ¿de qué largo es la base de la armadura?



Analizar

- La armadura tiene la forma de un triángulo isósceles. Dado
- Uno de los lados de igual longitud es de 20 pies de largo. Dado
- El perímetro de la armadura es de 76 pies. Dado
- ¿Cuál es la longitud de la base de la armadura? A encontrar

Formar una ecuación Se puede hacer que b sea igual a la longitud de la base de la armadura (en pies). En este paso, es de utilidad dibujar un diagrama. (Vea la figura a la derecha.) Si uno de los lados de igual longitud es de 20 pies de largo, también lo es el otro.



Debido a que se utilizaron 76 pies lineales de madera para construir la armadura de forma triangular,

La longitud de la base de la armadura	más	la longitud de un lado	más	la longitud del otro lado	es igual al	perímetro de la armadura.
b	+	20	+	20	=	76

Resolver

$$b + 20 + 20 = 76$$

$b + 40 = 76$ Combine los términos semejantes.

$b = 36$ Para despejar b, reste el 40 de ambos lados.

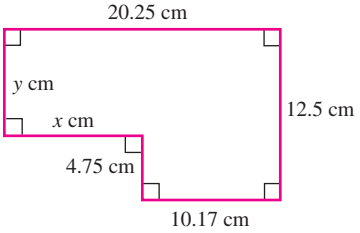
$$\begin{array}{r} 76 \\ -\,40 \\ \hline 36 \end{array}$$

Enunciar La longitud de la base de la armadura es de 36 pies.

Comprobar Si se suman las longitudes de las partes de la armadura, se obtiene 36 pies + 20 pies + 20 pies = 76 pies. El resultado es correcto.

Utilizando su CALCULADORA Perímetros de figuras que son combinaciones de polígonos

Para encontrar el perímetro de la figura mostrada abajo, se necesitan conocer los valores de x y y. Dado que la figura es una combinación de dos rectángulos, se puede utilizar una calculadora para observar que



$x = 20.25 - 10.17$ y $y = 12.5 - 4.75$

$= 10.08$ cm $= 7.75$ cm

El perímetro P de la figura es

$$P = 20.25 + 12.5 + 10.17 + 4.75 + x + y$$
$$P = 20.25 + 12.5 + 10.17 + 4.75 + 10.08 + 7.75$$

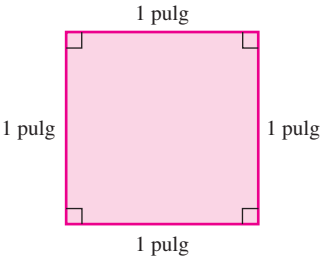
Se puede utilizar una calculadora científica para realizar este cálculo.

20.25 [+] 12.5 [+] 10.17 [+] 4.75 [+] 10.08 [+] 7.75 [=] 65.5

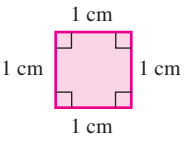
El perímetro es de 65.5 centímetros.

2 Encontrar el área de un polígono

El **área** de un polígono es la medida de la cantidad de superficie que encierra. El área se mide en unidades cuadradas, como pulgadas cuadradas o centímetros cuadrados, como se muestra abajo.



Una pulgada cuadrada ($1\ \text{pulg}^2$)



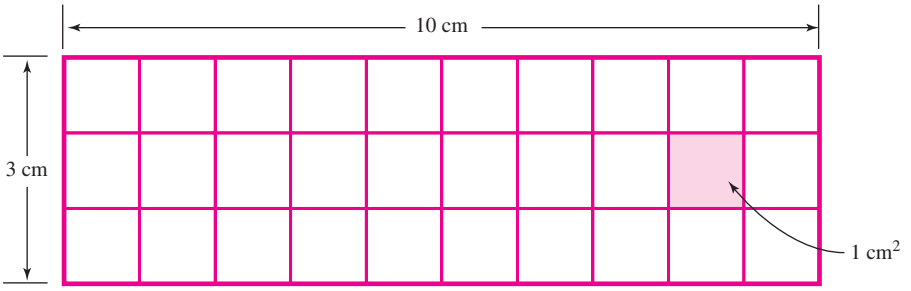
Un centímetro cuadrado ($1\ \text{cm}^2$)

En la vida diaria, con frecuencia se utilizan áreas. Por ejemplo,

- Para alfombrar una habitación, se compran yardas cuadradas.
- Una lata de pintura cubrirá cierto número de pies cuadrados.
- Para medir cantidades vastas de tierra, con frecuencia se utilizan millas cuadradas.
- Se compran techos para casa por el "cuadrado". Un cuadrado es de 100 pies cuadrados.

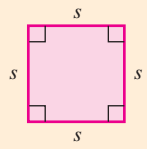
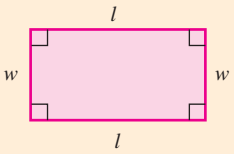
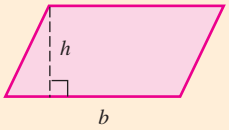
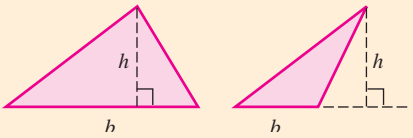
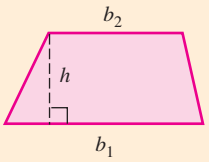
El rectángulo mostrado abajo tiene una longitud de 10 centímetros y un ancho de 3 centímetros. Si se divide la región rectangular en regiones cuadradas como se muestra en la figura, cada cuadrado tiene un área de 1 centímetro cuadrado —una superficie delimitada por un cuadrado que mide 1 centímetro en cada lado. Debido a que hay 3 renglones con 10 cuadrados en cada renglón, hay 30 cuadrados. Dado que el rectángulo delimita un área de superficie de 30 cuadrados, su área es de 30 centímetros cuadrados, lo cual puede escribirse como $30\ \text{cm}^2$.

Este ejemplo ilustra que para encontrar el área de un rectángulo, se multiplica su longitud por su ancho.

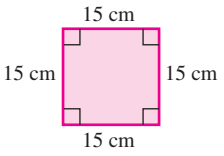


¡Cuidado! No confunda los conceptos de perímetro y área. El perímetro es la distancia alrededor de un polígono. Se mide en unidades lineales, como centímetros, pies o millas. El área es una medida de la superficie delimitada dentro de un polígono. Se mide en unidades cuadradas, como centímetros cuadrados, pies cuadrados o millas cuadradas.

En la práctica, no se encuentran las áreas de los polígonos contando cuadrados. En su lugar, se utilizan fórmulas para encontrar las áreas de las figuras geométricas.

Figura	Nombre	Fórmula para el área
	Cuadrado	$A = s^2$, donde s es la longitud de un lado.
	Rectángulo	$A = lw$, donde l es la longitud y w es el ancho.
	Paralelogramo	$A = bh$, donde b es el largo de la base y h es la altura. (Una altura siempre es perpendicular a la base.)
	Triángulo	$A = \frac{1}{2}bh$, donde b es la longitud de la base y h es la altura. Al segmento perpendicular a la base y que representa la altura (mostrada aquí utilizando una línea punteada) se le llama **altitud.**
	Trapezoide	$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$, donde h es la altura del trapezoide y b_1 y b_2 representan las longitudes de las bases.

EJEMPLO 4 Encuentre el área del cuadrado mostrado a la derecha.



Estrategia Se sustituirá el 15 para s en la fórmula $A = s^2$ y se evaluará el lado derecho.

POR QUÉ La variable A representa el área desconocida del cuadrado.

Solución

$A = s^2$ Esta es la fórmula para el área de un cuadrado.

$A = 15^2$ Sustituya el 15 para s, la longitud de un lado del cuadrado.

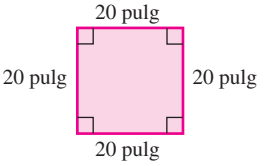
$A = 225$ Evalúe la expresión exponencial.

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 15 \\ \hline 75 \\ 150 \\ \hline 225 \end{array}$$

Recuerde que el área se mide en unidades cuadradas. Por tanto, el área del cuadrado es de 225 centímetros cuadrados, lo cual puede escribirse como 225 cm^2.

Auto-revisión 4

Encuentre el área del cuadrado mostrado abajo.



Ahora intente **Problemas 29 y 31**

EJEMPLO 5 Encuentre el número de pies cuadrados en 1 yarda cuadrada.

Estrategia Una figura es de utilidad para resolver este problema. Se dibujará una yarda cuadrada y se dividirá cada uno de sus lados en 3 partes de igual largo.

POR QUÉ Dado que una yarda cuadrada es un cuadrado con cada lado midiendo 1 yarda, cada lado también mide 3 pies.

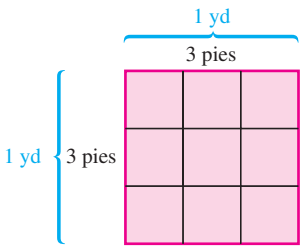
Auto-revisión 5

Encuentre el número de centímetros cuadrados en 1 metro cuadrado.

Ahora intente **Problemas 33 y 39**

Solución

$$\begin{aligned} 1\text{ yd}^2 &= (\mathbf{1\text{ yd}})^2 \\ &= (\mathbf{3\text{ pies}})^2 \quad \text{Sustituya 3 pies para 1 yarda.} \\ &= (3\text{ pies})(3\text{ pies}) \\ &= 9\text{ pies}^2 \end{aligned}$$



Hay 9 pies cuadrados en 1 yarda cuadrada.

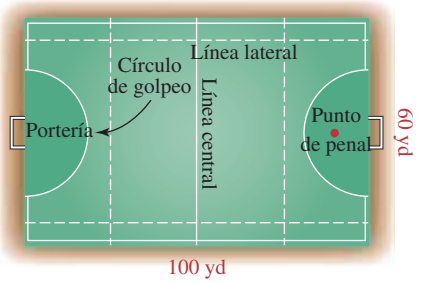
Auto-revisión 6

PING PONG Una mesa de ping pong de tamaño oficial es de 9 pies de largo y 5 pies de ancho, Encuentre su área en pulgadas cuadradas.

Ahora intente **Problema 41**

EJEMPLO 6 *Deportes para mujeres*

El hockey sobre pasto es un deporte en equipo en el que los jugadores utilizan bastones para intentar golpear una pelota en la meta de sus oponentes. Encuentre el área del campo rectangular mostrado a la derecha. Dé la respuesta en pies cuadrados.



Estrategia Se sustituirá el 100 para l y el 60 para w en la fórmula $A = lw$ y se evaluará el lado derecho.

POR QUÉ La variable A representa el área desconocida del rectángulo.

Solución

$$\begin{aligned} A &= lw && \text{Esta es la fórmula para el área de un rectángulo.} \\ A &= \mathbf{100}(\mathbf{60}) && \text{Sustituya el 100 para } l\text{, la longitud, y el 60 para } w\text{, el ancho.} \\ &= 6{,}000 && \text{Realice la multiplicación.} \end{aligned}$$

El área del rectángulo es de 6,000 yardas cuadradas. Dado que hay 9 pies cuadrados por yarda cuadrada, se puede convertir este número a pies cuadrados multiplicando las 6,000 yardas cuadradas por $\frac{9\text{ pies}^2}{1\text{ yd}^2}$.

$$\begin{aligned} 6{,}000\text{ yd}^2 &= 6{,}000\text{ yd}^2 \cdot \frac{\mathbf{9\text{ pies}^2}}{\mathbf{1\text{ yd}^2}} && \text{Multiplique por el factor de conversión de unidades: } \frac{9\text{ pies}^2}{1\text{ yd}^2} = 1 \\ &= 6{,}000 \cdot 9\text{ pies}^2 && \text{Elimine las unidades comunes de yardas cuadradas en el numerador y el denominador. Las unidades de pies}^2 \text{ permanecen.} \\ &= 54{,}000\text{ pies}^2 && \text{Multiplique: } 6{,}000 \cdot 9 = 54{,}000. \end{aligned}$$

El área del campo es de 54,000 pies^2.

PIENSE DETENIDAMENTE *Residencia estudiantil*

"Estados Unidos tiene más de 4,000 colegios y universidades, con 2.3 millones de estudiantes viviendo en residencias estudiantiles".

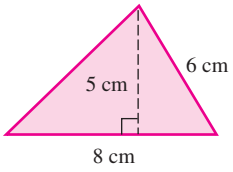
The New York Times, 2007

La habitación promedio en una residencia de estudiantes tiene alrededor de 180 pies cuadrados de superficie útil. Las habitaciones por lo regular están amuebladas con los siguientes artículos que tienen las dimensiones proporcionadas:

- 2 camas individuales extra largas (cada una es de 39 pulg de ancho × 80 pulg de largo × 24 pulg de alto)
- 2 cómodas (cada una es de 18 pulg. de ancho × 36 pulg de largo × 48 pulg de alto)
- 2 libreros (cada uno es de 12 pulg. de ancho × 24 pulg de largo × 40 pulg de alto)
- 2 escritorios (cada uno es de 24 pulg. de ancho × 48 pulg de largo × 28 pulg de alto)

¿Cuántos pies cuadrados de espacio útil quedan?

EJEMPLO 7 Encuentre el área del triángulo mostrado a la derecha.



Estrategia Se sustituirá el 8 para b y el 5 para h en la fórmula $A = \frac{1}{2}bh$ y se evaluará el lado derecho. (El lado que tiene una longitud de 6 cm es información adicional que no se utiliza para encontrar el área.)

POR QUÉ La variable A representa el área desconocida del triángulo.

Solución

$$A = \frac{1}{2}bh$$ Esta es la fórmula para el área de un triángulo.

$$A = \frac{1}{2}(8)(5)$$ Sustituya el 8 para b, la longitud de la base, y el 5 para h, la altura.

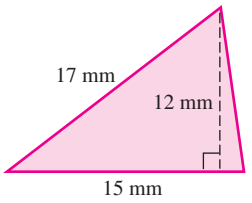
$$= 4(5)$$ Realice la multiplicación: $\frac{1}{2}(8) = 4$.

$$= 20$$ Complete la multiplicación.

El área del triángulo es de 20 cm^2.

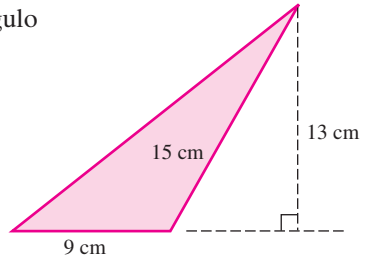
Auto-revisión 7

Encuentre el área del triángulo mostrado abajo.



Ahora intente **Problema 45**

EJEMPLO 8 Encuentre el área del triángulo mostrado a la derecha.



Estrategia Se sustituirá el 9 para b y el 13 para h en la fórmula $A = \frac{1}{2}bh$ y se evaluará el lado derecho. (El lado que tiene una longitud de 15 cm es información adicional que no se utiliza para encontrar el área.)

POR QUÉ La variable A representa el área desconocida del triángulo.

Solución En este caso, la altitud cae fuera del triángulo.

$$A = \frac{1}{2}bh$$ Esta es la fórmula para el área de un triángulo.

$$A = \frac{1}{2}(9)(13)$$ Sustituya el 9 para b, la longitud de la base, y el 13 para h, la altura.

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{9}{1}\right)\left(\frac{13}{1}\right)$$ Escriba el 9 como $\frac{9}{1}$ y el 13 como $\frac{13}{1}$.

$$= \frac{117}{2}$$ Multiplique las fracciones.

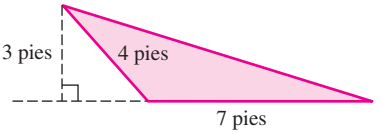
$$= 58.5$$ Realice la división.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2}\\ 13\\ \times 9\\ \hline 117 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 58.5\\ 2\overline{)117.0}\\ -10\\ \hline 17\\ -16\\ \hline 10\\ -10\\ \hline 0 \end{array}$$

El área del triángulo es de 58.5 cm^2.

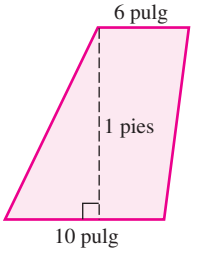
Auto-revisión 8

Encuentre el área del triángulo mostrado abajo.



Ahora intente **Problema 49**

EJEMPLO 9 Encuentre el área del trapezoide mostrado a la derecha.

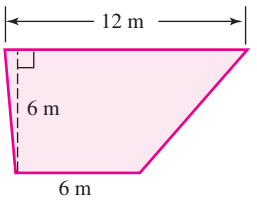


Estrategia Se expresará la altura del trapezoide en pulgadas y después se utilizará la fórmula $A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$ para encontrar el área de la figura.

POR QUÉ La altura de 1 pie debe expresarse como 12 pulgadas para que sea consistente con las unidades de las bases.

Auto-revisión 9

Encuentre el área del trapezoide mostrado abajo.



Ahora intente **Problema 53**

Solución

$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$ Esta es la fórmula para el área de un trapezoide.

$A = \frac{1}{2}(12)(10 + 6)$ Sustituya el 12 para h, la altura, el 10 para b_1, la longitud de la base inferior, y el 6 para b_2, la longitud de la base superior.

$= \frac{1}{2}(12)(16)$ Realice la suma dentro de los paréntesis.

$= 6(16)$ Realice la primera multiplicación: $\frac{1}{2}(12) = 6$.

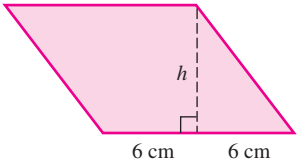
$= 96$ Complete la multiplicación.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 3} \\ 16 \\ \times\, 6 \\ \hline 96 \end{array}$$

El área del trapezoide es de 96 pulg^2.

Auto-revisión 10

El área del paralelogramo de abajo es de 96 cm^2. Encuentre su altura.



Ahora intente **Problema 57**

EJEMPLO 10 El área del paralelogramo mostrado a la derecha es de 360 pies^2. Encuentre su altura.

Estrategia Para encontrar la altura del paralelogramo, se sustituirán los valores proporcionados en la fórmula $A = bh$ y se resolverá para h.

POR QUÉ La variable h representa la altura desconocida.

Solución A partir de la figura, se observa que la longitud de la base del paralelogramo es

$5 \text{ pies} + 25 \text{ pies} = 30 \text{ pies}$

$A = bh$ Esta es la fórmula para el área de un paralelogramo.

$360 = 30h$ Sustituya el 360 para A, el área, y el 30 para b, la longitud de la base.

$\frac{360}{30} = \frac{30h}{30}$ Para despejar h, deshaga la multiplicación por 30 dividiendo ambos lados entre 30.

$12 = h$ Realice la división.

$$\begin{array}{r} 12 \\ 30\overline{)360} \\ -\,30 \\ \hline 60 \\ 60 \\ \hline 0 \end{array}$$

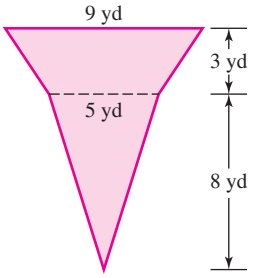
La altura del paralelogramo es de 12 pies.

3 Encontrar el área de figuras que son combinaciones de polígonos

Consejo útil Para encontrar el área de una forma irregular, descomponga la forma en polígonos familiares. Encuentre el área de cada polígono y después sume los resultados.

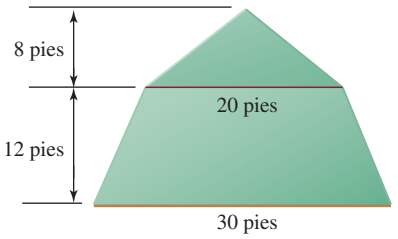
Auto-revisión 11

Encuentre el área de la figura sombreada de abajo.



Ahora intente **Problema 65**

EJEMPLO 11 Encuentre el área de un lado de la tienda mostrada abajo.



Estrategia Se utilizará la fórmula $A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$ para encontrar el área de la porción inferior de la tienda y la fórmula $A = \frac{1}{2}bh$ para encontrar el área de la parte superior de la tienda. Después se combinarán los resultados.

POR QUÉ Un lado de la tienda es una combinación de un trapezoide y un triángulo.

Solución Para encontrar el área de la porción inferior de la tienda, se procede como a continuación.

$$A_{\text{trap.}} = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$$ Esta es la fórmula para el área de un trapezoide.

$$A_{\text{trap.}} = \frac{1}{2}(12)(30 + 20)$$ Sustituya el 30 para b_1, el 20 para b_2 y el 12 para h.

$$= \frac{1}{2}(12)(50)$$ Realice la suma dentro de los paréntesis.

$$= 6(50)$$ Realice la primera multiplicación: $\frac{1}{2}(12) = 6$.

$$= 300$$ Complete la multiplicación.

El área del trapezoide es de 300 pies^2.

Para encontrar el área de la porción superior de la tienda, se procede como a continuación.

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{1}{2}bh$$ Esta es la fórmula para el área de un triángulo.

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{1}{2}(20)(8)$$ Sustituya el 20 para b y el 8 para h.

$$= 80$$ Realice las multiplicaciones, empezando de izquierda a derecha: $\frac{1}{2}(20) = 10$ y después $10(8) = 80$.

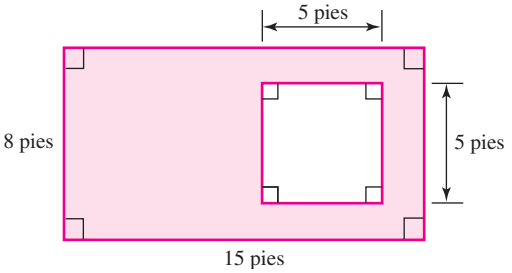
El área del triángulo es de 80 pies^2.

Para encontrar el área total de un lado de la tienda, se suma:

$$A_{\text{total}} = A_{\text{trap.}} + A_{\text{triángulo}}$$
$$A_{\text{total}} = 300 \text{ pies}^2 + 80 \text{ pies}^2$$
$$= 380 \text{ pies}^2$$

El área total de un lado de la tienda es de 380 pies^2.

EJEMPLO 12 Encuentre el área de la región sombreada mostrada a la derecha.



Estrategia Se restará el área no deseada del cuadrado del área del rectángulo.

Área de la región sombreada = Área del rectángulo − Área del cuadrado

POR QUÉ El área de la figura con forma rectangular no incluye la región cuadrada dentro de ella.

Solución

$$A_{\text{sombreada}} = lw - s^2$$ La fórmula para el área de un rectángulo es $A = lw$. La fórmula para el área de un cuadrado es $A = s^2$.

$$A_{\text{sombreada}} = 15(8) - 5^2$$ Sustituya el 15 para la longitud l y el 8 para el ancho w del rectángulo. Sustituya el 5 para la longitud s de un lado del cuadrado.

$$= 120 - 25$$

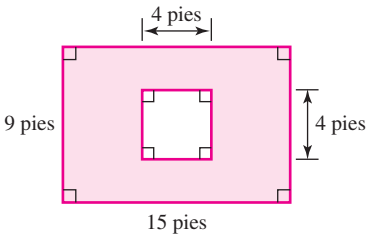
$$= 95$$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 4} \\ 15 \\ \times\, 8 \\ \hline 120 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle 11\ \ 10} \\ 1\not{2}\not{0} \\ -\,25 \\ \hline 95 \end{array}$$

El área de la región sombreada es de 95 pies^2.

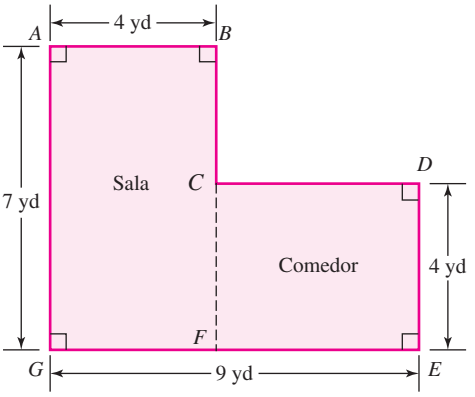
Auto-revisión 12

Encuentre el área de la región sombreada mostrada abajo.



Ahora intente **Problema 69**

EJEMPLO 13 ***Alfombrado de una habitación*** Una sala/comedor tiene la distribución mostrada en la figura. Si la alfombra cuesta $29 por yarda cuadrada, incluyendo el rodete y la instalación, ¿cuánto costará alfombrar ambas habitaciones? (Asuma que no hay desperdicio.)



Estrategia Se encontrará el número de yardas cuadradas de alfombra necesaria y se multiplicará el resultado por $29.

POR QUÉ Cada yarda cuadrada cuesta $29.

Solución Primero, se debe encontrar el área total de la sala y del comedor:

$$A_{\text{total}} = A_{\text{sala}} + A_{\text{comedor}}$$

Dado que $\overline{CF}$ divide el espacio en dos rectángulos, las áreas de la sala y del comedor se encuentran multiplicando sus largos y anchos respectivos. Por tanto, el área de la sala es de 4 yd · 7 yd = **28 yd²**.

El ancho del comedor está proporcionado como de 4 yd. Para encontrar su longitud, se resta:

$$\text{m}(\overline{CD}) = \text{m}(\overline{GE}) - \text{m}(\overline{AB}) = 9 \text{ yd} - 4 \text{ yd} = 5 \text{ yd}$$

Por tanto, el área del comedor es de 5 yd · 4 yd = **20 yd²**. El área total a alfombrarse es la suma de estas dos áreas.

$$A_{\text{total}} = A_{\text{sala}} + A_{\text{comedor}}$$
$$A_{\text{total}} = 28 \text{ yd}^2 + 20 \text{ yd}^2$$
$$= 48 \text{ yd}^2$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ \times 29 \\ \hline 432 \\ 960 \\ \hline 1{,}392 \end{array}$$

A $29 por yarda cuadrada, el costo de alfombrar ambas habitaciones será de 48 · $29, ó $1,392.

Ahora intente **Problema 73**

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. 154 cm **2.** 50 pulg **3.** 28 m **4.** 400 pulg² **5.** 10,000 cm² **6.** 6,480 pulg² **7.** 90 mm² **8.** 10.5 pies² **9.** 54 m² **10.** 8 cm **11.** 41 yd² **12.** 119 pies²

SECCIÓN 9.7 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

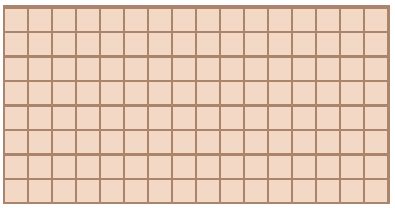
VOCABULARIO

Complete los espacios.

1. A la distancia alrededor de un polígono se le llama _____.
2. El _____ de un polígono se mide en unidades lineales como pulgadas, pies y millas.
3. A la medida de la superficie delimitada por un polígono se le llama _____.
4. Si cada lado de un cuadrado mide 1 pie, el área delimitada por el cuadrado es de 1 pie _____.
5. El _____ de un polígono se mide en unidades cuadradas.
6. Al segmento que representa la altura de un triángulo se le llama _____.

CONCEPTOS

7. La figura abajo muestra el piso de una cocina que está cubierto con baldosas de 1 pie cuadrado. Sin contar *todos* los cuadrados, determine el área del piso.



8. Indique cuál concepto aplica, el perímetro o el área.

a. La longitud de una pared alrededor del Parque Central de Nueva York

b. La cantidad de superficie útil en la Casa Blanca

c. La cantidad de cerca necesaria para delimitar una zona de recreamiento

d. La cantidad de tierra en el Parque Nacional Yellowstone

9. Dé la fórmula para el perímetro de un

a. cuadrado **b.** rectángulo

10. Dé la fórmula para el área de un

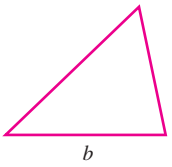
a. cuadrado **b.** rectángulo

c. triángulo **d.** trapezoide

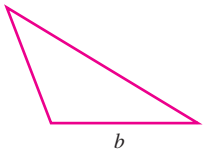
e. paralelogramo

11. Para cada figura abajo, dibuje la altitud a la base b.

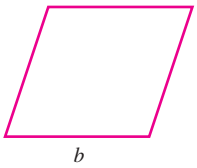
a.



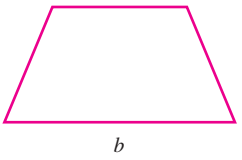
b.



c.

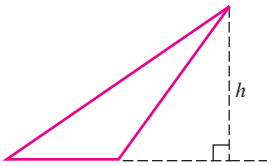


d.

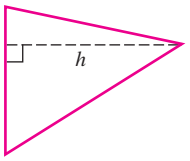


12. Para cada figura abajo, etiquete la base b para la altitud dada.

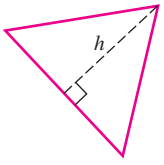
a.



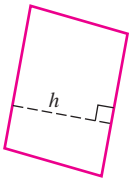
b.



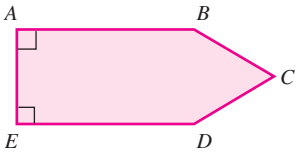
c.



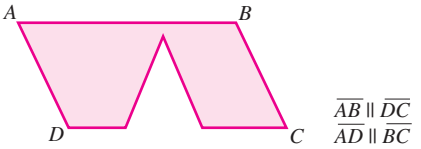
d.



13. ¿De cuáles dos tipos de figuras geométricas es una combinación la figura sombreada abajo?



14. Explique cómo encontraría el área de la siguiente figura sombreada.



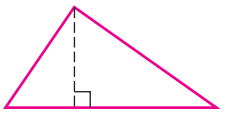
NOTACIÓN

Complete los espacios.

15. a. El símbolo 1 pulg^2 significa una _____ _____.

b. Un metro cuadrado se expresa como _____.

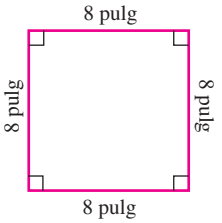
16. En la figura abajo, el símbolo ⌝ indica que el segmento de recta punteado, llamado *altitud,* es _____ a la base.



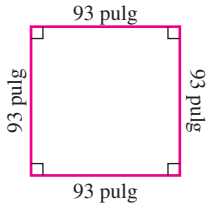
PRÁCTICA GUIADA

Encuentre el perímetro de cada cuadrado. **Vea el Ejemplo 1.**

17.



18.

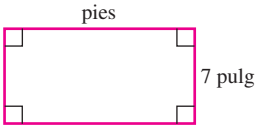


19. Un cuadrado con lados de 5.75 millas de largo

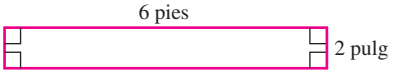
20. Un cuadrado con lados de 3.4 yardas de largo

Encuentre el perímetro de cada rectángulo, en pulgadas. **Vea el Ejemplo 2.**

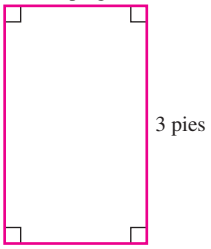
21.



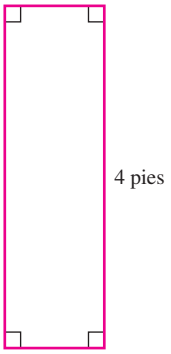
22.



23.



24.



Escriba y después resuelva una ecuación para responder cada problema. **Vea el Ejemplo 3.**

25. El perímetro de un triángulo isósceles es de 35 pies. Cada uno de los lados de igual longitud es de 10 pies de largo. Encuentre la longitud de la base del triángulo.

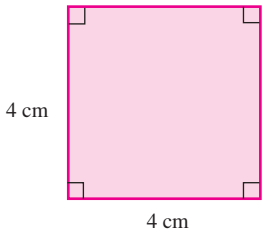
26. El perímetro de un triángulo isósceles es de 94 pies. Cada uno de los lados de igual longitud es de 42 pies de largo. Encuentre la longitud de la base del triángulo.

27. El perímetro de un trapezoide isósceles es de 35 metros. La base superior es de 10 metros de largo y la base inferior es de 15 metros de largo. ¿Cuánto mide cada cateto del trapezoide?

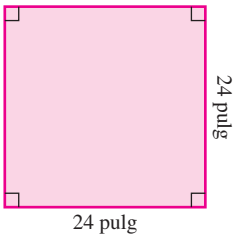
28. El perímetro de un trapezoide isósceles es de 46 pulgadas. La base superior es de 12 pulgadas de largo y la base inferior es de 16 pulgadas de largo. ¿Cuánto mide cada cateto del trapezoide?

Encuentre el área de cada cuadrado. **Vea el Ejemplo 4.**

29.



30.



31. Un cuadrado con lados de 2.5 metros de largo

32. Un cuadrado con lados de 6.8 pies de largo

Para los Problemas 33–40, **Vea el Ejemplo 5.**

33. ¿Cuántas pulgadas cuadradas hay en 1 pie cuadrado?

34. ¿Cuántas pulgadas cuadradas hay en 1 yarda cuadrada?

35. ¿Cuántos milímetros cuadrados hay en 1 metro cuadrado?

36. ¿Cuántos decímetros cuadrados hay en 1 metro cuadrado?

37. ¿Cuántos pies cuadrados hay en 1 milla cuadrada?

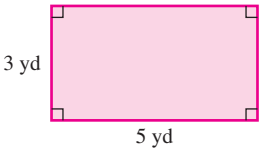
38. ¿Cuántas yardas cuadradas hay en 1 milla cuadrada?

39. ¿Cuántos metros cuadrados hay en 1 kilómetro cuadrado?

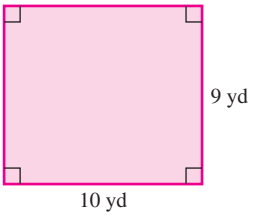
40. ¿Cuántos decámetros cuadrados hay en 1 kilómetro cuadrado?

Encuentre el área de cada rectángulo. Dé la respuesta en pies cuadrados. **Vea el Ejemplo 6.**

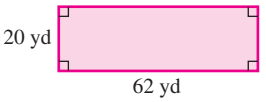
41.



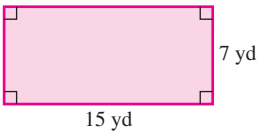
42.



43.

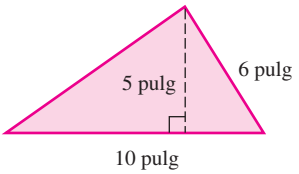


44.

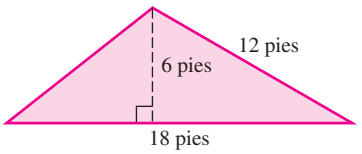


Encuentre el área de cada triángulo. **Vea el Ejemplo 7.**

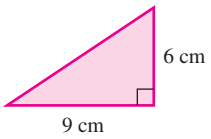
45.



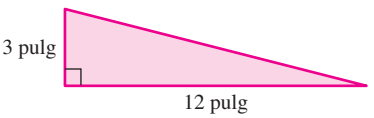
46.



47.

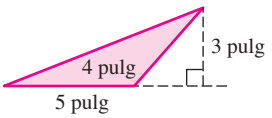


48.

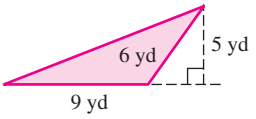


Encuentre el área de cada triángulo. **Vea el Ejemplo 8.**

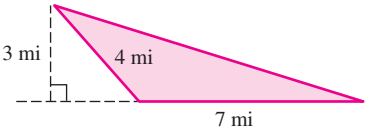
49.



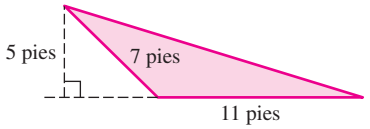
50.



51.

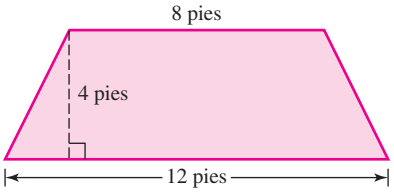


52.

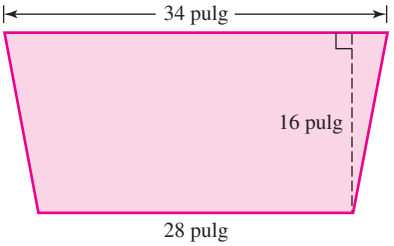


Encuentre el área de cada trapezoide. **Vea el Ejemplo 9.**

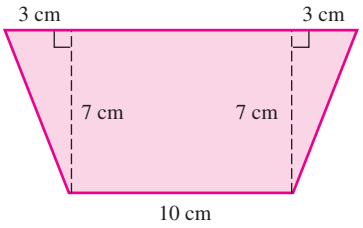
53.



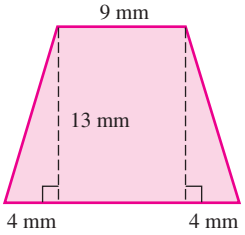
54.



55.



56.



Resuelva cada problema. **Vea el Ejemplo 10.**

57. El área de un paralelogramo es de 60 m^2 y su altura es de 15 m. Encuentre la longitud de su base.

58. El área de un paralelogramo es de 95 $pulg^2$, y su altura es de 5 pulg. Encuentre la longitud de su base.

59. El área de un rectángulo es de 36 cm^2 y su largo es de 3 cm. Encuentre su ancho.

60. El área de un rectángulo es de 144 mi^2 y su largo es de 6 mi. Encuentre su ancho.

61. El área de un triángulo es de 54 m^2 y la longitud de su base es de 3 m. Encuentre la altura.

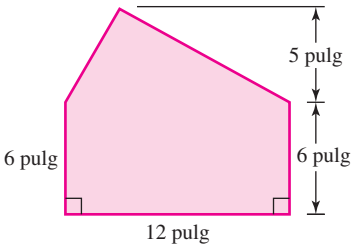
62. El área de un triángulo es de 270 $pies^2$ y la longitud de su base es de 18 pies. Encuentre la altura.

63. El perímetro de un rectángulo es de 64 mi y su largo es de 21 mi. Encuentre su ancho.

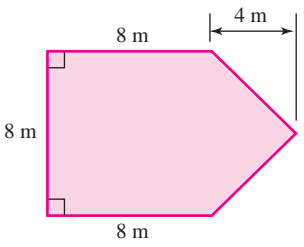
64. El perímetro de un rectángulo es de 26 yd y su largo es de 10.5 yd. Encuentre su ancho.

Encuentre el área de cada figura sombreada. **Vea el Ejemplo 11.**

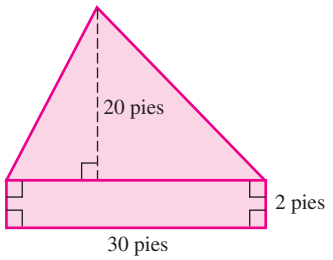
65.



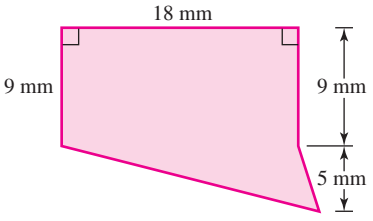
66.



67.

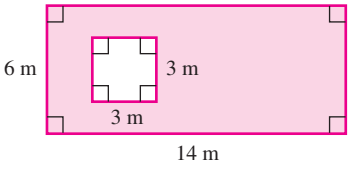


68.

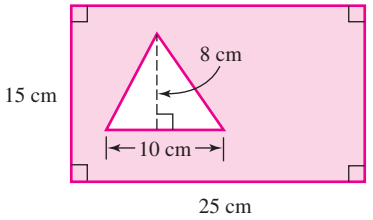


Encuentre el área de cada figura sombreada. **Vea el Ejemplo 12.**

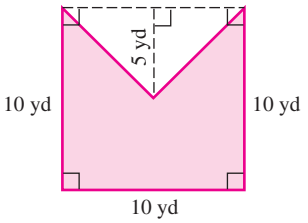
69.



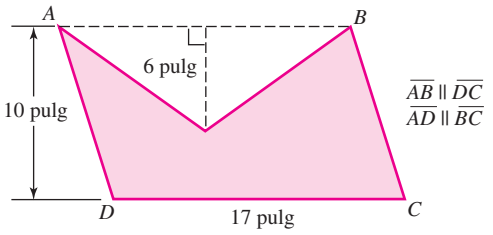
70.



71.



72.



Resuelva cada problema. **Vea el Ejemplo 13.**

73. EMBALDOSADO Una sala es de 8 yardas de largo y 5 yardas de ancho. A $30 por yarda cuadrada, ¿cuánto costará colocar láminas de vinilo en la sala? (Asuma que no hay desperdicio.)

74. ALFOMBRADO Una sala rectangular mide 10 yardas por 6 yardas. A $32 por yarda cuadrada, ¿cuánto costará alfombrar la sala? (Asuma que no hay desperdicio.)

75. CERCAS Un hombre desea delimitar un jardín rectangular con una cerca que cuesta $12.50 el pie, incluyendo la instalación. Encuentre el costo de delimitar el jardín si sus dimensiones son de 110 pies por 85 pies.

76. MARCOS Encuentre el costo de enmarcar una fotografía rectangular con dimensiones de 24 pulgadas por 30 pulgadas si el material para enmarcar cuesta $0.75 por pulgada.

INTÉNTELO

Dibuje y etiquete cada una de las figuras.

77. Dos rectángulos diferentes, cada uno teniendo un perímetro de 40 pulg.

78. Dos rectángulos diferentes, cada uno teniendo un área de 40 pulg^2.

79. Un cuadrado con un área de 25 m^2.

80. Un cuadrado con un perímetro de 20 m.

81. Un paralelogramo con un área de 15 yd^2.

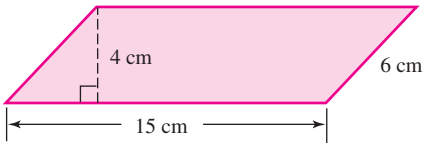
82. Un triángulo con un área de 20 pies^2.

83. Una figura que consiste en una combinación de dos rectángulos, cuya área total es de 80 pies^2.

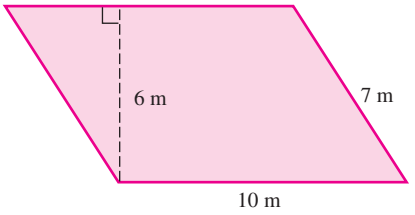
84. Una figura que consiste en una combinación de un rectángulo y un cuadrado, cuya área total es de 164 pies^2.

Encuentre el área de cada paralelogramo.

85.



86.



87. El perímetro de un triángulo isósceles es de 80 metros. Si la longitud de uno de los lados congruentes es de 22 metros, ¿cuál es el largo de la base?

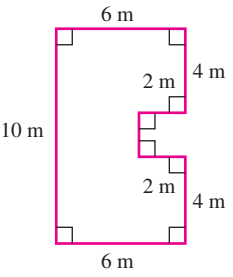
88. El perímetro de un cuadrado es de 35 yardas. ¿Cuál es el largo de un lado del cuadrado?

89. El perímetro de un triángulo equilátero es de 85 pies. Encuentre la longitud de cada lado.

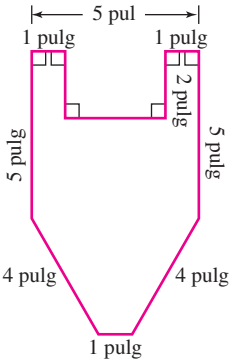
90. Un triángulo isósceles con lados congruentes de 49.3 pulgadas de longitud tiene un perímetro de 121.7 pulgadas. Encuentre la longitud de la base.

Encuentre el perímetro de la figura.

91.

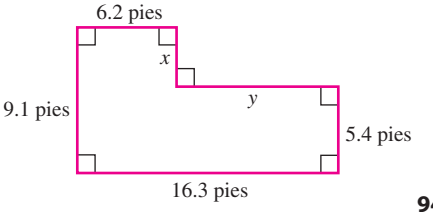


92.

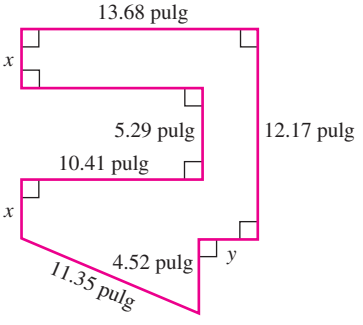


Encuentre x y y. Después encuentre el perímetro de la figura.

93.

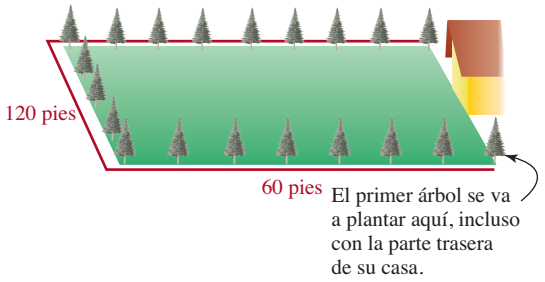


94.

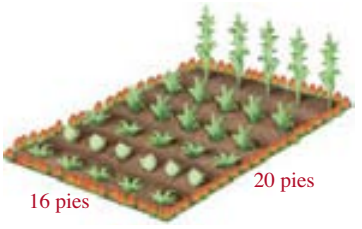


APLICACIONES

95. PAISAJISMO Una mujer desea plantar una cortina de pinos alrededor de tres lados de un jardín de forma rectangular. (Vea la figura de abajo.) Si planta los árboles 3 pies aparte, ¿cuántos árboles necesitará?



96. JARDINERÍA Una jardinera desea plantar un linde de caléndulas alrededor del jardín mostrado abajo, para mantener alejados a los conejos. ¿Cuántas plantas necesitará si permite 6 pulgadas entre las plantas?



97. COMPARACIÓN AL COMPRAR ¿Cuál cuesta más: una baldosa cerámica que cuesta $3.75 por pie cuadrado o un piso de vinilo que cuesta $34.95 por yarda cuadrada?

98. COMPARACIÓN AL COMPRAR ¿Cuál es más barato: un piso de madera dura que cuesta $6.95 por pie cuadrado o una alfombra que cuesta $37.50 por yarda cuadrada?

99. BALDOSAS Un sótano rectangular mide 14 por 20 pies. Las baldosas de vinilo que son de 1 pie^2 cuestan $1.29 cada una. ¿Cuánto costarán las baldosas para cubrir el piso? (Asuma que no hay desperdicio.)

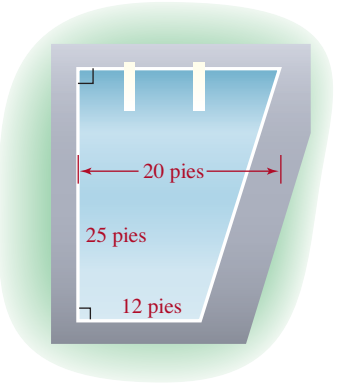
100. PINTAR La pared norte de un establo es un rectángulo de 23 pies de alto y 72 pies de largo. Hay cinco ventanas en la pared, cada una de 4 por 6 pies. Si un galón de pintura cubrirá 300 pies^2, ¿cuántos galones de pintura debe comprar el pintor para pintar la pared?

101. VELAS Si el nailon cuesta $12 por yarda cuadrada, ¿cuánto costará la tela para formar una vela triangular con una base de 12 pies y una altura de 24 pies?

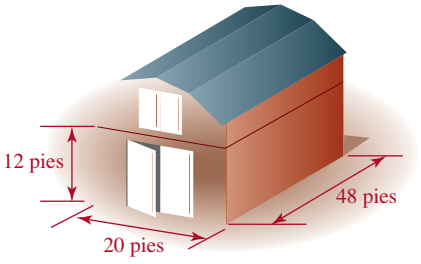
102. REMODELACIÓN El extremo del gablete de una casa es un triángulo isósceles con una altura de 4 yardas y una base de 23 yardas. Se requerirá un recubrimiento de imprimación y un recubrimiento de acabado para pintar el triángulo. La imprimación cuesta $17 por galón y la pintura del acabado cuesta $23 por galón. Si un galón de cada tipo de pintura cubre 300 pies cuadrados, ¿cuánto costará pintar el gablete, sin incluir la mano de obra?

103. GEOGRAFÍA Use las dimensiones del trapezoide que se superpone sobre el estado de Nevada para estimar el área del "Estado de la plata".

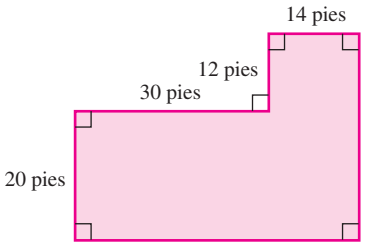
104. CUBIERTAS SOLARES Una piscina tiene la forma mostrada abajo. ¿Cuántos pies cuadrados de material de cubierta solar se necesitarán para cubrir la piscina? ¿Cuánto costará si cuesta $1.95 por pie cuadrado? (Asuma que no hay desperdicio.)



105. CARPINTERÍA ¿Cuántas chapas de placas de yeso de 4 pies por 8 pies se necesitan para laminar las paredes interiores en el primer piso del establo mostrado abajo? (Asuma que los carpinteros cubrirán la pared por completo y después cortarán las áreas de las puertas y ventanas.)



106. CARPINTERÍA Si cuesta $90 por pie cuadrado construir una casa de un piso al norte de Wisconsin, encuentre el costo de construir la casa con la distribución mostrada abajo.

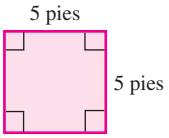


REDACCIÓN

107. Explique la diferencia entre el perímetro y el área.

108. ¿Por qué es necesario que el área se mida en unidades cuadradas?

109. Un estudiante expresó el área del cuadrado en la figura abajo como de 25^2 pies. Explique su error.



110. Refiérase a la figura de abajo. ¿Qué debe hacerse antes de que se pueda utilizar la fórmula para encontrar el área de este rectángulo?

REPASO

Simplifique cada expresión.

111. $8\left(\frac{3}{4}t\right)$

112. $27\left(\frac{2}{3}m\right)$

113. $-\frac{2}{3}(3w - 6)$

114. $\frac{1}{2}(2y - 8)$

115. $-\frac{7}{16}x - \frac{3}{16}x$

116. $-\frac{5}{18}x - \frac{7}{18}x$

117. $60\left(\frac{3}{20}r - \frac{4}{15}\right)$

118. $72\left(\frac{7}{8}f - \frac{8}{9}\right)$

Objetivos

1. Definir el círculo, el radio, la cuerda, el diámetro y el arco.
2. Encontrar la circunferencia de un círculo.
3. Encontrar el área de un círculo.

SECCIÓN 9.8
Círculos

En esta sección se explicará el círculo, una de las figuras geométricas más útiles. De hecho, los descubrimientos del fuego y de la rueda circular son dos de los eventos más importantes en la historia de la raza humana. Se comenzará el estudio introduciendo parte del vocabulario básico asociado con los círculos.

1 Definir el círculo, el radio, la cuerda, el diámetro y el arco

© iStockphoto.com/Pgiam

Círculo

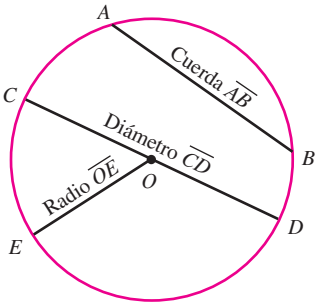
Un **círculo** es el conjunto de puntos en un plano que se encuentran a una distancia fija de un punto llamado **centro.**

A un segmento trazado del centro de un círculo a un punto en el círculo se le llama **radio.** A partir de la definición, se tiene que todos los radios del mismo círculo son de la misma longitud.

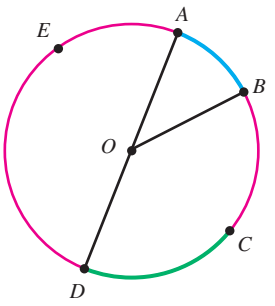
Una **cuerda** de un círculo es un segmento de recta que conecta dos puntos en el círculo. Un **diámetro** es una cuerda que pasa a través del centro del círculo. Dado que un diámetro D de un círculo es dos veces tan largo como un radio r, se tiene

$$D = 2r$$

Cada una de las definiciones anteriores se ilustran en la figura (a) abajo, en la que O es el centro del círculo.



(a)



(b)

A cualquier parte de un círculo se le llama **arco.** En la figura (b) arriba, la parte del círculo del punto A al punto B que está remarcada en azul es $\overset{\frown}{AB}$, se lee como "arco AB". $\overset{\frown}{CD}$ es la parte del círculo del punto C al punto D que está remarcada en verde. Un arco que es de la mitad de un círculo es un **semicírculo.**

Semicírculo

Un **semicírculo** es un arco de un círculo cuyos puntos extremos son los puntos extremos de un diámetro.

Si el punto O es el centro del círculo en la figura (b), $\overline{AD}$ es un diámetro y $\overset{\frown}{AED}$ es un semicírculo. La letra en medio E distingue el semicírculo $\overset{\frown}{AED}$ (la parte del círculo del punto A al punto D que incluye al punto E) del semicírculo $\overset{\frown}{ABD}$ (la parte del círculo del punto A al punto D que incluye al punto B).

Un arco que es más corto que un semicírculo es un **arco menor.** Un arco que es más largo que un semicírculo es un **arco mayor.** En la figura (b),

$\overset{\frown}{AE}$ es un arco menor y $\overset{\frown}{ABE}$ es un arco mayor.

Consejo útil Con frecuencia es posible nombrar un arco mayor de más de una forma. Por ejemplo, en la figura (b), el arco mayor $\overset{\frown}{ABE}$ es la parte del círculo del punto A al punto E que incluye al punto B. Los otros nombres para el arco mayor son $\overset{\frown}{ACE}$ y $\overset{\frown}{ADE}$.

2 Encontrar la circunferencia de un círculo

Desde hace mucho tiempo, los matemáticos han sabido que la razón de la distancia alrededor de un círculo (la circunferencia) dividida entre la longitud de su diámetro es de aproximadamente 3. En el Primer Libro de los Reyes, Capítulo 7, de la Biblia describen un tanque de bronce redondo que era de 15 pies de borde a borde y de 45 pies de circunferencia, y $\frac{45}{15} = 3$. En la actualidad, se utiliza un valor más preciso para esta razón, conocida como π (pi). Si C es la circunferencia de un círculo y D es la longitud de su diámetro, entonces

$$\pi = \frac{C}{D} \quad \text{donde } \pi = 3.141592653589\ldots$$

$\frac{22}{7}$ y 3.14 se utilizan con frecuencia como estimados de π.

Si se multiplican ambos lados de $\pi = \frac{C}{D}$ por D, se tiene la siguiente fórmula.

Circunferencia de un círculo

La circunferencia de un círculo está dada por la fórmula

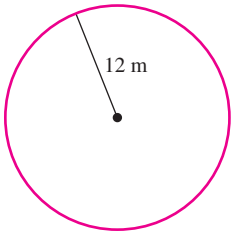
$C = \pi D$ donde C es la circunferencia y D es la longitud del diámetro

Dado que un diámetro de un círculo es del doble del largo que un radio r, se puede sustituir $2r$ para D en la fórmula $C = \pi D$ para obtener otra fórmula para la circunferencia C:

$C = 2\pi r$ La notación $2\pi r$ significa $2 \cdot \pi \cdot r$.

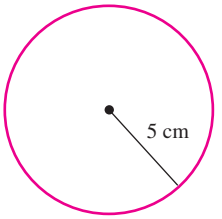
Auto-revisión 1

Encuentre la circunferencia del círculo mostrado abajo. Dé la respuesta exacta y una aproximación.



Ahora intente **Problema 25**

EJEMPLO 1 Encuentre la circunferencia del círculo mostrado a la derecha. Dé la respuesta exacta y una aproximación.



Estrategia Se sustituirá el 5 para r en la fórmula $C = 2\pi r$ y se evaluará el lado derecho.

POR QUÉ La variable C representa la circunferencia desconocida del círculo.

Solución

$C = 2\pi r$ Esta es la fórmula para la circunferencia de un círculo.

$C = 2\pi(5)$ Sustituya el 5 para r, el radio.

$C = 2(5)\pi$ Cuando un producto involucra a π, por lo regular se rescribe para que π sea el último factor.

$C = 10\pi$ Realice primero la multiplicación: $2(5) = 10$. Esta es la respuesta exacta.

La circunferencia del círculo es de exactamente 10π cm. Si se reemplaza π con 3.14, se obtiene una aproximación de la circunferencia.

$C = 10\pi$

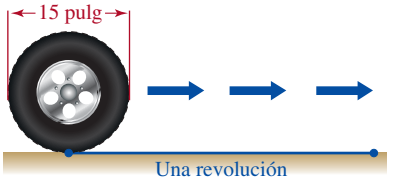
$C \approx 10(3.14)$

$C \approx 31.4$ Para multiplicar por 10, mueva el punto decimal en el 3.14 una posición a la derecha.

La circunferencia del círculo es de aproximadamente 31.4 cm.

Utilizando su CALCULADORA **Calcular las revoluciones de un neumático**

Cuando se presiona la tecla $\boxed{\pi}$ en una calculadora científica (en algunos modelos se debe presionar primero la tecla $\boxed{2nd}$), se muestra una aproximación de π. Para ilustrar cómo utilizar esta tecla, considere el siguiente problema. ¿Cuántas veces revoluciona a la derecha el neumático mostrado cuando un automóvil realiza un recorrido de 25 millas?



Primero se encuentra la circunferencia del neumático. A partir de la figura, se observa que el diámetro del neumático es de 15 pulgadas. Dado que la circunferencia de un círculo es el producto de π y la longitud de su diámetro, la circunferencia del neumático es de $\pi \cdot 15$ pulgadas o de 15π pulgadas. (Por lo regular, se rescribe un producto como $\pi \cdot 15$ para que π sea el segundo factor.)

Después se cambian las 25 millas a pulgadas utilizando dos factores de conversión de unidades.

$$\frac{25 \text{ millas}}{1} \cdot \frac{5{,}280 \text{ pies}}{1 \text{ milla}} \cdot \frac{12 \text{ pulg.}}{1 \text{ pie}} \cdot 25 \cdot 5{,}280 \cdot 12 \text{ pulg}$$

Las unidades de millas y pies pueden eliminarse.

La longitud del recorrido es $25 \cdot 5{,}280 \cdot 12$ pulgadas.

Por último, se divide la longitud del recorrido entre la circunferencia del neumático para obtener

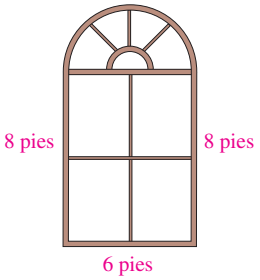
$$\text{El número de revoluciones del neumático} = \frac{25 \cdot 5{,}280 \cdot 12}{15\pi}$$

Se puede utilizar una calculadora científica para realizar este cálculo.

[( ] 25 [×] 5280 [×] 12 [ )] [÷] [( ] 15 [×] [π] [ )] [=] 33613.52398

El neumático realiza alrededor de 33,614 revoluciones.

EJEMPLO 2 ***Arquitectura*** Una ventana normanda se construye añadiendo una ventana circular a la parte superior de una ventana rectangular. Encuentre el perímetro de la ventana normanda mostrada aquí.



Estrategia Se encontrará el perímetro de la parte rectangular y la circunferencia de la parte circular de la ventana y se sumarán los resultados.

POR QUÉ La ventana es una combinación de un rectángulo y un semicírculo.

Solución El perímetro de la parte rectangular es

$$P_{\text{parte rectangular}} = 8 + 6 + 8 = 22$$

Sume sólo 3 lados del rectángulo.

El perímetro del semicírculo es la mitad de la circunferencia de un círculo que tiene un diámetro de 6 pies.

$$P_{\text{semicírculo}} = \frac{1}{2}C$$

Esta es la fórmula para la circunferencia de un semicírculo.

$$P_{\text{semicírculo}} = \frac{1}{2}\pi D$$

Dado que se conoce el diámetro, reemplace C con πD. Se pudo haber reemplazado C con $2\pi r$.

$$= \frac{1}{2}\pi(6)$$

Sustituya el 6 para D, el diámetro.

$$\approx 9.424777961$$

Use una calculadora para realizar la multiplicación.

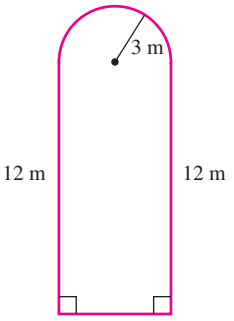
El perímetro total es la suma de las dos partes.

$$P_{\text{total}} = P_{\text{parte rectangular}} + P_{\text{semicírculo}}$$
$$P_{\text{total}} \approx 22 + 9.424777961$$
$$\approx 31.424777961$$

A la centésima más cercana, el perímetro de la ventana es de 31.42 pies.

Auto-revisión 2

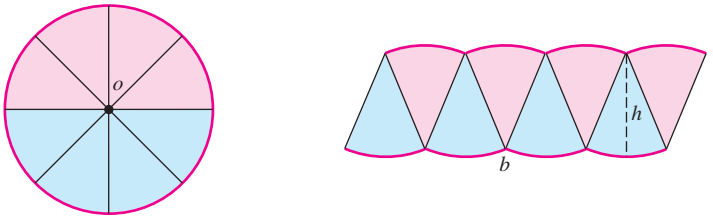
Encuentre el perímetro de la figura mostrada abajo. Redondee a la centésima más cercana. (Asuma que el arco es un semicírculo.)



Ahora intente **Problema 29**

3 Encontrar el área de un círculo

Si se divide el círculo mostrado en la figura (a) en la siguiente página en un número par de piezas con forma de rebanada de pay y después se reacomodan como se muestra en la figura (b), se tiene una figura que se parece a un paralelogramo. La figura tiene una base b que es de la mitad de la circunferencia del círculo y su altura h es aproximadamente de la misma longitud que un radio del círculo.



(a) (b)

Si se divide el círculo en más piezas con forma de rebanada de pay, la figura se parecerá más y más a un paralelogramo y se puede encontrar su área utilizando la fórmula para el área de un paralelogramo.

$A = bh$

$A = \frac{1}{2}Cr$ Sustituya $\frac{1}{2}$ de la circunferencia para b, la longitud de la base del "paralelogramo". Sustituya r para la altura del "paralelogramo".

$= \frac{1}{2}(2\pi r)r$ Sustituya $2\pi r$ para C.

$= \pi r^2$ Simplifique: $\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$ y $r \cdot r = r^2$.

Este resultado produce la siguiente fórmula.

Área de un círculo

El área de un círculo con radio r está dada por la fórmula

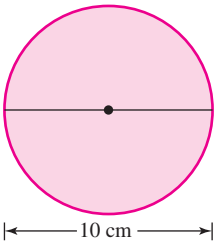
$$A = \pi r^2$$

Auto-revisión 3

Encuentre el área de un círculo con un diámetro de 12 pies. Dé la respuesta exacta y una aproximación a la décima más cercana.

Ahora intente **Problema 33**

EJEMPLO 3 Encuentre el área del círculo mostrado a la derecha. Dé la respuesta exacta y una aproximación a la décima más cercana.



Estrategia Se encontrará el radio del círculo, se sustituirá ese valor para r en la fórmula $A = \pi r^2$ y se evaluará el lado derecho.

POR QUÉ La variable A representa el área desconocida del círculo.

Solución Dado que la longitud del diámetro es de 10 centímetros y que la longitud de un diámetro es del doble de la longitud de un radio, la longitud del radio es de 5 centímetros.

$A = \pi r^2$ Esta es la fórmula para el área de un círculo.

$A = \pi(5)^2$ Sustituya el 5 para r, el radio del círculo. La notación πr^2 significa $\pi \cdot r^2$.

$= \pi(25)$ Evalúe la expresión exponencial.

$= 25\pi$ Escriba el producto de tal manera que π sea el último factor.

El área exacta del círculo es de 25π cm^2. Se puede utilizar una calculadora para aproximar el área.

$A \approx 78.53981634$ Use una calculadora para realizar la multiplicación: $25 \cdot \pi$.

A la décima más cercana, el área es de 78.5 cm^2.

Utilizando su CALCULADORA Pintar un helipuerto

La pintura anaranjada está disponible en contenedores de un galón a \$19 cada uno y cada galón cubrirá 375 pies^2. Para calcular cuánto costará la pintura para cubrir un helipuerto circular de 60 pies de diámetro, primero se calcula el área del helipuerto.

$A = \pi r^2$ Esta es la fórmula para el área de un círculo.

$A = \pi(30)^2$ Sustituya un medio de 60 para r, el radio del helipuerto circular.

$= 30^2\pi$ Escriba el producto de tal manera que π sea el último factor.

El área del helipuerto es de exactamente $30^2\pi$ pies^2. Dado que cada galón cubrirá 375 pies^2, se puede encontrar el número de galones de pintura necesarios dividiendo $30^2\pi$ entre 375.

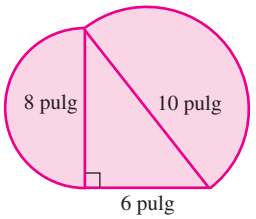
$$\text{Número de galones necesarios} = \frac{30^2\pi}{375}$$

Se puede utilizar una calculadora científica para realizar este cálculo.

$30\ [x^2]\ [\times]\ [\pi]\ [=]\ [\div]\ 375\ [=]$ 7.539822369

Debido a que la pintura sólo viene en galones completos, el pintor necesitará comprar 8 galones. El costo de la pintura será de 8(\$19), o de \$152.

EJEMPLO 4 Encuentre el área de la figura sombreada a la derecha. Redondee a la centésima más cercana.



Estrategia Se encontrará el área de toda la figura sombreada utilizando el siguiente método:

$$A_{\text{total}} = A_{\text{triángulo}} + A_{\text{semicírculo más pequeño}} + A_{\text{semicírculo más grande}}$$

POR QUÉ La figura sombreada es una combinación de una región triangular y dos regiones semicirculares.

Solución El área del triángulo es

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(6)(8) = \frac{1}{2}(48) = 24$$

Dado que la fórmula para el área de un círculo es $A = \pi r^2$, la fórmula para el área de un semicírculo es $A = \frac{1}{2}\pi r^2$. Por tanto, el área delimitada por el semicírculo más pequeño es

$$A_{\text{semicírculo más pequeño}} = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi(4)^2 = \frac{1}{2}\pi(16) = 8\pi$$

El área delimitada por el semicírculo más grande es

$$A_{\text{semicírculo más grande}} = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi(5)^2 = \frac{1}{2}\pi(25) = 12.5\pi$$

El área total es la suma de los tres resultados:

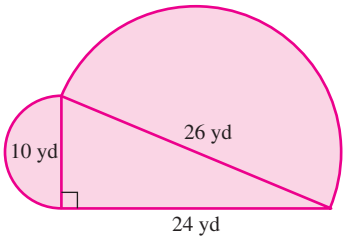
$A_{\text{total}} = 24 + 8\pi + 12.5\pi \approx 88.4026494$ Use una calculadora para desarrollar las operaciones.

$$\begin{array}{r} 12.5 \\ 2\overline{)25.0} \\ -2 \\ \hline 05 \\ -4 \\ \hline 10 \\ -10 \\ \hline 0 \end{array}$$

A la centésima más cercana, el área de la figura sombreada es de 88.40 pulg^2.

Auto-revisión 4

Encuentre el área de la figura sombreada abajo. Redondee a la centésima más cercana.



Ahora intente **Problema 37**

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. 24π m $\approx$ 75.4 m **2.** 39.42 m **3.** 36π pies^2 $\approx$ 113.1 pies^2 **4.** 424.73 yd^2

SECCIÓN 9.8 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

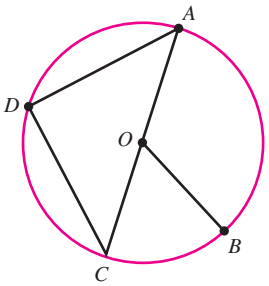
VOCABULARIO

Complete los espacios.

1. A un segmento de recta trazado del centro de un círculo a un punto en el círculo se le llama _____.
2. A un segmento que une dos puntos en un círculo se le llama _____.
3. Un _____ es una cuerda que pasa a través del centro de un círculo.
4. Un arco que es de la mitad de un círculo completo es un _____.
5. A la distancia alrededor de un círculo se le llama su _____.
6. Al área delimitada por un círculo se le llama su _____.
7. Un diámetro de un círculo es del _____ de largo que un radio.
8. Suponga que la circunferencia exacta de un círculo es de 3π pies. Cuando se escribe $C \approx 9.42$ pies, se está dando una _____ de la circunferencia.

CONCEPTOS

Refiérase a la figura abajo, donde el punto O es el centro del círculo.



9. Nombre cada radio.
10. Nombre un diámetro.
11. Nombre cada cuerda.
12. Nombre cada arco menor.
13. Nombre cada semicírculo.
14. Nombre el arco mayor $\overset{\frown}{ABD}$ de otra manera.
15. **a.** Si conoce el radio de un círculo, ¿cómo puede encontrar su diámetro?
    b. Si conoce el diámetro de un círculo, ¿cómo puede encontrar su radio?
16. **a.** ¿Cuáles son las dos fórmulas que pueden utilizarse para encontrar la circunferencia de un círculo?
    b. ¿Cuál es la fórmula para el área de un círculo?
17. Si C es la circunferencia de un círculo y D es su diámetro, entonces $\frac{C}{D} =$ ☐.
18. Si D es el diámetro de un círculo y r es su radio, entonces $D =$ ☐ r.
19. Cuando se evalúa $\pi(6)^2$, ¿qué operación debe desarrollarse primero?
20. Redondee $\pi = 3.141592653589\ldots$ a la centésima más cercana.

NOTACIÓN

Complete los espacios.

21. El símbolo $\overset{\frown}{AB}$ se lee como "_____ _____".
22. A la centésima más cercana, el valor de π es _____.
23. **a.** ¿En la expresión $2\pi r$, qué operaciones se indican?
    b. ¿En la expresión πr^2, qué operaciones se indican?
24. Escriba cada expresión en una mejor forma. Deje π en su respuesta.

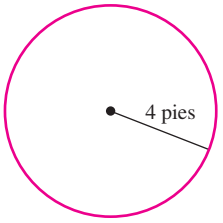
    a. $\pi(8)$ **b.** $2\pi(7)$ **c.** $\pi \cdot \frac{25}{3}$

PRÁCTICA GUIADA

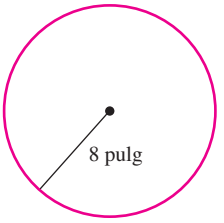
Las respuestas para los problemas en este Conjunto de estudio varían ligeramente, dependiendo de la aproximación de π empleada.

Encuentre la circunferencia del círculo mostrado abajo. Dé la respuesta exacta y una aproximación a la décima más cercana. Vea el Ejemplo 1.

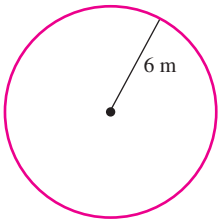
25.



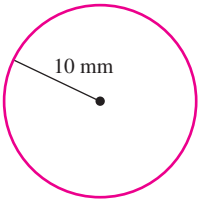
26.



27.

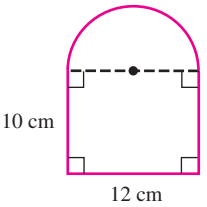


28.

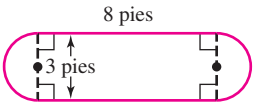


Encuentre el perímetro de cada figura. Asuma que cada arco es un semicírculo. Redondee a la centésima más cercana. Vea el Ejemplo 2.

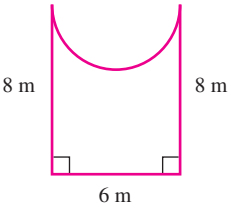
29.



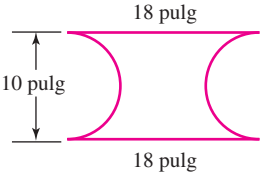
30.



31.

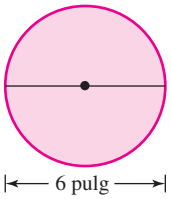


32.

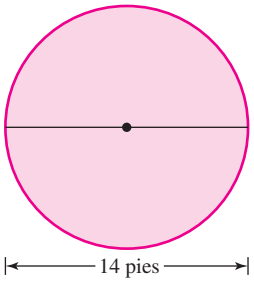


Encuentre el área de cada círculo proporcionada la siguiente información. Dé la respuesta exacta y una aproximación a la décima más cercana. Vea el Ejemplo 3.

33.



34.

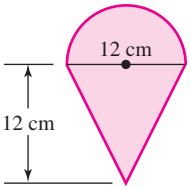


35. Encuentre el área de un círculo con diámetro de 18 pulgadas.

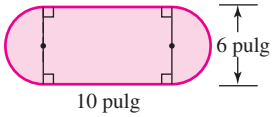
36. Encuentre el área de un círculo con diámetro de 20 metros.

Encuentre el área total de cada figura. Asuma que cada arco es un semicírculo. Redondee a la décima más cercana. Vea el Ejemplo 4.

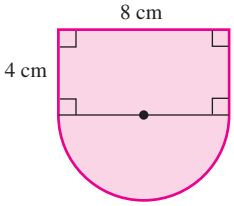
37.



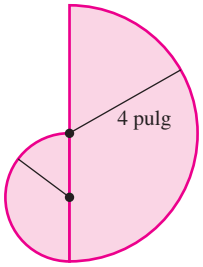
38.



39.



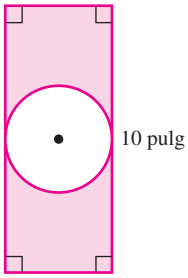
40.



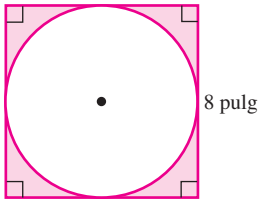
INTÉNTELO

Encuentre el área de cada región sombreada. Redondee a la décima más cercana.

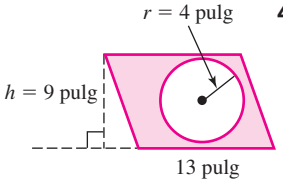
41.



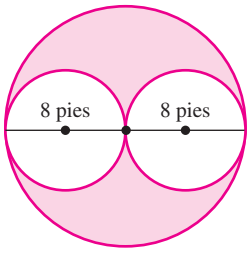
42.



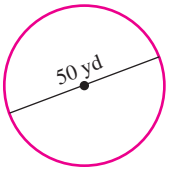
43.



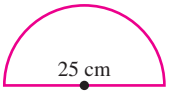
44.



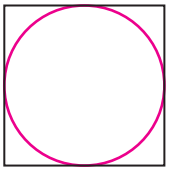
45. Encuentre la circunferencia del círculo mostrado abajo. Dé la respuesta exacta y una aproximación a la centésima más cercana.



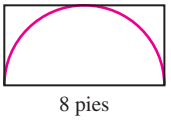
46. Encuentre la circunferencia del semicírculo mostrado abajo. Dé la respuesta exacta y una aproximación a la centésima más cercana.



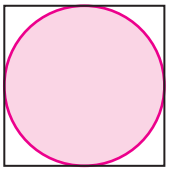
47. Encuentre la circunferencia del círculo mostrado abajo si el cuadrado tiene lados de 6 pulgadas de longitud. Dé la respuesta exacta y una aproximación a la décima más cercana.



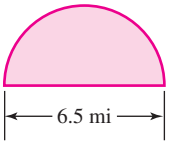
48. Encuentre la circunferencia del semicírculo mostrado abajo si la longitud del rectángulo en el que está encerrado es de 8 pies. Dé la respuesta exacta y una aproximación a la décima más cercana.



49. Encuentre el área del círculo mostrado abajo si el cuadrado tiene lados de 9 milímetros de longitud. Dé la respuesta exacta y una aproximación a la décima más cercana.

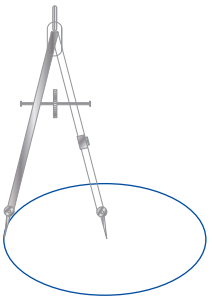


50. Encuentre el área de la región semicircular sombreada mostrada abajo. Dé la respuesta exacta y una aproximación a la décima más cercana.



APLICACIONES

51. Suponga que dos "piernas" del compás mostrado abajo se ajustan de tal manera que la distancia entre los extremos puntiagudos es de 1 pulgada. Después se traza un círculo.



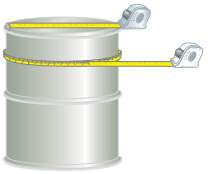
a. ¿Cuál será el radio del círculo?

b. ¿Cuál será el diámetro del círculo?

c. ¿Cuál será la circunferencia del círculo? Dé una respuesta exacta y una aproximación a la centésima más cercana.

d. ¿Cuál será el área del círculo? Dé una respuesta exacta y una aproximación a la centésima más cercana.

52. Suponga que se encuentra la distancia alrededor de una lata y la distancia a través de la lata midiendo la tapa, como se muestra a la derecha. Después se realiza una comparación, en la forma de una razón:



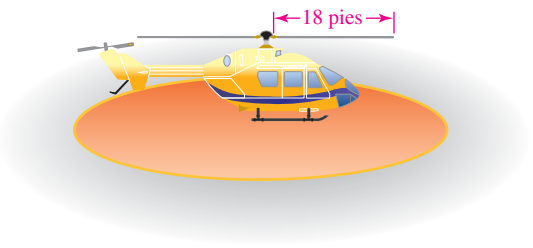
$$\frac{\text{La distancia alrededor de la lata}}{\text{La distancia a través de la tapa de la lata}}$$

Después que se realice la división indicada, ¿a qué número será cercano el resultado?

Cuando sea apropiado, dé la respuesta exacta y una aproximación a la centésima más cercana. Las respuestas pueden variar ligeramente, dependiendo de la aproximación de π empleada.

53. LAGOS El Lago Round tiene una orilla circular que es de 2 millas de diámetro. Encuentre el área del lago.

54. HELICÓPTEROS Refiérase a la figura de abajo. ¿Qué tanto recorre un punto en la punta de la cuchilla del rotor cuando realiza una revolución completa?



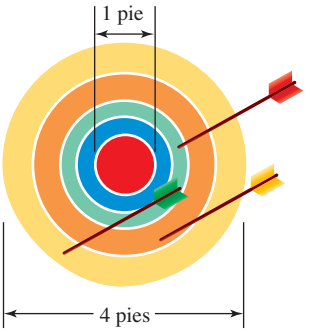
55. SECUOYA GIGANTE El árbol de secuoya más grande es el árbol General Sherman en el Parque nacional Secuoya en California. De hecho, se considera el ser vivo más grande en el mundo. De acuerdo con el *Guinness Book of World Records*, tiene un diámetro de 32.66 pies, medido $4\frac{1}{2}$ pies sobre el suelo. ¿Cuál es la circunferencia del árbol a esa altura?

56. TRAMPOLÍN Vea la figura de abajo. La distancia del centro del trampolín al borde de su marco de acero es de 7 pies. El acolchado protector que cubre los resortes es de 18 pulgadas de ancho. Encuentre el área de la superficie de salto circular del trampolín, en pies cuadrados.

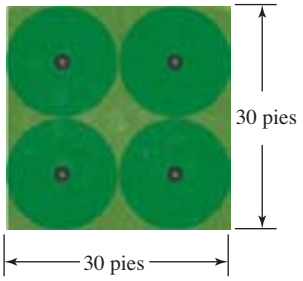
57. TROTAR Joan desea trotar 10 millas en una pista circular de $\frac{1}{4}$ de milla de diámetro. ¿Cuántas vueltas debe darle a la pista? Redondee a la vuelta más cercana.

58. ALFOMBRADO Un capitolio estatal tiene un piso circular de 100 pies de diámetro. La legislatura desea que se alfombre el piso. La licitación más baja es de $83 por yarda cuadrada, incluyendo la instalación. ¿Cuánto debe gastar la legislatura por el proyecto de alfombrado? Redondee al dólar más cercano.

59. ARQUERÍA Vea la figura a la derecha. Encuentre el área del blanco completo y el área del centro del blanco. ¿Qué porcentaje del área del blanco es el centro del blanco?



60. PAISAJISMO Vea la figura a la derecha. ¿Cuántos pies cuadrados de césped no son regados por los cuatro rociadores en el centro de cada círculo?



REDACCIÓN

61. Explique a qué se refiere con la circunferencia de un círculo.

62. Explique a qué se refiere con el área de un círculo.

63. Explique el significado de π.

64. Explique a qué se refiere con que un automóvil tiene un *radio de giro* pequeño.

REPASO

65. Escriba $\frac{9}{10}$ como un porcentaje.

66. Escriba $\frac{7}{8}$ como un porcentaje.

67. Escriba 0.827 como un porcentaje.

68. Escriba 0.036 como un porcentaje.

69. COSTOS UNITARIOS Un paquete de 24 onzas de frijoles se vende por $1.29. Dé el costo unitario en centavos por onza.

70. MILLAJE Un automóvil recorre 1,235 millas con 51.3 galones de gasolina y otro recorre 1,456 con 55.78 galones. ¿Cuál automóvil tiene el mejor rendimiento de gasolina?

71. ¿Cuántos lados tiene un pentágono?

72. ¿Cuál es la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo?

SECCIÓN 9.9
Volumen

Objetivos

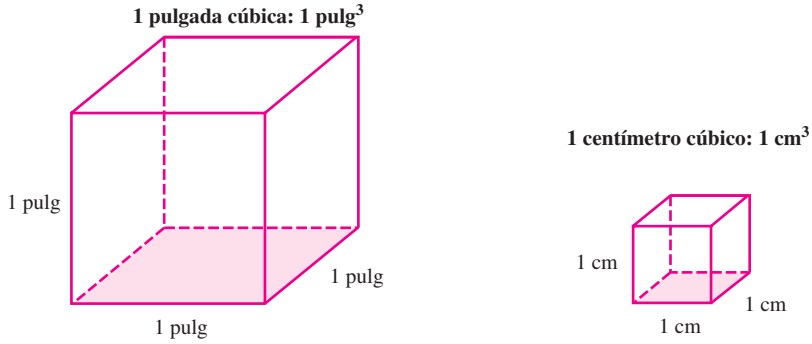
1. Encontrar el volumen de sólidos rectangulares, prismas y pirámides.
2. Encontrar el volumen de cilindros, conos y esferas.

Se han estudiado las maneras de calcular el perímetro y el área de figuras bidimensionales que se encuentran en un plano, como rectángulos, triángulos y círculos. Ahora se considerarán las figuras tridimensionales que ocupan espacio, como sólidos rectangulares, cilindros y esferas. En esta sección se introducirá el vocabulario asociado con estas figuras al igual que las fórmulas que se utilizan para encontrar su volumen. Los volúmenes se miden en unidades cúbicas, como pies cúbicos, yardas cúbicas o centímetros cúbicos. Por ejemplo,

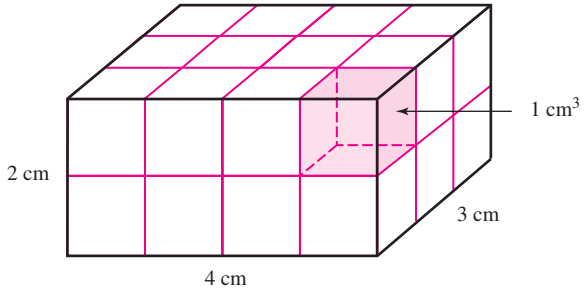
- La capacidad de un refrigerador se mide en pies cúbicos.
- La grava y la tierra vegetal se compran por yarda cúbica.
- Las cantidades de la medicina con frecuencia se miden en centímetros cúbicos.

1 Encontrar el volumen de sólidos rectangulares, prismas y pirámides

El **volumen** de una figura tridimensional es una medida de su capacidad. La siguiente ilustración muestra dos unidades de volumen comunes: pulgadas cúbicas, escritas como pulg^3, y centímetros cúbicos, escritos como cm^3.



El volumen de una figura puede pensarse como el número de unidades cúbicas que se acomodarán dentro de sus límites. Si se divide en cubos la figura mostrada en negro abajo, cada cubo representa un volumen de 1 cm^3. Debido a que hay 2 niveles con 12 cubos en cada nivel, el volumen del prisma es de 24 cm^3.



Auto-revisión 1

¿Cuántos centímetros cúbicos hay en un 1 metro cúbico?

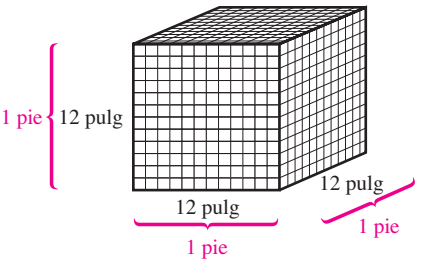
Ahora intente **Problema 25**

EJEMPLO 1 ¿Cuántas pulgadas cúbicas hay en 1 pie cúbico?

Estrategia Una figura es de utilidad para resolver este problema. Se dibujará un cubo y se dividirá cada uno de sus lados en 12 partes de igual longitud.

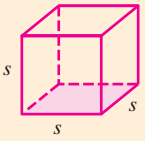
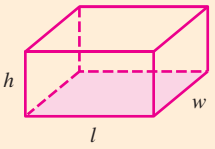
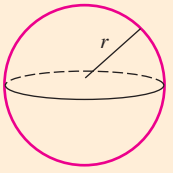
POR QUÉ Dado que un pie cúbico es un cubo con cada lado midiendo 1 pie, cada lado también mide 12 pulgadas.

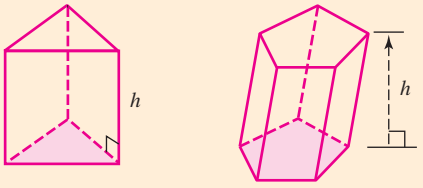
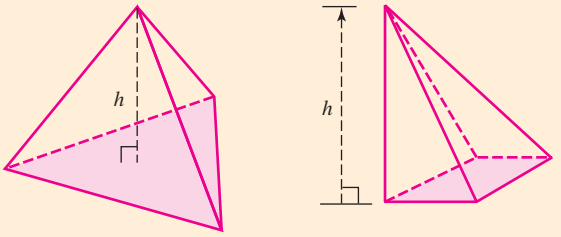
Solución La figura a la derecha ayuda a comprender la situación. Observe que cada nivel del pie cúbico contiene $12 \cdot 12$ pulgadas cúbicas y que el pie cúbico tiene 12 niveles. Se puede utilizar una multiplicación para contar el número de pulgadas cúbicas contenidas en la figura. Hay

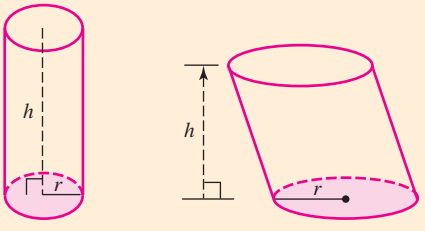
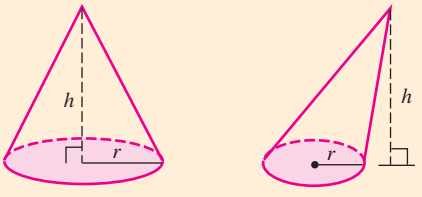


$$12 \cdot 12 \cdot 12 = 1{,}728$$

pulgadas cúbicas en 1 pie cúbico. Por tanto, $1 \text{ pie}^3 = 1{,}728 \text{ pulg}^3$.

Cubo	Sólido rectangular	Esfera
		
$V = s^3$	$V = lwh$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
donde s es la longitud de un lado	donde l es el largo, w es el ancho y h es la altura	donde r es el radio

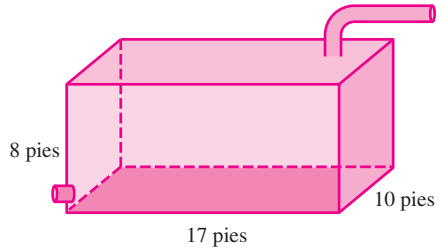
Prisma	Pirámide
	
$V = Bh$	$V = \frac{1}{3}Bh$
donde B es el área de la base y h es la altura	donde B es el área de la base y h es la altura

Cilindro	Cono
	
$V = Bh$ o $V = \pi r^2 h$	$V = \frac{1}{3}Bh$ o $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
donde B es el área de la base, h es la altura y r es el radio de la base	donde B es el área de la base, h es la altura y r es el radio de la base

En la práctica, no se encuentran los volúmenes de las figuras tridimensionales contando cubos. En su lugar, se utilizan las fórmulas mostradas en la tabla de la página anterior. Observe que varias de las fórmulas involucran la variable B. Representa el área de la base de la figura.

¡Cuidado! La altura de un sólido geométrico siempre se mide a lo largo de una recta perpendicular a su base.

EJEMPLO 2 ***Tanques de almacenamiento*** Un tanque de almacenamiento de gasolina es de la forma de un sólido rectangular con dimensiones de 17 pies por 10 pies por 8 pies. (Vea la figura de abajo.) Encuentre su volumen.



Estrategia Se sustituirá el 17 para l, el 10 para w y el 8 para h en la fórmula $V = lwh$ y se evaluará el lado derecho.

POR QUÉ La variable V representa el volumen de un sólido rectangular.

Solución

$V = lwh$ Esta es la fórmula para el volumen de un sólido rectangular.

$V = 17(10)(8)$ Sustituya el 17 para l, el largo, el 10 para w, el ancho y el 8 para h, la altura del tanque.

$= 1{,}360$ Realice la multiplicación.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 5}\\ 170\\ \times\ \ 8\\ \hline 1{,}360 \end{array}$$

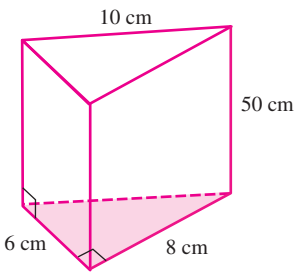
El volumen del tanque es de 1,360 pies^3.

Auto-revisión 2

Encuentre el volumen de un sólido rectangular con dimensiones de 8 metros por 12 metros por 20 metros.

Ahora intente **Problema 29**

EJEMPLO 3 Encuentre el volumen del prisma mostrado a la derecha.



Estrategia Primero, se encontrará el área de la base del prisma.

POR QUÉ Para utilizar la fórmula para el volumen $V = Bh$, se necesita conocer B, el área de la base del prisma.

Solución El área de la base triangular del prisma es $\frac{1}{2}(6)(8) = 24$ centímetros cuadrados. Para encontrar su volumen, se procede como a continuación:

$V = Bh$ Esta es la fórmula para el volumen de un prisma triangular.

$V = 24(50)$ Sustituya el 24 para B, el área de la base, y el 50 para h, la altura.

$= 1{,}200$ Realice la multiplicación.

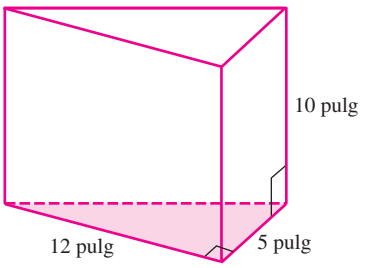
$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2}\\ 24\\ \times\ 50\\ \hline 1{,}200 \end{array}$$

El volumen del prisma triangular es de 1,200 cm^3.

¡Cuidado! Observe que no se utilizó la medición de 10 cm en el cálculo del volumen.

Auto-revisión 3

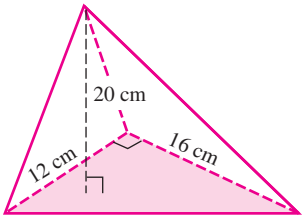
Encuentre el volumen del prisma mostrado abajo.



Ahora intente **Problema 33**

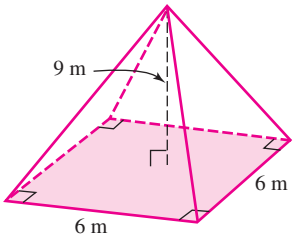
Auto-revisión 4

Encuentre el volumen de la pirámide mostrada abajo.



Ahora intente **Problema 37**

EJEMPLO 4 Encuentre el volumen de la pirámide mostrada a la derecha.



Estrategia Primero, se encontrará el área de la base cuadrada de la pirámide.

POR QUÉ El volumen de una pirámide es $\frac{1}{3}$ del producto del área de su base y su altura.

Solución Dado que la base es un cuadrado con cada lado de 6 metros de largo, el área de la base es de $(6\text{ m})^2$, ó 36 m^2. Para encontrar el volumen de la pirámide se procede como a continuación:

$V = \frac{1}{3}Bh$ Esta es la fórmula para el volumen de una pirámide.

$V = \frac{1}{3}(36)(9)$ Sustituya el 36 para B, el área de la base, y el 9 para h, la altura.

$= 12(9)$ Multiplique: $\frac{1}{3}(36) = \frac{36}{3} = 12$.

$= 108$ Complete la multiplicación.

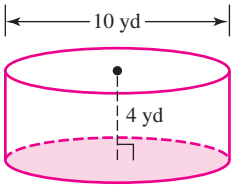
$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1}\\ 12\\ \times 9\\ \hline 108 \end{array}$$

El volumen de la pirámide es de 108 m^3.

2 Encontrar el volumen de cilindros, conos y esferas

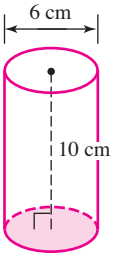
Auto-revisión 5

Encuentre el volumen del cilindro mostrado abajo. Dé la respuesta exacta y una aproximación a la centésima más cercana.



Ahora intente **Problema 45**

EJEMPLO 5 Encuentre el volumen del cilindro mostrado a la derecha. Dé la respuesta exacta y una aproximación a la centésima más cercana.



Estrategia Primero, se encontrará el radio de la base circular del cilindro.

POR QUÉ Para utilizar la fórmula para el volumen de un cilindro, $V = \pi r^2 h$, se necesita conocer r, el radio de la base.

Solución Dado que un radio es de la mitad del diámetro de la base circular, $r = \frac{1}{2} \cdot 6\text{ cm} = 3\text{ cm}$. A partir de la figura, se observa que la altura del cilindro es de 10 cm. Para encontrar el volumen del cilindro, se procede como a continuación.

$V = \pi r^2 h$ Esta es la fórmula para el volumen de un cilindro.

$V = \pi(3)^2(10)$ Sustituya el 3 para r, el radio de la base, y el 10 para h, la altura.

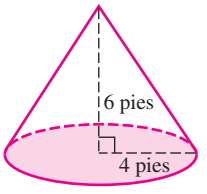
$V = \pi(9)(10)$ Evalúe la expresión exponencial: $(3)^2 = 9$.

$= 90\pi$ Multiplique: $(9)(10) = 90$. Escriba el producto de tal manera que π sea el último factor.

≈ 282.7433388 Use una calculadora para realizar la multiplicación.

El volumen exacto del cilindro es de $90\pi\text{ cm}^3$. A la centésima más cercana, el volumen es de 282.74 cm^3.

EJEMPLO 6 Encuentre el volumen del cono mostrado a la derecha. Dé la respuesta exacta y una aproximación a la centésima más cercana.



Estrategia Se sustituirá el 4 para r y el 6 para h en la fórmula $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ y se evaluará el lado derecho.

POR QUÉ La variable V representa el volumen de un cono.

Solución

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ Esta es la fórmula para el volumen de un cono.

$V = \frac{1}{3}\pi(4)^2(6)$ Sustituya el 4 para r, el radio de la base, y el 6 para h, la altura.

$= \frac{1}{3}\pi(16)(6)$ Evalúe la expresión exponencial: $(4)^2 = 16$.

$= 2\pi(16)$ Multiplique: $\frac{1}{3}(6) = 2$.

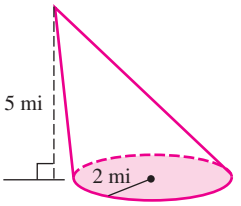
$= 32\pi$ Multiplique: $2(16) = 32$. Escriba el producto de tal manera que π sea el último factor.

≈ 100.5309649 Use una calculadora para realizar la multiplicación.

El volumen exacto del cono es de 32π pies^3. A la centésima más cercana, el volumen es de 100.53 pies^3.

Auto-revisión 6

Encuentre el volumen del cono mostrado abajo. Dé la respuesta exacta y una aproximación a la centésima más cercana.



Ahora intente **Problema 49**

EJEMPLO 7 *Torres de agua*

¿Cuántos pies cúbicos de agua se necesitan para llenar el tanque de agua esférico mostrado a la derecha? Dé la respuesta exacta y una aproximación a la décima más cercana.

Estrategia Se sustituirá el 15 para r en la fórmula $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ y se evaluará el lado derecho.

POR QUÉ La variable V representa el volumen de una esfera.

Solution

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ Esta es la fórmula para el volumen de una esfera.

$V = \frac{4}{3}\pi(15)^3$ Sustituya el 15 para r, el radio de la esfera.

$= \frac{4}{3}\pi\ (3{,}375)$ Evalúe la expresión exponencial: $(15)^3 = 3{,}375$.

$= \frac{13{,}500}{3}\pi$ Multiplique: $4(3{,}375) = 13{,}500$.

$= 4{,}500\pi$ Divida: $\frac{13{,}500}{3} = 4{,}500$. Escriba el producto de tal manera que π sea el último factor.

$\approx 14{,}137.16694$ Use una calculadora para realizar la multiplicación.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,3\,2} \\ 3375 \\ \times\quad 4 \\ \hline 13{,}500 \end{array}$$

El tanque mantiene exactamente $4{,}500\pi$ pies^3 de agua. A la décima más cercana, esto es de 14,137.2 pies^3.

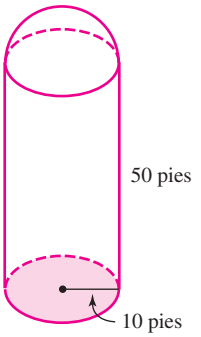
Auto-revisión 7

Encuentre el volumen de un tanque de agua esférico con radio de 7 metros. Dé la respuesta exacta y una aproximación a la décima más cercana.

Ahora intente **Problema 53**

Utilizando su CALCULADORA Volumen de un silo

Un silo es una estructura para almacenar granos. El silo mostrado a la derecha es un cilindro de 50 pies de alto con un domo en la forma de un hemisferio. Para encontrar el volumen del silo, se suma el volumen del cilindro al volumen del domo.



$$\text{Volumen}_{\text{cilindro}} + \text{Volumen}_{\text{domo}} = (\text{Área}_{\text{base del cilindro}})(\text{Altura}_{\text{cilindro}}) + \frac{1}{2}(\text{Volumen}_{\text{esfera}})$$

$$= \pi r^2 h + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

$= \pi r^2 h + \frac{2\pi r^3}{3}$ Multiplique y simplifique: $\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{4}{6}\pi r^3 = \frac{2\pi r^3}{3}$.

$= \pi(10)^2\,(50) + \frac{2\pi(10)^3}{3}$ Sustituya el 10 para r y el 50 para h.

© iStockphoto.com/ R. Sherwood Veith

Se puede utilizar una calculadora científica para realizar este cálculo.

$\boxed{\pi}\boxed{\times}10\boxed{x^2}\boxed{\times}50\boxed{+}\boxed{(}2\boxed{\times}\boxed{\pi}\boxed{\times}10\boxed{y^x}3\boxed{)}\boxed{\div}3\boxed{=}$

17802.35837

El volumen del silo es de aproximadamente 17,802 pies^3.

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. 1,000,000 cm^3 **2.** 1,920 m^3 **3.** 300 in.^{3} **4.** 640 cm^3 **5.** 100π yd$^3 \approx 314.16$ yd^3
6. $\frac{20}{3}\pi$ mi$^3 \approx 20.94$ mi^3 **7.** $\frac{1,372}{3}\pi$ m$^3 \approx 1,436.8$ m^3

SECCIÓN 9.9 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

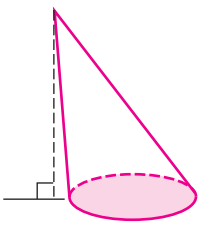
Complete los espacios.

1. El _____ de una figura tridimensional es una medida de su capacidad.

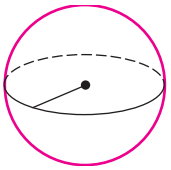
2. El volumen de una figura puede pensarse como el número de unidades _____ que se acomodarán dentro de sus límites.

Dé el nombre de cada figura.

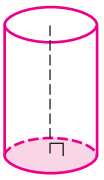
3.



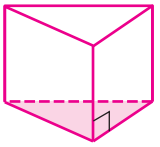
4.



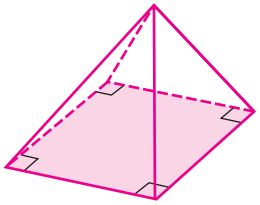
5.



6.



7.



8.

CONCEPTOS

9. Dibuje un cubo, Etiquete un lado s.

10. Dibuje un cilindro. Etiquete la altura h y el radio r.

11. Dibuje una pirámide. Etiquete la altura h y la base.

12. Dibuje un cono. Etiquete la altura h y el radio r.

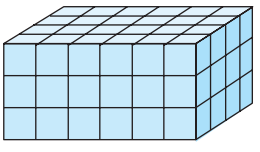
13. Dibuje una esfera. Etiquete el radio r.

14. Dibuje un sólido rectangular. Etiquete el largo l, el ancho w y la altura h.

15. ¿Cuáles de las siguientes son unidades aceptables para medir el volumen?

pies^2	mi^3	segundos	días
pulgadas cúbicas	mm	yardas cuadradas	in.
libras	cm^2	metros	m^3

16. En la figura a la derecha, la unidad de medición de la longitud utilizada para dibujar la figura es la pulgada.



a. ¿Cuál es el área de la base de la figura?

b. ¿Cuál es el volumen de la figura?

17. ¿Cuál concepto geométrico (perímetro, circunferencia, área o volumen) debe aplicarse cuando se mide cada uno de los siguientes?

- **a.** La distancia alrededor de un tablero de ajedrez
- **b.** El tamaño de la cajuela de un automóvil
- **c.** La cantidad de papel utilizada para una estampilla postal
- **d.** La cantidad de almacenaje en un cofre de cedro
- **e.** La cantidad de playa disponible para tomar el sol
- **f.** La distancia que recorre la punta de una hélice

18. Complete la tabla.

Figura	Fórmula para el volumen
Cubo	
Sólido rectangular	
Prisma	
Cilindro	
Pirámide	
Cono	
Esfera	

19. Evalúe cada expresión. Deje π en la respuesta.

- **a.** $\frac{1}{3}\pi(25)6$
- **b.** $\frac{4}{3}\pi(125)$

20. **a.** Evalúe $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ para $r = 2$ y $h = 27$. Deje π en la respuesta.

- **b.** Aproxime su respuesta para el inciso a la décima más cercana.

NOTACIÓN

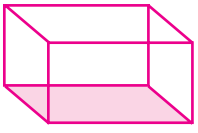
21. **a.** ¿Qué significa "pulg^3"?

- **b.** Escriba "un centímetro cúbico" utilizando símbolos.

22. En la fórmula $V = \frac{1}{3}Bh$, ¿qué representa B?

23. En un dibujo, ¿qué indica el símbolo ⌝ ?

24. Redibuje la figura abajo utilizando líneas punteadas para mostrar las aristas ocultas.



PRÁCTICA GUIADA

Convierta de una unidad de medición a otra. Vea el Ejemplo 1.

25. ¿Cuántos pies cúbicos hay en 1 yarda cúbica?

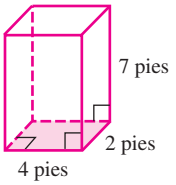
26. ¿Cuántos decímetros cúbicos hay en 1 metro cúbico?

27. ¿Cuántos metros cúbicos hay en 1 kilómetro cúbico?

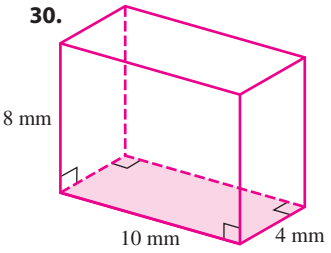
28. ¿Cuántas pulgadas cúbicas hay en 1 yarda cúbica?

Encuentre el volumen de cada figura. Vea el Ejemplo 2.

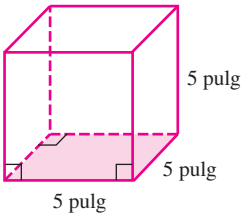
29.



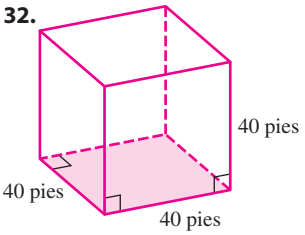
30.



31.

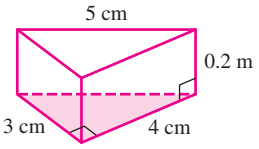


32.

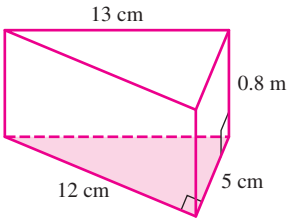


Encuentre el volumen de cada figura. Vea el Ejemplo 3.

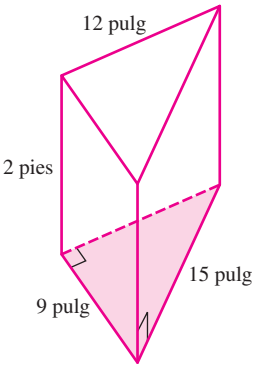
33.



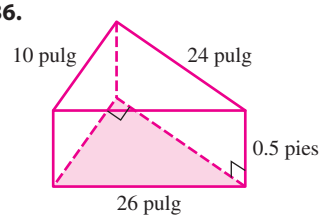
34.



35.

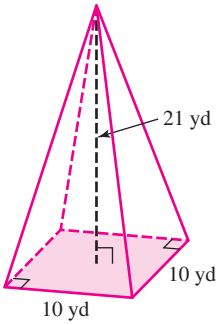


36.

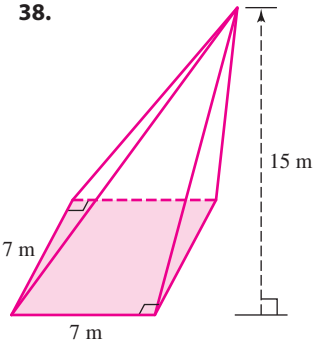


Encuentre el volumen de cada figura. **Vea el Ejemplo 4.**

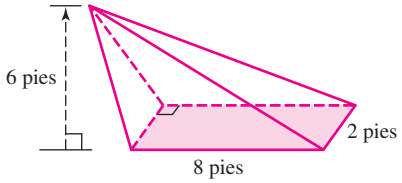
37.



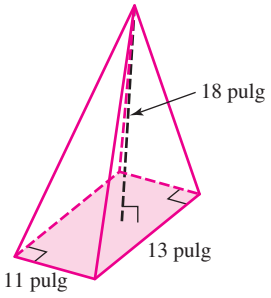
38.



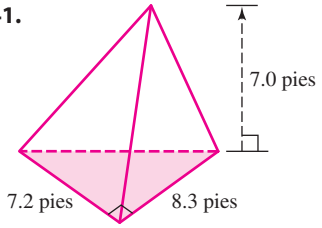
39.



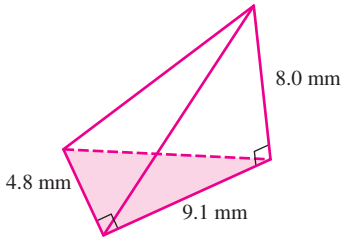
40.



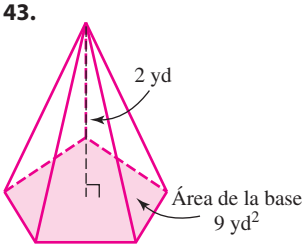
41.



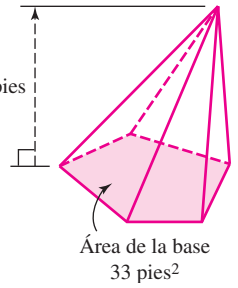
42.



43.

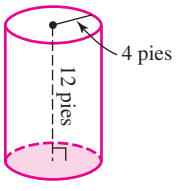


44.

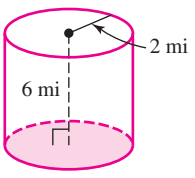


Encuentre el volumen de cada cilindro. Dé la respuesta exacta y una aproximación a la centésima más cercana. **Vea el Ejemplo 5.**

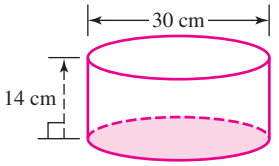
45.



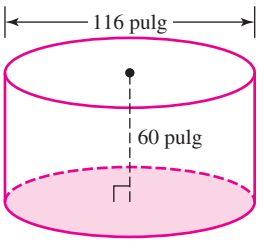
46.



47.

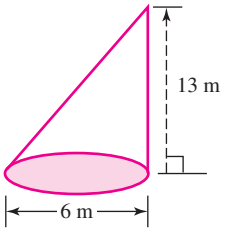


48.

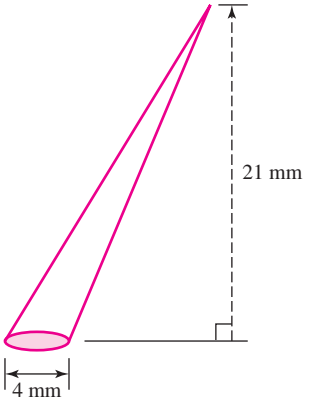


Encuentre el volumen de cada cono. Dé la respuesta exacta y una aproximación a la centésima más cercana. **Vea el Ejemplo 6.**

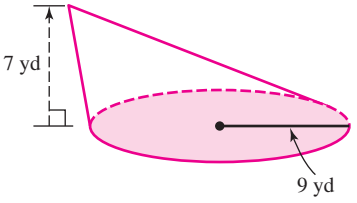
49.



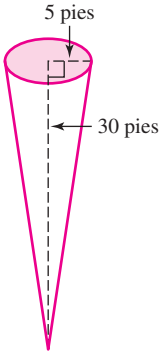
50.



51.

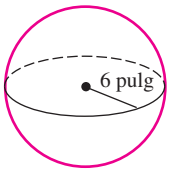


52.

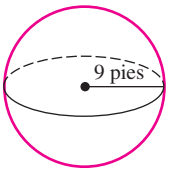


Encuentre el volumen de cada esfera. Dé la respuesta exacta y una aproximación a la décima más cercana. Vea el Ejemplo 7.

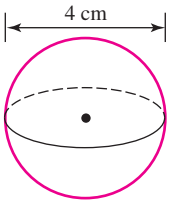
53.



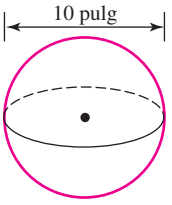
54.



55.



56.



INTÉNTELO

Encuentre el volumen de cada figura. Si una respuesta exacta contiene π, aproxime a la centésima más cercana.

57. Un hemisferio con un radio de 9 pulgadas (*Sugerencia:* un **hemisferio** es una mitad exacta de una esfera.)

58. Un hemisferio con un radio de 22 pies (*Sugerencia:* un **hemisferio** es una mitad exacta de una esfera.)

59. Un cilindro con una altura de 12 metros y una base circular con un radio de 6 metros

60. Un cilindro con una altura de 4 metros y una base circular con un diámetro de 18 metros

61. Un sólido rectangular con dimensiones de 3 cm por 4 cm por 5 cm

62. Un sólido rectangular con dimensiones de 5 m por 8 m por 10 m

63. Un cono con una altura de 12 centímetros y una base circular con un diámetro de 10 centímetros

64. Un cono con una altura de 3 pulgadas y una base circular con un radio de 4 pulgadas

65. Una pirámide con una base cuadrada de 10 metros en cada lado y una altura de 12 metros

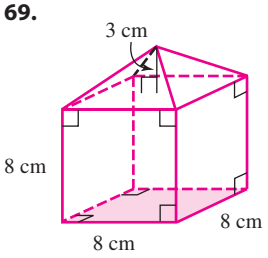
66. Una pirámide con una base cuadrada de 6 pulgadas en cada lado y una altura de 4 pulgadas

67. Un prisma cuya base es un triángulo rectángulo con catetos de 3 metros y 4 metros de largo y cuya altura es de 8 metros

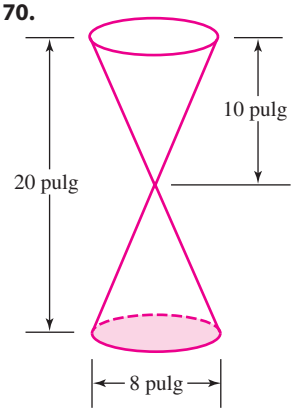
68. Un prisma cuya base es un triángulo rectángulo con catetos de 5 pies y 12 pies de largo y cuya altura es de 25 pies

Encuentre el volumen de cada figura. Dé la respuesta exacta y, cuando sea necesario, una aproximación a la centésima más cercana.

69.

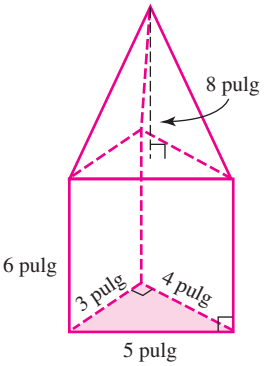


70.



71.

72.



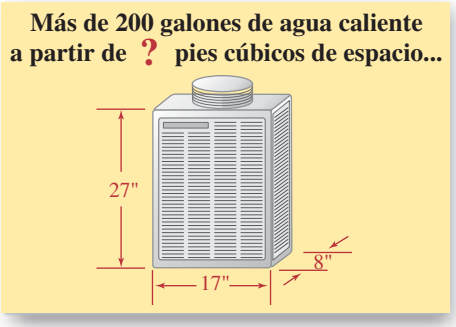
APLICACIONES

Resuelva cada problema. Si una respuesta exacta contiene π, aproxime la respuesta a la centésima más cercana.

73. EDULCORANTES Un cubo de azúcar es de $\frac{1}{2}$ pulgada en cada arista. ¿Cuánto volumen ocupará?

74. VENTILACIÓN Un salón de clases es de 40 pies de largo, 30 pies de ancho y 9 pies de alto. Encuentre el número de pies cúbicos de aire en el salón.

75. CALENTADORES DE AGUA Complete el anuncio para el calentador de agua de eficiencia alta mostrado abajo.



76. REFRIGERADORES El refrigerador más grande anunciado en el catálogo de JC Penny tiene una capacidad de 25.2 pies cúbicos. ¿Cuántas pulgadas cúbicas es esto?

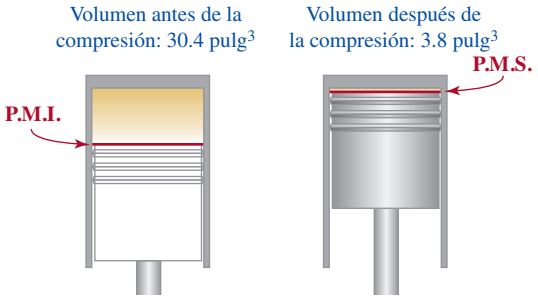
77. TANQUES Un tanque de gasolina cilíndrico tiene un diámetro de 6 pies y una longitud de 7 pies. Encuentre el volumen del tanque.

78. POSTRES Un restaurante sirve pudín en un plato cónico que tiene un diámetro de 3 pulgadas. Si el plato es de 4 pulgadas de profundidad, ¿cuántas pulgadas cúbicas de pudín hay en cada plato?

79. GLOBO AEROSTÁTICO La capacidad de carga de un globo aerostático depende de su volumen. ¿Cuántos pies cúbicos de gas contendrá un globo si es de 40 pies de diámetro?

80. CAJAS DE CEREAL Una caja de cereal mide 3 pulgadas por 8 pulgadas por 10 pulgadas. El fabricante planea vender una caja menor que mide $2\frac{1}{2}$ por 7 por 8 pulgadas. ¿En cuánto se reducirá el volumen?

81. MOTORES La *tasa de compresión* de un motor es el volumen de un cilindro con el pistón en el punto muerto inferior (P.M.I.) dividido entre el volumen con el pistón en el punto muerto superior (P.M.S.). A partir de la información proporcionada en la figura, ¿cuál es la tasa de compresión del motor? Use dos puntos para expresar su respuesta.



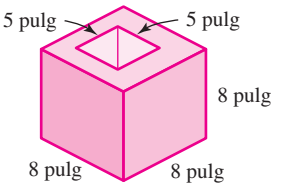
82. GEOGRAFÍA La Tierra no es una esfera perfecta sino de forma ligeramente aperada. Para estimar su volumen, se asumirá que es esférica, con un diámetro de alrededor de 7,926 millas. ¿Cuál es su volumen, al millar de millones de millas cúbicas más cercanas?

83. BAÑERAS DE AVES

a. El tazón de la bañera de aves a la derecha tiene la forma de un hemisferio (la mitad de una esfera). Encuentre su volumen.

b. Si 1 galón de agua ocupa 231 pulgadas cúbicas de espacio, ¿cuántos galones de agua contiene la bañera de aves? Redondee a la décima más cercana.

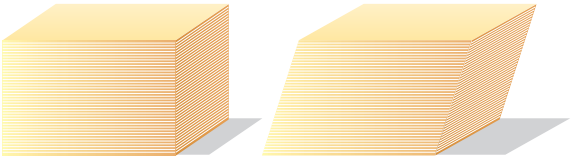
84. BLOQUES DE CONCRETO Encuentre el número de pulgadas cúbicas de concreto utilizadas para formar el bloque hueco con forma de cubo mostrado abajo.



REDACCIÓN

85. ¿A qué se refiere con el *volumen* de un cubo?

86. La pila de tarjetas de 3×5 mostrado en la figura (a) forma un prisma rectangular recto, con cierto volumen. Si la pila se empuja para que se incline a la derecha, como en la figura (b), se forma un nuevo prisma. ¿Cómo se comparará su volumen con el del prisma rectangular recto? Explique su respuesta.



(a) (b)

87. ¿Las unidades utilizadas para medir el área son diferentes de las unidades utilizadas para medir el volumen? Explique.

88. Las dimensiones (longitud, ancho altura) de un sólido rectangular son números completamente diferentes de las dimensiones de otro sólido rectangular. ¿Sería posible que los sólidos rectangulares tengan el mismo volumen? Explique.

REPASO

89. Evalúe: $-5(5-2)^2+3$

90. COMPRA DE LÁPICES Carlos compró 6 lápices a \$0.60 cada uno y un cuaderno por \$1.25. Le dio al cajero un billete de \$5. ¿Cuánto cambió recibió?

91. Resuelva: $-x = 4$

92. ¿38 es qué porcentaje de 40?

93. Exprese la frase "3 pulgadas a 15 pulgadas" como una razón en la forma más sencilla.

94. Convierta 40 onzas a libras.

95. Convierta 2.4 metros a milímetros.

96. Enuncie la ecuación de Pitágoras.

LISTA DE VERIFICACIÓN DE LAS HABILIDADES DE ESTUDIO

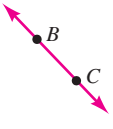
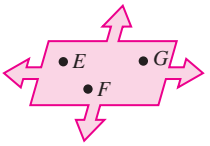
Conocer el vocabulario

Se ha introducido una gran cantidad de vocabulario en el Capítulo 9. Antes de tomar el examen, coloque una marca de verificación en el recuadro si puede definir y dibujar un ejemplo de cada uno de los términos proporcionados.

- ☐ Punto, recta, plano
- ☐ Segmento de recta, punto medio
- ☐ Rayo, ángulo, vértice
- ☐ Ángulo agudo, ángulo obtuso, ángulo recto, ángulo llano
- ☐ Ángulos adyacentes, ángulos verticales
- ☐ Ángulos complementarios, ángulos suplementarios
- ☐ Segmentos congruentes, ángulos congruentes
- ☐ Rectas paralelas, rectas perpendiculares, una transversal
- ☐ Ángulos alternos internos, ángulos internos, ángulos correspondientes
- ☐ Polígono, triángulo, cuadrilátero, pentágono, hexágono, octágono
- ☐ Triángulo equilátero, triángulos isósceles, triángulo escaleno
- ☐ Triángulo agudo, triángulo obtuso
- ☐ Triángulo rectángulo, hipotenusa, catetos
- ☐ Triángulos congruentes, triángulos semejantes
- ☐ Paralelogramo, rectángulo, cuadrado, rombo, trapezoide, trapezoide isósceles
- ☐ Círculo, arco, semicírculo, radio, diámetro
- ☐ Sólido rectangular, cubo, esfera, prisma, pirámide, cilindro, cono

CAPÍTULO 9 RESUMEN Y REPASO

SECCIÓN 9.1 Figuras geométricas básicas; ángulos

DEFINICIONES Y CONCEPTOS	EJEMPLOS
La palabra **geometría** proviene del griego *geo* (que significa Tierra) y *metron* (que significa medir). La geometría está basada en tres palabras indefinidas: **punto, recta** y **plano.**	**Punto** • A Los puntos se etiquetan con letras mayúsculas. **Recta $\overleftrightarrow{BC}$**  Se puede denotar una recta utilizando dos puntos cualesquiera en ella. **Plano *EFG***  Los pisos, paredes y partes superiores de mesas son partes de planos.

Un **segmento de recta** es una parte de una recta con dos puntos extremos. Todo segmento de recta tiene un **punto medio,** el cual divide el segmento de recta en dos partes de igual longitud.

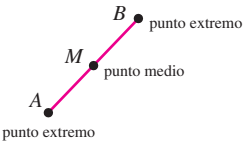
La notación m($\overline{AM}$) se lee como "la medida del segmento de recta $\overline{AM}$."

Cuando dos segmentos de recta tienen la misma medida, se dice que son **congruentes.** Lea el símbolo ≅ como "es congruente con".

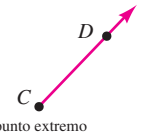
Un **rayo** es una parte de una recta con un **punto extremo.**

$m(\overline{AM}) = m(\overline{MB})$
$\overline{AM} \cong \overline{MB}$

Segmento de recta $\overline{AB}$



Rayo $\overrightarrow{CD}$

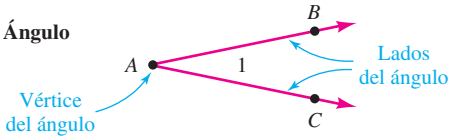


Un **ángulo** es una figura formada por dos rayos (llamados **lados**) con un punto extremo común. Al punto común se le llama **vértice** del ángulo.

El símbolo ∠ se lee como "ángulo".

El ángulo abajo puede escribirse como $\angle BAC$, $\angle CAB$, $\angle A$, o $\angle 1$.

Ángulo

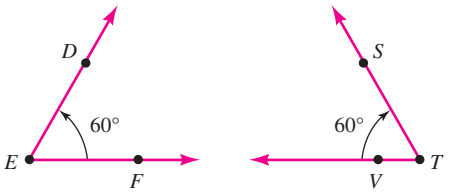


Cuando dos ángulos tienen la misma medida, se dice que son **congruentes.**

Se utiliza un **transportador** para encontrar la medida de un ángulo. Una unidad de medición de un ángulo es el **grado.**

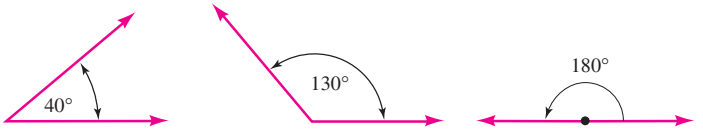
La notación m($\angle DEF$) se lee como "la medida de $\angle DEF$."

Ángulos congruentes



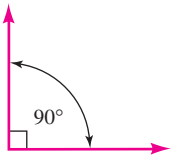
Dado que $m(\angle DEF) = m(\angle STV)$, se dice que $\angle DEF \cong \angle STV$.

Un **ángulo agudo** tiene una medida que es mayor a 0° pero menor a 90°. Un **ángulo obtuso** tiene una medida que es mayor a 90° pero menor a 180°. Un **ángulo llano** mide 180°.



Un **ángulo recto** mide 90°.

Ángulo recto

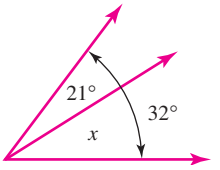


Con frecuencia se utiliza un símbolo ⌝ para etiquetar un ángulo recto.

A dos ángulos que tienen el mismo vértice y están uno al lado del otro se les llama **ángulos adyacentes.**

Dos ángulos con medidas en grados de x y 21° son ángulos adyacentes, como se muestra aquí. Use la información en la figura para encontrar x.

Ángulos adyacentes



Se pueden utilizar los conceptos del álgebra de la variable y la ecuación para resolver varios tipos de problemas geométricos.

El *total* de las medidas de los dos ángulos adyacentes es de 32°:

$x + 21° = 32°$ La palabra *total* indica una suma.

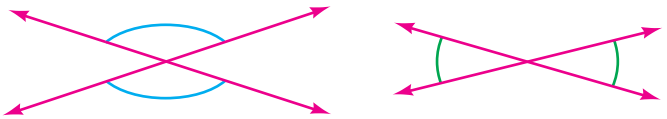
$x + 21° - \mathbf{21°} = 32° - \mathbf{21°}$ Reste 21° de ambos lados.

$x = 11°$ Realice la resta.

Por tanto, x es de 11°.

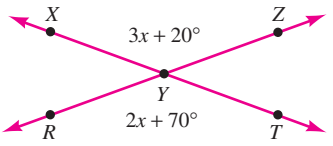
Cuando dos rectas se intersecan, a los pares de ángulos no adyacentes se les llama **ángulos verticales.**

Ángulos verticales



Los ángulos verticales son congruentes (tienen la misma medida).

Refiérase a la figura abajo. Encuentre x y $m(\angle XYZ)$.



Dado que los ángulos son verticales, tienen la misma medida.

$3x + 20° = 2x + 70°$ Iguale las expresiones.

$3x + 20° - 2x = 2x + 70° - 2x$ Elimine 2x del lado derecho.

$x + 20° = 70°$ Combine los términos similares.

$x = 50°$ Reste 20° de ambos lados.

Por tanto, x es de 50°. Para encontrar $m(\angle XYZ)$, evalúe la expresión $3x + 20°$ para $x = 50°$.

$3x + 20° = 3(50°) + 20°$ Sustituya 50° para x.

$= 150° + 20°$ Realice la multiplicación.

$= 170°$ Realice la suma.

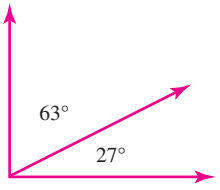
Por tanto, $m(\angle XYZ) = 170°$.

Si la suma de dos ángulos es de 90°, los ángulos son **complementarios.**

Si la suma de dos ángulos es de 180°, los ángulos son **suplementarios.**

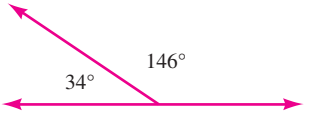
Ángulos complementarios

$63° + 27° = 90°$



Ángulos suplementarios

$146° + 34° = 180°$



Se puede utilizar el álgebra para encontrar el complemento de un ángulo.

Encuentre el complemento de un ángulo de 11°.

Sea x = la medida del complemento (en grados).

$x + 11° = 90°$ La suma de las medidas de los ángulos debe ser de 90°.

$x = 79°$ Para despejar x, reste 11° de ambos lados.

El complemento de un ángulo de 11° tiene una medida de 79°.

Se puede utilizar el álgebra para encontrar el suplemento de un ángulo.

Encuentre el suplemento de un ángulo de 68°.

Sea x = la medida del suplemento (en grados).

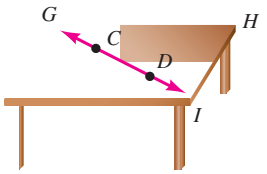
$x + 68° = 180°$ La suma de las medidas de los ángulos debe ser de 180°.

$x = 112°$ Para despejar x, reste 68° de ambos lados.

El suplemento de un ángulo de 68° tiene una medida de 112°.

EJERCICIOS DE REPASO

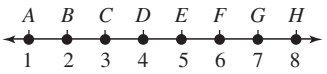
1. En la ilustración, dé el nombre de un punto, una recta y un plano.



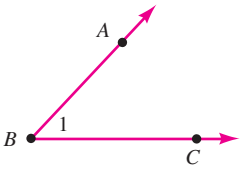
2. **a.** En la figura abajo, encuentre m($\overline{AG}$).

b. Encuentre el punto medio de $\overline{BH}$.

c. ¿Es $\overline{AC} \cong \overline{GE}$?



3. Dé cuatro maneras de nombrar el ángulo mostrado.



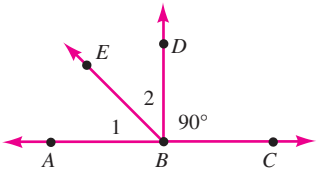
4. **a.** ¿El ángulo mostrado arriba es agudo u obtuso?

b. ¿Cuál es el vértice del ángulo?

c. ¿Qué rayos forman los lados del ángulo?

d. Use un transportador para encontrar la medida del ángulo.

5. Identifique cada ángulo agudo, ángulo recto, ángulo obtuso y ángulo llano en la figura abajo.



6. En la figura arriba, ¿es $\angle ABD \cong \angle CBD$?

7. En la figura arriba, ¿son $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AB}$ el mismo rayo?

8. Abajo se proporcionan las medidas de varios ángulos. Identifique cada ángulo como un ángulo agudo, un ángulo recto, un ángulo obtuso o un ángulo llano.

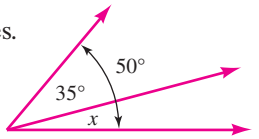
a. $m(\angle A) = 150°$

b. $m(\angle B) = 90°$

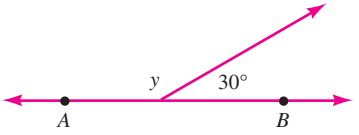
c. $m(\angle C) = 180°$

d. $m(\angle D) = 25°$

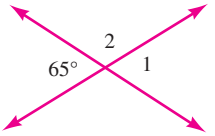
9. Los dos ángulos mostrados aquí son ángulos adyacentes. Encuentre x.



10. En la figura abajo se muestra la recta AB. Encuentre y.



11. Refiérase a la figura a la derecha.



a. Encuentre $m(\angle 1)$.

b. Encuentre $m(\angle 2)$.

12. Refiérase a la figura abajo.

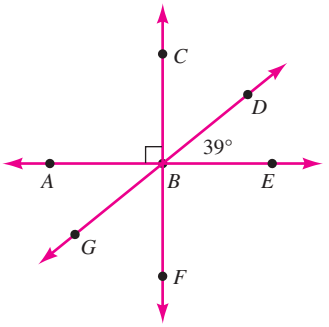
a. ¿Cuál es $m(\angle ABG)$?

b. ¿Cuál es $m(\angle FBE)$?

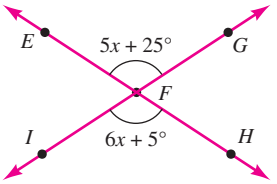
c. ¿Cuál es $m(\angle CBD)$?

d. ¿Cuál es $m(\angle FBG)$?

e. ¿$\angle CBD$ y $\angle DBE$ son ángulos complementarios?



13. Refiérase a la figura.



a. Encuentre x.

b. ¿Cuál es $m(\angle HFI)$?

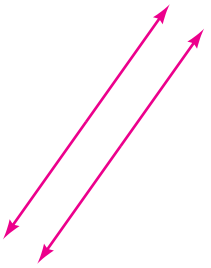
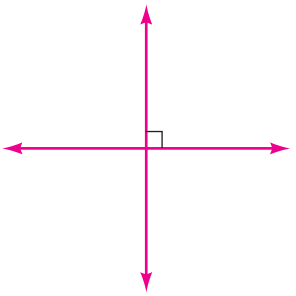
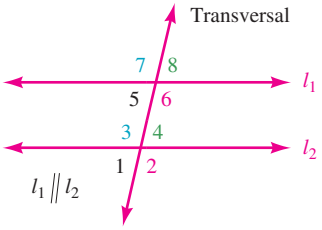
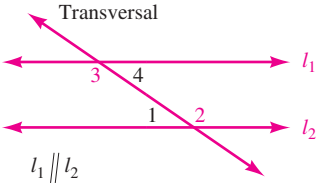
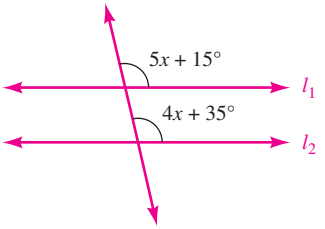
c. ¿Cuál es $m(\angle GFH)$?

14. Encuentre el complemento de un ángulo de 71°.

15. Encuentre el suplemento de un ángulo de 143°.

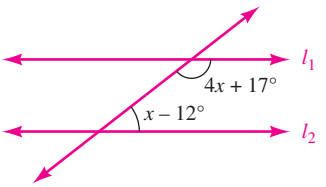
16. ¿Los ángulos que miden 30°, 60° y 90° son suplementarios?

SECCIÓN 9.2 Rectas paralelas y perpendiculares

DEFINICIONES Y CONCEPTOS	EJEMPLOS
Si dos rectas se encuentran en el mismo plano, se les llama **coplanares.** Las **rectas paralelas** son rectas coplanares que no se intersecan. El símbolo $\parallel$ se lee como "es paralela a". Las **rectas perpendiculares** son rectas que se intersecan y forman ángulos rectos. El símbolo $\perp$ se lee como "es perpendicular a".	**Rectas paralelas**  **Rectas perpendiculares** 
A una recta que interseca dos rectas coplanares en dos puntos distintos (diferentes) se le llama **transversal.** Cuando una transversal interseca dos rectas coplanares, se forman cuatro pares de **ángulos correspondientes**. Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, *los ángulos correspondientes son congruentes* (tienen la misma medida).	 **Ángulos correspondientes** • $\angle 1 \cong \angle 5$ • $\angle 2 \cong \angle 6$ • $\angle 3 \cong \angle 7$ • $\angle 4 \cong \angle 8$
Cuando una transversal interseca dos rectas coplanares, se forman dos pares de **ángulos interiores** y dos pares de **ángulos alternos interiores**. Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, *los ángulos alternos interiores son congruentes* (tienen la misma medida). Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, *los ángulos interiores en el mismo lado de la transversal son suplementarios.*	 **Ángulos alternos interiores** • $\angle 1 \cong \angle 4$ • $\angle 2 \cong \angle 3$ **Ángulos interiores** $m(\angle 1) + m(\angle 3) = 180°$ $m(\angle 2) + m(\angle 4) = 180°$
Se puede utilizar el álgebra para encontrar las medidas desconocidas de ángulos correspondientes.	En la figura, $l_1 \parallel l_2$. Encuentre x y la medida de cada ángulo que está etiquetado. Dado que las rectas son paralelas y los ángulos son ángulos correspondientes, los ángulos son congruentes.  $5x + 15° = 4x + 35°$ Las medidas de los ángulos son iguales. $x + 15° = 35°$ Reste $4x$ de ambos lados. $x = 20°$ Para despejar x, reste $15°$ de ambos lados. Por tanto, x es de $20°$. Para encontrar las medidas de los ángulos etiquetados en la figura, se evalúa cada expresión para $x = 20°$. $5x + 15° = 5(20°) + 15°$ $= 100° + 15°$ $= 115°$ $4x + 35° = 4(20°) + 35°$ $= 80° + 35°$ $= 115°$ La medida de cada ángulo es de $115°$.

Se puede utilizar el álgebra para encontrar las medidas desconocidas de ángulos interiores.

En la figura, $l_1 \parallel l_2$. Encuentre x y la medida de cada ángulo que está etiquetado.



Dado que los ángulos son ángulos interiores en el mismo lado de la transversal, son suplementarios.

$$4x + 17° + x - 12° = 180°$$ La suma de las medidas de dos ángulos suplementarios es de 180°.

$$5x + 5° = 180°$$ Combine los términos similares.

$$5x = 175°$$ Reste 5° de ambos lados.

$$x = 35°$$ Divida ambos lados entre 5.

Por tanto, x es de 35°. Para encontrar las medidas de los ángulos en la figura, se evalúan las expresiones para $x = 35°$.

$$4x + 17° = 4(35°) + 17° = 140° + 17° = 157°$$

$$x - 12° = 35° - 12° = 23°$$

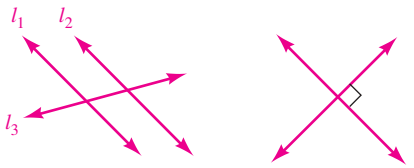
La medida de los ángulos etiquetados en la figura es de 157° y 23°.

EJERCICIOS DE REPASO

17. a. Las rectas l_1 y l_2 mostradas en la figura (a) abajo no se intersecan y son coplanares. ¿Qué palabra describe las rectas?

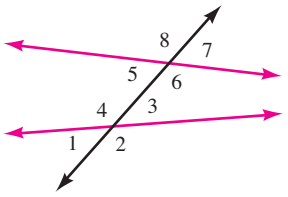
b. En la figura (a), la recta l_3 interseca las rectas l_1 y l_2 en dos puntos distintos (diferentes). ¿Qué nombre se la da a la recta l_3?

c. ¿Qué palabra describe las dos rectas mostradas en la figura (b) abajo?



(a) (b)

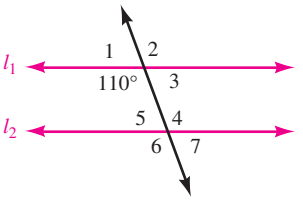
18. Identifique todos los pares de ángulos alternos internos mostrados en la figura abajo.



19. Refiérase a la figura en el Problema 18. Identifique todos los pares de ángulos correspondientes.

20. Refiérase a la figura en el Problema 18. Identifique todos los pares de ángulos verticales.

21. En la figura abajo, $l_1 \parallel l_2$. Encuentre la medida de cada ángulo

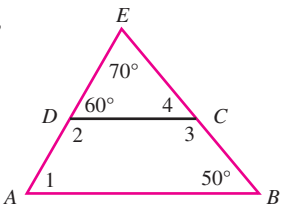


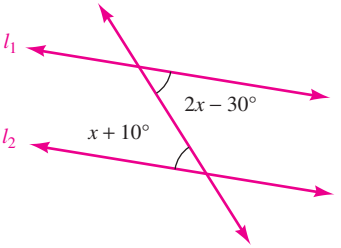
22. En la figura a la derecha, $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$. Encuentre la medida de cada ángulo que está etiquetado.

23. En la figura abajo, $l_1 \parallel l_2$.

a. Encuentre x.

b. Encuentre la medida de cada ángulo que está etiquetado.

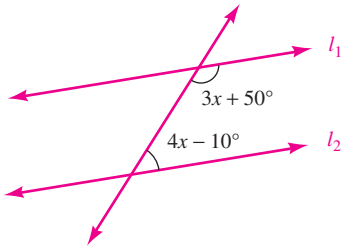




24. En la figura abajo, $l_1 \parallel l_2$.

a. Encuentre x.

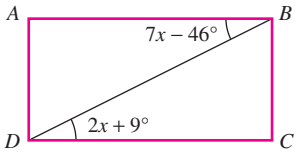
b. Encuentre la medida de cada ángulo que está etiquetado.



25. En la figura abajo, $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.

a. Encuentre x.

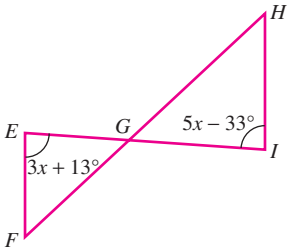
b. Encuentre la medida de cada ángulo que está etiquetado.



26. En la figura abajo, $\overline{EF} \parallel \overline{HI}$.

a. Encuentre x.

b. Encuentre la medida de cada ángulo que está etiquetado.



SECCIÓN 9.3 Triángulos

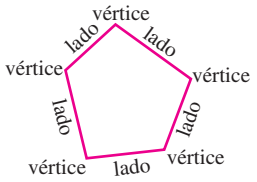
DEFINICIONES Y CONCEPTOS

Un **polígono** es una figura geométrica cerrada con al menos tres segmentos de recta por sus lados. A los puntos en los que se intersecan los lados se les llama **vértices.** Un **polígono regular** tiene lados que son de la misma longitud y ángulos que son de la misma medida.

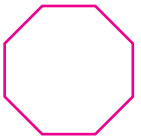
El número de vértices de un polígono es igual al número de lados que tiene.

EJEMPLOS

Polígono



Polígono regular



Clasificación de polígonos

Número de lados	Nombre del polígono	Número de lados	Nombre del polígono
3	triángulo	8	octágono
4	cuadrilátero	9	nonágono
5	pentágono	10	decágono
6	hexágono	12	dodecágono

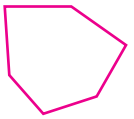
Un **triángulo** es un polígono con tres lados (y tres vértices).

Los triángulos pueden clasificarse de acuerdo con las longitudes de sus lados.

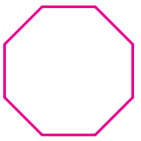
Las **marcas gruesas** indican los lados que son de la misma longitud.

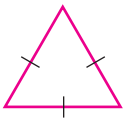
Cuadrilátero
(4 lados)

Hexágono
(6 lados)

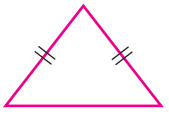


Octágono
(8 lados)

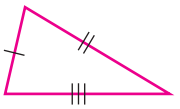




Triángulo equilátero
(todos los lados de igual longitud)

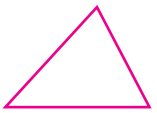


Triángulo isósceles
(al menos dos lados de igual longitud)

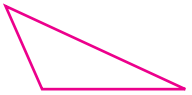


Triángulo escaleno
(ningún lado de igual longitud)

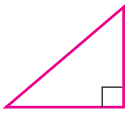
Los triángulos pueden clasificarse por medio de sus ángulos.



Triángulo agudo
(tiene tres ángulos agudos)



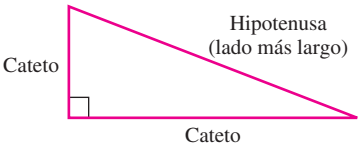
Triángulo obtuso
(tiene un ángulo obtuso)



Triángulo rectángulo
(tiene un ángulo recto)

Al lado más largo de un triángulo rectángulo se le llama **hipotenusa** y a los otros dos lados se les llama **catetos.** La hipotenusa de un triángulo rectángulo siempre es opuesta al ángulo de 90° (recto). Los catetos de un triángulo rectángulo son adyacentes al (al lado del) ángulo recto.

Triángulo rectángulo

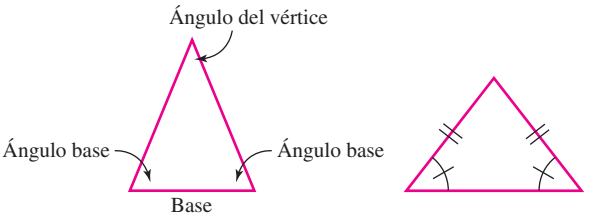


En un triángulo isósceles, a los ángulos opuestos a los lados de igual longitud se les llama **ángulos base.** Al tercer ángulo se le llama **ángulo del vértice.** Al tercer lado se le llama **base.**

Teorema del triángulo isósceles: Si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces los ángulos opuestos a esos lados son congruentes.

Conversa del teorema del triángulo isósceles: Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces los lados opuestos a los ángulos tienen la misma longitud y el triángulo es isósceles.

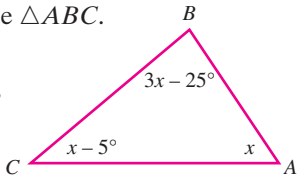
Triángulos isósceles



La **suma de las medidas de los ángulos** de cualquier triángulo es de 180°.

Se puede utilizar el álgebra para encontrar las medidas de ángulo desconocidas de un triángulo.

Encuentre la medida de cada ángulo de $\triangle ABC$.



La suma de las medidas de los ángulos de cualquier triángulo es de 180°:

$$x + 3x - 25° + x - 5° = 180°$$
$$5x - 30° = 180° \quad \text{Combine los términos semejantes.}$$
$$5x = 210° \quad \text{Sume 30° a ambos lados.}$$
$$x = 42° \quad \text{Divida ambos lados entre 5.}$$

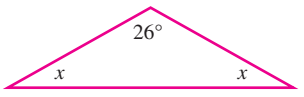
Para encontrar las medidas de $\angle B$ y $\angle C$, se evalúan las expresiones $3x - 25°$ y $x - 5°$ para $x = 42°$.

$$3x - 25° = 3(42°) - 25° = 126° - 25° = 101°$$
$$x - 5° = 42° - 5° = 37°$$

Por tanto, $m(\angle A) = 42°$, $m(\angle B) = 101°$ y $m(\angle C) = 37°$.

Se puede utilizar el álgebra para encontrar las medidas de ángulo desconocidas de un triángulo isósceles.

Si el ángulo del vértice de un triángulo isósceles mide 26°, ¿cuál es la medida de cada ángulo base?



Si x representa la medida de un ángulo base, la medida del otro ángulo base también es x. (Vea la figura.) Dado que la suma de las medidas de los ángulos de cualquier triángulo es de 180°, se tiene

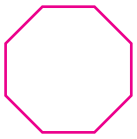
$$x + x + 26° = 180°$$
$$2x + 26° = 180° \quad \text{En el lado izquierdo, combine los términos semejantes.}$$
$$2x = 154° \quad \text{Para despejar 2x, reste 26° de ambos lados.}$$
$$x = 77° \quad \text{Para despejar x, divida ambos lados entre 2.}$$

La medida de cada ángulo base es de 77°.

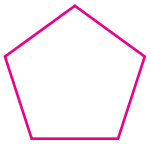
EJERCICIOS DE REPASO

27. Para cada uno de los siguientes polígonos, dé el número de lados que tiene, indique el nombre y después dé el número de vértices que tiene.

a.

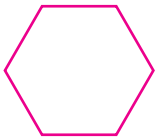


b.



c.

d.

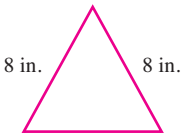


e.

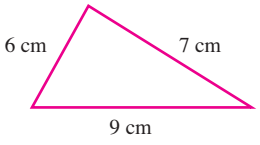
f.

28. Clasifique cada uno de los siguientes triángulos como un triángulo equilátero, un triángulo isósceles, un triángulo escaleno o un triángulo rectángulo. Algunas figuras pueden clasificarse de manera correcta de más de una manera.

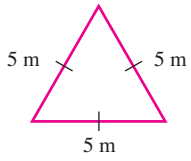
a.



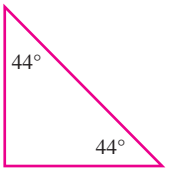
b.



c.

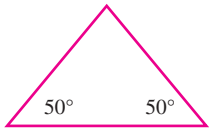


d.

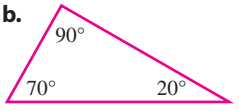


29. Clasifique cada uno de los siguientes triángulos como un triángulo agudo, obtuso o rectángulo.

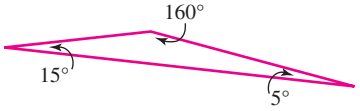
a.



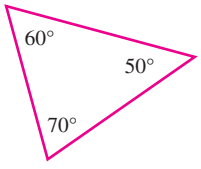
b.



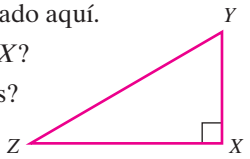
c.



d.



30. Refiérase al triángulo mostrado aquí.



a. ¿Cuál es la medida de $\angle X$?

b. ¿Qué tipo de triángulo es?

c. ¿Cuáles dos segmentos de recta son los catetos?

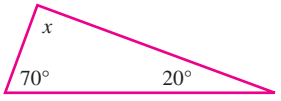
d. ¿Cuál segmento de recta es la hipotenusa?

e. ¿Cuál lado del triángulo es el más largo?

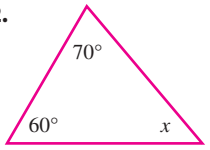
f. ¿Cuál lado es opuesto a $\angle X$?

En cada triángulo mostrado abajo, encuentre x.

31.

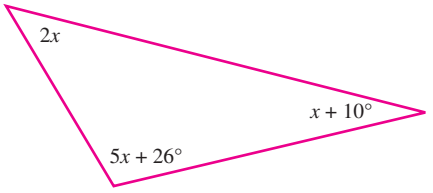


32.



33. En $\triangle ABC$, $\text{m}(\angle B) = 32°$ y $\text{m}(\angle C) = 77°$. Encuentre $\text{m}(\angle A)$.

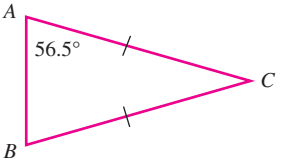
34. Para el triángulo mostrado abajo, encuentre x. Después determine la medida de cada ángulo del triángulo.



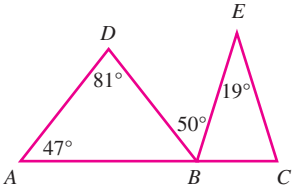
35. Un ángulo base de un triángulo isósceles mide 65°. Encuentre la medida del ángulo del vértice.

36. La medida del ángulo del vértice de un triángulo isósceles es de 68°. Encuentre la medida de cada ángulo base.

37. Encuentre la medida de $\angle C$ del triángulo mostrado aquí.



38. Refiérase a la figura mostrada aquí. Encuentre $\text{m}(\angle C)$.



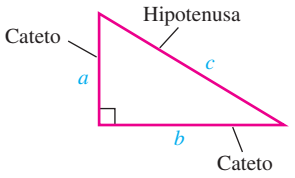
SECCIÓN 9.4 Teorema de Pitágoras

DEFINICIONES Y CONCEPTOS

Teorema de Pitágoras

Si a y b son las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo y c es la longitud de la hipotenusa, entonces

$$a^2 + b^2 = c^2$$

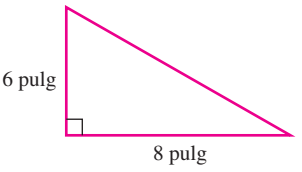


A $a^2 + b^2 = c^2$ se le llama **ecuación de Pitágoras.**

Cuando se utiliza el teorema de Pitágoras para encontrar la longitud de un lado de un triángulo rectángulo, en algunas ocasiones la solución es la raíz cuadrada de un número que no es un cuadrado perfecto. En ese caso, se puede utilizar una calculadora para *aproximar* la raíz cuadrada.

EJEMPLOS

Encuentre la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo mostrado aquí.



Se hará $a = 6$ y $b = 8$ y se sustituirá en la ecuación de Pitágoras para encontrar c.

$a^2 + b^2 = c^2$ Esta es la ecuación de Pitágoras.

$6^2 + 8^2 = c^2$ Sustituya el 6 para a y el 8 para b.

$36 + 64 = c^2$ Evalúe las expresiones exponenciales.

$100 = c^2$ Realice la suma.

$c^2 = 100$ Invierta los lados de la ecuación para que c^2 esté a la izquierda.

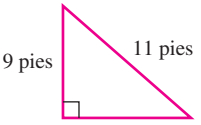
Para encontrar c, se debe encontrar un número que, cuando se eleve al cuadrado, sea el 100. Existen dos números, uno positivo y uno negativo; son las raíces cuadradas del 100. Dado que c representa la longitud de un lado de un triángulo, c no puede ser negativa. Por esta razón, sólo se necesita encontrar la raíz cuadrada positiva del 100 para obtener c.

$c = \sqrt{100}$ Se utiliza el símbolo $\sqrt{\ }$ para indicar la raíz cuadrada positiva de un número.

$c = 10$ Debido a que $10^2 = 100$.

La longitud de la hipotenusa del triángulo es de 10 pulg.

Aquí se muestran las longitudes de dos lados de un triángulo rectángulo. Encuentre la longitud del lado faltante.



Se puede sustituir el 9 para a o b, pero el 11 debe sustituirse para la longitud c de la hipotenusa. Si se sustituye el 9 para a, se puede encontrar la longitud del lado desconocida b como a continuación.

$a^2 + b^2 = c^2$ Esta es la ecuación de Pitágoras.

$9^2 + b^2 = 11^2$ Sustituya el 9 para a y el 11 para c.

$81 + b^2 = 121$ Evalúe cada expresión exponencial.

$81 + b^2 - 81 = 121 - 81$ Para despejar b^2 en el lado izquierdo, reste el 81 de ambos lados.

$b^2 = 40$

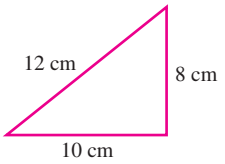
Se debe encontrar un número que, cuando se eleve al cuadrado, sea el 40. Dado que b representa la longitud de un lado de un triángulo, sólo se considera la raíz cuadrada positiva.

$b = \sqrt{40}$ Esta es la longitud exacta.

La longitud del lado faltante es de exactamente $\sqrt{40}$ pies de largo. Dado que el 40 no es un cuadrado perfecto, se utiliza una calculadora para aproximar $\sqrt{40}$. A la centésima más cercana, la longitud del lado faltante es de 6.32 pies.

La conversa del teorema de Pitágoras:
Si un triángulo tiene lados de longitudes a, b y c, tales que $a^2 + b^2 = c^2$, entonces el triángulo es un triángulo rectángulo.

¿El triángulo mostrado aquí es un triángulo rectángulo?



Se debe sustituir la longitud del lado más largo, 12, para c, debido a que es la hipotenusa posible. Las longitudes de 8 y 10 pueden sustituirse para a o b.

$a^2 + b^2 = c^2$ Esta es la ecuación de Pitágoras.
$8^2 + 10^2 \stackrel{?}{=} 12^2$ Sustituya el 8 para a, el 10 para b, y el 12 para c.
$64 + 100 \stackrel{?}{=} 144$ Evalué cada expresión exponencial.
$164 = 144$ Este es un enunciado falso.

Dado que $164 \neq 144$, el triángulo no es un triángulo rectángulo.

EJERCICIOS DE REPASO

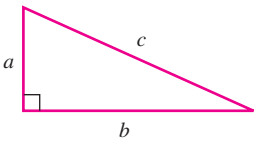
Refiérase al triángulo rectángulo abajo.

39. Encuentre c, si $a = 5$ cm y $b = 12$ cm.

40. Encuentre c, si $a = 8$ pies y $b = 15$ pies.

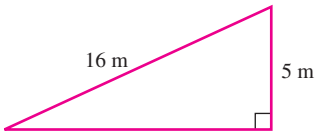
41. Encuentre c, si $b = 77$ pulg y $c = 85$ pulg

42. Encuentre c, si $a = 21$ pies y $c = 29$ pies.

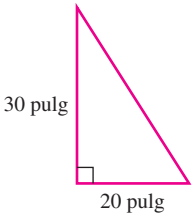


Se proporcionan las longitudes de dos lados de un triángulo rectángulo. Encuentre la longitud del lado faltante. Dé la respuesta exacta y una aproximación a la centésima más cercana.

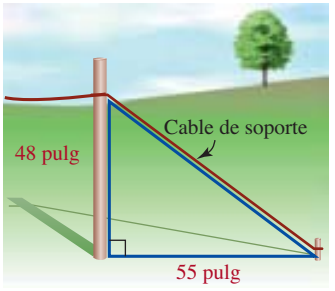
43.



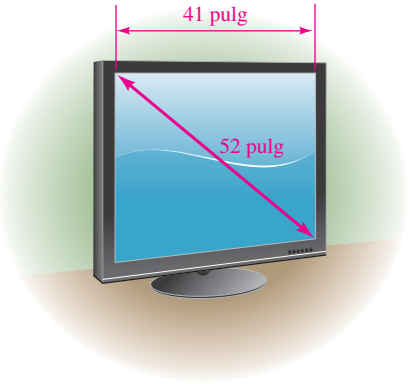
44.



45. CURSOS DE AVENTURAS DE CUERDAS ALTAS Un constructor de un curso de aventuras de cuerdas altas desea asegurar un poste uniendo un cable de soporte desde la estaca de anclaje de 55 pulgadas de la base del poste a un punto de 48 pulgadas hacia la parte superior del poste. Vea la ilustración en la siguiente columna. ¿Qué tan largo debe ser el cable?

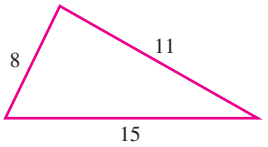


46. PANTALLAS DE TV Encuentre la altura de la pantalla de televisión mostrada. Dé la respuesta exacta y una aproximación a la pulgada más cercana.

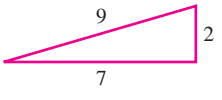


Determine si cada triángulo mostrado aquí es un triángulo rectángulo.

47.



48.



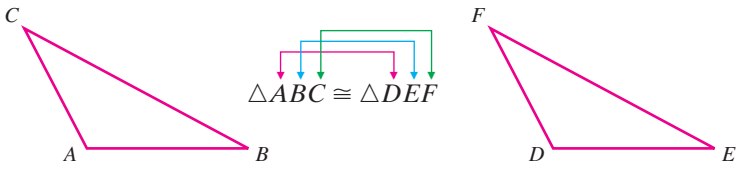
SECCIÓN 9.5 Triángulos congruentes y triángulos semejantes

DEFINICIONES Y CONCEPTOS

Si dos triángulos tienen el mismo tamaño y la misma forma, son **triángulos congruentes.**

Las **partes correspondientes** de los triángulos congruentes son congruentes (tienen la misma medida).

EJEMPLOS



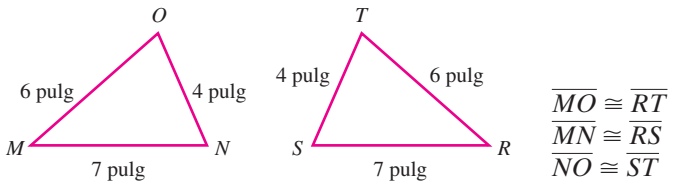
Hay seis pares de partes congruentes: tres pares de ángulos congruentes y tres pares de lados congruentes.

- $m(\angle A) = m(\angle D)$
- $m(\angle B) = m(\angle E)$
- $m(\angle C) = m(\angle F)$
- $m(\overline{BC}) = m(\overline{EF})$
- $m(\overline{AC}) = m(\overline{DF})$
- $m(\overline{AB}) = m(\overline{DE})$

Tres maneras de mostrar que dos triángulos son congruentes son:

1. **Propiedad LLL** Si tres lados de un triángulo son congruentes con tres lados de un segundo triángulo, los triángulos son congruentes.

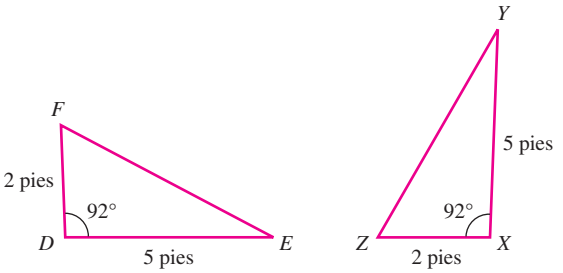
$\triangle MNO \cong \triangle RST$ por la propiedad LLL.



$\overline{MO} \cong \overline{RT}$
$\overline{MN} \cong \overline{RS}$
$\overline{NO} \cong \overline{ST}$

2. **Propiedad LAL** Si dos lados y el ángulo entre ellos en un triángulo son congruentes, respectivamente, con dos lados y el ángulo entre ellos en un segundo triángulo, los triángulos son congruentes.

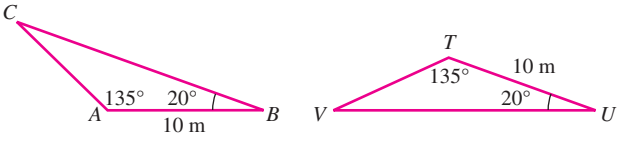
$\triangle DEF \cong \triangle XYZ$ por la propiedad LAL.



$\overline{DF} \cong \overline{XZ}$
$\angle D \cong \angle X$
$\overline{DE} \cong \overline{XY}$

3. **Propiedad ALA** Si dos ángulos y el lado entre ellos en un triángulo son congruentes, respectivamente, con dos ángulos y el lado entre ellos en un segundo triángulo, los triángulos son congruentes.

$\triangle ABC \cong \triangle TUV$ por la propiedad ALA.



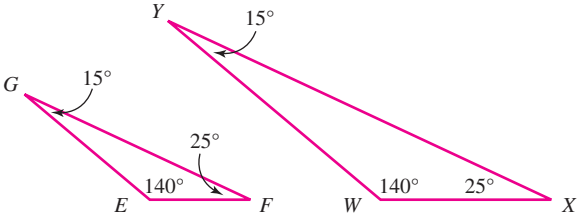
$\angle A \cong \angle T$
$\overline{AB} \cong \overline{TU}$
$\angle B \cong \angle U$

Los **triángulos semejantes** tienen la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño.

El símbolo $\sim$ se lee como "es semejante a".

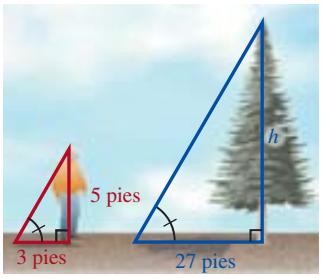
Teorema de semejanza AAA
Si los ángulos de un triángulo son congruentes con los ángulos correspondientes de otro triángulo, los triángulos son semejantes.

$\triangle EFG \sim \triangle WXY$ por el teorema de semejanza AAA.



$\angle E \cong \angle W$
$\angle F \cong \angle X$
$\angle G \cong \angle Y$

Propiedad de los triángulos semejantes
Si dos triángulos son semejantes, los pares de lados correspondientes están en proporción.



Los triángulos semejantes están determinados por el árbol y su sombra y el hombre y su sombra. Dado que los triángulos son semejantes, las longitudes de sus lados correspondientes están en proporción.

PAISAJISMO Un árbol proyecta una sombra de 27 pies de largo al mismo tiempo que un hombre de 5 pies de alto proyecta una sombra de 3 pies de largo. Encuentre la altura del árbol.

Si h = la altura del árbol, se puede encontrar h resolviendo la siguiente proporción.

La altura del árbol → $\frac{h}{5} = \frac{27}{3}$ ← La longitud de la sombra del árbol
La altura del hombre → ← La longitud de la sombra del hombre

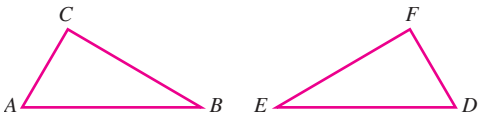
$3h = 5(27)$ Encuentre cada producto cruzado e iguálelos.
$3h = 135$ Realice la multiplicación.
$\frac{3h}{3} = \frac{135}{3}$ Para despejar h, divida ambos lados entre 1.3.
$h = 45$ Realice la división.

El árbol es de 45 pies de alto.

EJERCICIOS DE REPASO

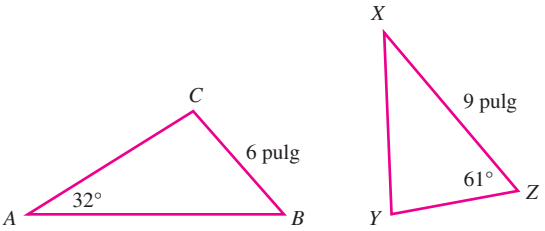
49. Abajo se muestran dos triángulos congruentes. Complete la lista de partes correspondientes.

a. $\angle A$ corresponde a ___.
b. $\angle B$ corresponde a ___.
c. $\angle C$ corresponde a ___.
d. $\overline{AC}$ corresponde a ___.
e. $\overline{AB}$ corresponde a ___.
f. $\overline{BC}$ corresponde a ___.



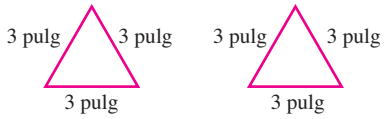
50. Refiérase a la figura abajo, donde $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$.

a. Encuentre m($\angle X$).
b. Encuentre m($\angle C$).
c. Encuentre m($\overline{YZ}$).
d. Encuentre m($\overline{AC}$).

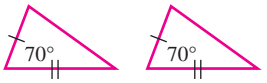


Determine si los triángulos en cada par son congruentes. Si lo son, indique por qué.

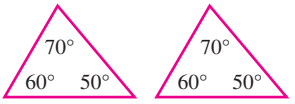
51.



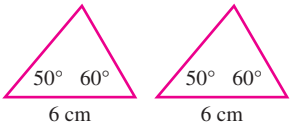
52.



53.

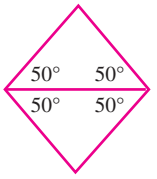


54.

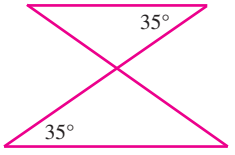


Determine si los triángulos son semejantes.

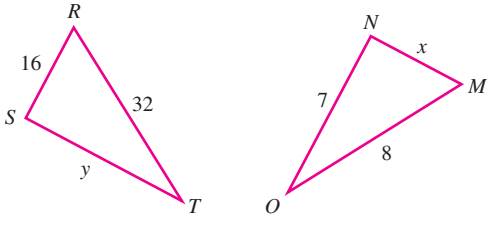
55.



56.

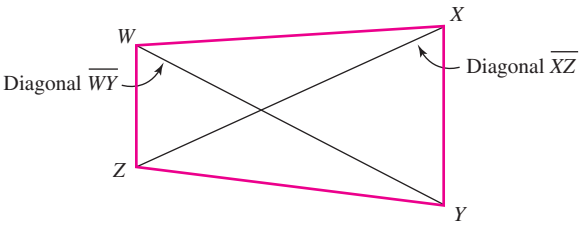
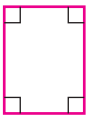
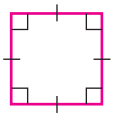
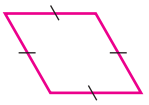
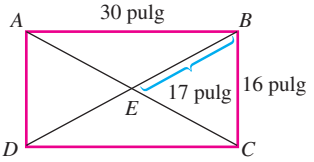
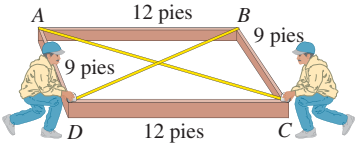


57. En la figura abajo, $\triangle RST \sim \triangle MNO$. Encuentre x y y.



58. ALTURA DE UN ÁRBOL Un árbol proyecta una sombra de 26 pies al mismo tiempo que una mujer de 5 pies de alto proyecta una sombra de 2 pies. ¿Cuál es la altura del árbol? (*Sugerencia:* Dibuje un diagrama primero y etiquete las longitudes de los lados de los triángulos semejantes.)

SECCIÓN 9.6 Cuadriláteros y otros polígonos

DEFINICIONES Y CONCEPTOS	EJEMPLOS
Un **cuadrilátero** es un polígono con cuatro lados. Use las letras mayúsculas que etiquetan los vértices de un cuadrilátero para nombrarlo. A un segmento que une dos vértices no consecutivos de un polígono se le llama **diagonal** del polígono.	**Cuadrilátero *WXYZ*** 
A la derecha se muestran algunos tipos especiales de cuadriláteros.	 **Paralelogramo** (Lados opuestos paralelos)  **Rectángulo** (Paralelogramo con cuatro ángulos rectos)  **Cuadrado** (Rectángulo con lados de igual longitud)  **Rombo** (Paralelogramo con lados de igual longitud) **Trapezoide** (Exactamente dos lados paralelos)
Un **rectángulo** es un cuadrilátero con cuatro ángulos rectos. **Propiedades de los rectángulos:** **1.** Los cuatro ángulos son ángulos rectos. **2.** Los lados opuestos son paralelos. **3.** Los lados opuestos tienen la misma longitud. **4.** Las diagonales tienen la misma longitud. **5.** Las diagonales se intersecan en sus puntos medios.	**Rectángulo *ABCD***  **1.** $m(\angle DAB) = m(\angle ABC) = m(\angle BCD) = m(\angle CDA) = 90°$ **2.** $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ **3.** $m(\overline{AD}) = 16$ pulg y $m(\overline{DC}) = 30$ pulg **4.** $m(\overline{DB}) = m(\overline{AC}) = 34$ pulg **5.** $m(\overline{DE}) = m(\overline{AE}) = m(\overline{EC}) = 17$ pulg
Condiciones que debe cumplir un paralelogramo para asegurar que es un rectángulo: **1.** Si un paralelogramo tiene un ángulo recto, entonces el paralelogramo es un rectángulo. **2.** Si las diagonales de un paralelogramo son congruentes, entonces el paralelogramo es un rectángulo.	Lea el Ejemplo 2 en la página 769 para ver cómo se utilizan estas dos condiciones para “cuadrar una base”. 

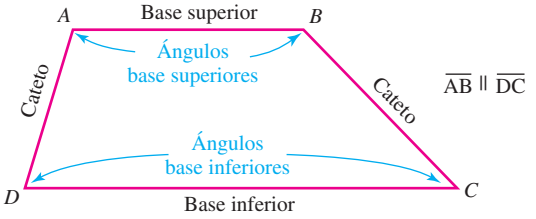
Un **trapezoide** es un cuadrilátero con exactamente dos lados paralelos.

A los lados paralelos de un trapezoide se les llama **base.** A los lados no paralelos se les llama **catetos.**

Si los catetos (los lados no paralelos) de un trapezoide son de igual longitud, se le llama **trapezoide isósceles.**

En un trapezoide isósceles, ambos pares de **ángulos base** son congruentes.

Trapezoide ABCD



La suma S, en grados, de las medidas de los ángulos de un polígono con n lados está dada por la fórmula

$$S = (n - 2)180°$$

Encuentre la suma de las medidas de los ángulos de un hexágono.

Dado que un hexágono tiene 6 lados, se sustituirá el 6 para n en la fórmula.

$$S = (n - 2)180°$$
$$S = (6 - 2)180° \quad \text{Sustituya el 6 para } n\text{, el número de lados.}$$
$$= (4)180° \quad \text{Realice la sustitución dentro de los paréntesis.}$$
$$= 720° \quad \text{Realice la multiplicación.}$$

La suma de las medidas de los ángulos de un hexágono es de 720°.

Se puede utilizar la fórmula $S = (n - 2)180°$ para encontrar el número de lados que tiene un polígono.

La suma de las medidas de los ángulos de un polígono es de 2,340°. Encuentre el número de lados que tiene el polígono.

$$S = (n - 2)180°$$
$$2{,}340° = (n - 2)180° \quad \text{Sustituya 2,340° para } S\text{. Ahora resuelva para } n\text{.}$$
$$2{,}340° = 180°n - 360° \quad \text{Distribuya la multiplicación por 180°.}$$
$$2{,}340° + 360° = 180°n - 360° + 360° \quad \text{Sume 360° a ambos lados.}$$
$$2{,}700° = 180°n \quad \text{Realice la suma.}$$
$$\frac{2{,}700°}{180°} = \frac{180°n}{180°} \quad \text{Divida ambos lados entre 180°.}$$
$$15 = n \quad \text{Realice la división.}$$

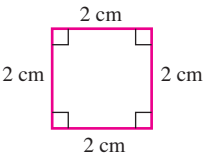
El polígono tiene 15 lados.

EJERCICIOS DE REPASO

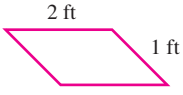
59. Clasifique cada uno de los siguientes cuadriláteros como un paralelogramo, un rectángulo, un cuadrado, un rombo o un trapezoide. Algunas figuras pueden clasificarse de manera correcta de más de una manera.

a.

b.

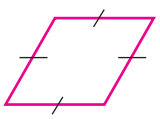


c.

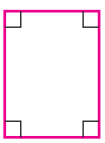


d.

e.

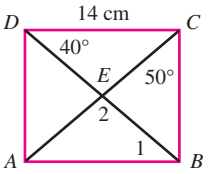


f.



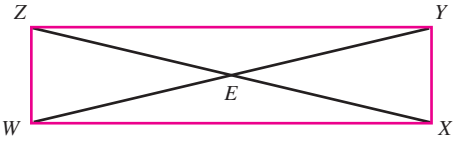
60. La longitud de la diagonal $\overline{AC}$ del rectángulo $ABCD$ mostrado abajo es de 15 centímetros. Encuentre cada medida.

a. $m(\overline{BD})$
b. $m(\angle 1)$
c. $m(\angle 2)$
d. $m(\overline{EC})$
e. $m(\overline{AB})$



61. Refiérase al rectángulo $WXYZ$ abajo. Indique si cada enunciado es verdadero o falso.

a. $m(\overline{WX}) = m(\overline{ZY})$
b. $m(\overline{ZE}) = m(\overline{EX})$
c. El triángulo WEX es isósceles.
d. $m(\overline{WY}) = m(\overline{WX})$

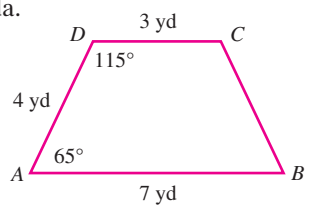


62. Refiérase al trapezoide isósceles $ABCD$ abajo. Encuentre cada medida.

a. $m(\angle B)$

b. $m(\angle C)$

c. $m(\overline{CB})$



63. Encuentre la suma de las medidas de los ángulos de un octágono.

64. La suma de las medidas de los ángulos de un polígono es de 3,240°. Encuentre el número de lados que tiene el polígono.

SECCIÓN 9.7 Perímetros y áreas de polígonos

DEFINICIONES Y CONCEPTOS

El **perímetro** de un polígono es la distancia alrededor de él.

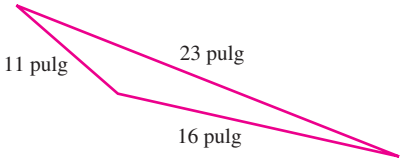
Figura	Fórmula para el perímetro
Cuadrado	$P = 4s$
Rectángulo	$P = 2l + 2w$
Triángulo	$P = a + b + c$

El **área** de un polígono es la medida de la cantidad de superficie que delimita.

Figura	Fórmula para el área
Cuadrado	$A = s^2$
Rectángulo	$A = lw$
Paralelogramo	$A = bh$
Triángulo	$A = \frac{1}{2}bh$
Trapezoide	$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$

EJEMPLOS

Encuentre el perímetro del triángulo mostrado abajo.



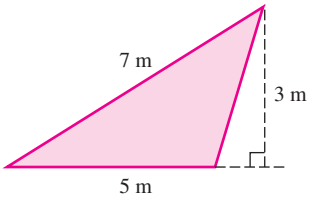
$P = a + b + c$ Esta es la fórmula para el perímetro de un triángulo.

$P = 11 + 16 + 23$ Sustituya el 11 para a, el 16 para b, y el 23 para c.

$= 50$ Realice la suma.

El perímetro del triángulo es de 50 pulgadas.

Encuentre el área del triángulo mostrado aquí.



$A = \frac{1}{2}bh$ Esta es la fórmula para el área de un triángulo.

$A = \frac{1}{2}(5)(3)$ Sustituya el 5 para b, la longitud de la base, y el 3 para h, la altura. Observe que la longitud del lado de 7 m no se utiliza en el cálculo.

$= \frac{1}{2}\left(\frac{5}{1}\right)\left(\frac{3}{1}\right)$ Escriba el 5 como $\frac{5}{1}$ y el 3 como $\frac{3}{1}$.

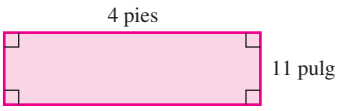
$= \frac{15}{2}$ Multiplique los numeradores. Multiplique los denominadores.

$= 7.5$ Realice la división.

El área del triángulo es de 7.5 m^2.

Para encontrar el perímetro o el área de un polígono, todas las mediciones deben estar en las **mismas unidades.** Si no lo están, use factores de conversión de unidades para cambiarlas a la misma unidad.

Para encontrar el perímetro o el área del rectángulo mostrado aquí, se necesita expresar la longitud en pulgadas.



$$4 \text{ pies} = \frac{4 \text{ pies}}{1} \cdot \frac{\mathbf{12 \text{ pulg}}}{\mathbf{1 \text{ pie}}}$$ Convierta los 4 pies a pulgadas utilizando un factor de conversión de unidades.

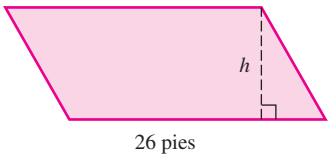
$$= 4 \cdot 12 \text{ pulg}$$ Elimine las unidades comunes de pies en el numerador y el denominador. La unidad de pulgadas permanece.

$$= 48 \text{ pulg}$$ Realice la multiplicación.

La longitud del rectángulo es de 48 pulgadas. Ahora se puede encontrar el perímetro (en pulgadas) o el área (en pulg^2) del rectángulo.

Si se conoce el área de un polígono, con frecuencia se puede utilizar el álgebra para encontrar una medición desconocida.

El área del paralelogramo mostrado aquí es de 208 pies^2. Encuentre la altura.



$$\mathbf{A} = \mathbf{b}h$$ Esta es la fórmula para el área de un paralelogramo.

$$\mathbf{208} = \mathbf{26}h$$ Sustituya el 208 para A, el área, y el 26 para b, la longitud de la base.

$$\frac{208}{\mathbf{26}} = \frac{26h}{\mathbf{26}}$$ Para despejar h, deshaga la multiplicación por 26 dividiendo ambos lados entre 26.

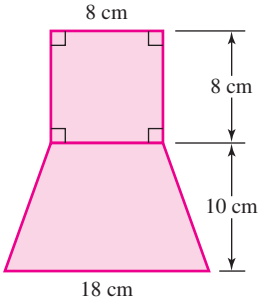
$$8 = h$$ Realice la división.

La altura del paralelogramo es de 8 pies.

Para encontrar el área de una forma irregular, descomponga la forma en polígonos familiares. Encuentre el área de cada polígono y después sume los resultados.

Encuentre el área de la figura sombreada mostrada aquí.

Se encontrará el área de la porción inferior de la figura (el trapezoide) y el área de la porción superior (el cuadrado) y después se sumarán los resultados.



$$A_{\text{trapezoide}} = \frac{1}{2}\mathbf{h}(\mathbf{b_1} + \mathbf{b_2})$$ Esta es la fórmula para el área de un trapezoide.

$$A_{\text{trapezoide}} = \frac{1}{2}(\mathbf{10})(\mathbf{8} + \mathbf{18})$$ Sustituya el 8 para b_1, el 18 para b_2, y el 10 para h.

$$= \frac{1}{2}(10)(26)$$ Realice la suma dentro de los paréntesis.

$$= 130$$ Realice la multiplicación.

El área del trapezoide es de 130 cm^2.

$$A_{\text{cuadrado}} = \mathbf{s}^2$$ Esta es la fórmula para el área de un cuadrado.

$$A_{\text{cuadrado}} = \mathbf{8}^2$$ Sustituya el 8 para s.

$$= 64$$ Evalúe la expresión exponencial.

El área del cuadrado es de 64 cm^2.

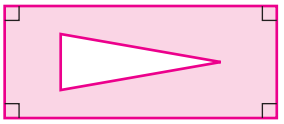
El área total de la figura sombreada es

$$A_{\text{total}} = A_{\text{trapezoide}} + A_{\text{cuadrado}}$$
$$A_{\text{total}} = 130\ \text{cm}^2 + 64\ \text{cm}^2$$
$$= 194\ \text{cm}^2$$

El área de la figura sombreada es de 194 cm^2.

Para encontrar el área de una forma irregular, en ocasiones se debe utilizar una resta.

Para encontrar el área de la figura sombreada abajo, se resta el área del triángulo *del* área del rectángulo.



$$A_{\text{sombreada}} = A_{\text{rectángulo}} - A_{\text{triángulo}}$$

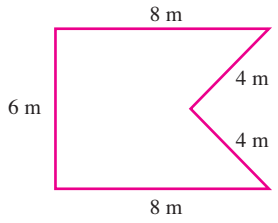
EJERCICIOS DE REPASO

65. Encuentre el perímetro de un cuadrado con lados de 18 pulgadas de largo.

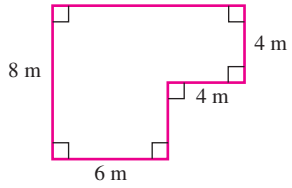
66. Encuentre el perímetro (en pulgadas) de un rectángulo que es de 7 pulgadas de largo y 3 pies de ancho.

Encuentre el perímetro de cada polígono.

67.



68.



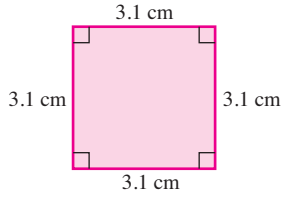
69. El perímetro de un triángulo isósceles es de 107 pies. Si uno de los lados congruentes es de 24 pies de largo, ¿qué tan larga es la base?

70. **a.** ¿Cuántos pies cuadrados hay en 1 yarda cuadrada?

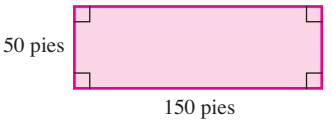
b. ¿Cuántas pulgadas cuadradas hay en 1 pie cuadrado?

Encuentre el área de cada polígono.

71.

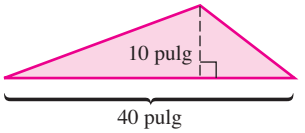


72.

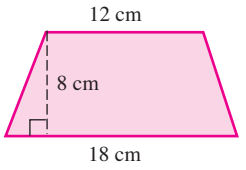


73.

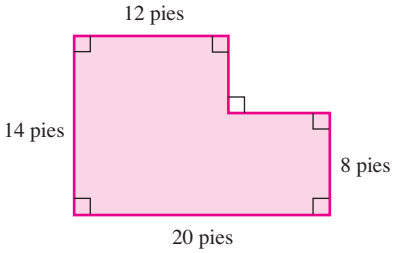
74.



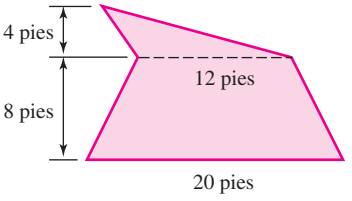
75.



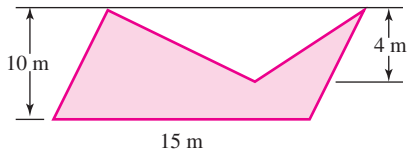
76.



77.



78.



79. El área de un paralelogramo es de 240 pies^2. Si la longitud de la base es de 30 pies, ¿cuál es su altura?

80. El perímetro de un rectángulo es de 48 mm y su ancho es de 6 mm. Encuentre su longitud.

81. CERCAS Un hombre desea delimitar un jardín frontal rectangular con malla que cuesta $8.50 el pie (el precio incluye la instalación). Encuentre el costo de delimitar el jardín si sus dimensiones son de 115 pies por 78 pies.

82. CÉSPED Una familia va a cubrir con césped artificial su jardín trasero rectangular que es de 36 pies de largo y 24 pies de ancho. Si el césped artificial cuesta $48 por *yarda cuadrada,* y la instalación es gratis, ¿cuál será el costo de este proyecto? (Asuma que no hay desperdicio.)

SECCIÓN 9.8 Círculos

DEFINICIONES Y CONCEPTOS

Un **círculo** es el conjunto de todos los puntos en un plano que se encuentran a una distancia fija de un punto llamado **centro.** La distancia fija es el **radio** del círculo.

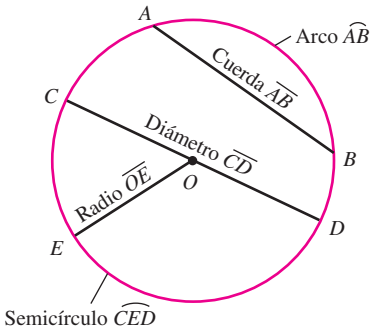
Una **cuerda** de un círculo es un segmento de recta que conecta dos puntos en el círculo.

Un **diámetro** es una cuerda que pasa a través del centro del círculo.

A cualquier parte de un círculo se le llama **arco.**

Un **semicírculo** es un arco de un círculo cuyos puntos extremos son los puntos extremos de un diámetro.

EJEMPLOS



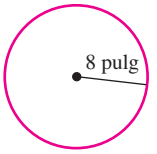
La **circunferencia** (perímetro) de un círculo está dado por las fórmulas

$$C = \pi D \quad \text{o} \quad C = 2\pi r$$

donde $\pi = 3.14159\ldots$.

Si una respuesta exacta contiene π, se puede utilizar el 3.14 como una aproximación y completar los cálculos a mano. O, se puede utilizar una calculadora que tenga una tecla pi $\boxed{\pi}$ para encontrar una aproximación.

Encuentre la circunferencia del círculo mostrado aquí. Dé la respuesta exacta y una aproximación.



$C = 2\pi r$ Esta es la fórmula para la circunferencia de un círculo.

$C = 2\pi(8)$ Sustituya el 8 para r, el radio.

$C = 2(8)\pi$ Reescriba el producto de tal manera que π sea el último factor.

$C = 16\pi$ Realice la primera multiplicación: $2(8) = 16$. Esta es la respuesta exacta.

La circunferencia del círculo es de exactamente 16π pulgadas. Si se reemplaza π con 3.14, se obtiene una aproximación de la circunferencia.

$C = 16\pi$

$C \approx 16(3.14)$ Sustituya el 3.14 para π.

$C \approx 50.24$ Realice la multiplicación.

La circunferencia del círculo es de aproximadamente 50.2 pulgadas.

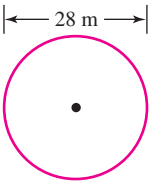
También se puede utilizar una calculadora para aproximar 16π.

$C \approx 50.26548246$

El **área** de un círculo está dada por la fórmula

$$A = \pi r^2$$

Encuentre el área del círculo mostrado aquí. Dé la respuesta exacta y una aproximación a la décima más cercana.



Dado que el diámetro es de 28 metros, el radio es la mitad de eso, o de 14 metros.

$A = \pi r^2$ Esta es la fórmula para el área de un círculo.

$A = \pi(14)^2$ Sustituya el 14 para r, el radio del círculo.

$= \pi(196)$ Evalúe la expresión exponencial.

$= 196\pi$ Escriba el producto de tal manera que π sea el último factor.

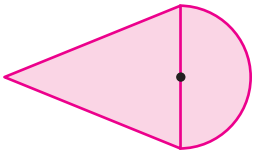
El área exacta del círculo es de 196π m^2. Se puede utilizar una calculadora para aproximar el área.

$A \approx 615.7521601$ Use una calculadora para realizar la multiplicación.

A la décima más cercana, el área es de 615.8 m^2.

Para encontrar el área de una forma irregular, descompóngala en figuras familiares.

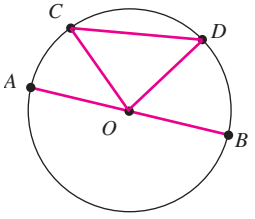
Para encontrar el área de la figura sombreada mostrada aquí, encuentre el área del triángulo y el área del semicírculo y después sume los resultados.



$$A_{\text{figura sombreada}} = A_{\text{triángulo}} + A_{\text{semicírculo}}$$

EJERCICIOS DE REPASO

83. Refiérase a la figura.



a. Nombre cada cuerda.

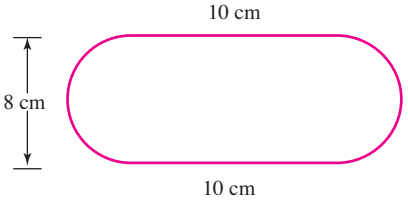
b. Nombre cada diámetro.

c. Nombre cada radio.

d. Nombre el centro.

84. Encuentre la circunferencia de un círculo con un diámetro de 21 pies. Dé la respuesta exacta y una aproximación a la centésima más cercana.

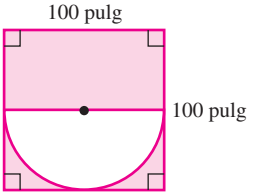
85. Encuentre el perímetro de la figura mostrada abajo. Redondee a la décima más cercana.



86. Encuentre el área de un círculo con un diámetro de 18 pulgadas. Dé la respuesta exacta y una aproximación a la centésima más cercana.

87. Encuentre el área de la figura mostrada en el Problema 85. Redondee a la décima más cercana.

88. Encuentre el área de la región sombreada mostrada a la derecha. Redondee a la décima más cercana.



SECCIÓN 9.9 Volumen

DEFINICIONES Y CONCEPTOS

El volumen de una figura puede pensarse como el número de **unidades cúbicas** que se acomodarán dentro de sus límites.

Las unidades comunes del volumen son las pulgadas cúbicas (pulg^3) y los centímetros cúbicos (cm^3).

El **volumen** de un sólido es una medida del espacio que ocupa.

Figura	Fórmula para el volumen
Cubo	$V = s^3$
Sólido rectangular	$V = lwh$
Prisma	$V = Bh$*
Pirámide	$V = \frac{1}{3}Bh$*
Cilindro	$V = \pi r^2 h$
Cono	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
Esfera	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

*B representa el área de la base.

¡Cuidado! Cuando se encuentra el volumen de una figura, sólo se utilizan las mediciones que se piden en la fórmula. En ocasiones una figura puede estar etiquetada con mediciones que no se utilizan.

La letra B aparece en dos de las fórmulas para el volumen. Representa el área de la base de la figura.

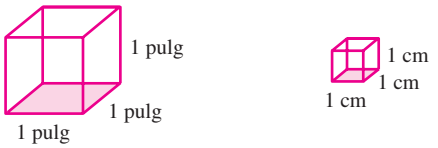
Observe que las fórmulas para el volumen para una pirámide y un cono contienen un factor de $\frac{1}{3}$.

Cono: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

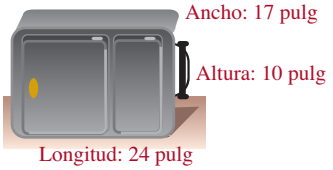
Pirámide: $V = \frac{1}{3}Bh$

EJEMPLOS

1 pulgada cúbica: 1 pulg^3 **1 centímetro cúbico: 1 cm^3**



EQUIPAJE DE MANO A la derecha se muestra la maleta de mano más grande que permite Alaska Airlines al abordar un vuelo. Encuentre el volumen del espacio que ocupa una maleta de ese tamaño.



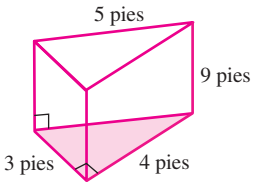
$V = lwh$ Esta es la fórmula para el volumen de un sólido rectangular.

$V = 24(17)(10)$ Sustituya el 24 para l, la longitud, el 17 para w, el ancho, y el 10 para h, la altura de la maleta.

$= 4{,}080$ Realice la multiplicación.

El volumen del espacio que ocupa la maleta es de 4,080 pulg^3.

Encuentre el volumen del prisma mostrado aquí.



El área de la base triangular del prisma es $\frac{1}{2}(3)(4) = 6$ pies cuadrados. (La medición de 5 pies no se utiliza.) Para encontrar el volumen del prisma, proceda como a continuación:

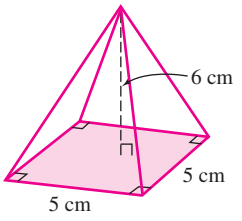
$V = Bh$ Esta es la fórmula para el volumen de un prisma.

$V = 6(9)$ Sustituya el 6 para B, el área de la base, y el 9 para h, la altura.

$= 54$ Realice la multiplicación.

El volumen del prisma triangular es de 54 pies^3.

Encuentre el volumen de la pirámide mostrada aquí.



Dado que la base es un cuadrado con cada lado de 5 centímetros de largo, el área de la base es $5 \cdot 5 = 25$ cm^2.

$V = \frac{1}{3}Bh$ Esta es la fórmula para el volumen de una pirámide.

$V = \frac{1}{3}(25)(6)$ Sustituya el 25 para B, el área de la base, y el 6 para h, la altura.

$= 25(2)$ Multiplique el primer y tercer factores: $\frac{1}{3}(6) = 2$.

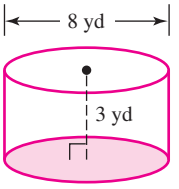
$= 50$ Complete la multiplicación por 25.

El volumen de la pirámide es de 50 cm^3.

Observe que las fórmulas para el volumen de un cono, un cilindro y una esfera contienen un factor de π.

Cono	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
Cilindro	$V = \pi r^2 h$
Esfera	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Encuentre el volumen del cilindro mostrado aquí. Dé la respuesta exacta y una aproximación a la centésima más cercana.



Dado que un radio es de la mitad del diámetro de la base circular, $r = \frac{1}{2} \cdot 8 \text{ yd} = 4 \text{ yd}$. Para encontrar el volumen del cilindro, se procede como a continuación:

$V = \pi r^2 h$ Esta es la fórmula para el volumen de un cilindro.

$V = \pi(4)^2(3)$ Sustituya el 4 para r, el radio de la base, y el 3 para h, la altura.

$V = \pi(16)(3)$ Evalúe la expresión exponencial.

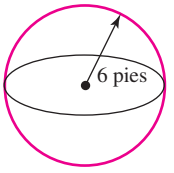
$= 48\pi$ Escriba el producto de tal manera que π sea el último factor.

≈ 150.7964474 Use una calculadora para realizar la multiplicación.

El volumen exacto del cilindro es de 48π yd^3. A la centésima más cercana, el volumen es de 150.80 yd^3.

Si una respuesta exacta contiene π, se puede utilizar el 3.14 como una aproximación y completar los cálculos a mano. O, se puede utilizar una calculadora que tenga una tecla pi $\boxed{\pi}$ para encontrar una aproximación.

Encuentre el volumen de la esfera mostrada aquí. Dé la respuesta exacta y una aproximación a la décima más cercana.



$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ Esta es la fórmula para el volumen de una esfera.

$V = \frac{4}{3}\pi(6)^3$ Sustituya el 6 para r, el radio de la esfera.

$= \frac{4}{3}\pi(216)$ Evalúe la expresión exponencial.

$= \frac{864}{3}\pi$ Multiplique: $4(216) = 864$.

$= 288\pi$ Divida: $\frac{864}{3} = 288$.

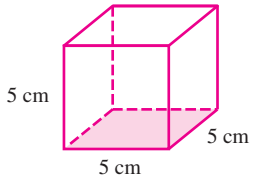
≈ 904.7786842 Use una calculadora para realizar la multiplicación.

El volumen de la esfera es de exactamente 288π pies^3. A la décima más cercana este es de 904.8 pies^3.

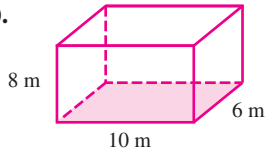
EJERCICIOS DE REPASO

Encuentre el volumen de cada figura. Si una respuesta exacta contiene π, aproxime a la centésima más cercana.

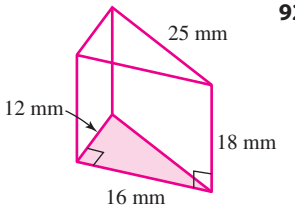
89.



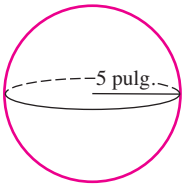
90.



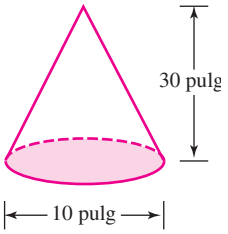
91.



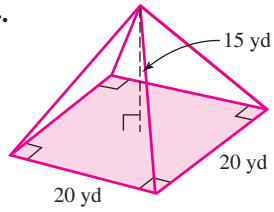
92.



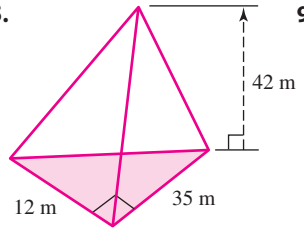
93.



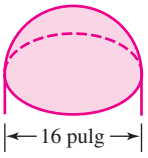
94.



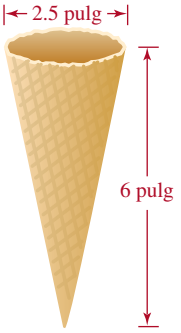
95.



96.



97. AGRICULTURA Encuentre el volumen del silo para maíz mostrado abajo. Redondee al pie cúbico más cercano.



98. CONO DE GALLETA Encuentre el volumen del cono para helado mostrado arriba. Dé la respuesta exacta y una aproximación a la décima más cercana.

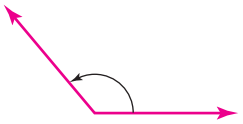
99. ¿Cuántas pulgadas cúbicas hay en 1 pie cúbico?

100. ¿Cuántos pies cúbicos hay en 2 yardas cúbicas?

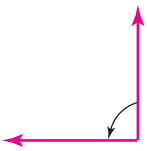
CAPÍTULO 9 EXAMEN

1. Estime cada medida de ángulo. Después indique si es un ángulo agudo, recto, obtuso o llano.

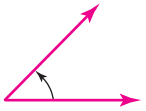
a.



b.



c.



d.

2. Complete los espacios.

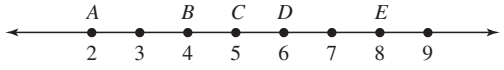
a. Si $\angle ABC \cong \angle DEF$, entonces los ángulos tienen la misma _____.

b. Dos segmentos congruentes tienen la misma _____.

c. Dos puntos diferentes determinan un _____.

d. A dos ángulos se les llama _____ si la suma de sus medidas es de 90°.

3. Refiérase a la figura abajo. ¿Cuál es el punto medio de $\overline{BE}$?



4. Refiérase a la figura de abajo e indique si cada enunciado es verdadero o falso.

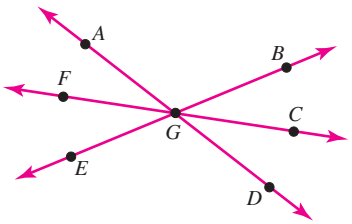
a. $\angle AGF$ y $\angle BGC$ son ángulos verticales.

b. $\angle EGF$ y $\angle DGE$ son ángulos adyacentes.

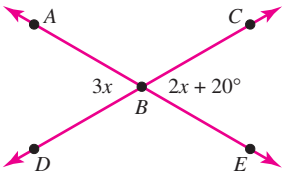
c. $m(\angle AGB) = m(\angle EGD)$.

d. $\angle CGD$ y $\angle DGF$ son ángulos suplementarios.

e. $\angle EGD$ y $\angle AGB$ son ángulos complementarios.



5. Encuentre x. Después encuentre $m(\angle ABD)$ y $m(\angle CBE)$.



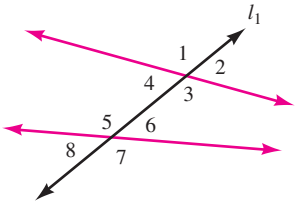
6. Encuentre el suplemento de un ángulo de 47°.

7. Refiérase a la figura abajo. Complete los espacios.

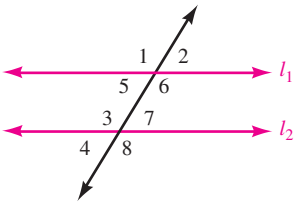
a. l_1 interseca dos rectas coplanares. Se le llama una _____.

b. $\angle 4$ y _____ son ángulos alternos interiores.

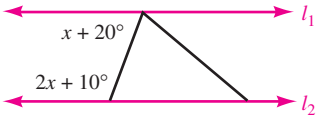
c. $\angle 3$ y _____ son ángulos correspondientes.



8. En la figura abajo, $l_1 \parallel l_2$ y $m(\angle 2) = 25°$. Encuentre las medidas de los otros ángulos numerados.

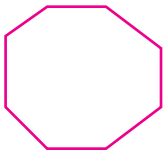


9. En la figura abajo, $l_1 \parallel l_2$. Encuentre x. Después determine la medida de cada ángulo que está etiquetado en la figura.

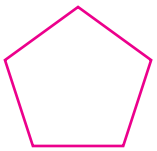


10. Para cada polígono, dé el número de lados que tiene, indique su nombre y después dé el número de vértices que tiene.

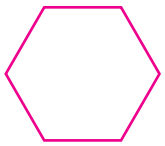
a.



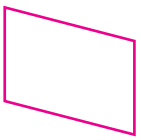
b.



c.

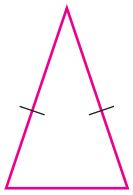


d.

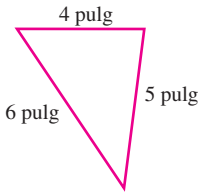


11. Clasifique cada triángulo como un triángulo equilátero, un triángulo isósceles o un triángulo escaleno.

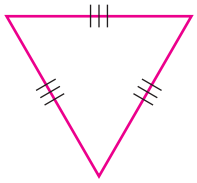
a.



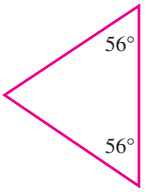
b.



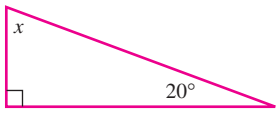
c.



d.



12. Encuentre x.



13. La medida del ángulo del vértice de un triángulo isósceles es de 12°. Encuentre la medida de cada ángulo base.

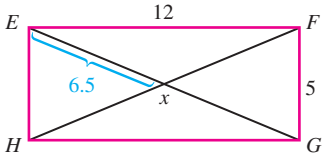
14. Refiérase al rectángulo $EFGH$ mostrado abajo.

a. Encuentre $m(\overline{HG})$.

b. Encuentre $m(\overline{FH})$.

c. Encuentre $m(\angle FGH)$.

d. Encuentre $m(\overline{EH})$.



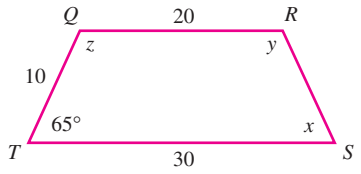
15. Refiérase al trapezoide isósceles $QRST$ mostrado abajo.

a. Encuentre $m(\overline{RS})$.

b. Encuentre x.

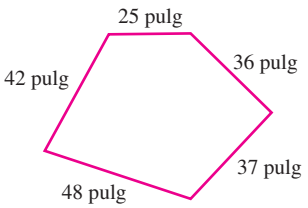
c. Encuentre y.

d. Encuentre z.



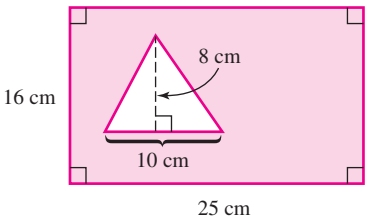
16. Encuentre la suma de las medidas de los ángulos de un decágono.

17. Encuentre el perímetro de la figura mostrada abajo.

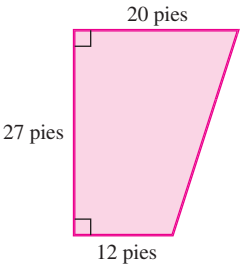


18. El perímetro de un triángulo equilátero es de 45.6 m. Encuentre la longitud de cada lado.

19. Encuentre el área de la parte sombreada de la figura mostrada abajo.



20. DECORACIÓN Un patio tiene la forma de un trapezoide, como se muestra a la derecha. Si la alfombra para interiores/exteriores se vende por \$18 la *yarda cuadrada* instalada, ¿cuánto costará alfombrar el patio?



21. ¿Cuántas pulgadas cuadradas hay en un pie cuadrado?

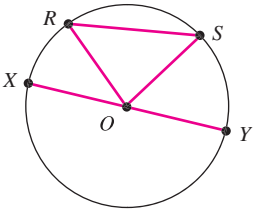
22. Encuentre el área del rectángulo mostrado abajo en pulgadas cuadradas.

23. Refiérase a la figura abajo, donde O es el centro del círculo.

a. Nombre cada cuerda.

b. Nombre un diámetro.

c. Nombre cada radio.

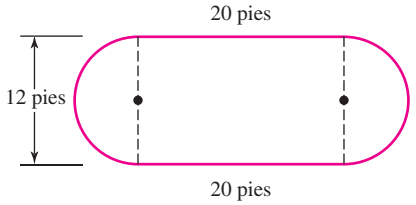


24. Complete el espacio: Si C es la circunferencia de un círculo y D es la longitud de su diámetro, entonces $\frac{C}{D} =$ ____.

En los Problemas 25–27, cuando sea apropiado, dé la respuesta exacta y una aproximación a la décima más cercana.

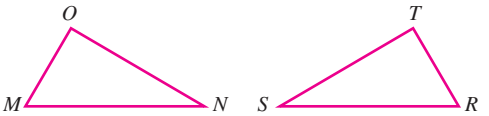
25. Encuentre la circunferencia de un círculo con un diámetro de 21 pies.

26. Encuentre el perímetro de la figura mostrada abajo. Asuma que los arcos son semicírculos.



27. HISTORIA Stonehenge es un monumento prehistórico en Inglaterra, el cual se cree que fue construido por los druidas. El sitio, de 30 metros de diámetro, consiste en un arreglo circular de piedras, como se muestra abajo. ¿Qué área cubre el monumento?

28. Vea la figura abajo, donde $\triangle MNO \cong \triangle RST$. Nombre las seis partes correspondientes de los triángulos congruentes.



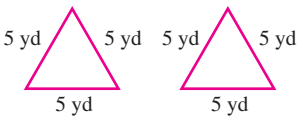
$\angle M \cong$ _____ $\quad \overline{MO} \cong$ _____

$\angle N \cong$ _____ $\quad \overline{MN} \cong$ _____

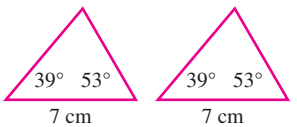
$\angle O \cong$ _____ $\quad \overline{NO} \cong$ _____

29. Indique si cada par de triángulos es congruente. Si lo es, indique por qué.

a.

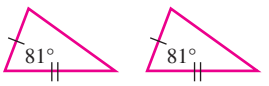


b.



c.

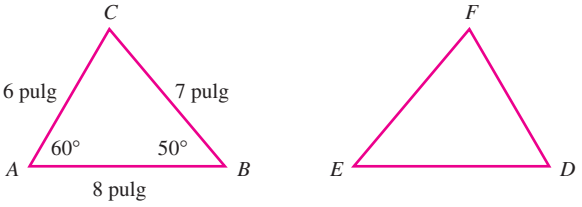
d.



30. Refiérase a la figura abajo, en la que $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

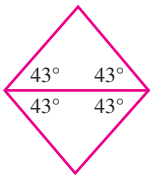
a. Encuentre $\text{m}(\overline{DE})$.

b. Encuentre $\text{m}(\angle E)$.

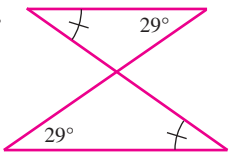


31. Indique si los triángulos en cada par son semejantes.

a.

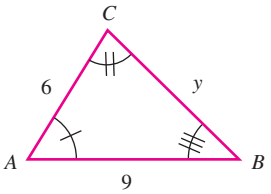


b.

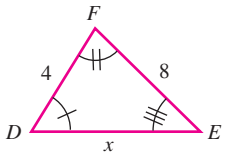


32. Refiérase a los triángulos abajo. Las unidades son metros.

a. Encuentre x.



b. Encuentre y.

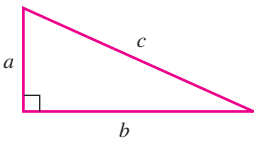


33. SOMBRAS Si un árbol proyecta una sombra de 7 pies al mismo tiempo que un hombre de 6 pies proyecta una sombra de 2 pies, ¿qué tan alto es el árbol?

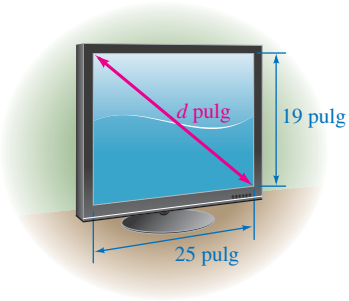
34. Refiérase al triángulo rectángulo abajo. Encuentre la longitud del lado faltante. Aproxime cualquier respuesta exacta que contenga una raíz cuadrada a la décima más cercana.

a. Encuentre c si $a = 10$ cm y $b = 24$ cm.

b. Encuentre b si $a = 6$ pulg y $c = 8$ pulg.



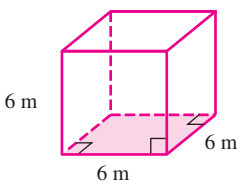
35. TELEVISIONES A la décima más cercana de una pulgada, ¿cuál es la medida de la diagonal de la pantalla de televisión mostrada abajo?



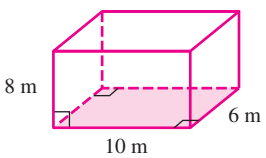
36. ¿Cuántas pulgadas cúbicas hay en 1 pie cúbico?

Encuentre el volumen de cada figura. Dé la respuesta exacta y una aproximación a la centésima más cercana si una respuesta contiene π.

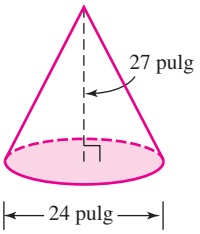
37.



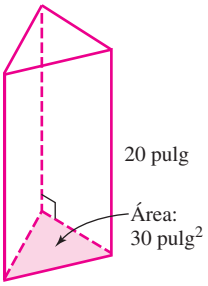
38.



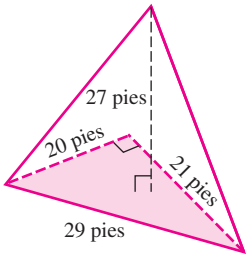
39.



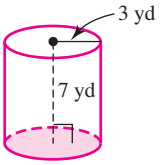
40.



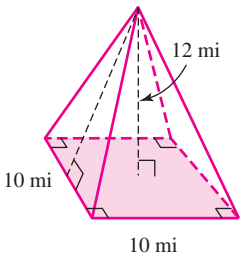
41.



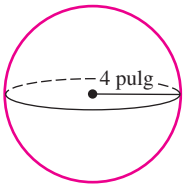
42.



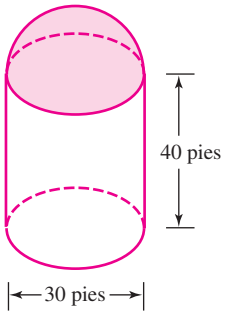
43.



44.



45. AGRICULTURA Un silo se utiliza para almacenar trigo y maíz. Encuentre el volumen del silo mostrado abajo. Dé la respuesta exacta y una aproximación al pie cúbico más cercano.



46. Dé un ejemplo en la vida real en el que se utilice el concepto de perímetro. Haga lo mismo para el área y para el volumen. Asegúrese de explicar el tipo de unidades utilizadas en cada caso.

CAPÍTULO 1–9 REPASO ACUMULATIVO

1. AUTOMÓVILES USADOS El siguiente apareció en *The Car Trader.* (O.M.O. Significa "o mejor oferta".) Si se recibieron ofertas de $8,750, $8,875, $8,900, $8,850, $8,800, $7,995, $8,995 y $8,925 ¿cuál fue el precio de venta del automóvil? [Sección 1.1]

> Ford Mustang 1969. Neumáticos nuevos.
> ¡¡¡Debo vender!!! $10,500 O.M.O

2. Redondee el 2,109,567 al millar más cercano. [Sección 1.1]

3. Sume: $458 + 8{,}099 + 23{,}419 + 58$ [Sección 1.2]

4. Reste: $35{,}021 - 23{,}999$ [Sección 1.3]

5. ESTACIONAMIENTO La longitud de un lote de estacionamiento rectangular es de 204 pies y su ancho es de 97 pies. [Sección 1.4]

a. Encuentre el perímetro del lote.

b. Encuentre el área del lote.

6. Divida: $1{,}363 \div 41$ [Sección 1.5]

7. PINTAR Un galón de pintura cubre 350 pies cuadrados. ¿Cuántos galones se necesitan si el área total de las paredes y techos a pintar es e 8,400 pies cuadrados y si deben aplicarse dos capas? [Sección 1.6]

8. a. Realice la factorización de primos del 220. [Sección 1.7]

b. Encuentre todos los factores del 12. [Sección 1.7]

9. a. Encuentre el mcm del 16 y el 24. [Sección 1.8]

b. Encuentre el mfc del 16 y el 24.

10. Evalúe: $\dfrac{(3+5)^2+2}{2(8-5)}$ [Sección 1.9]

11. a. Escriba el conjunto de los enteros. [Sección 2.1]

b. Simplifique: $-(-3)$ [Sección 2.1]

12. Desarrolle las operaciones.

a. $-16 + 4$ [Sección 2.2]

b. $16 - (-4)$ [Sección 2.3]

c. $-16(4)$ [Sección 2.4]

d. $\dfrac{-16}{-4}$ [Sección 2.5]

e. -4^2 [Sección 2.4]

f. $(-4)^2$ [Sección 2.4]

13. PROTECCIÓN POR SOBREGIRO Una estudiante olvidó que sólo tenía $30 en su cuenta de banco y escribió un cheque por $55 y utilizó su tarjeta de débito para comprar $75 de abarrotes. En cada una de las dos transacciones el bancó le cobró una multa de $20 por protección por sobregiro. Encuentre el nuevo balance de la cuenta. [Sección 2.3]

14. Evalúe: $10 - 4|6 - (-3)^2|$ [Sección 2.6]

15. a. Simplifique: $\dfrac{35}{28}$ [Sección 3.1]

b. Escriba $\dfrac{3}{8}$ como una fracción equivalente con denominador de 48. [Sección 3.1]

c. ¿Cuál es el recíproco de $\dfrac{9}{8}$? [Sección 3.3]

d. Escriba $7\dfrac{1}{2}$ como una fracción impropia. [Sección 3.5]

16. GRAVEDAD Los objetos en la luna sólo pesan una sexta parte que en la tierra. Si una roca pesa 54 onzas en la Tierra, ¿cuánto pesa en la luna? [Sección 3.2]

Desarrolle las operaciones.

17. $-\dfrac{5}{77}\left(\dfrac{33}{50}\right)$ [Sección 3.2]

18. $\dfrac{15}{16} \div \dfrac{45}{8}$ [Sección 3.3]

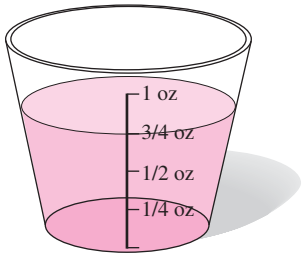
19. $\frac{3}{4} - \frac{3}{5}$ [Sección 3.4]

20. $-\frac{6}{25}\left(2\frac{7}{24}\right)$ [Sección 3.5]

21. $45\frac{2}{3} + 96\frac{4}{5}$ [Sección 3.6]

22. $\dfrac{7 - \frac{2}{3}}{4\frac{5}{6}}$ [Sección 3.7]

23. MEDICINA PARA MASCOTAS Al dueño de una mascota se le indicó que utilizara un gotero para administrar el medicamento a su gato enfermo. La taza mostrada abajo contiene 8 dosis del medicamento. Determine el tamaño de una sola dosis. [Sección 3.3]



24. HORNEADO Una bolsa de harina para todo uso contiene $17\frac{1}{2}$ tazas. Un pastelero utiliza $3\frac{3}{4}$ tazas. ¿Cuántas tazas de harina quedan? [Sección 3.6]

25. Evalúe: $\frac{3}{4} + \left(-\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{5}{4}\right)$ [Sección 3.7]

26. **a.** Redondee: $\pi = 3.141592654\ldots$ a la milésima más cercana [Sección 4.1]

b. Coloque el símbolo apropiado ($>$ o $<$) en el espacio: 154.34 ☐ 154.33999. [Sección 4.1]

c. Escriba el 6,510,345.798 en palabras. [Sección 4.1]

d. Escriba el 7,498.6461 en notación expandida. [Sección 4.1]

Desarrolle las operaciones.

27. $3.4 + 106.78 + 35 + 0.008$ [Sección 4.2]

28. $5{,}091.5 - 1{,}287.89$ [Sección 4.2]

29. $-8.8 + (-7.3 - 9.5)$ [Sección 4.2]

30. $-5.5(-3.1)$ [Sección 4.3]

31. $\dfrac{0.0742}{1.4}$ [Sección 4.4]

32. $\frac{7}{8}(9.7 + 15.8)$ [Sección 4.5]

33. PAGO DE NÓMINA Si se le pagara cada dos semanas, su *ingreso bruto mensual* es su ingreso bruto de un pago de nómina por 2.17. Encuentre el ingreso bruto mensual de una secretaria que gana \$1,250 cada dos semanas. [Sección 4.3]

34. Desarrolle cada operación de manera mental.

a. $(89.9708)(10{,}000)$ [Sección 4.3]

b. $\dfrac{89.9708}{100}$ [Sección 4.4]

35. Estime el cociente: $9.2\overline{)18{,}460.76}$ [Sección 4.4]

36. Evalúe $\dfrac{(-1.3)^2 + 6.7}{-0.9}$ y redondee el resultado a la centésima más cercana. [Sección 4.4]

37. Escriba $\frac{2}{15}$ como un décima. Use una barra superior. [Sección 4.5]

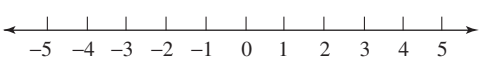
38. Evalúe cada expresión. [Sección 4.6]

a. $2\sqrt{121} - 3\sqrt{64}$

b. $\sqrt{\frac{49}{81}}$

39. Grafique cada número en la recta numérica. [Sección 4.6]

$$\left\{-4\frac{5}{8}, \sqrt{17}, 2.89, \frac{2}{3}, -0.1, -\sqrt{9}, \frac{3}{2}\right\}$$



40. Escriba cada frase como una razón (fracción) en la forma más sencilla. [Sección 5.1]

a. 3 centímetros a 7 centímetros

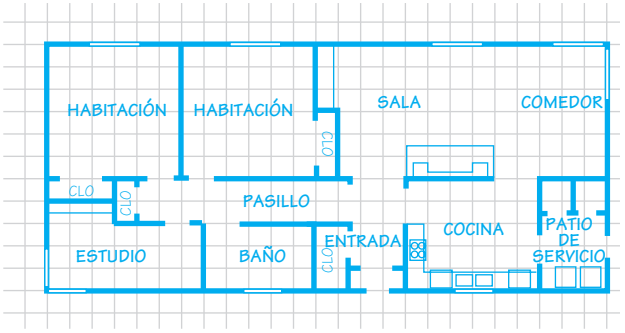
b. 13 semanas a 1 año

41. COMPARACIÓN AL COMPRAR Un pizarrón blanco con un área de 400 pulg^2 se vende por $24. Un pizarrón más grande, con un área de 600 pulg^2, se vende por $42. ¿Cuál pizarrón es la mejor compra? [Sección 5.1]

42. Resuelva la proporción: $\frac{x}{14} = \frac{13}{28}$ [Sección 5.2]

43. RECLAMACIÓN DE SEGUROS En un año, una compañía de seguros para automóviles tuvo 3 reclamaciones por 1,000 pólizas. Si se archivó un total de 375 reclamaciones ese año, ¿cuántas pólizas tenía la compañía? [Sección 5.2]

44. DIBUJO A ESCALA En el dibujo a escala de abajo, $\frac{1}{4}$ de pulgada representa una longitud real de 3 pies. La longitud de la casa en el dibujo es de $6\frac{1}{4}$ pulgadas. ¿Cuál es la longitud real de la casa? [Sección 5.2]



Escala $\frac{1}{4}$ pulg : 3 pies

45. Realice cada conversión. [Sección 5.3]

a. Convierta 168 pulgadas a pies.

b. Convierta 212 onzas a libras.

c. Convierta 30 galones a cuartos de galón.

d. Convierta 12.5 horas a minutos.

46. Realice cada conversión. [Sección 5.4]

a. Convierta 1.538 kilogramos a gramos.

b. Convierta 500 mililitros a litros.

c. Convierta 0.3 centímetros a kilómetros.

47. EL AMAZONAS El Río Amazonas entra al Océano Atlántico a través de un estuario ancho, de aproximadamente 240,000 m de ancho. Convierta el ancho a kilómetros. [Sección 5.4]

48. TRASATLÁNTICOS Cuando realizaba cruceros de Inglaterra a Estados Unidos, el *Queen Mary* logró 13 pies por galón. [Sección 5.5]

a. ¿Cuántos metros por galón es esto?

b. La capacidad de combustible del barco era de 3,000,000 de galones. ¿Cuántos litros es esto?

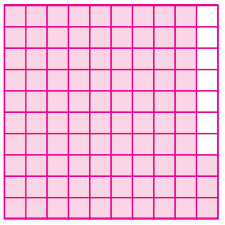
49. COCINA ¿Cuál es el peso de un jamón de 10 libras en kilogramos? [Sección 5.5]

50. Convierta 75 °C a grados Fahrenheit. [Sección 5.5]

51. Complete la tabla. [Sección 6.1]

Porcentaje	Decimal	Fracción
57%		
	0.001	
		$\frac{1}{3}$

52. Refiérase a la figura de la derecha. [Sección 6.1]



a. ¿Qué porcentaje de la figura está sombreada?

b. ¿Qué porcentaje no está sombreada?

53. ¿Qué número es 15% de 450? [Sección 6.2]

54. ¿24.6 es 20.5% de qué número? [Sección 6.2]

55. ¿51 es qué porcentaje de 60? [Sección 6.2]

56. VENTA DE ROPA Encuentre la cantidad del descuento y el precio en rebaja del abrigo mostrado abajo. [Sección 6.3]

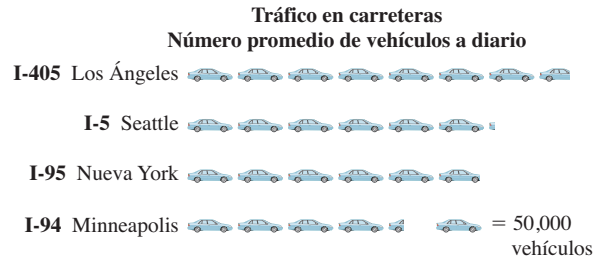
57. IMPUESTO SOBRE LA VENTA Si la tasa del impuesto sobre la venta es del $6\frac{1}{4}\%$, ¿cuánto impuesto sobre la venta se le sumará al precio de un automóvil nuevo que se vende por $18,550? [Sección 6.3]

58. COLECCIONABLES Una figura de porcelana, la cual se compró originalmente por $125, se vendió a un coleccionista diez años después por $750. ¿Cuál fue el porcentaje de incremento en el valor de la figura? [Sección 6.3]

59. PROPINA Estime una propina del 15% sobre una cena que cuesta $135.88. [Sección 6.4]

60. LIQUIDAR PRÉSTAMOS Para pagar la colegiatura, un estudiante universitario solicitó un prestamo de $1,500 por seis meses. Si la tasa de interés anual es del 9%, ¿cuánto tendrá que reembolsar el estudiante cuando venza el préstamo? [Sección 6.5]

61. CARRETERAS Refiérase a la pictografía de abajo para responder las siguientes preguntas. [Sección 7.1]



Fuente: www.skyscraperpage.com

a. Estime el número de vehículos que viajan por la carretera I-405 en Los Ángeles cada día.

b. Estime el número de vehículos que viajan por la carretera I-95 en Nueva York cada día.

c. Estime cuántos vehículos más viajan por la carretera I-5 en Seattle que por la carretera I-94 en Minneapolis cada día.

62. VEGETARIANOS La gráfica de abajo proporciona los resultados de un estudio reciente por *Vegetarian Times*. [Sección 7.1]

Fuente: *Vegetarian Times*

a. De acuerdo con el estudio, ¿qué porcentaje de los adultos vegetarianos en Estados Unidos tienen más de 55 años?

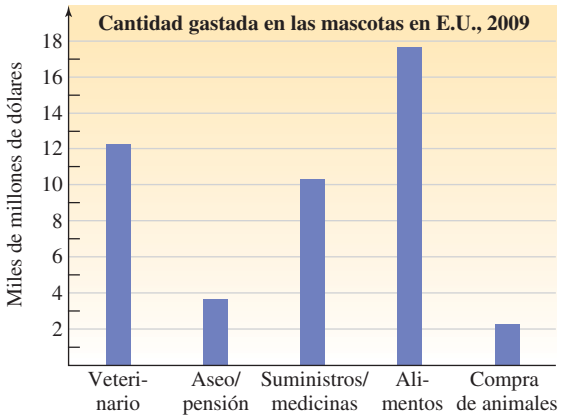
b. El estudio estimó que había 7,300,000 adultos vegetarianos en Estados Unidos. ¿Cuántos de ellos tienen entre 35 y 54 años?

63. GASTOS DE MASCOTAS Refiérase a la gráfica de abajo para responder las siguientes preguntas. [Sección 7.1]

a. ¿En qué categoría se gastó más dinero en las mascotas? Estime cuánto.

b. Estime cuánto dinero se gastó en la compra de mascotas.

c. Estime cuánto dinero más se gastó en veterinario que en aseo/pensión.



Fuente: American Pet Products Organization

64. TENIS DE MESA Los pesos (en onzas) de las 8 pelotas de ping pong que se van a utilizar en un torneo son las siguientes: 0.85, 0.87, 0.88, 0.88, 0.85, 0.86, 0.84 y 0.85. Encuentre la media, la mediana y la moda de los pesos. [Sección 7.2]

65. Evalúe la expresión $\dfrac{2x + 3y}{z - y}$ para $x = 2, y = -3$ y $z = -4$. [Sección 8.1]

66. Traduzca cada frase en una expresión algebraica. [Sección 8.1]

a. 16 menos que el doble de x

b. el producto de 75 y s, incrementado en 6

67. Simplifique cada expresión. [Sección 8.2]

a. $12(4a)$ **b.** $-2b(-7)(3)$

68. Multiplique. [Sección 8.2]

a. $9(3t - 10)$

b. $8(4x - 5y + 1)$

69. Reduzca términos similares. [Sección 8.2]

a. $10x - 7x$

b. $c^2 + 4c^2 + 2c^2 - c^2$

c. $4m - n - 12m + 7n$

d. $4x - 2(3x - 4) - 5(2x)$

70. Compruebe para determinar si -6 es una solución de $5x + 9 = x + 16$. [Sección 8.3]

Resuelva cada ecuación y compruebe el resultado.
[Sección 8.4]

71. $\frac{x}{8} - 2 = -5$

72. $4x - 40 = -20$

73. $3(2p + 15) = 3p - 4(11 - p)$

74. $-x + 2 = 13$

75. HORAS DE OBSERVACIÓN Para aprobar un curso de educación docente, un estudiante debe tener 90 horas de tiempo de observación en el salón de clases. Si un estudiante ya ha observado por 48 horas, ¿cuántas visitas al salón de clases de 6 horas debe realizar para cumplir con el requerimiento? (*Sugerencia:* Forme una ecuación y resuélvala para responder la pregunta.) [Sección 8.5]

76. Identifique la base y el exponente en cada expresión. [Sección 8.6]

a. 4^8

b. $3s^4$

77. Simplifique cada expresión. [Sección 8.6]

a. $s^4 \cdot s^5 \cdot s$

b. $(a^5)^7$

c. $(r^2t^4)(r^3t^5)$

d. $(2b^3c^6)^3$

e. $(y^5)^2(y^4)^3$

f. $[(-5.5)^3]^{12}$

78. Complete los espacios. [Sección 9.1]

a. La medida de un ángulo _____ es menor a 90°.

b. La medida de un ángulo _____ es de 90°.

c. La medida de un ángulo _____ es mayor a 90° pero menor a 180°.

d. La medida de un ángulo llano es de _____.

79. **a.** Encuentre el suplemento de un ángulo de 105°. [Sección 9.1]

b. Encuentre el complemento de un ángulo de 75°. [Sección 9.1]

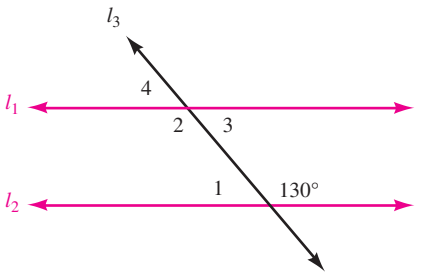
80. Refiérase a la figura de abajo, donde $l_1 \parallel l_2$. Encuentre la medida de cada ángulo. [Sección 9.2]

a. m($\angle 1$)

b. m($\angle 3$)

c. m($\angle 2$)

d. m($\angle 4$)



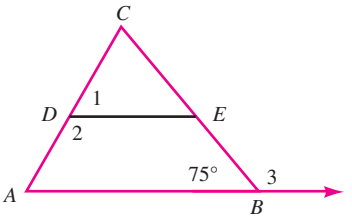
81. Refiérase a la figura de abajo, donde $AB \parallel DE$ y m($\overline{AC}$) = m($\overline{BC}$). Encuentre la medida de cada ángulo. [Sección 9.3]

a. m($\angle 1$)

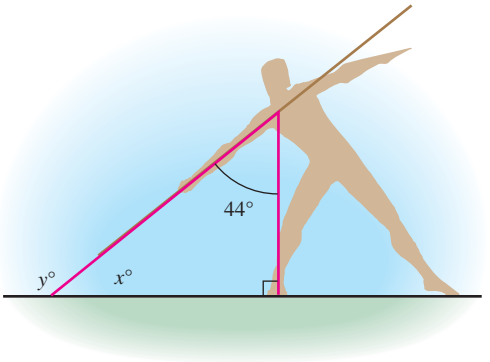
b. m($\angle C$)

c. m($\angle 2$)

d. m($\angle 3$)



82. LANZAMIENTO DE JABALINA Refiérase a la ilustración de abajo. Determine x y y. [Sección 9.3]



83. Si el ángulo del vértice de un triángulo isósceles mide 34°, ¿cuál es la medida de cada ángulo base? [Sección 9.3]

84. Si los catetos de un triángulo rectángulo miden 10 metros y 24 metros, ¿cuál es el largo de la hipotenusa? [Sección 9.4]

85. Determine si un triángulo con lados de longitudes de 16 pies, 63 pies y 65 pies es un triángulo rectángulo. [Sección 9.4]

86. SOMBRAS Si un árbol proyecta una sombra de 35 pies al mismo tiempo que un hombre de 6 pies proyecta una sombra de 5 pies, ¿qué tan alto es el árbol? [Sección 9.5]

87. Encuentre la suma de los ángulos de un pentágono. [Sección 9.6]

88. Encuentre el perímetro y el área de un cuadrado que tiene lados de 12 metros de largo. [Sección 9.7]

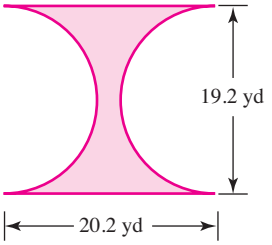
89. Encuentre el área de un triángulo con una base que es de 14 pies de largo y una altura de 18 pies. [Sección 9.7]

90. Encuentre el área de un trapezoide que tiene bases que son de 12 pulgadas y 14 pulgadas de largo y una altura de 7 pulgadas. [Sección 9.7]

91. ¿Cuántas pulgadas cuadradas hay en 1 pie cuadrado? [Sección 9.7]

92. Encuentre la circunferencia y el área de un círculo que tiene un diámetro de 14 centímetros. Para cada una, dé la respuesta exacta y una aproximación a la centésima más cercana. [Sección 9.8]

93. Encuentre el área de la región sombreada mostrada abajo, la cual se crea utilizando dos semicírculos. Redondee a la centésima más cercana. [Sección 9.8]



94. HIELO Encuentre el volumen de un bloque de hielo que tiene la forma de un sólido rectangular con dimensiones de 15 pulg × 24 pulg × 18 pulg [Sección 9.9]

95. Encuentre el volumen de una esfera que tiene un diámetro de 18 pulgadas. Dé la respuesta exacta y una aproximación a la centésima más cercana. [Sección 9.9]

96. Encuentre el volumen de un cono que tiene una base circular con un radio de 4 metros y una altura de 9 metros. Dé la respuesta exacta y una aproximación a la centésima más cercana. [Sección 9.9]

97. Encuentre el volumen de una tubería cilíndrica que es de 20 pies de largo y tiene un radio de 1 pie. Dé la respuesta exacta y una aproximación a la centésima más cercana. [Sección 9.9]

98. ¿Cuántas pulgadas cúbicas hay en 1 pie cúbico? [Sección 9.9]

APÉNDICE

I

Ejercicios de suma y multiplicación

SECCIÓN I.1

Tabla de sumas y cien ejercicios de suma y resta

Tabla básica de la suma

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Cincuenta ejercicios de suma

1. 3 + 2	**2.** 1 + 1	**3.** 2 + 5	**4.** 5 + 4
5. 7 + 7	**6.** 1 + 8	**7.** 6 + 6	**8.** 9 + 4
9. 3 + 8	**10.** 0 + 4	**11.** 6 + 3	**12.** 5 + 1
13. 2 + 8	**14.** 4 + 7	**15.** 1 + 6	**16.** 7 + 2
17. 8 + 9	**18.** 4 + 3	**19.** 7 + 0	**20.** 1 + 3
21. 4 + 6	**22.** 8 + 6	**23.** 9 + 9	**24.** 5 + 9
25. 0 + 8	**26.** 2 + 2	**27.** 7 + 6	**28.** 8 + 8
29. 1 + 2	**30.** 4 + 2	**31.** 4 + 4	**32.** 5 + 6
33. 3 + 3	**34.** 9 + 7	**35.** 2 + 6	**36.** 6 + 9
37. 0 + 6	**38.** 8 + 5	**39.** 7 + 3	**40.** 5 + 5
41. 1 + 0	**42.** 4 + 1	**43.** 3 + 5	**44.** 8 + 4
45. 9 + 2	**46.** 3 + 9	**47.** 7 + 8	**48.** 1 + 9
49. 5 + 7	**50.** 7 + 1		

Cincuenta ejercicios de resta

1. 8 − 5	**2.** 8 − 7	**3.** 4 − 2	**4.** 4 − 3
5. 7 − 3	**6.** 14 − 7	**7.** 12 − 8	**8.** 11 − 5
9. 12 − 3	**10.** 10 − 8	**11.** 18 − 9	**12.** 8 − 6
13. 10 − 4	**14.** 6 − 3	**15.** 15 − 9	**16.** 9 − 5
17. 2 − 0	**18.** 10 − 5	**19.** 15 − 7	**20.** 10 − 1
21. 17 − 8	**22.** 7 − 1	**23.** 13 − 6	**24.** 9 − 0
25. 16 − 8	**26.** 12 − 5	**27.** 7 − 5	**28.** 11 − 7
29. 14 − 5	**30.** 16 − 7	**31.** 5 − 0	**32.** 6 − 4
33. 12 − 6	**34.** 14 − 6	**35.** 5 − 3	**36.** 11 − 3
37. 13 − 8	**38.** 7 − 0	**39.** 9 − 1	**40.** 2 − 1
41. 3 − 2	**42.** 9 − 3	**43.** 13 − 9	**44.** 11 − 2
45. 10 − 3	**46.** 6 − 1	**47.** 4 − 0	**48.** 8 − 4
49. 9 − 2	**50.** 5 − 4		

SECCIÓN I.2

Tabla de multiplicar y cien ejercicios de multiplicación y división

Tabla básica de la multiplicación

×	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	**4**	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	**9**	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	**16**	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	**25**	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	**36**	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	**49**	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	**64**	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	**81**

Cincuenta ejercicios de multiplicación

1. 4×4	**2.** 1×4	**3.** 6×3	**4.** 9×7
5. 5×7	**6.** 0×8	**7.** 5×2	**8.** 1×2
9. 7×8	**10.** 4×0	**11.** 3×3	**12.** 9×3
13. 5×6	**14.** 7×2	**15.** 3×5	**16.** 8×8
17. 1×8	**18.** 3×2	**19.** 0×7	**20.** 6×4
21. 8×6	**22.** 9×9	**23.** 6×0	**24.** 1×3
25. 4×8	**26.** 8×2	**27.** 9×1	**28.** 7×7
29. 9×6	**30.** 1×5	**31.** 9×0	**32.** 4×5
33. 8×3	**34.** 7×6	**35.** 6×2	**36.** 7×1
37. 5×8	**38.** 4×3	**39.** 7×4	**40.** 1×1
41. 9×5	**42.** 2×2	**43.** 7×3	**44.** 2×4
45. 6×6	**46.** 9×2	**47.** 5×5	**48.** 6×1
49. 8×9	**50.** 9×4		

Cincuenta ejercicios de división

1. $4\overline{)20}$	**2.** $8\overline{)56}$	**3.** $3\overline{)6}$	**4.** $1\overline{)8}$
5. $9\overline{)45}$	**6.** $7\overline{)42}$	**7.** $5\overline{)25}$	**8.** $3\overline{)24}$
9. $5\overline{)5}$	**10.** $7\overline{)21}$	**11.** $9\overline{)81}$	**12.** $3\overline{)0}$
13. $8\overline{)32}$	**14.** $6\overline{)18}$	**15.** $9\overline{)0}$	**16.** $2\overline{)10}$
17. $4\overline{)8}$	**18.** $3\overline{)27}$	**19.** $1\overline{)1}$	**20.** $6\overline{)30}$
21. $1\overline{)7}$	**22.** $4\overline{)16}$	**23.** $7\overline{)63}$	**24.** $5\overline{)0}$
25. $7\overline{)35}$	**26.** $3\overline{)3}$	**27.** $5\overline{)15}$	**28.** $8\overline{)48}$
29. $7\overline{)0}$	**30.** $2\overline{)16}$	**31.** $3\overline{)9}$	**32.** $6\overline{)12}$
33. $9\overline{)72}$	**34.** $8\overline{)0}$	**35.** $4\overline{)28}$	**36.** $8\overline{)64}$
37. $6\overline{)24}$	**38.** $6\overline{)54}$	**39.** $7\overline{)49}$	**40.** $7\overline{)14}$
41. $6\overline{)36}$	**42.** $1\overline{)9}$	**43.** $3\overline{)12}$	**44.** $4\overline{)36}$
45. $2\overline{)4}$	**46.** $8\overline{)40}$	**47.** $2\overline{)2}$	**48.** $1\overline{)4}$
49. $9\overline{)18}$	**50.** $6\overline{)6}$		

APÉNDICE

II

Polinomios

Objetivos

1. Conocer el vocabulario para los polinomios.
2. Evaluar polinomios.

SECCIÓN II.1
Introducción a los polinomios

1 Conocer el vocabulario para los polinomios

Recuerde que un **término algebraico,** o simplemente **término,** es un número o un producto de un número y una o más variables, las cuales pueden elevarse a potencias. Algunos ejemplos de términos son

$$17, \quad 5x, \quad 6t^2 \quad \text{y} \quad -8z^3$$

Los *coeficientes* de estos términos son 17, 5, 6 y -8, en ese orden.

Polinomios

Un **polinomio** es un solo término o una suma de términos en el que las variables tienen exponentes de número natural y no aparecen variables en el denominador.

Algunos ejemplos de polinomios son

$$141, \quad 8y^2, \quad 2x + 1, \quad 4y^2 - 2y + 3 \quad \text{y} \quad 7a^3 + 2a^2 - a - 1$$

El polinomio $8y^2$ tiene un término. El polinomio $2x + 1$ tiene dos términos, $2x$ y 1. Dado que $4y^2 - 2y + 3$ puede escribirse como $4y^2 + (-2y) + 3$, es la suma de los tres términos, $4y^2$, $-2y$ y 3.

Algunos polinomios se clasifican por el número de términos que contienen. A un polinomio con un término se le llama **monomio.** A un polinomio con dos términos se le llama **binomio.** A un polinomio con tres términos se le llama **trinomio.** En la tabla siguiente se muestran algunos ejemplos de estos polinomios.

Monomios	Binomios	Trinomios
$5x^2$	$2x - 1$	$5t^2 + 4t + 3$
$-6x$	$18a^2 - 4a$	$27x^3 - 6x + 2$
29	$-27z^4 + 7z^2$	$32r^2 + 7r - 12$

Auto-revisión 1

Clasifique cada polinomio como monomio, binomio o trinomio:

a. $8x^2 + 7$

b. $5x$

c. $x^2 - 2x - 1$

Ahora intente **Problemas 5, 7 y 11**

EJEMPLO 1 Clasifique cada polinomio como monomio, binomio o trinomio: **a.** $3x + 4$ **b.** $3x^2 + 4x - 12$ **c.** $25x^3$

Estrategia Se contará el número de términos en el polinomio.

POR QUÉ El número de términos determina el tipo de polinomio.

Solución

a. Dado que $3x + 4$ tiene dos términos, es un binomio.
b. Dado que $3x^2 + 4x - 12$ tiene tres términos, es un trinomio.
c. Dado que $25x^3$ tiene un término, es un monomio.

Al monomio $7x^3$ se le llama **monomio de tercer grado** o **monomio de grado 3,** debido a que la variable aparece tres veces como un factor.

- $5x^2$ es un monomio de grado 2. Debido a que la variable aparece dos veces como un factor: $x^2 = x \cdot x$.
- $-8a^4$ es un monomio de grado 4. Debido a que la variable aparece cuatro veces como un factor: $a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$.
- $\frac{1}{2}m^5$ es un monomio de grado 5. Debido a que la variable aparece cinco veces como un factor: $m^5 = m \cdot m \cdot m \cdot m \cdot m$.

El grado de un polinomio se define considerando los grados de cada uno de sus términos.

Grado de un polinomio

El **grado de un polinomio** es el mismo que el grado de su término con el mayor grado.

Por ejemplo,

- $x^2 + 5x$ es un binomio de grado 2, debido a que el grado de su término con el mayor grado (x^2) es de 2.
- $4y^3 + 2y - 7$ es un trinomio de grado 3, debido a que el grado de su término con el mayor grado ($4y^3$) es de 3.
- $\frac{1}{2}z + 3z^4 - 2z^2$ es un trinomio de grado 4, debido a que el grado de su término con el mayor grado ($3z^4$) es de 4.

Auto-revisión 2

Encuentre el grado de cada polinomio:

a. $3p^3$

b. $17r^4 + 2r^8 - r$

c. $-2g^5 - 7g^6 + 12g^7$

Ahora intente **Problemas 13, 15 y 17**

EJEMPLO 2 Encuentre el grado de cada polinomio:

a. $-2x + 4$ **b.** $5t^3 + t^4 - 7$ **c.** $3 - 9z + 6z^2 - z^3$

Estrategia Se determinará el grado de cada término del polinomio.

POR QUÉ El término con el grado más alto da el grado del polinomio.

Solución

a. Dado que $-2x$ puede escribirse como $-2x^1$, el grado de término con el mayor grado es de 1. Por tanto, el grado del polinomio $-2x + 4$ es de 1.

b. En $5t^3 + t^4 - 7$, el grado del término con el mayor grado (t^4) es de 4. Por tanto, el grado del polinomio es de 4.

c. En $3 - 9z + 6z^2 - z^3$, el grado del término con el mayor grado ($-z^3$) es de 3. Por tanto, el grado del polinomio es de 3.

2 Evaluar polinomios

Cuando se sustituye un número por la variable en un polinomio, el polinomio toma un valor numérico. El encontrar este valor se le llama **evaluar el polinomio.**

EJEMPLO 3 Evalúe cada polinomio para $x = 3$:

a. $3x - 2$ **b.** $-2x^2 + x - 3$

Estrategia Se sustituirá el valor proporcionado para cada x en el polinomio y se seguirá la regla del orden de las operaciones.

POR QUÉ El *evaluar un polinomio* significa encontrar su valor numérico, una vez que se conoce el valor de su variable.

Solución

a. $3x - 2 = 3(3) - 2$ Sustituya el 3 para x.
$= 9 - 2$ Multiplique: 3(3) = 9.
$= 7$ Reste.

b. $-2x^2 + x - 3 = -2(3)^2 + 3 - 3$ Sustituya el 3 para x.
$= -2(9) + 3 - 3$ Evalúe la expresión exponencial.
$= -18 + 3 - 3$ Multiplique: −2(9) = −18.
$= -15 - 3$ Sume: −18 + 3 = −15.
$= -18$ Reste: −15 − 3 = −15 + (−3) = −18.

Auto-revisión 3

Evalúe cada polinomio para $x = -1$:

a. $-2x^2 - 4$

b. $3x^2 - 4x + 1$

Ahora intente **Problemas 23 y 31**

EJEMPLO 4 ***Altura de un objeto*** El polinomio $-16t^2 + 28t + 8$ da la altura (en pies) de un objeto t segundos después que se ha lanzado al aire. Encuentre la altura del objeto después de 1 segundo.

Estrategia Se sustituirá el 1 para t y se evaluará el polinomio.

POR QUÉ La variable t representa el tiempo desde que se lanzó el objeto al aire.

Solución

Para encontrar la altura a 1 segundo, se evalúa el polinomio para $t = 1$.

$-16t^2 + 28t + 8 = -16(1)^2 + 28(1) + 8$ Sustituya el 1 para t.
$= -16(1) + 28(1) + 8$ Evalúe la expresión exponencial.
$= -16 + 28 + 8$ Multiplique: −16(1) = −16 y 28(1) = 28.
$= 12 + 8$ Sume: −16 + 28 = 12.
$= 20$ Sume.

A 1 segundo, la altura del objeto es de 20 pies.

Auto-revisión 4

Refiérase al Ejemplo 4. Encuentre la altura del objeto después de dos segundos.

Ahora intente **Problemas 35 y 37**

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. a. binomio **b.** monomio **c.** trinomio **2. a.** 3 **b.** 8 **c.** 7
3. a. −6 **b.** 8 **4.** 0 pies

SECCIÓN II.1 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Complete los espacios.

1. A un polinomio con un término se le llama _____.
2. A un polinomio con dos términos se le llama _____.
3. A un polinomio con tres términos se le llama _____.
4. El grado de un polinomio es el mismo que el grado de su término con el _____ grado.

CONCEPTOS

Clasifique cada polinomio como monomio, binomio o trinomio.

5. $3x^2 - 4$
6. $5t^2 - t + 1$
7. $17e^4$
8. $x^2 + x + 7$
9. $25u^2$
10. $x^2 - 9$
11. $q^5 + q^2 + 1$
12. $4d^3 - 3d^2$

Encuentre el grado de cada polinomio.

13. $5x^3$

14. $3t^5 + 3t^2$

15. $2x^2 - 3x + 2$

16. $\frac{1}{2}p^4 - p^2$

17. $2m$

18. $7q - 5$

19. $25w^6 + 5w^7$

20. $p^6 - p^8$

NOTACIÓN

Complete cada solución.

21. Evalúe $3a^2 + 2a - 7$ para $a = 2$.

$$\begin{aligned} 3a^2 + 2a - 7 &= 3(\square)^2 + 2(\square) - 7 \\ &= 3(\square) + \square - 7 \\ &= 12 + 4 - 7 \\ &= \square - 7 \\ &= 9 \end{aligned}$$

22. Evalúe $-q^2 - 3q + 2$ para $q = -1$.

$$\begin{aligned} -q^2 - 3q + 2 &= -(\square)^2 - 3(\square) + 2 \\ &= -(\square) - 3(-1) + 2 \\ &= -1 + \square + 2 \\ &= \square + 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

PRÁCTICA

Evalúe cada polinomio para el valor proporcionado.

23. $3x + 4$ para $x = 3$

24. $\frac{1}{2}x - 3$ para $x = -6$

25. $2x^2 + 4$ para $x = -1$

26. $-\frac{1}{2}x^2 - 1$ para $x = 2$

27. $0.5t^3 - 1$ para $t = 4$

28. $0.75a^2 + 2.5a + 2$ para $a = 0$

29. $\frac{2}{3}b^2 - b + 1$ para $b = 3$

30. $3n^2 - n + 2$ para $n = 2$

31. $-2s^2 - 2s + 1$ para $s = -1$

32. $-4r^2 - 3r - 1$ para $r = -2$

APLICACIONES

La altura h (en pies) de una pelota lanzada hacia arriba con una velocidad inicial de 64 pies por segundo está dada por la ecuación $h = -16t^2 + 64t$. Encuentre la altura de la pelota después de los números de segundos proporcionados.

33. 0 segundos

34. 1 segundos

35. 2 segundos

36. 4 segundos

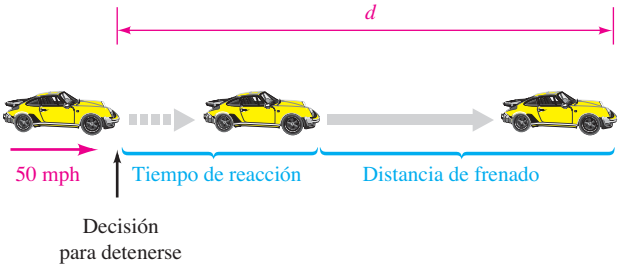
El número de pies que ha recorrido un automóvil antes de detenerse depende del tiempo de reacción del conductor y de la distancia de frenado. Para un conductor, la distancia para detenerse d está dada por la ecuación $d = 0.04v^2 + 0.9v$, donde v es la velocidad del automóvil. Encuentre la distancia para detenerse para cada una de las siguientes velocidades.

37. 30 mph

38. 50 mph

39. 60 mph

40. 70 mph



REDACCIÓN

41. Explique cómo encontrar el grado del polinomio $2x^3 + 5x^5 - 7x$.

42. Explique cómo evaluar el polinomio $-2x^2 - 3$ para $x = 5$.

REPASO

Desarrolle las operaciones.

43. $\frac{2}{3} + \frac{4}{3}$

44. $\frac{36}{7} - \frac{23}{7}$

45. $\frac{5}{12} \cdot \frac{18}{5}$

46. $\frac{23}{25} \div \frac{46}{5}$

Resuelva cada ecuación.

47. $x - 4 = 12$

48. $4z = 108$

49. $2(x - 3) = 6$

50. $3(a - 5) = 4(a + 9)$

Objetivos

1. Sumar polinomios.
2. Restar polinomios.

SECCIÓN II.2
Suma y resta de polinomios

Los polinomios pueden sumarse, restarse y multiplicarse como los números en la aritmética. En esta sección, se muestra cómo encontrar sumas y diferencias de polinomios.

1 Sumar polinomios

Recuerde que los términos semejantes tienen exactamente las mismas variables y los mismos exponentes. Por ejemplo, los monomios

$3z^2$ y $-2z^2$ son términos semejantes — Ambos tienen la misma variable (z) con el mismo exponente (2).

Sin embargo, los monomios

$7b^2$ y $8a^2$ no son términos semejantes — Tienen variables diferentes.

$32p^2$ y $25p^3$ no son términos semejantes — Los exponentes de p son diferentes.

También recuerde que se utiliza la propiedad distributiva de manera inversa para simplificar una suma o una diferencia de términos semejantes. Se **combinan términos semejantes** sumando sus coeficientes y conservando las mismas variables y exponentes. Por ejemplo,

$$2y + 5y = (2 + 5)y = 7y \quad \text{y} \quad -3x^2 + 7x^2 = (-3 + 7)x^2 = 4x^2$$

Estos ejemplos sugieren la siguiente regla.

Suma de polinomios

Para sumar polinomios, combine sus términos semejantes.

EJEMPLO 1 Sume: $5x^3 + 7x^3$

Estrategia Se utilizará la propiedad distributiva de manera inversa y se sumarán los coeficientes de los términos.

POR QUÉ $5x^3$ y $7x^3$ son términos semejantes y por tanto pueden sumarse.

Solución

$5x^3 + 7x^3 = 12x^3$ Piense: $(5 + 7)x^3 = 12x^3$.

Auto-revisión 1

Sume: $7y^3 + 12y^3$

Ahora intente **Problemas 15 y 19**

EJEMPLO 2 Sume: $\frac{3}{2}t^2 + \frac{5}{2}t^2 + \frac{7}{2}t^2$

Estrategia Se utilizará la propiedad distributiva de manera inversa y se sumarán los coeficientes de los términos.

POR QUÉ $\frac{3}{2}t^2$, $\frac{5}{2}t^2$ y $\frac{7}{2}t^2$ son términos semejantes y por tanto pueden sumarse.

Solución

Dado que los tres monomios son términos semejantes, se suman los coeficientes y se conservan las variables y los exponentes.

$$\frac{3}{2}t^2 + \frac{5}{2}t^2 + \frac{7}{2}t^2 = \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \frac{7}{2}\right)t^2 = \frac{15}{2}t^2$$

Para sumar las fracciones, sume los numeradores y conserve el denominador: $3 + 5 + 7 = 15$.

Auto-revisión 2

Sume:

$\frac{1}{9}a^3 + \frac{2}{9}a^3 + \frac{5}{9}a^3$

Ahora intente **Problema 21**

Para sumar dos polinomios, se escribe el signo + entre ellos y se combinan los términos semejantes.

EJEMPLO 3 Sume: $2x + 3$ y $7x - 1$

Estrategia Se reordenará y reagrupará para juntar los términos semejantes. Después se combinarán los términos semejantes.

POR QUÉ El sumar polinomios significa combinar sus términos semejantes.

Auto-revisión 3

Sume:

$5y - 2$ y $-3y + 7$

Ahora intente **Problema 27**

Solución

$(2x + 3) + (7x - 1)$ Escriba un signo + entre los binomios.

$= (2x + 7x) + (3 - 1)$ Use las propiedades asociativa y distributiva para agrupar los términos semejantes.

$= 9x + 2$ Combine los términos semejantes.

Los binomios en el Ejemplo 3 pueden sumarse escribiendo los polinomios de tal manera que los términos semejantes estén en columnas.

$$\begin{array}{r} 2x + 3 \\ +\ 7x - 1 \\ \hline 9x + 2 \end{array}$$

Sume los términos semejantes, una columna a la vez.

Auto-revisión 4

Sume:
$(2b^2 - 4b) + (b^2 + 3b - 1)$

Ahora intente **Problema 33**

EJEMPLO 4 Sume: $(5x^2 - 2x + 4) + (3x^2 - 5)$

Estrategia Se combinarán los términos semejantes del trinomio y el binomio.

POR QUÉ Para sumar polinomios, se combinan los términos semejantes.

Solución

$(5x^2 - 2x + 4) + (3x^2 - 5)$

$= (5x^2 + 3x^2) + (-2x) + (4 - 5)$ Use las propiedades asociativa y conmutativa para agrupar los términos semejantes.

$= 8x^2 - 2x - 1$ Combine los términos semejantes.

Los polinomios en el Ejemplo 4 pueden sumarse escribiéndolos de tal manera que los términos semejantes estén en columnas.

$$\begin{array}{r} 5x^2 - 2x + 4 \\ +\ 3x^2 \quad - 5 \\ \hline 8x^2 - 2x - 1 \end{array}$$

Sume los términos semejantes, una columna a la vez.

Auto-revisión 5

Sume:
$(s^2 + 1.2s - 5) + (3s^2 - 2.5s + 4)$

Ahora intente **Problema 37**

EJEMPLO 5 Sume: $(3.7x^2 + 4x - 2) + (7.4x^2 - 5x + 3)$

Estrategia Se combinarán los términos semejantes de los dos trinomios.

POR QUÉ Para sumar polinomios, se combinan los términos semejantes.

Solución

$(3.7x^2 + 4x - 2) + (7.4x^2 - 5x + 3)$

$= (3.7x^2 + 7.4x^2) + (4x - 5x) + (-2 + 3)$ Use las propiedades asociativa y conmutativa para agrupar los términos semejantes.

$= 11.1x^2 - x + 1$ Combine los términos semejantes.

Los trinomios en el Ejemplo 5 pueden sumarse escribiéndolos de tal manera que los términos semejantes estén en columnas.

$$\begin{array}{r} 3.7x^2 + 4x - 2 \\ +\ 7.4x^2 - 5x + 3 \\ \hline 11.1x^2 - x + 1 \end{array}$$

Sume los términos semejantes, una columna a la vez.

2 Restar polinomios

Para restar un monomio de otro, se suma el opuesto del monomio que se va a restar. En símbolos, $x - y = x + (-y)$.

EJEMPLO 6 Reste: $8x^2 - 3x^2$

Estrategia Se sumará el opuesto de $3x^2$ a $8x^2$.

POR QUÉ Para restar monomios, se suma el opuesto del monomio que se va a restar.

Solución

$$8x^2 - 3x^2 = 8x^2 + (-3x^2)$$ Sume el opuesto de $3x^2$.

$$= 5x^2$$ Sume los coeficientes y conserve la misma variable y el mismo exponente. Piense: $[8 + (-3)]x^2 = 5x^2$

Auto-revisión 6

Reste: $6y^3 - 9y^3$

Ahora intente **Problema 47**

Recuerde del Capítulo 1 que se puede utilizar la propiedad distributiva para encontrar el opuesto de varios términos encerrados entre paréntesis. Por ejemplo, considere $-(2a^2 - a + 9)$.

$$-(2a^2 - a + 9) = -1(2a^2 - a + 9)$$ Reemplace el símbolo − enfrente del paréntesis con −1.

$$= -2a^2 + a - 9$$ Use la propiedad distributiva para eliminar los paréntesis.

Este ejemplo ilustra el siguiente método de la resta de polinomios.

Resta de polinomios

Para restar dos polinomios, cambie los signos de los términos del polinomio que se está restando, elimine los paréntesis y combine los términos semejantes.

EJEMPLO 7 Reste: $(3x - 4.2) - (5x + 7.2)$

Estrategia Se cambiarán los signos de los términos de $5x + 7.2$, se eliminarán los paréntesis y se combinarán los términos semejantes.

POR QUÉ Este es el método para restar dos polinomios.

Solución

$$(3x - 4.2) - (5x + 7.2)$$

$$= 3x - 4.2 - 5x - 7.2$$ Cambie el signo de cada término de $5x + 7.2$ y elimine los paréntesis.

$$= -2x - 11.4$$ Combine los términos semejantes: Piense: $(3 - 5)x = -2x$ y $(-4.2 - 7.2) = -11.4$.

Auto-revisión 7

Reste:
$(3.3a - 5) - (7.8a + 2)$

Ahora intente **Problema 51**

Los binomios en el Ejemplo 7 pueden restarse escribiéndolos de tal manera que los términos semejantes estén en columnas.

$$\begin{array}{r} 3x - 4.2 \\ -(5x + 7.2) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 3x - 4.2 \\ +\ -5x - 7.2 \\ \hline -2x - 11.4 \end{array}$$ Cambie los signos y sume, columna por columna.

Auto-revisión 8

Reste:
$(5y^2 - 4y + 2) - (3y^2 + 2y - 1)$

Ahora intente **Problema 59**

EJEMPLO 8 Reste: $(3x^2 - 4x - 6) - (2x^2 - 6x + 12)$

Estrategia Se cambiarán los signos de los términos de $2x^2 - 6x + 12$, se eliminarán los paréntesis y se combinarán los términos semejantes.

POR QUÉ Este es el método para restar dos polinomios.

Solución

$$(3x^2 - 4x - 6) - (2x^2 - 6x + 12)$$
$$= 3x^2 - 4x - 6 - 2x^2 + 6x - 12$$

Cambie los signos de cada término de $2x^2 - 6x + 12$ y elimine los paréntesis.

$$= x^2 + 2x - 18$$

Combine los términos semejantes: Piense: $(3 - 2)x^2 = x^2$, $(-4 + 6)x = 2x$ y $(-6 - 12) = -18$.

Los trinomios en el Ejemplo 8 pueden restarse escribiéndolos de tal manera que los términos semejantes estén en columnas.

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 4x - 6 \\ -(2x^2 - 6x + 12) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 3x^2 - 4x - 6 \\ +\ -2x^2 + 6x - 12 \\ \hline x^2 + 2x - 18 \end{array}$$

Cambie los signos y sume, columna por columna.

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. $19y^3$ **2.** $\frac{8}{9}a^3$ **3.** $2y + 5$ **4.** $3b^2 - b - 1$ **5.** $4s^2 - 1.3s - 1$ **6.** $-3y^3$ **7.** $-4.5a - 7$ **8.** $2y^2 - 6y + 3$

SECCIÓN II.2 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Complete los espacios.

1. Si dos términos algebraicos tienen exactamente las mismas variables y exponentes, se les llaman términos _____.

2. $3x^3$ y $3x^2$ son términos _____.

CONCEPTOS

Complete los espacios.

3. Para sumar dos monomios, se suman los _____ y se conservan las mismas _____ y exponentes.

4. Para restar un monomio de otro, se suma el _____ del monomio que se va a restar.

Determine si los monomios son términos semejantes. Si lo son, combínelos.

5. $3y, 4y$

6. $3x^2, 5x^2$

7. $3x, 3y$

8. $3x^2, 6x$

9. $3x^3, 4x^3, 6x^3$

10. $-2y^4, -6y^4, 10y^4$

11. $-5x^2, 13x^2, 7x^2$

12. $23, 12x, 25x$

NOTACIÓN

Complete cada solución.

13. $(3x^2 + 2x - 5) + (2x^2 - 7x)$
$= (3x^2 + \square) + (2x - \square) + (-5)$
$= \square + (-5x) - 5$
$= 5x^2 - 5x - 5$

14. $(3x^2 + 2x - 5) - (2x^2 - 7x)$
$= (3x^2 + 2x - 5) + [-(\square - 7x)]$
$= (3x^2 + 2x - 5) + (\square)$
$= (\square) + (2x + 7x) + (-5)$
$= x^2 + 9x - 5$

PRÁCTICA

Sume los polinomios.

15. $4y + 5y$

16. $-2x + 3x$

17. $8t^2 + 4t^2$

18. $15x^2 + 10x^2$

19. $3s^2 + 4s^2 + 7s^2$

20. $-2a^3 + 7a^3 - 3a^3$

21. $\frac{1}{8}a + \frac{3}{8}a + \frac{5}{8}a$

22. $\frac{1}{4}b + \frac{3}{4}b + \frac{1}{4}b$

23. $\frac{2}{3}c^2 + \frac{1}{3}c^2 + \frac{2}{3}c^2$

24. $\frac{4}{9}d^3 + \frac{1}{9}d^3 + \frac{3}{9}d^3$

25. Sume: $3x + 7$ y $4x - 3$

26. Sume: $2y - 3$ y $4y + 7$

27. Sume: $2x^2 + 3$ y $5x^2 - 10$

28. Sume: $-4a^2 + 1$ y $5a^2 - 1$

29. $(5x^3 - 42x) + (7x^3 - 107x)$

30. $(-43a^3 + 25a) + (58a^3 - 10a)$

31. $(3x^2 + 2x - 4) + (5x^2 - 17)$

32. $(5a^2 - 2a) + (-2a^2 + 3a + 4)$

33. $(7y^2 + 5y) + (y^2 - y - 2)$

34. $(4p^2 - 4p + 5) + (6p - 2)$

35. $(3x^2 - 3x - 2) + (3x^2 + 4x - 3)$

36. $(4c^2 + 3c - 2) + (3c^2 + 4c + 2)$

37. $(2.5a^2 + 3a - 9) + (3.6a^2 + 7a - 10)$

38. $(1.9b^2 - 4b + 10) + (3.7b^2 - 3b - 11)$

39. $(3n^2 - 5.8n + 7) + (-n^2 + 5.8n - 2)$

40. $(-3t^2 - t + 3.4) + (3t^2 + 2t - 1.8)$

41.
$$\begin{array}{r} 3x^2 + 4x + 5 \\ +\ 2x^2 - 3x + 6 \\ \hline \end{array}$$

42.
$$\begin{array}{r} 2x^2 - 3x + 5 \\ +\ -4x^2 - x - 7 \\ \hline \end{array}$$

43.
$$\begin{array}{r} -3x^2 \quad - 7 \\ +\ -4x^2 - 5x + 6 \\ \hline \end{array}$$

41.
$$\begin{array}{r} 4x^2 - 4x + 9 \\ +\ 9x - 3 \\ \hline \end{array}$$

45.
$$\begin{array}{r} -3x^2 + 4x + 25.4 \\ +\ 5x^2 - 3x - 12.5 \\ \hline \end{array}$$

46.
$$\begin{array}{r} -6x^3 - 4.2x^2 + 7 \\ +\ -7x^3 + 9.7x^2 - 21 \\ \hline \end{array}$$

Reste los polinomios.

47. $32u^3 - 16u^3$

48. $25y^2 - 7y^2$

49. $18x^5 - 11x^5$

50. $17x^6 - 22x^6$

51. $(30x^2 - 4) - (11x^2 + 1)$

52. $(5x^3 - 8) - (2x^3 + 5)$

53. $(3x^2 - 2x - 1) - (-4x^2 + 4)$

54. $(7a^2 + 5a) - (5a^2 - 2a + 3)$

55. $(4.5a + 3.7) - (2.9a - 4.3)$

56. $(5.1b - 7.6) - (3.3b + 5.9)$

57. $(2b^2 + 3b - 5) - (2b^2 - 4b - 9)$

58. $(3a^2 - 2a + 4) - (a^2 - 3a + 7)$

59. $(5p^2 - p + 71) - (4p^2 + p + 71)$

60. $(m^2 - m - 5) - (m^2 + 5.5m - 75)$

61. $(3.7y^2 - 5) - (2y^2 - 3.1y + 4)$

62. $(t^2 - 4.5t + 5) - (2t^2 - 3.1t - 1)$

63.
$$\begin{array}{r} 3x^2 + 4x - 5 \\ -\ (-2x^2 - 2x + 3) \\ \hline \end{array}$$

64.
$$\begin{array}{r} 3y^2 - 4y + 7 \\ -\ (6y^2 - 6y - 13) \\ \hline \end{array}$$

65.
$$\begin{array}{r} -2x^2 - 4x + 12 \\ -\ (10x^2 + 9x - 24) \\ \hline \end{array}$$

66.
$$\begin{array}{r} 25x^3 - 45x^2 + 31x \\ -\ (12x^3 + 27x^2 - 17x) \\ \hline \end{array}$$

67.
$$\begin{array}{r} 4x^3 - 3x + 10 \\ -\ (5x^3 - 4x - 4) \\ \hline \end{array}$$

68.
$$\begin{array}{r} 3x^3 + 4x^2 + 12 \\ -\ (-4x^3 + 6x^2 - 3) \\ \hline \end{array}$$

APLICACIONES

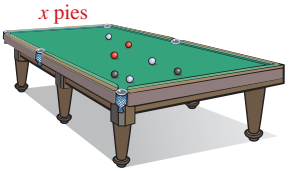
En los Ejercicios 69–72, recuerde que el perímetro de una figura es igual a la suma de las longitudes de sus lados.

69. CRUZ ROJA En 1891, Clara Barton fundó la Cruz Roja. Su símbolo es una bandera blanca que porta una cruz roja. Cada lado de la cruz tiene una longitud x, escriba una expresión que represente el perímetro de la cruz.

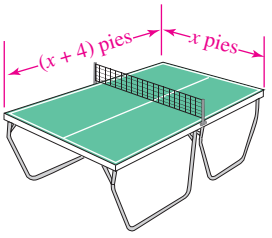
70. BILLARES Las mesas de billar varían de tamaño, pero todas las mesas son del doble de largo que de ancho.

a. Si la mesa de billar es de x pies de ancho, escriba una expresión que represente su longitud.

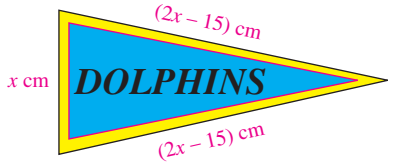
b. Escriba una expresión que represente el perímetro de la mesa.



71. PING-PONG Escriba una expresión que represente el perímetro de la mesa de ping pong.



72. COSER Escriba una expresión que represente la longitud de ribeteado amarillo necesario para delinear un banderín con las longitudes de los lados proporcionadas.



REDACCIÓN

73. ¿Qué son los *términos semejantes?*

74. Explique cómo sumar dos polinomios.

75. Explique cómo restar dos polinomios.

76. Cuando se suman dos binomios, ¿el resultado siempre es un binomio? Explique.

REPASO

77. TENIS PARA BASQUETBOL Use la siguiente información para encontrar por cuánto son más ligeros los tenis de Kevin Garnett que los de Michael Jordan.

Nike Air Garnett III	Air Jordan XV
Malla y piel sintéticos. Tallas $6\frac{1}{2}$–18 Peso: 13.8 oz	Parte superior con piel de plan flor con patrón de tejido. Tallas $6\frac{1}{2}$–18 Peso: 14.6 oz

78. AEROBICS El número de calorías quemadas cuando se realizan aerobics con escalones depende de la altura del escalón. ¿Cuántas calorías más se queman durante un ejercicio de 10 minutos utilizando un escalón de 8 pulgadas que un escalón de 4 pulgadas?

Altura del escalón (pulg.)	Calorías quemadas por minuto
4	4.5
6	5.5
8	6.4
10	7.2

Fuente: *Reebok Instructor News* (Vol. 4, No. 3, 1991)

79. CANAL DE PANAMÁ Un barco que entra al Canal de Panamá desde el océano Atlántico se eleva 85 pies al Lago Gatún por medio del sistema de esclusas de Gatún. Observe la ilustración. Después el barco desciende 31 pies por medio de la esclusa de Pedro Miguel. ¿Cuánto debe descender el barco por medio del sistema de esclusas Miraflores para que alcance el nivel del agua del océano Pacífico?

80. ESCLUSAS ¿Cuál es la longitud combinada del sistema de esclusas en el Canal de Panamá? Exprese su respuesta como un número mixto y como un decimal, redondeado a la décima más cercana.

Objetivos

1. Multiplicar monomios.
2. Multiplicar un polinomio por un monomio.
3. Multiplicar binomios.
4. Multiplicar polinomios.

SECCIÓN II.3
Multiplicación de polinomios

Ahora se explica cómo multiplicar polinomios. Se comenzará con el caso más sencillo —encontrar el producto de dos monomios.

1 Multiplicar monomios

Para multiplicar $4x^2$ por $2x^3$, se utilizan las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación para reordenar y reagrupar los factores.

$$(4x^2)(2x^3) = (4 \cdot 2)(x^2 \cdot x^3)$$ Agrupe los coeficientes y las variables.

$$= 8x^5$$ Simplifique: $x^2 \cdot x^3 = x^{2+3} = x^5$.

Este ejemplo sugiere la siguiente regla.

Multiplicación de dos monomios

Para multiplicar dos monomios, multiplique los factores numéricos (los coeficientes) y después multiplique los factores variables.

EJEMPLO 1 Multiplique: **a.** $3y \cdot 6y$ **b.** $-3x^5(2x^5)$

Estrategia Se multiplicarán los factores numéricos y después los factores variables.

POR QUÉ Las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación permiten reordenar y reagrupar factores.

Solución

a. $3y \cdot 6y = (3 \cdot 6)(y \cdot y)$ Agrupe los factores numéricos y las variables.

$= 18y^2$ Multiplique: $3 \cdot 6 = 18$ y $y \cdot y = y^2$.

b. $(-3x^5)(2x^5) = (-3 \cdot 2)(x^5 \cdot x^5)$ Agrupe los factores numéricos y las variables.

$= -6x^{10}$ Multiplique: $-3 \cdot 2 = -6$ y $x^5 \cdot x^5 = x^{5+5} = x^{10}$.

Auto-revisión 1

Multiplique: $-7a^3 \cdot 2a^5$

Ahora intente **Problema 15**

2 Multiplicar un polinomio por un monomio

Para encontrar el producto de un polinomio y un monomio, se utiliza la propiedad distributiva. Por ejemplo, para multiplicar $x + 4$ por $3x$, se procede como se indica:

$3x(x + 4) = 3x(x) + 3x(4)$ Use la propiedad distributiva.

$= 3x^2 + 12x$ Multiplique los monomios: $3x(x) = 3x^2$ y $3x(4) = 12x$.

Los resultados de este ejemplo sugieren la siguiente regla.

Multiplicación de polinomios por monomios

Para multiplicar un polinomio por un monomio, multiplique cada término del polinomio por el monomio.

EJEMPLO 2 Multiplique: **a.** $2a^2(3a^2 - 4a)$ **b.** $8x(3x^2 + 2x - 3)$

Estrategia Se multiplicará cada término del polinomio por el monomio.

POR QUÉ Para multiplicar un monomio y un polinomio se utiliza la propiedad distributiva.

Solución

a. $2a^2(3a^2 - 4a)$

$= 2a^2(3a^2) - 2a^2(4a)$ Use la propiedad distributiva.

$= 6a^4 - 8a^3$ Multiplique: $2a^2(3a^2) = 6a^4$ y $2a^2(4a) = 8a^3$.

b. $8x(3x^2 + 2x - 3)$

$= 8x(3x^2) + 8x(2x) - 8x(3)$ Use la propiedad distributiva.

$= 24x^3 + 16x^2 - 24x$ Multiplique: $8x(3x^2) = 24x^3$, $8x(2x) = 16x^2$, y $8x(3) = 24x$.

Auto-revisión 2

Multiplique:

a. $3y(5y^3 - 4y)$

b. $5x(3x^2 - 2x + 3)$

Ahora intente **Problema 29**

3 Multiplicar binomios

También puede utilizarse la propiedad distributiva para multiplicar binomios. Por ejemplo, para multiplicar $2a + 4$ y $3a + 5$, se piensa en $2a + 4$ como una sola cantidad y distribuirla sobre cada término de $3a + 5$.

$$\begin{aligned}(2a + 4)(3a + 5) &= (2a + 4)3a + (2a + 4)5 \\ &= (2a + 4)3a + (2a + 4)5 \\ &= (2a)3a + (4)3a + (2a)5 + (4)5 && \text{Distribuya la multiplicación por } 3a \text{ y por } 5. \\ &= 6a^2 + 12a + 10a + 20 && \text{Multiplique los monomios.} \\ &= 6a^2 + 22a + 20 && \text{Simplifique los términos semejantes.}\end{aligned}$$

En la tercera línea de la solución, observe que se ha multiplicado cada término de $3a + 5$ por cada término de $2a + 4$. Este ejemplo sugiere la siguiente regla.

Multiplicación de binomios

Para multiplicar dos binomios, multiplique cada término de un binomio por cada término del otro binomio y después simplifique los términos semejantes.

Se puede utilizar un método más directo, llamado **método PEIU,** para multiplicar binomios. PEIU es un acrónimo para **P**rimeros términos, términos **E**xteriores, términos **I**nteriores, **Ú**ltimos términos. Para utilizar el método PEIU para multiplicar $2a + 4$ por $3a + 5$, se

1. multiplican los **P**rimeros términos $2a$ y $3a$ para obtener $6a^2$,
2. multiplican los términos **E**xteriores $2a$ y 5 para obtener $10a$,
3. multiplican los términos **I**nteriores 4 y $3a$ para obtener $12a$ y
4. multiplican los **Ú**ltimos términos 4 y 5 para obtener 20.

Después se simplifica el polinomio resultante, si es posible.

$$(2a + 4)(3a + 5) = \underset{\text{P}}{2a(3a)} + \underset{\text{E}}{2a(5)} + \underset{\text{I}}{4(3a)} + \underset{\text{U}}{4(5)}$$

(Exteriores, Primeros, Interiores, Últimos)

$$\begin{aligned}&= 6a^2 + 10a + 12a + 20 && \text{Multiplique los monomios.} \\ &= 6a^2 + 22a + 20 && \text{simplifique los términos semejantes.}\end{aligned}$$

El lenguaje del álgebra Un *acrónimo* es una abreviación de varias palabras de tal manera que la abreviación en sí forme una palabra. El *acrónimo* PEIU ayuda a recordar el orden a seguir cuando se multiplican dos binomios: **P**rimeros, **E**xteriores, **I**nteriores, **Ú**ltimos.

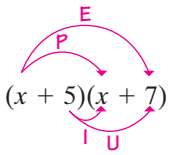
EJEMPLO 3 Multiplique: **a.** $(x + 5)(x + 7)$ **b.** $(3x + 4)(2x - 3)$

Estrategia Se utilizará el método PEIU.

POR QUÉ En cada caso se va a encontrar el producto de dos binomios y el método PEIU es un atajo para multiplicar dos binomios.

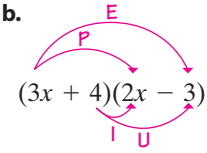
Solución

a.



$$(x + 5)(x + 7) = x(x) + x(7) + 5(x) + 5(7)$$
$$= x^2 + 7x + 5x + 35 \quad \text{Multiplique los monomios.}$$
$$= x^2 + 12x + 35 \quad \text{Simplifique los términos semejantes.}$$

b.



$$(3x + 4)(2x - 3) = 3x(2x) + 3x(-3) + 4(2x) + 4(-3)$$
$$= 6x^2 - 9x + 8x - 12 \quad \text{Multiplique los monomios.}$$
$$= 6x^2 - x - 12 \quad \text{Simplifique los términos semejantes.}$$

Auto-revisión 3

Multiplique:

a. $(y + 3)(y + 1)$

b. $(2a - 1)(3a + 2)$

Ahora intente **Problemas 35 y 39**

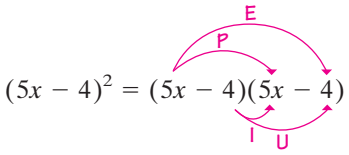
EJEMPLO 4

Encuentre: $(5x - 4)^2$

Estrategia Se escribirá la base, $5x - 4$, como un factor dos veces y se desarrollará la multiplicación.

POR QUÉ En la expresión $(5x - 4)^2$, el binomio $5x - 4$ es la base y el 2 es el exponente.

Solución



$$(5x - 4)^2 = (5x - 4)(5x - 4) \quad \text{Escriba la base como un factor dos veces.}$$
$$= 5x(5x) + 5x(-4) + (-4)(5x) + (-4)(-4)$$
$$= 25x^2 - 20x - 20x + 16 \quad \text{Multiplique los monomios.}$$
$$= 25x^2 - 40x + 16 \quad \text{Simplifique los términos semejantes.}$$

Auto-revisión 4

Encuentre: $(5x + 4)^2$

Ahora intente **Problema 41**

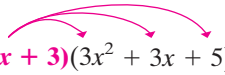
¡Cuidado! Un error común cuando se eleva al cuadrado un binomio es elevar al cuadrado sólo su primer y segundo términos. Por ejemplo, es incorrecto escribir

$$(5x - 4)^2 = (5x)^2 - (4)^2$$
$$= 25x^2 - 16$$

La respuesta correcta es $25x^2 - 40x + 16$.

4 Multiplicar polinomios

Para desarrollar una regla general para la multiplicación de dos polinomios cualesquiera, se encontrará el producto de $2x + 3$ y $3x^2 + 3x + 5$. En la solución, se utiliza la propiedad distributiva cuatro veces.



$$(2x + 3)(3x^2 + 3x + 5)$$
$$= (2x + 3)3x^2 + (2x + 3)3x + (2x + 3)5 \quad \text{Distribuya.}$$
$$= (2x + 3)3x^2 + (2x + 3)3x + (2x + 3)5$$
$$= (2x)3x^2 + (3)3x^2 + (2x)3x + (3)3x + (2x)5 + (3)5 \quad \text{Distribuya.}$$
$$= 6x^3 + 9x^2 + 6x^2 + 9x + 10x + 15 \quad \text{Multiplique los monomios.}$$
$$= 6x^3 + 15x^2 + 19x + 15 \quad \text{Simplifique los términos semejantes.}$$

En la tercera línea de la solución, observe que se ha multiplicado cada término de $3x^2 + 3x + 5$ por cada término de $2x + 3$. Este ejemplo sugiere la siguiente regla.

Multiplicación de polinomios

Para multiplicar dos polinomios, multiplique cada término de un polinomio por cada término del otro polinomio y después simplifique los términos semejantes.

Auto-revisión 5

Multiplique:
$(3a^2 - 1)(2a^4 - a^2 - a)$

Ahora intente **Problema 49**

EJEMPLO 5 Multiplique: $(7y + 3)(6y^2 - 8y + 1)$

Estrategia Se multiplicará cada término del trinomio, $6y^2 - 8y + 1$, por cada término del binomio, $7y + 3$.

POR QUÉ Para multiplicar dos polinomios, se debe multiplicar cada término de un polinomio por cada término del otro polinomio.

Solución

$$(7y + 3)(6y^2 - 8y + 1)$$

$$= 7y(6y^2) + 7y(-8y) + 7y(1) + 3(6y^2) + 3(-8y) + 3(1)$$
$$= 42y^3 - 56y^2 + 7y + 18y^2 - 24y + 3 \quad \text{Multiplique los monomios.}$$
$$= 42y^3 - 38y^2 - 17y + 3 \quad \text{simplifique los términos semejantes.}$$

¡Cuidado! El método PEIU no puede aplicarse aquí —sólo para productos de dos binomios.

Con frecuencia es conveniente multiplicar polinomios utilizando una **forma vertical** similar a la utilizada para la multiplicación de números naturales.

Consejo útil La multiplicación de dos polinomios en forma vertical es muy parecida a la multiplicación de dos números naturales en la aritmética.

$$\begin{array}{r} 347 \\ \times\ \ 25 \\ \hline 1\,735 \\ +\ 6\,940 \\ \hline 8{,}675 \end{array}$$

Auto-revisión 6

Multiplique utilizando la forma vertical:

a. $(3x + 2)(2x^2 - 4x + 5)$

b. $(-2x^2 + 3)(2x^2 - 4x - 1)$

Ahora intente **Problema 63**

EJEMPLO 6 Multiplique utilizando la forma vertical:

a. $(3a^2 - 4a + 7)(2a + 5)$ **b.** $(6y^3 - 5y + 4)(-4y^2 - 3)$

Estrategia Primero, se escribirá un polinomio debajo del otro y se trazará una línea horizontal debajo de ellos. Después, se multiplicará cada término del polinomio superior por cada término del polinomio inferior.

POR QUÉ La *forma vertical* significa utilizar un método similar al empleado en la aritmética para multiplicar dos números naturales.

Solución

a. Multiplique: $3a^2 - 4a + 7$

$\times \quad 2a + 5$

$15a^2 - 20a + 35$ Multiplique $3a^2 - 4a + 7$ por 5.

$6a^3 - 8a^2 + 14a$ Multiplique $3a^2 - 4a + 7$ por $2a$.

$6a^3 + 7a^2 - 6a + 35$ En cada columna, simplifique los términos semejantes.

b. Con este método, con frecuencia es necesario dejar un espacio para un término faltante para alinear de manera vertical los términos semejantes.

Multiplique: $6y^3 - 5y + 4$

$\times \quad -4y^2 - 3$

$-18y^3 + 15y - 12$ Multiplique $6y^3 - 5y + 4$ por -3.

$-24y^5 + 20y^3 - 16y^2$ Multiplique $6y^3 - 5y + 4$ por $-4y^2$.

$-24y^5 + 2y^3 - 16y^2 + 15y - 12$ Deje un espacio para cualquier potencia de y faltante.

En cada columna, simplifique los términos semejantes.

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. $-14a^8$ **2. a.** $15y^4 - 12y^2$ **b.** $15x^3 - 10x^2 + 15x$ **3. a.** $y^2 + 4y + 3$ **b.** $6a^2 + a - 2$
4. $25x^2 + 40x + 16$ **5.** $6a^6 - 5a^4 - 3a^3 + a^2 + a$ **6. a.** $6x^3 - 8x^2 + 7x + 10$
b. $-4x^4 + 8x^3 + 8x^2 - 12x - 3$

SECCIÓN II.3 ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Complete los espacios.

1. $(2x^3)(3x^4)$ es el producto de dos _____.

2. $(2a - 4)(3a + 5)$ es el producto de dos _____.

3. En el acrónimo PEIU, P representa los _____ términos, E representa los términos _____, I representa los términos _____ y L representa los _____ términos.

4. $(2a - 4)(3a^2 + 5a - 1)$ es el producto de un _____ y un _____.

CONCEPTOS

Complete los espacios.

5. Para multiplicar dos polinomios, multiplique _____ polinomio por _____ término del otro polinomio y después simplifique los términos semejantes.

6. Etiquete cada flecha utilizando una de las letras P, E, I o U. Después complete los espacios.

$(2x + 5)(3x + 4) =$ ☐ + ☐ + ☐ + ☐

Primeros Exteriores Interiores Últimos

7. Simplifique cada polinomio combinando los términos semejantes.

a. $6x^2 - 8x + 9x - 12$

b. $5x^4 + 3ax^2 + 5ax^2 + 3a^2$

8. a. Sume: $(x - 4) + (x + 8)$

b. Reste: $(x - 4) - (x + 8)$

c. Multiplique: $(x - 4)(x + 8)$

NOTACIÓN

Complete cada solución.

9. $(9n^3)(8n^2) = (9 \cdot$ ☐$)($☐ $\cdot\, n^2) =$ ☐

10. $7x(3x^2 - 2x + 5) =$ ☐$(3x^2) -$ ☐$(2x) +$ ☐(5)

$=$ ☐ $- 14x^2 + 35x$

11. $(2x + 5)(3x - 2) = 2x(3x) -$ ☐$(2) +$ ☐$(3x) -$ ☐(2)

$= 6x^2 -$ ☐ $+$ ☐ $- 10$

$= 6x^2 +$ ☐ $- 10$

12.

$3x^2 + 4x - 2$

$\times \quad 2x + 3$

☐ $+ 12x - 6$

$6x^3 + 8x^2 - 4x$

☐ $+ 17x^2 +$ ☐ $- 6$

PRÁCTICA

Multiplique.

13. $(3x^2)(4x^3)$

14. $(-2a^3)(3a^2)$

15. $(3b^2)(-2b)$

16. $(3y)(-y^4)$

17. $(-2x^2)(3x^3)$

18. $(-7x^3)(-3x^3)$

19. $\left(-\frac{2}{3}y^5\right)\left(\frac{3}{4}y^2\right)$

20. $\left(\frac{2}{5}r^4\right)\left(\frac{3}{5}r^2\right)$

21. $3(x + 4)$

22. $-3(a - 2)$

23. $-4(t + 7)$

24. $6(s^2 - 3)$

25. $3x(x - 2)$

26. $4y(y + 5)$

27. $-2x^2(3x^2 - x)$

28. $4b^3(2b^2 - 2b)$

29. $2x(3x^2 + 4x - 7)$

30. $3y(2y^2 - 7y - 8)$

31. $-p(2p^2 - 3p + 2)$

32. $-2t(t^2 - t + 1)$

33. $3q^2(q^2 - 2q + 7)$

34. $4v^3(-2v^2 + 3v - 1)$

35. $(a + 4)(a + 5)$

36. $(y - 3)(y + 5)$

37. $(3x - 2)(x + 4)$

38. $(t + 4)(2t - 3)$

39. $(2a + 4)(3a - 5)$

40. $(2b - 1)(3b + 4)$

Eleve al cuadrado cada binomio.

41. $(2x + 3)^2$

42. $(2y + 5)^2$

43. $(2x - 3)^2$

44. $(2y - 5)^2$

45. $(5t - 1)^2$

46. $(6a - 3)^2$

47. $(9b - 2)$

48. $(7m - 2)^2$

Multiplique.

49. $(2x + 1)(3x^2 - 2x + 1)$

50. $(x + 2)(2x^2 + x - 3)$

51. $(x - 1)(x^2 + x + 1)$

52. $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

53. $(x + 2)(x^2 - 3x + 1)$

54. $(x + 3)(x^2 + 3x + 2)$

55. $(r^2 - r + 3)(r^2 - 4r - 5)$

56. $(w^2 + w - 9)(w^2 - w + 3)$

Multiplique.

57. $4x + 3$
$\underline{\quad x + 2}$

58. $5r + 6$
$\underline{\quad 2r - 1}$

59. $4x - 2$
$\underline{\quad 3x + 5}$

60. $6r + 5$
$\underline{\quad 2r - 3}$

61. $x^2 - x + 1$
$\underline{\qquad x + 1}$

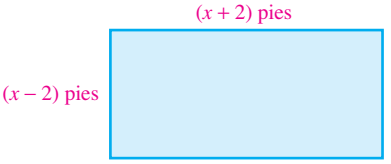
62. $4x^2 - 2x + 1$
$\underline{\qquad 2x + 1}$

63. $4x^2 + 3x - 4$
$\underline{\qquad 3x + 2}$

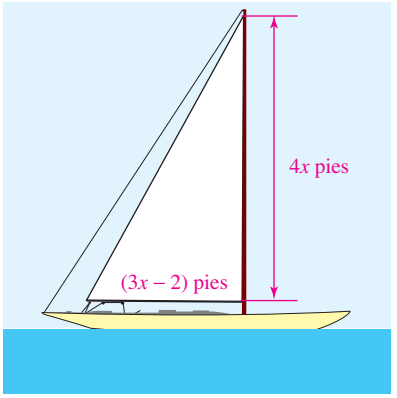
64. $5r^2 + r + 6$
$\underline{\qquad 2r - 1}$

APLICACIONES

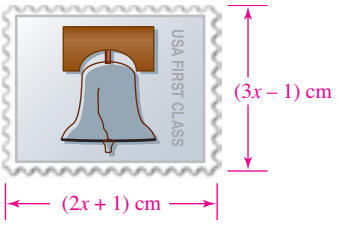
65. GEOMETRÍA Encuentre un polinomio que represente el área del rectángulo (*Sugerencia:* Recuerde que el área de un rectángulo es el producto de su largo y ancho).



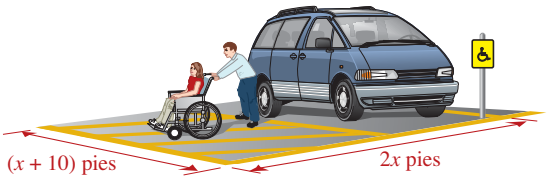
66. NAVEGAR La altura h de la vela triangular es de $4x$ pies y la base b es de $(3x - 2)$ pies. Encuentre un polinomio que represente el área de la vela. (*Sugerencia:* El área de un triángulo está dada por la fórmula $A = \frac{1}{2}bh$.)



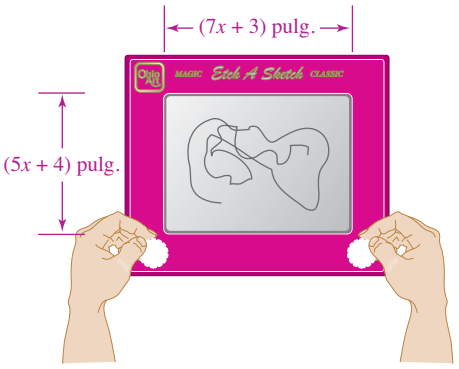
67. ESTAMPILLAS Encuentre un polinomio que represente el área de la estampilla.



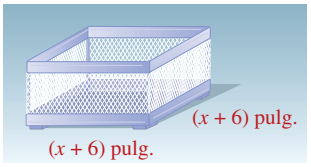
68. ESTACIONAMIENTO Encuentre un polinomio que represente el área total del cajón de estacionamiento accesible para camionetas y su pasillo de acceso.



69. JUGUETES Encuentre un polinomio que represente el área del Etch-A-Sketch.



70. CORRALITOS Encuentre un polinomio que represente el área del piso del corralito.



REDACCIÓN

71. Explique cómo multiplicar dos binomios.

72. Explique cómo encontrar $(2x + 1)^2$.

73. Explique por qué $(x + 1)^2 \neq x^2 + 1^2$. ($\neq$ se lee como "no es igual a".)

74. Si se van a sumar dos términos, tienen que ser términos semejantes. Si se van a multiplicar dos términos, ¿deben ser términos semejantes? Explique.

REPASO

75. LA TIERRA Le toma 25 horas, 56 minutos y 4.091 segundos a la Tierra rotar sobre su propio eje una vez. Escriba el 4.091 en palabras.

76. COMIDA PARA LLEVAR La calcomanía muestra la cantidad y el precio por libra de alguna ensalada con espagueti que se compró en una fiambrería. Encuentre el precio total de la ensalada.

77. Escriba $\frac{7}{64}$ como un decimal.

78. Escriba $-\frac{6}{10}$ como un decimal.

79. Evalúe: $56.09 + 78 + 0.567$

80. Evalúe: $-679.4 - (-599.89)$

81. Evalúe: $\sqrt{16} + \sqrt{36}$

82. Encuentre: $103.6 \div 0.56$

APÉNDICE

III

Razonamiento inductivo y deductivo

Objetivos

1. Usar el razonamiento inductivo para resolver problemas.
2. Usar el razonamiento deductivo para resolver problemas.

SECCIÓN III.1
Razonamiento inductivo y deductivo

Razonar significa pensar de manera lógica. El objetivo de este apéndice es desarrollar su habilidad para resolver problemas mejorando sus habilidades de razonamiento. Se introducirán dos tipos fundamentales de razonamiento que pueden aplicarse a una amplia variedad de situaciones. Se les conoce como *razonamiento inductivo* y *razonamiento deductivo.*

1 Usar el razonamiento inductivo para resolver problemas

En un laboratorio, los científicos conducen experimentos y observan los resultados. Después de varias repeticiones con resultados similares, el científico generalizará los resultados en un enunciado que parece ser verdadero:

- Si se calienta el agua a 212 °F, hervirá.
- Si se tira un peso, caerá.
- Si se combina un ácido con una base, ocurre una reacción química.

Cuando se derivan conclusiones generales a partir de observaciones específicas, se está utilizando el **razonamiento inductivo.** Los siguientes ejemplos muestran cómo puede utilizarse el razonamiento inductivo en el pensamiento matemático. Dada una lista de números o símbolos, llamada *sucesión,* con frecuencia se puede encontrar un término faltante de la sucesión buscando patrones y aplicando el razonamiento inductivo.

Auto-revisión 1

Encuentre el siguiente número en la sucesión $-3, -1, 1, 3, \ldots$

Ahora intente **Problema 11**

EJEMPLO 1 Encuentre el siguiente número en la sucesión $5, 8, 11, 14, \ldots$

Estrategia Se encontrará la *diferencia* entre los pares de números en la sucesión.

POR QUÉ Este proceso ayudará a descubrir un patrón que pueda utilizarse para encontrar el siguiente número en la sucesión.

Solución

Los números en la sucesión 5, 8, 11, 14, . . . están incrementándose. Se puede encontrar la diferencia entre cada par de números sucesivos como se indica:

$8 - 5 = 3$ Reste el primer número, 5, del segundo número, 8.

$11 - 8 = 3$ Reste el segundo número, 8, del tercer número, 11.

$14 - 11 = 3$ Reste el tercer número, 11, del cuarto número, 14.

La diferencia entre cada par de números es 3. Esto significa que cada número en la sucesión es 3 más que el anterior. Por tanto, el siguiente número en la sucesión es $14 + 3$, o 17.

EJEMPLO 2 Encuentre el siguiente número en la sucesión $-2, -4, -6, -8, \ldots$

Estrategia Los términos de la sucesión están disminuyendo. Se determinará cómo difiere cada número del número anterior.

POR QUÉ Este de tipo de análisis ayuda a descubrir un patrón que puede utilizarse para encontrar el siguiente número en la sucesión.

Auto-revisión 2

Encuentre el siguiente número en la sucesión $-0.1, -0.3, -0.5, -0.7, \ldots$

Ahora intente **Problema 15**

Solución

Dado que cada número sucesivo es 2 menos que el anterior, el siguiente número en la sucesión es $-8 - 2$, o -10.

Este número es 2 menos que el número anterior. Este número es 2 menos que el número anterior. Este número es 2 menos que el número anterior.

$$-2, \quad -4, \quad -6, \quad -8, \quad \ldots$$

Auto-revisión 3

Encuentre la siguiente letra en la sucesión B, G, D, I, F, K, H, . . .

Ahora intente **Problema 19**

EJEMPLO 3 Encuentre la siguiente letra en la sucesión A, D, B, E, C, F, D, . . .

Estrategia Se creará una correspondencia letra-número y se reescribirá la sucesión en una forma numérica equivalente.

POR QUÉ En muchas ocasiones, es más sencillo determinar el patrón si se examina una sucesión de números en vez de una de letras.

Solución

La letra A es la 1a letra del alfabeto, D es la 4a letra, B es la 2a letra, etc. Se puede crear la siguiente correspondencia letra–número:

Letra		Número	
A	→	1	Sume 3.
D	→	4	Reste 2.
B	→	2	Sume 3.
E	→	5	Reste 2.
C	→	3	Sume 3.
F	→	6	Reste 2.
D	→	4	

Los números en la sucesión 1, 4, 2, 5, 3, 6, 4, . . . alternan en tamaño. Cambian de menor a mayor, a menor, a mayor, y así sucesivamente.

Se observa que se suma 3 al primer número para obtener el segundo número. Después se resta 2 del segundo número para obtener el tercer número. Para obtener los números sucesivos en la sucesión, de manera alternada se suma 3 a un número y se resta 2 de ese resultado para obtener el siguiente número.

Aplicando este patrón, el siguiente número en la sucesión numérica proporcionada sería el $4 + 3$, o el 7. La siguiente letra en la sucesión original sería la G, debido a que es la 7a letra del alfabeto.

Auto-revisión 4

Encuentre la siguiente forma en la sucesión abajo.

Ahora intente **Problema 23**

EJEMPLO 4 Encuentre la siguiente forma en la sucesión abajo.

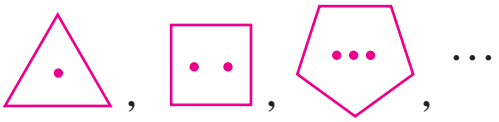
Estrategia Para encontrar la siguiente forma en la sucesión, se enfocará en las posiciones cambiantes de los puntos.

POR QUÉ La estrella no cambia de ninguna manera de término a término.

Solución

Se observa que cada uno de los tres puntos se mueve de una punta de la estrella a la siguiente, en una dirección en sentido contrario a las manecillas de reloj. Este es un patrón circular. La siguiente forma en la sucesión será la mostrada aquí.

EJEMPLO 5 Encuentre la siguiente forma en la sucesión abajo.



Estrategia Para encontrar la siguiente forma en la sucesión, se deben considerar dos patrones de cambio al mismo tiempo.

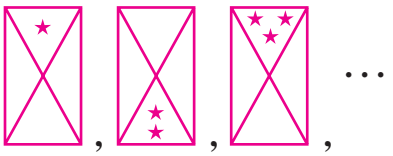
POR QUÉ Las formas están cambiando y el número dentro de ellas están cambiando.

Solución

La primera figura tiene tres lados y un punto, la segunda figura tiene cuatro lados y dos puntos, la tercera figura tiene cinco lados y tres punto. Por tanto, se esperaría que la siguiente figura tenga seis lados y cuatro puntos, como se muestra a la derecha.

Auto-revisión 5

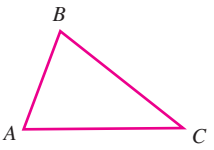
Encuentre la siguiente forma en la sucesión abajo.



Ahora intente **Problema 27**

2 Usar el razonamiento deductivo para resolver problemas

Como opuesto al razonamiento inductivo, el razonamiento deductivo se mueve del caso general al específico. Por ejemplo, si se conoce que la suma de los ángulos en cualquier triángulo es de 180°, se sabe que la suma de los ángulos de $\triangle ABC$ mostrado en el margen derecho es de 180°. Siempre que se aplica un principio general a un ejemplo particular, se está utilizando el razonamiento deductivo.



Un sistema de razonamiento deductivo está conformado por cuatro elementos:

1. **Términos indefinidos:** términos que se aceptan sin darles un significado formal
2. **Términos definidos:** términos que se definen de manera formal
3. **Axiomas** o **postulados:** enunciados que se aceptan sin prueba
4. **Teoremas:** enunciados que pueden comprobarse sin razonamiento formal

Muchos problemas pueden resolverse por medio del razonamiento deductivo. Por ejemplo, suponga que un estudiante sabe que su universidad ofrece clases de álgebra en la mañana, tarde y noche y que los profesores Anderson, Medrano y Ling son los únicos de álgebra en la escuela. Además, suponga que el estudiante planea matricularse en una clase de álgebra en la mañana. Después de investigar un poco, encuentra que el profesor Anderson sólo enseña en la tarde y que el profesor Ling sólo enseña en la noche. Sin saber nada acerca de la profesora Medrano, pueden concluir que ella será su profesora de álgebra, dado que es la única posibilidad restante.

Los siguientes ejemplos muestran cómo se utiliza el razonamiento deductivo para resolver problemas.

EJEMPLO 6 ***Calendario de clases*** Una universidad en línea sólo ofrece un curso de cálculo, un curso de álgebra, un curso de estadística y un curso de trigonometría. Cada curso es dado por un profesor diferente. Los cuatro profesores que darán estos cursos tienen las siguientes preferencias de curso:

1. Los profesores A y B no desean enseñar cálculo.
2. La profesora C desea enseñar estadística.
3. El profesor B desea enseñar álgebra.

¿Quién enseñará trigonometría?

Estrategia Se construirá una tabla que muestre todas las asignaciones de enseñanza posibles. Después se tacharán aquellas clases que los profesores no desean enseñar.

Ahora intente **Problema 31**

POR QUÉ La mejor manera de examinar esta información vasta es describir la situación utilizando una tabla.

Solución

La siguiente tabla muestra cada curso, con cada profesor posible.

Cálculo	Álgebra	Estadística	Trigonometría
A	A	A	A
B	B	B	B
C	C	C	C
D	D	D	D

Dado que los profesores A y B no desean enseñar cálculo, se pueden tachar de la lista de cálculo. Dado que la profesora C desea enseñar estadística, se puede tachar en todas las demás listas. Esto deja a la profesora D como la única persona para enseñar cálculo, por lo que puede tacharse en todas las demás listas. Dado que el profesor B desea enseñar álgebra, se puede tachar de las demás listas. Por tanto, la única persona que queda para enseñar trigonometría es el profesor A.

Cálculo	Álgebra	Estadística	Trigonometría
~~A~~	A	A	A
~~B~~	B	~~B~~	~~B~~
~~C~~	~~C~~	C	~~C~~
D	~~D~~	~~D~~	~~D~~

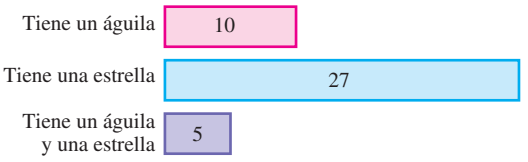
Auto-revisión 7

AUTOMÓVILES USADOS De los 50 automóviles en un lote de automóviles usados, 9 son rojos, 31 son modelos extranjeros y 6 son modelos rojos y extranjeros. Si una clienta desea comprar un modelo estadounidense que no sea rojo, ¿cuántos automóviles tiene para elegir?

Ahora intente **Problema 35**

EJEMPLO 7 *Banderas de estados*

La gráfica siguiente proporciona el número de banderas de estados que presentan un águila, una estrella o ambas. ¿Cuántas banderas de estados no tienen un águila ni una estrella?



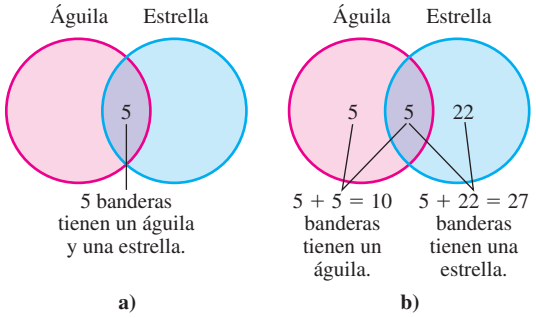
Estrategia Se utilizarán dos círculos intersectantes para modelar la situación.

POR QUÉ La intersección es una manera de representar el número de banderas de estados que tienen un águila y una estrella.

Solución

En la figura a) en la siguiente página, la intersección (traslape) de los círculos muestra que hay 5 banderas de estados que tienen un águila y una estrella. Un águila aparece en un total de 10 banderas, entonces el círculo rojo debe contener 5 banderas más fuera de la intersección, como se muestra en la figura b). Si un total

de 27 banderas tienen una estrella, el círculo azul debe contener 22 banderas más fuera de la intersección, como se muestra.



A partir de la figura (a), se observa que 5 + 5 + 22, o 32 banderas tienen un águila, una estrella o ambas. Para encontrar cuántas banderas no tienen un águila ni una estrella, se resta este total del número de banderas de estados, el cual es de 50.

$$50 - 32 = 18$$

Hay 18 banderas estatales que no tienen un águila ni una estrella.

RESPUESTAS PARA LAS AUTO-REVISIONES

1. 5 **2.** −0.9 **3.** M **4.** **5.** **7.** 16

APÉNDICE III ESPACIO PARA EL ESTUDIO

VOCABULARIO

Complete los espacios.

1. El razonamiento _____ deriva conclusiones generales a partir de observaciones específicas.

2. El razonamiento _____ se mueve del caso general al específico.

CONCEPTOS

Indique si el patrón mostrado está incrementándose, disminuyendo, alternando o es circular.

3. 2, 3, 4, 2, 3, 4, 2, 3, 4, . . .

4. 8, 5, 2, −1, . . .

5. −2, −4, 2, 0, 6, . . .

6. 0.1, 0.5, 0.9, 1.3, . . .

7. a, c, b, d, c, e, . . .

8.

9. CALENDARIO DE SALONES A partir de la tabla, determine cuál(es) tiempo(s) en la mañana de un miércoles está disponible un salón para practicar en un edificio de música. El símbolo X indica que el salón ya se ha reservado.

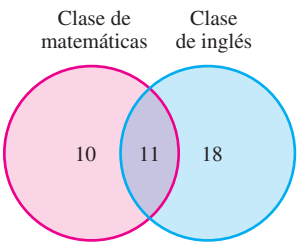
	Lun	Mar	Miér	Jue	Vie
9 A.M.	X		X		X
10 A.M.	X	X			X
11 A.M.		X	X	X	

10. CUESTIONARIO DE CONSULTA A un grupo de estudiantes se le pregunto si estaban tomando un curso de matemáticas y si estaban tomando un curso de inglés. Los resultados se muestran enseguida.

a. ¿Cuántos estudiantes estaban tomando un curso de matemáticas y un curso de inglés?

b. ¿Cuántos estudiantes estaban tomando un curso de inglés pero no un curso de matemáticas?

c. ¿Cuántos estudiantes estaban tomando un curso de matemáticas?



PRÁCTICA GUIADA

Encuentre el número que sigue en cada sucesión. **Vea el Ejemplo 1.**

11. 1, 5, 9, 13, . . .

12. 11, 20, 29, 38, . . .

13. 5, 9, 14, 20, . . .

14. 6, 8, 12, 18, . . .

Encuentre el número que sigue en cada sucesión. **Vea el Ejemplo 2.**

15. 15, 12, 9, 6, . . .

16. 81, 77, 73, 69, . . .

17. −3, −5, −8, −12, . . .

18. 1, −8, −16, −25, −33, . . .

Encuentre la letra que sigue en cada sucesión. **Vea el Ejemplo 3.**

19. E, I, H, L, K, O, N, . . .

20. C, H, D, I, E, J, F, . . .

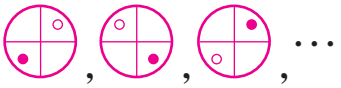
21. c, b, d, c, e, d, f, . . .

22. z, w, y, v, x, u, w, . . .

Encuentre la figura que sigue en cada sucesión. **Vea el Ejemplo 4.**

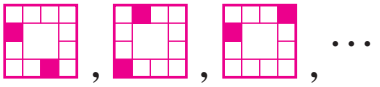
23.

24.



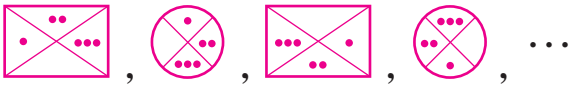
25.

26.



Encuentre la figura que sigue en cada sucesión. **Vea el Ejemplo 5.**

27.



28.

29.

30.

¿Qué conclusión puede derivar a partir de cada conjunto de información? **Vea el Ejemplo 6.**

31. CALENDARIOS DE ENSEÑANZA Una universidad pequeña sólo ofrece un curso de biología, un curso de física, un curso de química y un curso de zoología. Cada curso es dado por un profesor adjunto diferente. Los cuatro profesores que darán estos cursos tienen las siguientes preferencias de curso:

1. Los profesores B y D no desean enseñar zoología.
2. El profesor A desea enseñar biología.
3. El profesor B desea enseñar física.

¿Quién dará química?

32. ESCAPARATES Cuatro compañías mostrarán sus productos sobre mesas en una convención. A cada compañía se le asignará uno de los escaparates mostrados enseguida. Las compañías han expresado las siguientes preferencias:

1. Las compañías A y C no desean el escaparate 2.
2. La compañía A desea el escaparate 3.
3. La compañía D desea el escaparate 1.

¿Cuál compañía obtendrá el 4?

Escaparate 1 Escaparate 2 Escaparate 3 Escaparate 4

33. OCUPACIONES Cuatro personas llamadas John, Luis, María y Paula tienen ocupaciones como profesor, carnicero, pastelero y hacedor de candelabros.

1. John y Paula están casados.
2. La profesora planea casarse con el pastelero en diciembre.
3. Luis es el pastelero.

¿Quién es el profesor(a)?

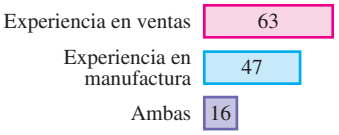
34. ESTACIONAMIENTO Un Ford, un Buick, un Dodge y un Mercedes están estacionados uno al lado del otro.

1. El Ford está entre el Mercedes y el Dodge.
2. El Mercedes está al lado del Buick.
3. El Buick está estacionado en el extremo izquierdo.

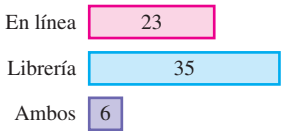
¿Cuál automóvil está estacionado en el extremo derecho?

Use un diagrama de círculos para resolver cada problema. **Vea el Ejemplo 7.**

35. HISTORIAL DE EMPLEO Se encuestaron cien gerentes de oficinas para determinar sus antecedentes de empleo. Los resultados de la encuesta se muestran enseguida. ¿Cuántos gerentes de oficinas no tenían experiencia en venta ni manufactura?



36. COMPRA DE LIBROS DE TEXTO Se encuestaron sesenta estudiantes universitarios de segundo año para determinar dónde compraron sus libros de texto durante su primer año. Los resultados de la encuesta se muestran enseguida. ¿Cuántos estudiantes no compraron un libro en una librería o en línea?



37. PARIENTES Cuando se les preguntó a 27 niños en una clase de primero de primaria, "¿Cuántos de ustedes tienen un hermano?" 11 levantaron su mano. Cuando se les preguntó, "¿Cuántos de ustedes tienen una hermana?" 15 levantaron su mano. Ocho niños levantaron su mano en ambas ocasiones. ¿Cuántos niños no levantaron su mano en ninguna ocasión?

38. MASCOTAS Cuando se les preguntó acerca de sus mascotas, un grupo de 35 alumnos de sexto de primaria respondieron como se indica:

- 21 dijeron que tenían al menos un perro.
- 11 dijeron que tenían al menos un gato.
- 5 dijeron que tenían al menos un perro y al menos un gato.

¿Cuántos estudiantes no tienen un perro o un gato?

INTÉNTELO

Encuentre la siguiente letra o letras en la secuencia.

39. A, c, E, g, . . .

40. R, SS, TTT, . . .

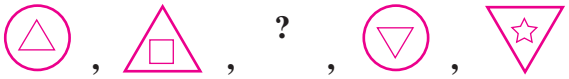
41. Z, A, Y, B, X, C, . . .

42. B, N, C, N, D, . . .

Encuentre la figura faltante en cada secuencia.

43.

44.



Encuentre la siguiente letra en la sucesión.

45. C, B, F, E, I, H, L, . . .

46. d, h, g, k, j, n, . . .

Encuentre el siguiente número en la sucesión.

47. $-7, 9, -6, 8, -5, 7, -4, \ldots$

48. $2, 5, 3, 6, 4, 7, 5, \ldots$

49. $9, 5, 7, 3, 5, 1, \ldots$

50. $1.3, 1.6, 1.4, 1.7, 1.5, 1.8, \ldots$

51. $-2, -3, -5, -6, -8, -9, \ldots$

52. $8, 5, 1, -4, -10, -17, \ldots$

53. $6, 8, 9, 7, 9, 10, 8, 10, 11, \ldots$

54. $10, 8, 7, 11, 9, 8, 12, 10, 9, \ldots$

55. ZOOLÓGICOS En un zoológico, una cebra, un tigre, un león y un mono se van a colocar en cuatro jaulas numeradas del 1 al 4, de izquierda a derecha. Se han tomado las siguientes decisiones:

1. El león y el tigre no deben estar uno al lado del otro.
2. El mono debe estar en una las jaulas de los extremos.
3. El tigre va a estar en la jaula 4.

¿En cuál jaula está la cebra?

56. ANIMALES DE GRANJA Cuatro animales —una vaca, un caballo, un cerdo y una oveja— están en un establo, cado uno en una caseta diferente.

1. La vaca está en la primera caseta.
2. Ni el cerdo ni la oveja pueden estar al lado de la vaca.
3. El cerdo está entre el caballo y la oveja.

¿Cuál animal está en la última caseta?

57. CLAVADOS OLÍMPICOS Cuatro clavadistas en las Olimpiadas terminaron en primer, segundo, tercero y cuarto lugar.

1. El clavadista B venció al clavadista D.
2. El clavadista A se colocó entre los clavadistas D y C.
3. El clavadista D venció al clavadista C.

¿En qué orden finalizaron?

58. BANDERAS Una bandera verde, una azul, una roja y una amarilla están colgadas en un asta bandera.

1. La única bandera entre las banderas verde y amarilla es la azul.
2. La bandera roja está a continuación de la bandera amarilla.
3. La bandera verde está arriba de la bandera roja.

¿Cuál es el orden de las banderas de arriba abajo?

APLICACIONES

59. JURADO A continuación se muestran los resultados de un cuestionario de servicio de jurado. Determine cuántos de 20,000 encuestados no han servido en un jurado en una corte criminal ni en un jurado en una corte civil.

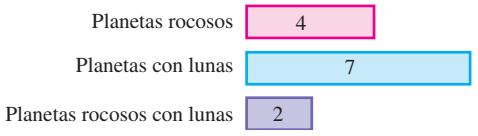
Cuestionario de servicio de jurado

997	Sirvieron en un jurado en una corte criminal
103	Sirvieron en un jurado en una corte civil
35	Sirvieron en ambos

60. ENCUESTA ELECTRÓNICA Para la encuesta por Internet mostrada enseguida, la primera opción se seleccionó en 124 ocasiones, la segunda opción se seleccionó en 27 ocasiones y la primera y la segunda opciones se seleccionaron en 19 ocasiones. ¿Cuántas veces se seleccionó la tercera opción, "Ninguna"?

Encuesta por Internet	Puede votar por más de una.	
¿Qué haría si la gasolina costará $5.50 el galón?	◉ Dejar de conducir ◉ Comprar un automóvil con mejor eficiencia de combustible ◉ Ninguna	
	Número de personas que votaron	178

61. SISTEMA SOLAR La gráfica siguiente muestra algunas características importantes de los nueve planetas en nuestro sistema solar. ¿Cuántos planetas no son rocosos ni tienen lunas?



62. TENER DOS EMPLEOS Andrés, Barry y Carl tienen cada uno un par de trabajos de la siguiente lista completamente diferentes: joyero, músico, pintor, chofer, peluquero y jardinero. Use los hechos siguientes para encontrar los dos empleos de cada hombre.

1. El pintor compró un anillo del joyero.
2. El chofer ofendió al músico al burlarse de su bigote.
3. El chofer salió con la hermana del pintor.
4. El músico y el jardinero solían cazar con Andrés.
5. Carl venció a Barry y al pintor en monopolio.
6. Barry le debe $100 al jardinero.

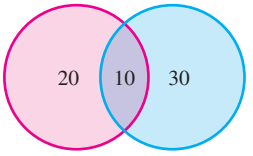
REDACCIÓN

63. Describa el razonamiento deductivo y el razonamiento inductivo.

64. Describa una situación en el mundo real en la que podría utilizar el razonamiento deductivo.

65. Describa una situación en el mundo real en la que podría utilizar el razonamiento inductivo.

66. Escriba un problema de tal manera que pueda utilizarse el diagrama siguiente para resolverlo.



APÉNDICE

IV

Raíces y potencias

n	n^2	$\sqrt{n}$	n^3	$\sqrt{n^3}$	n	n^2	$\sqrt{n}$	n^3	$\sqrt{n^3}$
1	1	1.000	1	1.000	51	2,601	7.141	132,651	3.708
2	4	1.414	8	1.260	52	2,704	7.211	140,608	3.733
3	9	1.732	27	1.442	53	2,809	7.280	148,877	3.756
4	16	2.000	64	1.587	54	2,916	7.348	157,464	3.780
5	25	2.236	125	1.710	55	3,025	7.416	166,375	3.803
6	36	2.449	216	1.817	56	3,136	7.483	175,616	3.826
7	49	2.646	343	1.913	57	3,249	7.550	185,193	3.849
8	64	2.828	512	2.000	58	3,364	7.616	195,112	3.871
9	81	3.000	729	2.080	59	3,481	7.681	205,379	3.893
10	100	3.162	1,000	2.154	60	3,600	7.746	216,000	3.915
11	121	3.317	1,331	2.224	61	3,721	7.810	226,981	3.936
12	144	3.464	1,728	2.289	62	3,844	7.874	238,328	3.958
13	169	3.606	2,197	2.351	63	3,969	7.937	250,047	3.979
14	196	3.742	2,744	2.410	64	4,096	8.000	262,144	4.000
15	225	3.873	3,375	2.466	65	4,225	8.062	274,625	4.021
16	256	4.000	4,096	2.520	66	4,356	8.124	287,496	4.041
17	289	4.123	4,913	2.571	67	4,489	8.185	300,763	4.062
18	324	4.243	5,832	2.621	68	4,624	8.246	314,432	4.082
19	361	4.359	6,859	2.668	69	4,761	8.307	328,509	4.102
20	400	4.472	8,000	2.714	70	4,900	8.367	343,000	4.121
21	441	4.583	9,261	2.759	71	5,041	8.426	357,911	4.141
22	484	4.690	10,648	2.802	72	5,184	8.485	373,248	4.160
23	529	4.796	12,167	2.844	73	5,329	8.544	389,017	4.179
24	576	4.899	13,824	2.884	74	5,476	8.602	405,224	4.198
25	625	5.000	15,625	2.924	75	5,625	8.660	421,875	4.217
26	676	5.099	17,576	2.962	76	5,776	8.718	438,976	4.236
27	729	5.196	19,683	3.000	77	5,929	8.775	456,533	4.254
28	784	5.292	21,952	3.037	78	6,084	8.832	474,552	4.273
29	841	5.385	24,389	3.072	79	6,241	8.888	493,039	4.291
30	900	5.477	27,000	3.107	80	6,400	8.944	512,000	4.309
31	961	5.568	29,791	3.141	81	6,561	9.000	531,441	4.327
32	1,024	5.657	32,768	3.175	82	6,724	9.055	551,368	4.344
33	1,089	5.745	35,937	3.208	83	6,889	9.110	571,787	4.362
34	1,156	5.831	39,304	3.240	84	7,056	9.165	592,704	4.380
35	1,225	5.916	42,875	3.271	85	7,225	9.220	614,125	4.397
36	1,296	6.000	46,656	3.302	86	7,396	9.274	636,056	4.414
37	1,369	6.083	50,653	3.332	87	7,569	9.327	658,503	4.431
38	1,444	6.164	54,872	3.362	88	7,744	9.381	681,472	4.448
39	1,521	6.245	59,319	3.391	89	7,921	9.434	704,969	4.465
40	1,600	6.325	64,000	3.420	90	8,100	9.487	729,000	4.481
41	1,681	6.403	68,921	3.448	91	8,281	9.539	753,571	4.498
42	1,764	6.481	74,088	3.476	92	8,464	9.592	778,688	4.514
43	1,849	6.557	79,507	3.503	93	8,649	9.644	804,357	4.531
44	1,936	6.633	85,184	3.530	94	8,836	9.695	830,584	4.547
45	2,025	6.708	91,125	3.557	95	9,025	9.747	857,375	4.563
46	2,116	6.782	97,336	3.583	96	9,216	9.798	884,736	4.579
47	2,209	6.856	103,823	3.609	97	9,409	9.849	912,673	4.595
48	2,304	6.928	110,592	3.634	98	9,604	9.899	941,192	4.610
49	2,401	7.000	117,649	3.659	99	9,801	9.950	970,299	4.626
50	2,500	7.071	125,000	3.684	100	10,000	10.000	1,000,000	4.642

APÉNDICE

V

Respuestas para los ejercicios seleccionados

Piense detenidamente (página 9)

1. c **2.** b **3.** e **4.** d **5.** a

Espacio para el Estudio Sección 1.1 (página 10)

1. dígitos **3.** estándar **5.** expandida **7.** desigualdad

9.

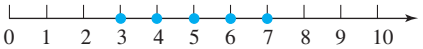
11. **a.** cuarenta **b.** noventa **c.** sesenta y ocho **d.** quince

13.

15.

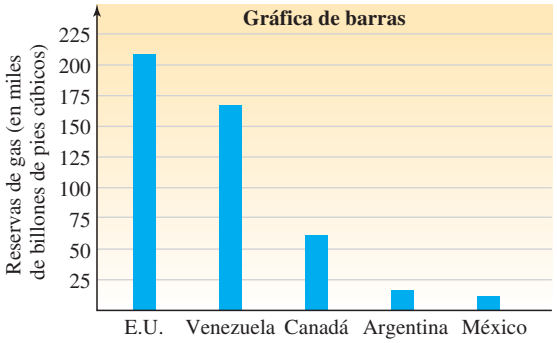
17.

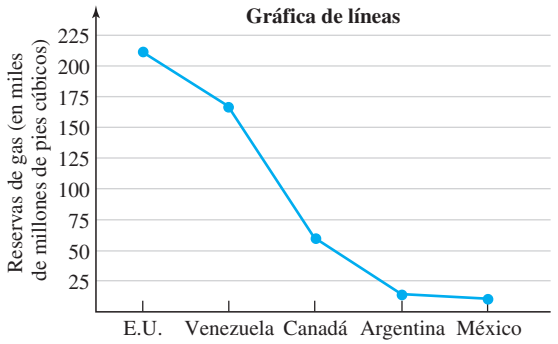
19.



21. llaves **23.** **a.** 3 decenas **b.** 7 **c.** 6 centenas **d.** 5
25. **a.** 1 centena de millón **b.** 7 **c.** 9 decenas **d.** 4
27. noventa y tres **29.** setecientos treinta y dos
31. ciento cincuenta y cuatro mil, trescientos dos
33. catorce millones, cuatrocientos treinta y dos mil, quinientos **35.** novecientos setenta mil millones, treinta y un millones, quinientos mil, ciento cuatro **37.** ochenta y dos millones, cuatrocientos quince **39.** 3,737
41. 930 **43.** 7,021 **45.** 26,000,432 **47.** 200 + 40 + 5
49. 3,000 + 600 + 9 **51.** 70,000 + 2,000 + 500 + 30 + 3
53. 100,000 + 4,000 + 400 + 1
55. 8,000,000 + 400,000 + 3,000 + 600 + 10 + 3
57. 20,000,000 + 6,000,000 + 100 + 50 + 6
59. **a.** > **b.** < **61.** **a.** > **b.** < **63.** 98,150
65. 512,970 **67.** 8,400 **69.** 32,400 **71.** 66,000
73. 2,581,000 **75.** 53,000; 50,000 **77.** 77,000; 80,000
79. 816,000; 820,000 **81.** 297,000; 300,000 **83.** **a.** 79,590
b. 79,600 **c.** 80,000 **d.** 80,000 **85.** **a.** $419,160
b. $419,200 **c.** $419,000 **d.** $420,000 **87.** 40,025
89. 202,036 **91.** 27,598 **93.** 10,700,506 **95.** Aisha
97. **a.** la década de 1970, 7 **b.** la década de 1960, 9
c. la década de 1960, 12 **d.** la década de 1980

99.





101. **a.**

DON SMITH
1234 MILL STREET
HILLDALE, CA

7155

FECHA Marzo 9, 2010

Pagar a Davis Chevrolet $ 15,601.00

Quince mil seiscientos uno y 00/100 DÓLARES

FIRST FEDERAL BANK
195 JEFFS STREET
HILLDALE, CA

Memo Don Smith

b.

JUAN DECITO
24 ARBOR LANE
ARGENTO, CA

4251

FECHA Agosto 12, 2010

Pagar a DR. ANDERSON $ 3,433.00

Tres mil cuatrocientos treinta y tres y 00/100 DÓLARES

FIRST FEDERAL BANK
195 JEFFS STREET
HILLDALE, CA

Memo Juan Decito

103. 1,865,593; 482,880; 1,503; 269; 43,449
105. **a.** centenas de millares **b.** 980,000,000; 9 centenas de millones + 8 decenas de millones **c.** 1,000,000,000; mil millones

Espacio para el Estudio Sección 1.2 (página 24)

1. sumando, sumando, suma **3.** conmutativa **5.** estimar
7. rectángulo, cuadrado **9.** cuadrado **11.** **a.** propiedad conmutativa de la suma **b.** propiedad asociativa de la suma **c.** propiedad asociativa de la suma **d.** propiedad conmutativa de la suma **13.** 0 **15.** más **17.** 33 más 12 es igual a 45 **19.** 47, 52 **21.** 38 **23.** 689 **25.** 76 **27.** 876
29. 35 **31.** 92 **33.** 70 **35.** 75 **37.** 461 **39.** 8,937
41. 18,143 **43.** 1,810 **45.** 19 **47.** 33 **49.** 137 **51.** 241
53. 30 **55.** 60 **57.** 1,615 **59.** 1,207 **61.** 37,500
63. 1,020,000 **65.** 88 pies **67.** 68 pulg. **69.** 376 mi
71. 186 cm **73.** 15,907 **75.** 56,460 **77.** 65 **79.** 979
81. 30,000 **83.** 121 **85.** 11,312 **87.** 50 **89.** 91 pies
91. 1,140 calorías **93.** 79,787,000 visitantes **95.** 597,876
97. $28,800 **99.** $6,645,000,000 **101.** 196 pulg
103. 384 pies **109.** **a.** 3,000 + 100 + 20 + 5
b. 60,000 + 30 + 7

Espacio para el Estudio Sección 1.3 (página 36)

1. minuendo, sustraendo, diferencia **3.** resta **5.** estimar **7.** 4, 3, 7 **9.** izquierda, derecha **11.** menos **13.** 83 − 30 **15.** 23 **17.** 61 **19.** 224 **21.** 303 **23.** 7,642 **25.** 2,562 **27.** 36 **29.** 48 **31.** 8,457 **33.** 6,483 **35.** 51,677 **37.** 44,444 **39.** correcto **41.** incorrecto **43.** 66,000 **45.** 50,000 **47.** 29 **49.** 37 **51.** 608 **53.** 1,048 **55.** 59 **57.** 2,901 **59.** 102 **61.** 20 **63.** 65 **65.** 30 **67.** 19,929 **69.** 197 **71.** 10,457 **73.** 303 **75.** 48,760 **77.** 110 **79.** 143,559 **81.** 19,299 **83.** 1,420 lb **85.** 2,661 bulldogs **87.** 1,495 mi **89.** $55 **91.** 33 puntos **93.** 1,764 °F **95.** 17 códigos de área **97.** $1,513 **99. a.** $39,565 **b.** $1,322 **105. a.** 5,370,650 **b.** 5,370,000 **c.** 5,400,000 **107.** 52 pulg **109.** 5,530

Espacio para el Estudio Sección 1.4 (página 50)

1. factor, factor, producto **3.** conmutativa, asociativa **5.** cuadrado **7. a.** 4 · 8 **b.** 15 + 15+ 15 + 15 + 15 + 15 + 15 **9. a.** 3 **b.** 5 **11. a.** área **b.** perímetro **c.** área **d.** perímetro **13.** ×, ·, ( ) **15.** $A = l \cdot w$ o $A = lw$ **17.** 105 **19.** 272 **21.** 3,700 **23.** 750 **25.** 1,070,000 **27.** 512,000 **29.** 2,720 **31.** 11,200 **33.** 390,000 **35.** 108,000,000 **37.** 9,344 **39.** 18,368 **41.** 408,758 **43.** 16,868,238 **45.** 1,800 **47.** 135,000 **49.** 18,000 **51.** 400,000 **53.** 84 pulg^2 **55.** 144 pulg^2 **57.** 1,491 **59.** 68,948 **61.** 7,623 **63.** 0 **65.** 1,590 **67.** 44,486 **69.** 8,945,912 **71.** 374,644 **73.** 9,900 **75.** 2,400,000 **77.** 355,712 **79.** 166,500 **81.** 72 tazas **83.** 204 gramos **85.** 3,900 veces **87.** 63,360 pulg **89.** 77,000 palabras **91.** $73,645,500 **93.** 72 entradas **95.** no **97.** 18 hr **99.** $1,386 por noche **101.** 84 tabletas **103.** 54 pies^2 **105.** 1,260 mi, 97,200 mi^2 **109.** 20,642

Espacio para el Estudio Sección 1.5 (página 65)

1. dividendo, divisor, cociente; divisor, cociente, dividendo; dividendo, divisor, cociente **3.** larga **5.** divisible **7. a.** 7 **b.** 5, 2 **9. a.** 1 **b.** 6 **c.** indefinida **d.** 0 **11. a.** 2 **b.** 6 **c.** 3 **d.** 5 **13.** 37, 333 **15. a.** 0, 5 **b.** 2, 3 **c.** suma **d.** 10 **17.** ÷, $\overline{)}$, − **19.** 5, 9, 45 **21.** 4, 11, 44 **23.** 7 · 3 = 21 **25.** 6 · 12 = 72 **27.** 16 **29.** 29 **31.** 325 **33.** 218 **35.** 504 **37.** 602 **39.** 39 R 15 **41.** 21 R 33 **43.** 47 R 86 **45.** 19 R 132 **47.** 2, 3, 4, 5, 6, 10 **49.** 3, 5, 9 **51.** ninguno **53.** 2, 3, 4, 5, 6, 10 **55.** 70 **57.** 22 **59.** 9,000 **61.** 50 **63.** 4,325 **65.** 6 **67.** 8 R 25 **69.** 160 **71.** 106 R 3 **73.** 509 **75.** 3,080 **77.** 5 **79.** 23 R 211 **81.** 30 R 13 **83.** 89 **85.** 7 R 1 **87.** 625 boletos **89.** 27 viajes **91.** 2 envases, 4 envases **93.** 9 veces, 28 onzas **95.** 14,500 lb **97.** $105 **99.** 5 mi **101.** 13 docenas **103.** 9 mujeres **105.** $4,344, $3,622, $2,996 **111.** 3,281 **113.** 1,097,334

Espacio para el Estudio Sección 1.6 (página 75)

1. estrategia **3.** Resta **5.** multiplicación **7.** suma **9.** multiplicación **11.** división **13.** Analizar, Formar, Resolver, Enunciar, Comprobar **15.** 40 **17.** $194,445 **19.** 179 episodios **21.** 14 porciones diarias **23.** 24 escenas **25.** 26 panecillos de tamaño normal con un panecillo más pequeño **27.** 68 documentos **29.** 872,564 mi^2 **31.** $2,623 millones **33.** 20,360 **35.** $462 **37.** 56 gal **39.** utilizados: 54 GB, libres: 26 GB **41.** 426 pies **43.** 10,080 min **45.** 14 chimeneas, sobran 172 ladrillos **47.** 179 cuadrados **49.** $730 **51.** 23,778 mi **53.** 8 billetes de $20, $4 de cambio **55.** 113 puntos **57.** 388 pies^2 **63.** Hacia arriba: 12,787. La suma no es correcta. **65.** Estimación: 4,200. El producto no parece razonable.

Espacio para el Estudio Sección 1.7 (página 87)

1. factores **3.** primos **5.** primos **7.** base, exponente **9.** 45, 15, 9; 1, 3, 5, 9, 15, 45 **11.** sí **13. a.** par, impar **b.** 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 **c.** 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 **15.** 5, 6, 2; 2, 3, 5, 5 **17.** 2, 25, 2, 3, 5, 5 **19. a.** base: 7, exponente: 6 **b.** base: 15, exponente: 1 **21.** 1, 2, 5, 10 **23.** 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40 **25.** 1, 2, 3, 6, 9, 18 **27.** 1, 2, 4, 11, 22, 44 **29.** 1, 7, 11, 77 **31.** 1, 2, 4, 5,10, 20, 25, 50, 100 **33.** 2 · 4 **35.** 3 · 9 **37.** 7 · 7 **39.** 2 · 10 ó 4 · 5 **41.** 2 · 3 · 5 **43.** 3 · 3 · 7 **45.** 2 · 3 · 9 ó 3 · 3 · 6 **47.** 2 · 3 · 10 ó 2 · 2 · 15 ó 2 · 5 · 6 ó 3 · 4 · 5 **49.** 1 y 11 **51.** 1 y 37 **53.** sí **55.** no, (9 · 11) **57.** no, (3 · 17) **59.** sí **61.** 2 · 3 · 5 **63.** 3 · 13 **65.** $3^2 \cdot 11$ **67.** $2 \cdot 3^4$ **69.** 2^6 **71.** $3 \cdot 7^2$ **73.** $2^2 \cdot 5 \cdot 11$ **75.** $2 \cdot 3 \cdot 17$ **77.** 2^5 **79.** 5^4 **81.** $4^2(8^3)$ **83.** $7^7 \cdot 9^2$ **85. a.** 81 **b.** 64 **87. a.** 32 **b.** 25 **89. a.** 343 **b.** 2,187 **91. a.** 9 **b.** 1 **93.** 90 **95.** 847 **97.** 225 **99.** 2,808 **101.** 1, 2, 4, 7, 14, 28, 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28 **103.** 2^2 unidades cuadradas, 3^2 unidades cuadradas, 4^2 unidades cuadradas **109.** 125 miembros de la banda

Espacio para el Estudio Sección 1.8 (página 98)

1. múltiplos **3.** divisible **5. a.** 12 **b.** más pequeño **7. a.** 20 **b.** 20 **9. a.** dos **b.** dos **c.** uno **d.** 2, 2, 3, 3, 5, 180 **11. a.** dos **b.** tres **c.** 2, 3, 108 **13. a.** 2, 3, 5 **b.** 30 **15. a.** mfc **b.** mcm **17.** 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32 **19.** 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88 **21.** 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64 **23.** 20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160 **25.** 15 **27.** 24 **29.** 55 **31.** 28 **33.** 12 **35.** 30 **37.** 80 **39.** 150 **41.** 315 **43.** 600 **45.** 72 **47.** 60 **49.** 2 **51.** 3 **53.** 11 **55.** 15 **57.** 6 **59.** 14 **61.** 1 **63.** 1 **65.** 4 **67.** 36 **69.** 600, 20 **71.** 140, 14 **73.** 2,178; 22 **75.** 3,528; 1 **77.** 3,000; 5 **79.** 204, 34 **81.** 138, 23 **83.** 4,050; 1 **85.** 15,000 mi, 22,500 mi, 30,000 mi, 37,500 mi, 45,000 mi **87.** 180 min ó 3 hr **89.** 6 paquetes de salchichas para hot dog y 5 paquetes de pan **91.** 12 piezas **93. a.** $7 **b.** 1r día: 4 estudiantes, 2o día: 3 estudiantes, 3r día: 9 estudiantes **99.** 11,110 **101.** 15,250

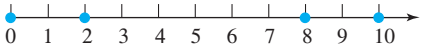
Espacio para el Estudio Sección 1.9 (página 109)

1. expresiones **3.** paréntesis, corchetes **5.** interno, externo **7. a.** elevar al cuadrado, multiplicar, restar **b.** multiplicar, elevar al cubo, sumar, restar **c.** elevar al cuadrado, multiplicar **d.** multiplicar, elevar al cuadrado **9.** multiplicar, elevar al cuadrado **11.** la barra de fracción, el numerador y el denominador **13.** cantidad **15.** 4, 20, 8 **17.** 9, 36, 16, 20 **19.** 47 **21.** 13 **23.** 38 **25.** 36 **27.** 24 **29.** 12 **31. a.** 33 **b.** 15 **33. a.** 43 **b.** 27 **35.** 100 **37.** 512 **39.** 64 **41.** 203 **43.** 73 **45.** 81 **47.** 3 **49.** 4 **51.** 6 **53.** 5 **55.** 16 **57.** 4 **59.** 5 **61.** 162 **63.** 27 **65.** 10 **67.** 3 **69.** 5,239 **71.** 15 **73.** 25 **75.** 22 **77.** 53 **79.** 2 **81.** 1 **83.** 25 **85.** 813 **87.** 49 **89.** 11 **91.** 191 **93.** 34 **95.** 323 **97.** 5 **99.** 14 **101.** 192 **103.** 74 **105.** 3(7) + 4(4) + 2(3), $43 **107.** 3(8 + 7 + 8 + 8 + 7), 114 **109.** brick: 3(3) + 1 + 1 + 3 + 3(5), 29; aphid: 3[1 + 2(3) + 4 + 1 + 2], 42

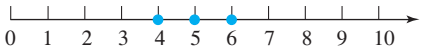
111. $2^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 = 4 + 9 + 25 + 49 = 87$
113. 79° **115.** 31 termias **117.** 300 calorías
119. a. 125 **b.** \$11,875 **c.** \$95
125. doscientos cincuenta y cuatro mil, trescientos nueve

Repaso del Capítulo 1 (página 113)

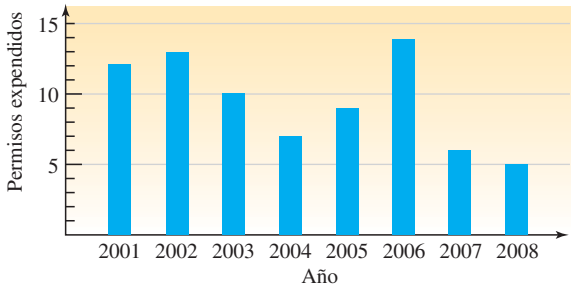
1. 6 **2.** 7 **3.** mil millones **4.** 8 **5. a.** noventa y siete mil, doscientos ochenta y tres **b.** cinco mil millones, cuatrocientos cuarenta y tres millones, sesenta mil, diecisiete
6. a. 3,207 **b.** 23,253,412 **7.** 500,000 + 70,000 + 300 + 2
8. 30,000,000 + 7,000,000 + 300,000 + 9,000 + 100 + 50 + 4
9.



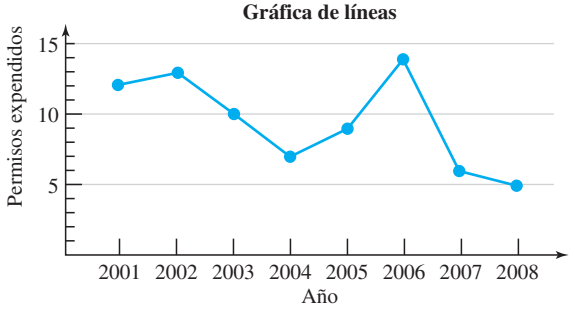
10.



11. > **12.** < **13. a.** 2,507,300 **b.** 2,510,000
c. 2,507,350 **d.** 3,000,000 **14. a.** 970,000 **b.** 1,000,000
15. a.



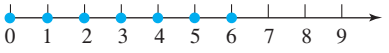
b.



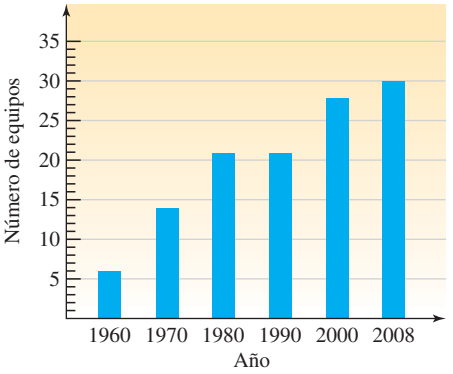
16. Nilo, Amazonas, Yangtsé, Mississippi-Missouri, Ob-Irtysh
17. 463 **18.** 18 **19.** 59 **20.** 1,018 **21.** 6,000 **22.** 50
23. 12,601 **24.** 152,169 **25.** no **26.** 14,661 **27.** 59,400
28. a. 61 + 24 **b.** (9 + 91) + 29 **29.** 227,453,217 pasajeros
30. 779,666 **31.** \$1,324,700,000 **32.** 2,746 ft **33.** 61
34. 74 **35.** 217 **36.** 54 **37.** 505 **38.** 2,075 **39.** incorrecto
40. 12 + 8 = 20 **41.** 160,000 **42.** 3,041,092 millas cuadradas
43. \$13,445 **44.** 54 días **45.** 423 **46.** 210 **47.** 720,000
48. 44,000 **49.** 9,263 **50.** 171,258 **51.** 1,580,344
52. 230,418 **53.** 2,800,000 **54.** $5 \cdot 7$ **55. a.** 0 **b.** 7
56. a. propiedad asociativa de la multiplicación
b. propiedad conmutativa de la multiplicación **57.** 32 cm^2
58. 6,084 $pulg^2$ **59. a.** 2,555 hr **b.** 3,285 hr
60. 330 miembros **61.** Santiago **62.** 14,400 huevos
63. 18 **64.** 17 **65.** 37 **66.** 307 **67.** 23 R 27
68. 19 R 6 **69.** 0 **70.** indefinida **71.** 42 R 13 **72.** 380
73. $40 \cdot 4 = 160$ **74.** No es correcta **75.** Es divisible entre 3, 5 y 9. **76.** 4,000 **77.** 16, 25 **78.** 34 automóviles
79. 185 °F **80.** 383 autocinemas **81.** 900 lb **82.** 1,200 automóviles **83.** 2,500 cajas **84.** 68 gorras, quedan 12
yardas de hilo **85.** 147 cabezas **86.** 96 niños **87.** 1, 2, 3, 6, 9, 18 **88.** 1, 3, 5, 15, 25, 75 **89.** $2 \cdot 10$ ó $4 \cdot 5$ **90.** $2 \cdot 3 \cdot 9$ ó $3 \cdot 3 \cdot 6$ **91. a.** primo **b.** compuesto **c.** ninguno **d.** ninguno **e.** compuesto **f.** primo **92. a.** impar **b.** par **c.** par **d.** impar **93.** $2 \cdot 3 \cdot 7$ **94.** $3 \cdot 5^2$
95. $2^2 \cdot 5 \cdot 11$ **96.** $2^2 \cdot 5 \cdot 7$ **97.** 6^4 **98.** $5^3 \cdot 13^2$ **99.** 125
100. 121 **101.** 784 **102.** 2,700 **103.** 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90 **104. a.** 24, 48 **b.** 1, 2 **105.** 12 **106.** 12
107. 45 **108.** 36 **109.** 126 **110.** 360 **111.** 140
112. 84 **113.** 4 **114.** 3 **115.** 10 **116.** 15 **117.** 21
118. 28 **119.** 24 **120.** 44 **121.** 42 días
122. a. 8 arreglos **b.** 4 claveles rojos, 3 claveles blancos, 2 claveles azules **123.** 45 **124.** 23 **125.** 243 **126.** 4
127. 32 **128.** 72 **129.** 8 **130.** 8 **131.** 1 **132.** 3
133. 28 **134.** 9 **135.** 77 **136.** 60

Examen del Capítulo 1 (página 128)

1. a. natural **b.** Desigualdad **c.** valor **d.** área
e. divisible **f.** paréntesis, corchetes **g.** primo
2.



3. a. 1 centena **b.** 0 **4. a.** siete millones, dieciocho mil, seiscientos cuarenta y uno **b.** 1,385,266
c. 90,000 + 2,000 + 500 + 60 + 1 **5. a.** > **b.** <
6. a. 35,000,000 **b.** 34,800,000 **c.** 34,760,000
7.



8. 248, 248 + 287 = 535 **9.** 225,164 **10.** 942 **11.** 424
12. 41,588 **13.** 72 **14.** 114 R 57, (73 · 114) + 57 = 8,379
15. 13,800,000 **16.** 250 **17.** 43,000 **18.** 2,168 pulg
19. 529 cm^2 **20. a.** 1, 2, 3, 4, 6, 12 **b.** 4, 8, 12, 16, 20, 24
c. $8 \cdot 5$ **21.** $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ **22.** 32 dientes **23.** 4,933 colas
24. 96 estudiantes **25.** 4,085 $pies^2$ **26.** 414 mi
27. \$331,000 **28. a.** propiedad asociativa de la multiplicación **b.** propiedad conmutativa de la suma
29. a. 0 **b.** 0 **c.** 1 **d.** indefinida **30.** 90 **31.** 72
32. 6 **33.** 4 **34. a.** 40 pulg. **b.** arroz: 5 cajas, puré de papas: 4 cajas **35.** Es divisible entre 3, 4, 5, 6, y 10. **36.** 58
37. 29 **38.** 762 **39.** 44 **40.** 1

Piense detenidamente (página 135)

\$4,621, \$1,073, \$3,325

Espacio para el Estudio Sección 2.1 (página 139)

1. positivo, negativo **3.** gráfica **5.** valor absoluto
7. a. −225 **b.** −10 seg **c.** −3° **d.** −\$12,000 **e.** −1 mi
9. a. El espaciado no es uniforme. **b.** La numeración no es uniforme. **c.** Falta el cero. **d.** Las puntas de flecha no están trazadas. **11. a.** −4 **b.** −2 **13. a.** −7 **b.** 8
15. a. $15 > -12$ **b.** $-5 < -4$

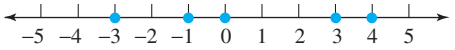
17.

Número	Opuesto	Valor absoluto
−25	25	25
39	−39	39
0	0	0

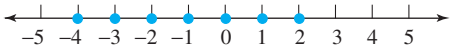
19. a. $-(-8)$ **b.** $|-8|$ **c.** $8-8$ **d.** $-|-8|$

21. a. mayor, igual **b.** menor, igual

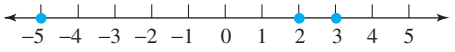
23.



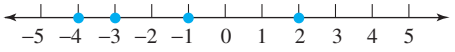
25.



27.

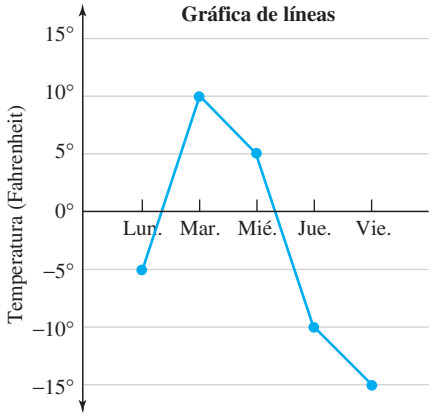


29.



31. < **33.** < **35.** > **37.** > **39.** verdadero **41.** verdadero **43.** falso **45.** falso **47.** 9 **49.** 8 **51.** 14 **53.** 180 **55.** 11 **57.** 4 **59.** 102 **61.** 561 **63.** −20 **65.** −6 **67.** −253 **69.** 0 **71.** > **73.** < **75.** > **77.** < **79.** −52, −22, −12, 12, 52, 82 **81.** −3, −5, −7 **83.** −31 longitudes **85.** 0, 20, 5, −40, −120 **87.** picos: 2, 4, 0; valles: −3, −5, −2 **89. a.** −1 (1 bajo par) **b.** −3 (3 bajo par) **c.** La mayoría de los marcadores están bajo par. **91. a.** −20° hasta −10° **b.** 40° **c.** 10° **93. a.** 200 años **b.** a.n.e. **c.** n.e. **d.** el nacimiento de Cristo

95.



105. 23,500 **107.** 761

109. propiedad asociativa de la multiplicación

Piense detenidamente (página 148)

reducir gastos, aumentar ingreso, disminuir gastos, aumentar ingreso, aumentar ingreso, aumentar ingreso, disminuir gastos, disminuir gastos, aumentar ingreso, disminuir gastos

Espacio para el Estudio Sección 2.2 (página 152)

1. similares **3.** identidad **5.** conmutativa **7. a.** $|10| = 10, |-12| = 12$ **b.** −12 **c.** 2 **9.** restar, más grande **11. a.** sí **b.** sí **c.** no **d.** no **13. a.** 0 **b.** 0 **15.** −18, −19 **17.** 5, 2 **19.** −9 **21.** −10 **23.** −62 **25.** −96 **27.** −379 **29.** −874 **31.** −3 **33.** 1 **35.** −22 **37.** 48 **39.** 357 **41.** −60 **43.** 7 **45.** −4 **47.** −10 **49.** 41 **51.** 3 **53.** −6 **55.** 3 **57.** −7 **59.** 9 **61.** −562 **63.** 2 **65.** 0 **67.** 0 **69.** −2 **71.** −1 **73.** −3 **75.** −1,032 **77.** −21 **79.** −8,348 **81.** −20 **83.** 112 °F, 114 °F **85. a.** −15,720 pies **b.** −12,500 pies **87. a.** −9 ft **b.** 2 pies sobre la fase de inundación **89.** 195° **91.** riesgo del 5, 4% **93.** 3,250 m **95.** ($967) **103. a.** 16 pies **b.** 15 pies^2 **105.** $2 \cdot 5^3$

Espacio para el Estudio Sección 2.3 (página 162)

1. opuesto, aditivo **3.** valor **5.** opuesto **7.** −3 **9.** cambio **11. a.** 3 **b.** −12 **13.** +, 6, 9 **15. a.** $-8-(-4)$ **b.** $-4-(-8)$ **17.** −3, 2, 0 **19.** −2, −10, 6, −4 **21.** −7 **23.** −10 **25.** 9 **27.** 18 **29.** −18 **31.** −50 **33. a.** −10 **b.** 10 **35. a.** 25 **b.** −25 **37.** −15 **39.** 9 **41.** −2 **43.** −10 **45.** 9 **47.** −12 **49.** −8 **51.** 0 **53.** 32 **55.** −26 **57.** −2,447 **59.** 43,900 **61.** 3 **63.** 10 **65.** 8 **67.** 5 **69.** 3 **71.** −1 **73.** −9 **75.** −22 **77.** 9 **79.** −4 **81.** 0 **83.** −18 **85.** 8 **87.** −25 **89.** −2,200 pies **91.** 1,066 pies **93.** −8 **95.** −4 yd **97.** −$140 **99.** Portland, Barrow, Kansas City, Atlantic City, Norfolk **101.** 470 °F **103.** aumentó 16 puntos **109. a.** 24,090 **b.** 6,000 **111.** 156

Espacio para el Estudio Sección 2.4 (página 172)

1. factor, factor, producto **3.** no similares **5.** asociativa **7.** positiva, negativa **9.** negativa **11.** no similares/diferentes **13.** 0 **15. a.** 3 **b.** 12 **17. a.** base: 8, exponente: 4 **b.** base: −7, exponente: 9 **19.** 6, −24 **21.** −15 **23.** −18 **25.** −72 **27.** −126 **29.** −1,665 **31.** −94,000 **33.** 56 **35.** 7 **37.** 156 **39.** 276 **41.** 1,947 **43.** 72,000,000 **45.** 90 **47.** 150 **49.** −384 **51.** −336 **53.** −48 **55.** −81 **57.** 36 **59.** 144 **61.** −27 **63.** −32 **65.** 625 **67.** 1 **69.** 49, −49 **71.** 144, −144 **73.** −60 **75.** 0 **77.** −64 **79.** −20 **81.** −18 **83.** 60 **85.** −48 **87.** −8,400,000 **89.** −625 **91.** 144 **93.** 1 **95.** −120 **97.** −2,000 pies **99. a.** alto: 2, bajo: −3 **b.** alto: 4, bajo: −6 **101. a.** −402,000 empleos **b.** −423,000 empleos **c.** −581,000 empleos **d.** −528,000 empleos **103.** −324 °F **105.** −$1,200 **107.** −18 pies **109.** −$215,718 **115.** 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 **117.** 43 R 3

Espacio para el Estudio Sección 2.5 (página 180)

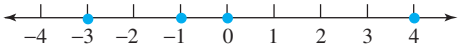
1. dividendo, divisor, cociente; dividendo, divisor, cociente **3.** entre/del **5. a.** $-5(5) = -25$ **b.** $6(-6) = -36$ **c.** $0(-15) = 0$ **7. a.** positivo **b.** negativo **9. a.** 0 **b.** indefinida **11. a.** siempre verdadero **b.** en ocasiones verdadero **c.** siempre verdadero **13.** −7 **15.** −4 **17.** −6 **19.** −8 **21.** −22 **23.** −39 **25.** −30 **27.** −50 **29.** 2 **31.** 5 **33.** 9 **35.** 4 **37.** 16 **39.** 21 **41.** 40 **43.** 500 **45. a.** indefinida **b.** 0 **47. a.** 0 **b.** indefinida **49.** 3 **51.** −17 **53.** 0 **55.** −5 **57.** −5 **59.** indefinida **61.** −19 **63.** 1 **65.** −20 **67.** −1 **69.** 10 **71.** −24 **73.** −30 **75.** −4 **77.** −542 **79.** −1,634 **81.** −$35 por semana **83.** −1,010 pies **85.** −7° por min **87.** −6 (6 juegos atrás) **89.** −$15 **91.** −$17 **99.** 211 **101.** propiedad asociativa de la suma **103.** no

Espacio para el Estudio Sección 2.6 (página 188)

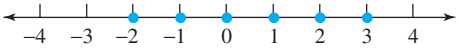
1. orden **3.** internos, externos **5. a.** elevar al cuadrado, multiplicación, resta **b.** multiplicación, elevar al cubo, resta, suma **c.** resta, multiplicación, suma **d.** elevar al cuadrado, multiplicación **7.** paréntesis, corchetes, valor absoluto, símbolos, barra de fracción **9.** 4, 20, −20, −28 **11.** −8, −1, −5, −14 **13.** −10 **15.** −62 **17.** 15 **19.** 12 **21.** −12 **23.** −80 **25.** −72 **27.** −200 **29.** 4 **31.** 28 **33.** 17 **35.** 71 **37.** 21 **39.** 50 **41.** −6 **43.** −12 **45. a.** 12 **b.** 5 **47. a.** 60 **b.** 14 **49.** −2 **51.** −3 **53.** −770 **55.** −5,000 **57.** −7 **59.** 1 **61.** 17 **63.** −21 **65.** 19 **67.** −7 **69.** 12 **71.** −14 **73.** −11 **75.** 2 **77.** −5 **79.** −3 **81.** −5 **83.** 166 **85.** 0 **87.** −14 **89.** 112 **91.** 22 **93.** 8 **95.** −3 **97.** −400 puntos **99.** 19 **101.** −$8 millones **103.** Es mejor que se refiera a los últimos cuatro años, debido a que hubo un superávit en el presupuesto promedio de $16 mil millones. **105. a.** 90 pies bajo el nivel del mar (−90) **b.** pérdida de $600 (−600) **c.** −400 pies **111. a.** −3 **b.** −4 **113.** no

Repaso del Capítulo (página 192)

1. {. . . , −5, −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, . . .}
2. a. −$1,200 **b.** −10 seg **3.** −33 pies
4. a.



b.



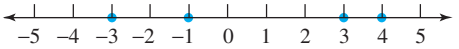
5. a. > **b.** < **6. a.** falso **b.** verdadero **7. a.** 5 **b.** 43 **c.** 0 **8. a.** −8 **b.** 8 **c.** 0 **9. a.** −12 **b.** 12 **c.** 0 **10. a.** negativo **b.** el opuesto **c.** negativo **d.** menos
11.

Posición	Jugadora	Calificación al par
1	Helen Alfredsson	−12
2	Yani Tseng	−9
3	Laura Diaz	−8
4	Karen Stupples	−7
5	Young Kim	−6
6	Shanshan Feng	−5

12. a. 1998, $60 mil millones **b.** 2000, $230 mil millones **c.** 2004, −$420 mil millones **13.** −10 **14.** −9 **15.** 32 **16.** 73 **17.** 0 **18.** 0 **19.** −8 **20.** −3 **21.** 10 **22.** 8 **23.** −4 **24.** −20 **25.** −76 **26.** −31 **27.** −374 **28.** 3,128 **29. a.** 11 **b.** −4 **30. a.** sí **b.** sí **c.** no **d.** no **31. a.** −100 pies **b.** −66 pies **32.** 136 °F **33.** opuesto **34. a.** −9 − (−1) **b.** −6 − (−10) **35.** −3 **36.** −21 **37.** 4 **38.** −6 **39.** −112 **40.** −8 **41.** −37 **42.** 30 **43.** 16 **44.** −24 **45.** −4 **46.** 22 **47.** 6 **48.** −8 **49.** −62 **50.** 103 **51.** 75 **52. a.** −77 **b.** 77 **53.** −225 pies **54.** 180°, 140° **55.** 44 puntos **56.** −$80 **57.** −14 **58.** −376 **59.** 322 **60.** 25 **61.** −25 **62.** −204 **63.** −68,000,000 **64.** 30,000,000 **65.** −36 **66.** −36 **67.** 120 **68.** 100 **69.** 450 **70.** 48 **71.** −260, −390 **72.** −540 pies **73.** −125 **74.** −32 **75.** 4,096 **76.** 256 **77.** negativo **78.** En la primera expresión, la base es el 9. En la segunda expresión, la base es el −9. −81, 81 **79.** −3, 5, −15 **80.** La respuesta es incorrecta: $18(-8) \neq -152$ **81.** −5 **82.** −2 **83.** 8 **84.** −8 **85.** 10 **86.** 1 **87.** −50 **88.** 400 **89.** 23 **90.** −17 **91.** 0 **92.** indefinida **93.** −32 **94.** 5 **95.** −2 min **96.** −4,729 pies **97.** −22 **98.** 4 **99.** 40 **100.** 8 **101.** 41 **102.** 0 **103.** −13 **104.** 32 **105.** 12 **106.** −16 **107.** −4 **108.** −34 **109.** −1 **110.** −4 **111.** 5 **112.** 55 **113.** 2,300 **114.** −2

Examen del Capítulo 2 (página 201)

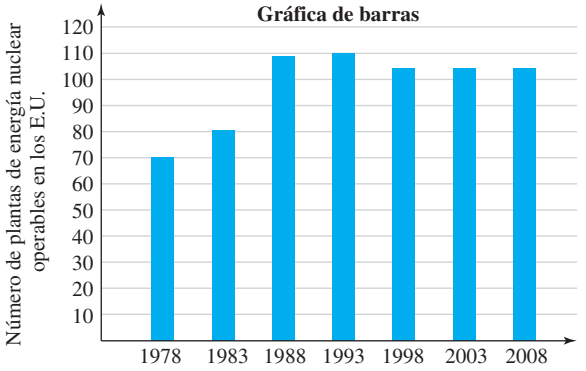
1. a. enteros **b.** desigualdad **c.** valor absoluto **d.** opuestos **e.** base, exponente **2. a.** > **b.** < **c.** < **3. a.** verdadero **b.** verdadero **c.** falso **d.** falso **e.** verdadero **4.** Poly
5.



6. a. −3 **b.** −145 **c.** −1 **d.** −32 **e.** −3 **7. a.** −13 **b.** −1 **c.** 191 **d.** −15 **e.** −150 **8. a.** −70 **b.** 292 **c.** 48 **d.** 54 **e.** −26,000,000 **9.** $5(-4) = -20$ **10. a.** −8 **b.** −8 **c.** 9 **d.** −34 **e.** −80 **11. a.** −12 **b.** 18 **c.** 4 **d.** −80 **12. a.** propiedad conmutativa de la suma **b.** propiedad conmutativa de la multiplicación **c.** suma **13. a.** indefinida **b.** −5 **c.** 0 **d.** 1 **14. a.** 16 **b.** −16 **15.** 1 **16.** −27 **17.** −34 **18.** 88 **19.** 6 **20.** 48 **21.** −24 **22.** 58 **23.** −72 °F **24.** perdió $203 (−203) **25.** 154 pies **26.** −350 pies **27.** −15 **28.** −$60 millones

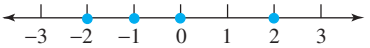
Repaso acumulativo de los Capítulos 1–2 (página 192)

1. a. 7 millones **b.** 3 **c.** 7,326,500 **d.** 7,330,000
2. CRF Cable
3.

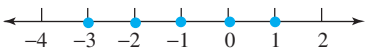


Fuente: allcountries.org and *The World Almanac and Book of Facts,* 2009

4. 360 **5.** 1,854 **6.** 24,388 **7.** 3,806 **8.** 4,684 **9.** 37,777 **10.** 1,432 **11.** no **12.** 65 sillas de madera **13.** 11,745 **14.** 5,528,166 **15.** 21,700,000 **16.** 864 pelotas de tenis **17.** 104 pies, 595 pies^2 **18.** 25, 144, 10,000 **19.** 87 R 5 **20.** 13 **21.** 467 **22.** 28 **23.** sí **24.** 10 veces, 20 onzas **25.** 60 panecillos **26.** 1, 2, 3, 6, 9, 18 **27. a.** número primo, número impar **b.** número compuesto, número par **c.** ninguno, número par **d.** ninguno, número impar **28.** $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ **29.** 11^4 **30.** 175 **31.** 24 **32.** 30 **33.** 6 **34.** 27 **35.** 38 **36.** 10 **37.** 2 **38.** 41 mph
39. a.



b.

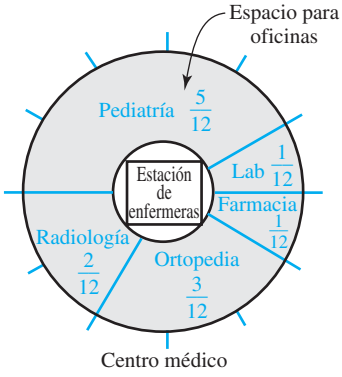


40. −3 **41.** 21 **42.** −$79 **43.** −273° Celsius **44.** −$55,000 **45.** −37 **46.** 70 **47.** −3 **48.** 4 **49.** 129 **50.** 1 **51.** −23 **52.** 0 **53.** −4 **54.** −3 **55.** −100 pies **56.** −$4,000,000

Espacio para el Estudio 3.1 (página 216)

1. fracción **3.** propia, impropia **5.** equivalente **7.** construcción **9.** fracciones equivalente: $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ **11. a.** fracción impropia **b.** fracción propia **c.** fracción propia **d.** fracción impropia **13.** 5 **15.** numeradores **17.** $\frac{-7}{8}, -\frac{7}{8}$ **19.** 3, 1, 3, 18 **21.** numerador: 4; denominador: 5 **23.** numerador: 17; denominador: 10 **25.** $\frac{3}{4}, \frac{1}{4}$ **27.** $\frac{5}{8}, \frac{3}{8}$ **29.** $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ **31.** $\frac{7}{12}, \frac{5}{12}$ **33. a.** 4 **b.** 1 **c.** 0 **d.** indefinida **35. a.** indefinida **b.** 0 **c.** 1 **d.** 75 **37.** $\frac{35}{40}$ **39.** $\frac{12}{27}$ **41.** $\frac{45}{54}$ **43.** $\frac{4}{14}$ **45.** $\frac{15}{30}$ **47.** $\frac{22}{32}$ **49.** $\frac{35}{28}$ **51.** $\frac{48}{45}$ **53.** $\frac{36}{9}$ **55.** $\frac{48}{8}$ **57.** $\frac{15}{5}$ **59.** $\frac{28}{2}$ **61. a.** no **b.** sí **63. a.** sí **b.** no **65.** $\frac{2}{3}$ **67.** $\frac{4}{5}$ **69.** $\frac{1}{3}$ **71.** $\frac{1}{24}$ **73.** $\frac{3}{8}$ **75.** en la forma más sencilla **77.** en la forma más sencilla **79.** $\frac{10}{11}$ **81.** $\frac{5}{9}$ **83.** $\frac{6}{7}$ **85.** $\frac{17}{13}$ **87.** $\frac{5}{2}$ **89.** $\frac{35}{12}$ **91.** $-\frac{1}{17}$ **93.** $-\frac{6}{7}$ **95.** $-\frac{8}{13}$ **97.** no equivalentes **99.** equivalentes **101. a.** 32 **b.** $\frac{5}{32}$ **103. a.** 16 **b.** $\frac{5}{8}$ **105. a.** 28, 22 **b.** $\frac{28}{50} = \frac{14}{25}$ **c.** $\frac{22}{50} = \frac{11}{25}$ **107. a.** 20 **b.** $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}$

109.



117. $2,307

Espacio para el Estudio Sección 3.2 (página 228)

1. multiplicación **3.** simplificar **5.** área **7.** numeradores, denominadores, simplificar **9. a.** negativo **b.** positivo **c.** positivo **d.** negativo **11.** base, altura, $\frac{1}{2}bh$ **13. a.** $\frac{4}{1}$ **b.** $-\frac{3}{1}$ **15.** 7, 15, 2, 3, 5, 5, 24 **17.** $\frac{1}{8}$ **19.** $\frac{1}{45}$ **21.** $\frac{14}{27}$ **23.** $\frac{24}{77}$ **25.** $-\frac{4}{15}$ **27.** $-\frac{35}{72}$ **29.** $\frac{9}{8}$ **31.** $\frac{5}{2}$ **33.** $\frac{1}{2}$ **35.** $\frac{1}{7}$ **37.** $\frac{1}{10}$ **39.** $\frac{2}{15}$ **41. a.** $\frac{9}{25}$ **b.** $\frac{9}{25}$ **43. a.** $-\frac{1}{36}$ **b.** $-\frac{1}{216}$ **45.** $\frac{15}{32}$ **47.** 9 **49.** 15 pies^2 **51.** 63 pulg.^{2} **53.** 6 m^2 **55.** 60 pies^2

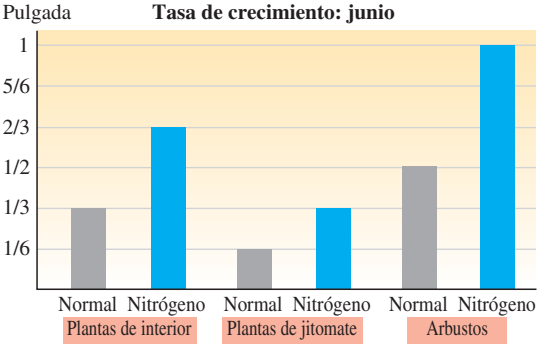
57.

	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{12}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{18}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{24}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{30}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{36}$

59. $-\frac{1}{5}$ **61.** $\frac{21}{128}$ **63.** $\frac{1}{30}$ **65.** -15 **67.** $-\frac{27}{64}$ **69.** 1 **71.** $\frac{8}{3}$ **73.** $-\frac{3}{2}$ **75.** $\frac{2}{9}$ **77.** $-\frac{25}{81}$ **79.** $\frac{2}{3}$ **81.** $\frac{5}{6}$ **83.** $\frac{77}{60}$ **85.** $\frac{1}{2}$ **87.** 60 votos **89.** 18 pulg, 6 pulg y 2 pulg.

91. $\frac{3}{8}$ taza de azúcar, $\frac{1}{6}$ taza de melaza oscura

93. Pulgada



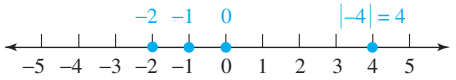
95. 27 pies^2 **97.** 42 pies^2 **99.** 9,646 mi^2 **101.** $\frac{3}{4}$ pulg. **109.** -2 **111.** 23

Espacio para el Estudio Sección 3.2 (página 239)

1. recíproco **3.** cociente **5. a.** multiplique, recíproco **b.** $\cdot, \frac{3}{2}$ **7. a.** negativo **b.** positivo **9. a.** 1 **b.** 1 **11.** 27, 27, 8, 9, 2, 4, 4, 9, 3 **13. a.** $\frac{7}{6}$ **b.** $-\frac{8}{15}$ **c.** $\frac{1}{10}$ **15. a.** $\frac{8}{11}$ **b.** -14 **c.** $-\frac{1}{63}$ **17.** $\frac{3}{16}$ **19.** $\frac{14}{23}$ **21.** $\frac{35}{8}$ **23.** $\frac{3}{4}$ **25.** 45 **27.** 320 **29.** -4 **31.** $-\frac{7}{2}$ **33.** $\frac{4}{55}$ **35.** $\frac{3}{23}$ **37.** 50 **39.** $\frac{5}{6}$ **41.** $\frac{2}{3}$ **43.** 1 **45.** $-\frac{5}{8}$ **47.** 36 **49.** $\frac{2}{15}$ **51.** $\frac{1}{192}$ **53.** $-\frac{27}{8}$ **55.** $-\frac{15}{2}$ **57.** $\frac{27}{16}$ **59.** $-\frac{1}{64}$ **61.** $\frac{3}{14}$ **63.** $\frac{8}{15}$ **65.** $\frac{13}{32}$ **67.** $\frac{2}{9}$ **69.** -6 **71.** $\frac{11}{6}$ **73.** $\frac{15}{28}$ **75.** $-\frac{5}{2}$ **77.** 4 aplicaciones **79.** 6 tazas **81. a.** 30 días **b.** 15 mi **c.** 25 días **d.** ruta 2 **83. a.** 16 **b.** $\frac{3}{4}$ pulg.

c. $\frac{1}{120}$ pulg. **85.** 7,855 secciones **93.** es menor que **95.** Cero

97.



Piense detenidamente (página 251)

$\frac{7}{20}$

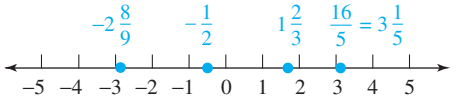
Espacio para el Estudio Sección 3.4 (página 252)

1. común **3.** formar, $\frac{2}{2}$ **5.** numeradores, común. Simplifique **7.** más grande **9.** $\frac{9}{9}$ **11. a.** una vez **b.** dos veces **c.** tres veces **13.** 2, 2, 3, 3, 5, 180 **15.** 7, 7, 14, 35, 14, 5, 19 **17.** $\frac{5}{9}$ **19.** $\frac{1}{2}$ **21.** $\frac{4}{15}$ **23.** $\frac{2}{5}$ **25.** $-\frac{3}{5}$ **27.** $-\frac{5}{21}$ **29.** $\frac{3}{8}$ **31.** $\frac{7}{11}$ **33.** $\frac{10}{21}$ **35.** $\frac{9}{10}$ **37.** $\frac{1}{20}$ **39.** $\frac{13}{28}$ **41.** $\frac{1}{4}$ **43.** $\frac{1}{2}$ **45.** $-\frac{13}{9}$ **47.** $-\frac{3}{4}$ **49.** $\frac{19}{24}$ **51.** $\frac{31}{36}$ **53.** $\frac{24}{35}$ **55.** $\frac{9}{20}$ **57.** $\frac{3}{8}$ **59.** $\frac{4}{5}$ **61.** $\frac{11}{12}$ **63.** $\frac{7}{6}$ **65.** $\frac{2}{3}$ **67.** $\frac{11}{10}$ **69.** $\frac{1}{3}$ **71.** $\frac{22}{15}$ **73.** $\frac{2}{5}$ **75.** $-\frac{11}{20}$ **77.** $-\frac{3}{16}$ **79.** $\frac{1}{4}$ **81.** $\frac{23}{10}$ **83.** $\frac{5}{12}$ **85.** $\frac{341}{400}$ **87.** $\frac{9}{20}$ **89.** $\frac{20}{103}$ **91.** $-\frac{23}{4}$ **93.** $\frac{17}{54}$ **95.** $-\frac{1}{50}$ **97.** $\frac{5}{36}$ **99.** $-\frac{17}{60}$ **101. a.** $\frac{7}{32}$ pulg. **b.** $\frac{3}{32}$ pulg. **103.** $\frac{11}{16}$ pulg. **105. a.** $\frac{3}{8}$ **b.** $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ **c.** se dejó $\frac{17}{24}$ de una pizza **d.** no **107.** $\frac{1}{16}$ lb, cobro menor **109.** $\frac{7}{10}$ de los estudiantes a tiempo completo estudian 2 ó más horas al día. **111.** no **113. a.** DT: derecha trasera **b.** IT: izquierda trasera **117. a.** $\frac{3}{8}$ **b.** $\frac{1}{8}$ **c.** $\frac{1}{32}$ **d.** 2

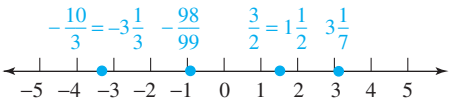
Espacio para el Estudio Sección 3.5 (page 265)

1. mixto **3.** impropia **5. a.** $5\frac{1}{3}^{\circ}$ **b.** $-6\frac{7}{8}$ pulg. **7.** Multiplique, Sume, denominador **9.** $-\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{1}{5}$ **11.** impropia **13.** no razonable: $4\frac{1}{5} \cdot 2\frac{5}{7} \approx 4 \cdot 3 = 12$ **15. a.** y, dieciseisavos **b.** negativo, dos **17.** 8, 4, 8, 4, 4, 4, 6, 6 **19.** $\frac{19}{8}, 2\frac{3}{8}$ **21.** $\frac{34}{25}, 1\frac{9}{25}$ **23.** $\frac{13}{2}$ **25.** $\frac{104}{5}$ **27.** $-\frac{68}{9}$ **29.** $-\frac{26}{3}$ **31.** $3\frac{1}{4}$ **33.** $5\frac{3}{5}$ **35.** $4\frac{2}{3}$ **37.** $10\frac{1}{2}$ **39.** 4 **41.** 2 **43.** $-8\frac{2}{7}$ **45.** $-3\frac{1}{3}$

47.



49.



51. $8\frac{1}{6}$ **53.** $7\frac{2}{5}$ **55.** 8 **57.** −10 **59.** $\frac{4}{9}$ **61.** $6\frac{9}{10}$ **63.** $2\frac{1}{3}$ **65.** $1\frac{10}{21}$ **67.** $-13\frac{3}{4}$ **69.** $-\frac{9}{10}$ **71.** $\frac{25}{9} = 2\frac{7}{9}$ **73.** $2\frac{1}{2}$ **75.** 12 **77.** 14 **79.** −2 **81.** $-8\frac{1}{3}$ **83.** $\frac{35}{72}$ **85.** $\frac{5}{16}$ **87.** $-1\frac{1}{4}$ **89.** $-\frac{64}{27} = -2\frac{10}{27}$ **91. a.** $3\frac{2}{3}$ **b.** $\frac{11}{3}$ **93.** $2\frac{1}{2}$ **95. a.** $2\frac{2}{3}$ **b.** $-1\frac{1}{3}$ **97.** talla 14, corte delgado **99.** $76\frac{9}{16}$ pulg.^{2} **101.** $42\frac{5}{8}$ pulg.^{2} **103.** 64 calorías **105.** 357¢ = \$3.57 **107.** $1\frac{1}{4}$ tazas **109.** 600 personas **111.** $8\frac{1}{2}$ furlongs **115.** 60 **117.** 4

Piense detenidamente (página 278)

día laboral: $6\frac{2}{3}$ hr; día no laboral: $7\frac{5}{12}$ hr; $\frac{3}{4}$ hr

Espacio para el Estudio Sección 3.6 (página 279)

1. mixto **3.** fracciones, naturales **5.** acarrea **7. a.** 76, $\frac{3}{4}$ **b.** $76 + \frac{3}{4}$ **9. a.** 12 **b.** 30 **c.** 18 **d.** 24 **11.** 21, 5, 5, 35, 31, 35 **13.** $3\frac{7}{12}$ **15.** $6\frac{11}{15}$ **17.** $-2\frac{3}{8}$ **19.** $-3\frac{1}{6}$ **21.** $376\frac{17}{21}$ **23.** $714\frac{19}{20}$ **25.** $59\frac{28}{45}$ **27.** $132\frac{29}{33}$ **29.** $121\frac{9}{10}$ **31.** $147\frac{8}{9}$ **33.** $102\frac{13}{24}$ **35.** $129\frac{28}{45}$ **37.** $10\frac{1}{4}$ **39.** $13\frac{8}{15}$ **41.** $31\frac{14}{33}$ **43.** $71\frac{43}{56}$ **45.** $579\frac{4}{15}$ **47.** $62\frac{23}{32}$ **49.** $11\frac{1}{30}$ **51.** $5\frac{11}{30}$ **53.** $9\frac{3}{10}$ **55.** $3\frac{7}{8}$ **57.** $5\frac{2}{3}$ **59.** $10\frac{7}{16}$ **61.** $397\frac{5}{12}$ **63.** $-1\frac{11}{24}$ **65.** $7\frac{1}{2}$ **67.** $-5\frac{1}{4}$ **69.** $6\frac{1}{3}$ **71.** $53\frac{5}{12}$ **73.** $2\frac{1}{2}$ **75.** $-5\frac{7}{8}$ **77.** $3\frac{5}{8}$ **79.** $4\frac{1}{3}$ **81.** $461\frac{1}{8}$ **83.** $\frac{1}{4}$ **85.** $5\frac{1}{4}$ hr **87.** $7\frac{1}{6}$ tazas **89.** $20\frac{1}{16}$ lb **91.** $108\frac{1}{2}$ pulg. **93.** $2\frac{3}{4}$ mi **95.** $48\frac{1}{2}$ pies **97. a.** 20¢ por galón **b.** 20¢ por galón **99.** $3\frac{1}{4}$ pulg. **105. a.** $4\frac{3}{4}$ **b.** $2\frac{1}{4}$ **c.** $4\frac{3}{8}$ **d.** $2\frac{4}{5}$

Espacio para el Estudio Sección 3.7 (página 290)

1. operaciones **3.** complejo **5.** elevar a una potencia (exponente), multiplicación y suma **7.** $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{10}\right) + 1\frac{2}{15}$ **9.** $\frac{2}{3} \div \frac{1}{5}$ **11.** $\frac{23}{4}$ **13.** 3, 6, 2, 2, 2, 5 **15.** $\frac{17}{20}$ **17.** $-\frac{1}{6}$ **19.** $-\frac{7}{26}$ **21.** $-\frac{1}{12}$ **23.** $5\frac{13}{30}$ **25.** $2\frac{2}{3}$

27. $26\frac{1}{4}$ **29.** 18 **31.** $\frac{5}{32}$ **33.** $\frac{5}{6}$ **35.** $\frac{5}{18}$ **37.** $-\frac{1}{2}$

39. $\frac{50}{13}$ **41.** $\frac{25}{26}$ **43.** $-1\frac{27}{40}$ **45.** $-1\frac{1}{3}$ **47.** 36 **49.** $\frac{1}{3}$

51. $\frac{31}{45}$ **53.** 5 **55.** $14\frac{5}{24}$ **57.** 11 **59.** $-1\frac{1}{6}$ **61.** $\frac{3}{7}$

63. $\frac{3}{10}$ **65.** $44\frac{1}{3}$ **67.** $8\frac{1}{2}$ **69.** $\frac{4}{9}$ **71.** $1\frac{37}{70}$ **73.** 3

75. $8\frac{4}{15}$ **77.** $91\frac{1}{4}$ pulg. **79.** sí **81.** $3\frac{1}{4}$ hr **83.** 9 partes

85. 7 tubos llenos, sobra; $\frac{2}{3}$ de un tubo **87.** 7 yd^2 **89.** 6 seg

95. 2,248 **97.** 20,217 **99.** 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

Repaso del Capítulo 3 (página 296)

1. numerador: 11, denominador: 16; fracción propia

2. $\frac{4}{7}, \frac{3}{7}$ **3.** La figura no está dividida en partes iguales.

4. $-\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}$ **5. a.** 1 **b.** 0 **c.** 18 **d.** indefinida

6. fracciones equivalentes: $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ **7.** $\frac{12}{18}$ **8.** $\frac{6}{16}$ **9.** $\frac{21}{45}$

10. $\frac{65}{60}$ **11.** $\frac{45}{9}$ **12. a.** no **b.** sí **13.** $\frac{1}{3}$ **14.** $\frac{5}{12}$

15. $\frac{11}{18}$ **16.** $\frac{9}{16}$ **17.** en la forma más sencilla **18.** equivalente

19. $\frac{7}{24}, \frac{17}{24}$ **20. a.** Se está expresando la fracción $\frac{5}{8}$ como una fracción equivalente con un denominador de 16. Para modificar la fracción, multiplique $\frac{5}{8}$ por 1 en la forma de $\frac{2}{2}$.

b. Se está simplificando la fracción $\frac{4}{6}$. Para simplificar la fracción, elimine los factores comunes de 2 del numerador y el denominador. Esto elimina un factor igual a 1: $\frac{2}{2} = 1$.

21. numeradores, denominadores, simplifique **22.** $\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3}$

23. $\frac{1}{6}$ **24.** $-\frac{14}{45}$ **25.** $\frac{5}{12}$ **26.** $-\frac{1}{25}$ **27.** $\frac{21}{5}$ **28.** $\frac{9}{4}$ **29.** 1

30. 1 **31.** $-\frac{9}{16}$ **32.** $-\frac{125}{8}$ **33.** $-\frac{8}{125}$ **34.** $\frac{4}{9}$ **35.** 2 mi

36. 30 lb **37.** 60 $pulg.^2$ **38.** 165 $pies^2$ **39. a.** 8 **b.** $-\frac{12}{11}$

c. $\frac{1}{5}$ **d.** $\frac{7}{8}$ **40.** multiplique, recíproco **41.** $\frac{25}{66}$ **42.** $-\frac{7}{8}$

43. $\frac{6}{5}$ **44.** $\frac{30}{7}$ **45.** $-\frac{3}{2}$ **46.** $\frac{8}{5}$ **47.** $-\frac{1}{180}$ **48.** 1

49. 12 broches **50.** 30 fundas de almohada **51.** $\frac{5}{7}$ **52.** $\frac{1}{2}$

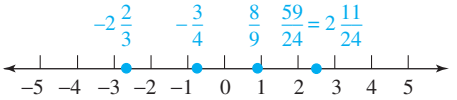
53. $\frac{5}{4}$ **54.** $-\frac{6}{5}$ **55. a.** $\frac{5}{8}$ **b.** $\frac{1}{5}$ **56.** 2, 3, 3, 5, 9 **57.** $\frac{5}{6}$

58. $-\frac{31}{40}$ **59.** $\frac{19}{48}$ **60.** $\frac{20}{7}$ **61.** $-\frac{23}{36}$ **62.** $\frac{7}{12}$ **63.** $-\frac{23}{6}$

64. $\frac{47}{60}$ **65.** $\frac{7}{32}$ pulg. **66.** $\frac{3}{4}$ **67.** la segunda hora: $\frac{3}{11} > \frac{2}{9}$

68. $\frac{1}{250}$ **69.** $4\frac{1}{4} = \frac{17}{4}$

70.



71. $3\frac{1}{5}$ **72.** $-3\frac{11}{12}$ **73.** 17 **74.** $2\frac{1}{3}$ **75.** $\frac{75}{8}$ **76.** $-\frac{11}{5}$

77. $\frac{53}{14}$ **78.** $\frac{199}{100}$ **79.** $2\frac{1}{10}$ **80.** $-\frac{21}{22}$ **81.** 40 **82.** $2\frac{1}{2}$ **83.** 16

84. $-40\frac{4}{5}$ **85.** $7\frac{9}{16}$ **86.** $6\frac{2}{9}$ **87.** $48\frac{1}{8}$ pulg. **88.** 87 $pulg.^2$

89. 40 pósters **90.** 9 cargas **91.** $3\frac{23}{40}$ **92.** $6\frac{1}{6}$ **93.** $1\frac{1}{12}$

94. $1\frac{5}{16}$ **95.** $255\frac{19}{20}$ **96.** $23\frac{32}{35}$ **97.** $83\frac{1}{18}$ **98.** $113\frac{7}{20}$

99. $31\frac{11}{24}$ **100.** $316\frac{3}{4}$ **101.** $20\frac{1}{2}$ **102.** $34\frac{3}{8}$ **103.** $39\frac{11}{12}$ gal

104. $\frac{5}{8}$ pulg. **105.** $\frac{8}{9}$ **106.** $\frac{19}{72}$ **107.** $8\frac{8}{15}$ **108.** $-3\frac{5}{8}$

109. $-\frac{12}{17}$ **110.** $\frac{26}{29}$ **111.** $-\frac{2}{5}$ **112.** $\frac{63}{17}$ **113.** $2\frac{23}{40}$

114. $14\frac{1}{16}$ **115.** $8\frac{1}{3}$ **116.** $11\frac{1}{6}$

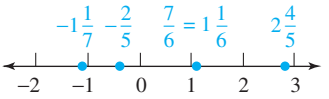
117. 5 tubos llenos, sobra, $\frac{9}{10}$ de un tubo **118.** 8 pulg.

Examen del Capítulo 3 (página 311)

1. a. numerador, denominador **b.** equivalentes **c.** más sencilla **d.** simplificar **e.** recíproco **f.** mixto **g.** complejas

2. a. $\frac{4}{5}$ **b.** $\frac{1}{5}$ **3.** $\frac{13}{6} = 2\frac{1}{6}$

4.



5. sí **6.** $\frac{21}{24}$ **7. a.** 0 **b.** indefinida **8. a.** $\frac{3}{4}$ **b.** $\frac{2}{5}$

9. $\frac{5}{8}$ **10.** $-\frac{3}{20}$ **11.** 6 **12.** $\frac{11}{20}$ **13.** $\frac{11}{7}$ **14.** $\frac{1}{3}$ **15.** $\frac{9}{10}$

16. 40 **17.** $\frac{47}{50}$ **18. a.** $9\frac{1}{6}$ **b.** $\frac{39}{21}$ **19.** $261\frac{1}{6}$ **20.** $37\frac{5}{12}$

21. $1\frac{2}{3}$ **22. a.** Foreman, $39\frac{1}{2}$ lb **b.** Foreman, $5\frac{1}{2}$ pulg.

c. Ali, $\frac{1}{4}$ pulg. **23.** $\frac{8}{9}$ **24.** $\$1\frac{1}{2}$millones **25.** $11\frac{3}{4}$ pulg.

26. perímetro: $53\frac{1}{3}$ pulg., área: $106\frac{2}{3}$ $pulg.^2$ **27.** 60 calorías

28. 12 porciones **29.** $\frac{13}{24}$ **30.** $\frac{3}{10}$ **31.** $\frac{20}{21}$ **32.** $-\frac{5}{3}$

33. Cuando se multiplica un número, como $\frac{3}{4}$, y su recíproco, $\frac{4}{3}$, el resultado es 1: $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1$ **34. a.** eliminar un factor común factor común del numerador y el denominador (simplificación de una fracción) **b.** fracciones

equivalentes **c.** multiplicación de una fracción por una forma de 1 (formar una fracción equivalente)

Repaso acumulativo de los Capítulos 1–3 (página 313)

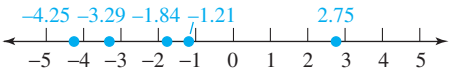
1. a. 5 **b.** 8 centenas de millares **c.** 5,896,600 **d.** 5,900,000 **2.** centenas de miles de millones **3.** Orange, San Diego, Kings, Miami-Dade, Dallas, Queens **4. a.** 450 pies **b.** 11,250 pies^2 **5.** 30,996 **6.** 16,544, 16,544 + 3,456 = 20,000 **7.** 2,400 boletos **8.** 299,320 **9.** 991, 991 · 35 = 34,685 **10.** $160 **11.** 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 **12.** $2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ **13.** 80 **14.** 21 **15.** 35 **16.** $156,000 **17.** {. . . , −5, −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, . . .} **18.** verdadero **19.** −15 **20.** 10 **21.** −200 pies **22.** −11 °F por hora **23.** 16 **24.** −35 **25.** 1 **26.** 2 **27.** $\frac{3}{4}$ **28.** $\frac{5}{2}$ **29.** $-\frac{4}{5}$ **30.** $\frac{4}{9}$ **31.** $1\frac{5}{12}$ **32.** $-\frac{1}{35}$ **33.** 30 seg **34.** $\frac{11}{16}$ pulg. **35.** $10\frac{5}{7}$ **36.** $-\frac{53}{8}$ **37.** $7\frac{2}{5}$ **38.** $6\frac{9}{10}$ **39.** $9\frac{11}{12}$ **40.** $5\frac{11}{15}$ **41.** ancho: 28 pulg., alto: 6 pulg. **42.** $274\frac{1}{4}$ gal **43.** $3\frac{5}{12}$ pies **44.** $-\frac{3}{64}$ **45.** $\frac{5}{6}$ **46.** $-\frac{2}{49}$

Espacio para el Estudio Sección 4.1 (página 325)

1. punto **3.** expandida **5.** Millares, Centenas, Decenas, Unidades, Décimas, Centésimas, Milésimas, Diezmilésimas **7. a.** 10 **b.** $\frac{1}{10}$ **9. a.** $\frac{7}{10}$, 0.7 **b.** $\frac{47}{100}$, 0.47 **11.** Parte del número entero, Parte fraccional **13.** ésimas **15.** 79,816.0245 **17. a.** 9 décimas **b.** 6 **c.** 4 **d.** 5 unidades **19. a.** 8 millonésimas **b.** 0 **c.** 5 **d.** 6 unidades **21.** $30 + 7 + \frac{8}{10} + \frac{9}{100}$ **23.** $100 + 20 + 4 + \frac{5}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{1{,}000}$ **25.** $7{,}000 + 400 + 90 + 8 + \frac{6}{10} + \frac{4}{100} + \frac{6}{1{,}000} + \frac{8}{10{,}000}$ **27.** $6 + \frac{4}{10} + \frac{9}{1{,}000} + \frac{4}{10{,}000} + \frac{1}{100{,}000}$ **29.** tres décimas, $\frac{3}{10}$ **31.** cincuenta y cuarenta y un centésimas, $50\frac{41}{100}$ **33.** diecinueve y quinientas veintinueve milésimas, $19\frac{529}{1{,}000}$ **35.** trescientos cuatro y tres diezmilésimas, $304\frac{3}{10{,}000}$ **37.** uno negativo y ciento treinta y siete cienmilésimas, $-\frac{137}{100{,}000}$ **39.** mil setenta y dos negativo y cuatrocientos noventa y nueve milésimas, $-1{,}072\frac{499}{1{,}000}$ **41.** 6.187 **43.** 10.0056 **45.** −16.39 **47.** 104.000004 **49.** > **51.** < **53.** > **55.** > **57.** < **59.** >

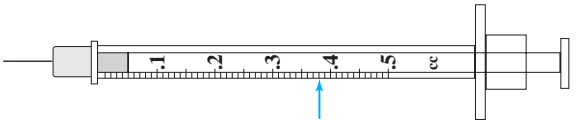
61.

63.



65. 506.2 **67.** 33.08 **69.** 4.234 **71.** 0.3656 **73.** −0.14 **75.** −2.7 **77.** 3.150 **79.** 1.414213 **81.** 16.100 **83.** 290.30350 **85.** $0.28 **87.** $27, 842 **89.** −0.7 **91.** $1,025.78

93.



95. dos milésimas, $\frac{2}{1{,}000} = \frac{1}{500}$ **97.** $0.16, $1.02, $1.20, $0.00, $0.10 **99.** hacer velas, manualidades, pasatiempos, muñecas folclóricas, obras de arte moderno **101.** Cilindro 2, Cilindro 4 **103.** bacteria, célula vegetal, célula animal, fibra de amianto **105. a.** $Q3, 2007; $2.75 **b.** Q4, 2006; −$2.05 **113. a.** $12\frac{1}{2}$ pulg. **b.** $9\frac{5}{8}$ pies^2

Espacio para el Estudio Sección 4.2 (página 339)

1. sumando, sumando, sumando, suma **3.** minuendo, sustraendo, diferencia **5.** estimar **7.** No es correcto: 15.2 + 12.5 ≠ 28.7 **9.** opuesto **11. a.** −1.2 **b.** 13.55 **c.** −7.4 **13.** 46.600, 11.000 **15.** 39.9 **17.** 8.59 **19.** 101.561 **21.** 202.991 **23.** 3.31 **25.** 2.75 **27.** 341.7 **29.** 703.5 **31.** 7.235 **33.** 43.863 **35.** −14.7 **37.** −18.8 **39.** −14.68 **41.** −6.15 **43.** −66.7 **45.** −45.3 **47.** 6.81 **49.** 17.82 **51.** −4.5 **53.** −3.4 **55.** 790 **57.** 610 **59.** −10.9 **61.** −16.6 **63.** 38.29 **65.** 55.00 **67.** 47.91 **69.** 658.04007 **71.** 0.19 **73.** 4.1 **75.** 288.46 **77.** 70.29 **79.** −14.3 **81.** −57.47 **83.** 8.03 **85.** 15.2 **87.** 4.977 **89.** 2.598 **91.** $815.80, $545.00, $531.49 **93.** 1.74, 2.32, 4.06; 2.90, 0, 2.90 **95.** 2.375 pulg. **97.** 42.39 seg **99.** $523.19, $498.19 **101.** 1.1°, 101.1°, 0°, 1.4°, 99.5° **103.** 20.01 mi **105. a.** $101.94 **b.** $55.80 **113. a.** $\frac{73}{60} = 1\frac{13}{60}$ **b.** $\frac{23}{60}$ **c.** $\frac{1}{3}$ **d.** $\frac{48}{25} = 1\frac{23}{25}$

Espacio para el Estudio Sección 4.3 (página 353)

1. factor, factor, producto parcial, producto parcial, producto **3. a.** 2.28 **b.** 14.499 **c.** 14.0 **d.** 0.00026 **5. a.** positivo **b.** negativo **7. a.** 10, 100, 1,000, 10,000, 100,000 **b.** 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001 **9.** 29.76 **11.** 49.84 **13.** 0.0081 **15.** 0.0522 **17.** 1,127.7 **19.** 2,338.4 **21.** 684 **23.** 410 **25.** 6.4759 **27.** 0.00115 **29.** 14,200,000 **31.** 98,200,000,000 **33.** 1,421,000,000,000 **35.** 657,100,000,000 **37.** −13.68 **39.** 5.28 **41.** 448,300 **43.** −678,231 **45.** 11.56 **47.** 0.0009 **49.** 3.16 **51.** 68.66 **53.** 119.70 **55.** 38.16 **57.** 14.6 **59.** 15.7 **61.** 250 **63.** 66.69 **65.** −0.1848 **67.** 1.69 **69.** 0.84 **71.** 0.00072 **73.** −200,000 **75.** 12.32 **77.** −17.48 **79.** 0.0049 **81.** 14.24 **83.** 8.6265 **85.** −57.2467 **87.** −22.39 **89.** −3.872 **91.** 24.48 **93.** −0.8649 **95.** 0.01, 0.04, 0.09, 0.16, 0.25, 0.36, 0.49, 0.64, 0.81 **97.** 1.9 pulg. **99.** $74,100 **101.** $95.20, $123.75 **103.** 0.000000136 pulg., 0.0000000136 pulg., 0.00000004 pulg. **105. a.** 2.1 mi **b.** 3.5 mi **c.** 5.6 mi **107.** $102.65 **109. a.** 19,600,000 acres **b.** 6,500,000,000 **c.** 3,026,000,000,000 miles **111. a.** 192 pies^2 **b.** 223.125 pies^2 **c.** 31.125 pies^2 **113. a.** $12.50, $12,500, $15.75, $1,575 **b.** $14,075 **115.** 136.4 lb **117.** 0.84 pulg. **125.** $2^2 \cdot 5 \cdot 11$ **127.** $2 \cdot 3^4$

Piense detenidamente (página 368)

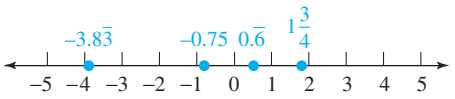
1. 2.86

Espacio para el Estudio Sección 4.4 (página 368)

1. divisor, cociente, dividendo **3. a.** 5.26 **b.** 0.008
5. a. $13\overline{)106.6}$ **b.** $371\overline{)1669.5}$ **7.** $\frac{10}{10}$ **9.** milésimas
11. a. izquierda **b.** derecha **13.** moviendo los puntos decimales en el divisor y el dividendo dos posiciones a la derecha **15.** 2.1 **17.** 9.2 **19.** 4.27 **21.** 8.65 **23.** 3.35
25. 4.56 **27.** 0.46 **29.** 0.39 **31.** 19.72 **33.** 24.41
35. $280 \div 70 = 28 \div 7 = 4$ **37.** $400 \div 8 = 50$
39. $4{,}000 \div 50 = 400 \div 5 = 80$ **41.** $15{,}000 \div 5 = 3{,}000$
43. 4.5178 **45.** 0.003009 **47.** 12.5 **49.** 545,200 **51.** -8.62
53. 4.04 **55.** 20,325.7 **57.** -0.00003 **59.** -5.162
61. 0.1 **63.** 3.5 **65.** 58.5 **67.** 2.66 **69.** 7.504 **71.** 0.0045
73. 0.321 **75.** -1.5 **77.** -122.02 **79.** -2.4 **81.** 9.75
83. 789,150 **85.** 0.6 **87.** 13.60 **89.** 0.0348 **91.** 1,027.19
93. 0.15625 **95.** 280 rebanadas **97.** 2,000,000 cálculos
99. 500 apretones **101.** 11 hr, 6 P.M. **103.** 1,453.4 millones de viajes **105.** 0.231 seg **113. a.** 5 **b.** 50

Espacio para el Estudio Sección 4.5 (página 382)

1. equivalentes **3.** terminales **5.** ÷ **7.** ceros **9.** repetitivo
11. a. 0.38 **b.** 0.212 **13. a.** $\frac{7}{10}$ **b.** $\frac{77}{100}$ **15.** 0.5
17. 0.875 **19.** 0.55 **21.** 2.6 **23.** 0.5625 **25.** -0.53125
27. 0.6 **29.** 0.225 **31.** 0.76 **33.** 0.002 **35.** 3.75
37. 12.6875 **39.** $0.\overline{1}$ **41.** $0.58\overline{3}$ **43.** $0.0\overline{7}$ **45.** $0.01\overline{6}$
47. $-0.\overline{45}$ **49.** $-0.\overline{60}$ **51.** 0.23 **53.** 0.49 **55.** 1.85
57. -1.08 **59.** 0.152 **61.** 0.370
63.

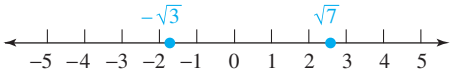


65.

67. < **69.** > **71.** = **73.** < **75.** $6.25, \frac{19}{3}, 6\frac{1}{2}$
77. $-\frac{8}{9}, -\frac{6}{7}, -0.\overline{81}$ **79.** $\frac{37}{90}$ **81.** $\frac{19}{60}$ **83.** $\frac{3}{22}$ **85.** 1
87. 0.57 **89.** 5.27 **91.** 0.35 **93.** -0.48 **95.** -2.55
97. 0.068 **99.** 7.305 **101.** 0.075 **103.** 0.0625, 0.375, 0.5625, 0.9375 **105.** $\frac{3}{40}$ pulg. **107.** 23.4 seg, 23.8 seg, 24.2 seg, 32.6 seg **109.** 93.6 pulg.^{2} **111.** $7.02 **119. a.** {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} **b.** {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29} **c.** {. . ., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, . . .}

Espacio para el Estudio Sección 4.6 (página 391)

1. cuadrado **3.** radical **5.** perfectos **7. a.** 25, 25 **b.** $\frac{1}{16}, \frac{1}{16}$
9. a. 7 **b.** 2 **11. a.** 1 **b.** 0 **13.** Paso 2: Evalúe todas las expresiones exponenciales y cualquier raíz cuadrada.
15.

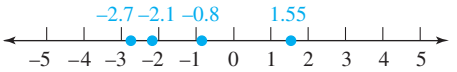


17. a. raíz cuadrada **b.** negativa **19.** −7, 8 **21.** 5 y −5
23. 4 y −4 **25.** 4 **27.** 3 **29.** −12 **31.** −7 **33.** 31
35. 63 **37.** $\frac{2}{5}$ **39.** $-\frac{4}{3}$ **41.** $-\frac{1}{9}$ **43.** 0.8 **45.** −0.9
47. 0.3 **49.** 7 **51.** 16 **53.** −16 **55.** −3 **57.** 20
59. −140 **61.** −48 **63.** 43 **65.** 75 **67.** −7 **69.** −1
71. −10 **73.** $-\frac{7}{20}$ **75.** −140 **77.** 9.56 **79.** −1.4
81. 15 **83.** 7 **85.** 1, 1.414, 1.732, 2, 2.236, 2.449, 2.646, 2.828, 3, 3.162 **87.** 3.87 **89.** 8.12 **91.** 4.904 **93.** −3.332
95. a. 5 pies **b.** 10 pies **97.** 127.3 pies **99.** 42 pantalla de 42 pulgadas **109.** 82.35 **111.** 39.304

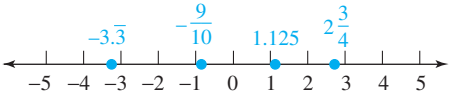
Repaso del Capítulo 4 (página 395)

1. a. 0.67, $\frac{67}{100}$ **b.**

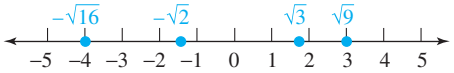
2. a. 7 centésimas **b.** 3 **c.** 8 **d.** 5 diezmilésimas
3. $10 + 6 + \frac{4}{10} + \frac{5}{100} + \frac{2}{1{,}000} + \frac{3}{10{,}000}$ **4.** dos y tres décimas, $2\frac{3}{10}$ **5.** seiscientos quince negativo y cincuenta y nueve centésimas , $-615\frac{59}{100}$ **6.** seiscientos y un diezmilésimas, $\frac{601}{10{,}000}$ **7.** una cienmilésima, $\frac{1}{100{,}000}$
8. 100.61 **9.** 11.997 **10.** 301.000016 **11.** < **12.** <
13. > **14.** >
15.



16. a. verdadero **b.** falso **c.** verdadero **d.** falso **17.** 4.58
18. 3,706.082 **19.** −0.1 **20.** −88.1 **21.** 6.7030
22. 11.3150 **23.** 0.222228 **24.** 0.63527 **25.** $0.67
26. $13 **27.** Washington, Diaz, Chou, Singh, Gerbac
28. Dom: 1.8, Lun: 0.6, Mar: 2.4, Mié: 3.8 **29.** 66.7
30. 45.188 **31.** 15.17 **32.** 28.428 **33.** 1,932.645
34. 24.30 **35.** −7.7 **36.** 3.1 **37.** −4.8 **38.** −29.09
39. −25.6 **40.** 4.939 **41. a.** 760 **b.** 280 **42.** 10.75 mm
43. $48.21 **44.** 8.15 in. **45.** 15.87 **46.** 197.945
47. 0.0068 **48.** 2,310 **49.** −151.9 **50.** 0.00006
51. 90,145.2 **52.** 0.002897 **53.** 0.04 **54.** 0.0225
55. −10.61 **56.** 25.82 **57.** 0.0001089 **58.** 115.741
59. a. 9,600,000 km^2 **b.** 2,310,000,000 **60. a.** 1,600 **b.** 91.76 **61.** 98.07 **62.** $19.43 **63.** 0.07 pulg.
64. 68.62 pulg.^{2} **65.** 9.3 **66.** 10.45 **67.** 1.29 **68.** 41.03
69. −6.25 **70.** 0.053 **71.** 63 **72.** 0.81 **73.** 0.08976
74. −0.00112 **75.** 876.5 **76.** 770,210 **77.** $4{,}800 \div 40 = 480 \div 4 = 120$ **78.** $27{,}000 \div 9 = 3{,}000$ **79.** 12.9
80. −776.86 **81.** 13.95 **82.** 20.5 **83.** $8.34 **84.** 0.51 ppb
85. 14 porciones **86.** 9.5 revoluciones **87.** 0.875
88. −0.4 **89.** 0.5625 **90.** 0.06 **91.** $0.\overline{54}$ **92.** $-1.\overline{3}$
93. 3.056 **94.** $0.5\overline{7}$ **95.** 0.58
96. 1.03 **97.** > **98.** = **99.** $0.3, \frac{10}{33}, 0.\overline{3}$
100.



101. $\frac{11}{15}$ **102.** $\frac{307}{300} = 1\frac{7}{300}$ **103.** -6.24 **104.** 0.175
105. 93 **106.** 7.305 **107.** 34.88 pulg.^{2} **108.** \$22.25
109. 5 y -5 **110.** 7, 7 **111.** 7 **112.** -4 **113.** 10
114. 0.3 **115.** $\frac{8}{13}$ **116.** 0.9 **117.** $-\frac{1}{6}$ **118.** 0
119.

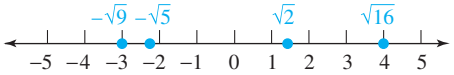


120. **a.** 4.36 **b.** 24.45 **c.** 3.57 **121.** -30 **122.** 70
123. -27 **124.** $18\frac{1}{3}$ **125.** 70 **126.** -440 **127.** 8
128. 33 pulg. **129.** 9 y 10 **130.** Dado que $(2.646)^2 = 7.001316$, no se puede utilizar un símbolo $=$.

Examen del Capítulo 4 (página 408)

1. **a.** sumando, sumando, suma **b.** minuendo, sustraendo, diferencia **c.** factor, factor, producto **d.** divisor, cociente, dividendo **e.** repetitivos **f.** radical
2. $\frac{79}{100}$, 0.79 **3.** **a.** 1 milésima **b.** 4 **c.** 6 **d.** 2 decenas
4. Selway, Monroe, Paston, Covington, Cadia **5.** 4,519.0027
6. **a.** $60 + 2 + \frac{5}{10} + \frac{5}{100}$, sesenta y dos y cincuenta y cinco centésimas, $62\frac{55}{100}$ **b.** $\frac{8}{100} + \frac{1}{10{,}000} + \frac{3}{100{,}000}$, ocho mil trece cienmilésimas, $\frac{8{,}013}{100{,}000}$ **7.** **a.** 461.7
b. 2,733.050 **c.** -1.983373 **8.** \$0.65 **9.** 10.756
10. 6.121 **11.** 0.1024 **12.** 0.57 **13.** 14.07 **14.** 0.0348
15. $1.1\overline{8}$ **16.** -0.8 **17.** -2.29 **18.** **a.** 210
b. $4{,}000 \div 20 = 400 \div 2 = 200$ **19.** **a.** 0.567909 **b.** 0.458
20. 61,400,000,000 **21.** 1.026 pulg. **22.** 1.25 mi^2
23. 0.004 pulg **24.** Sábado, \$23.75 **25.** 0.42 g
26. 20.825 lb **27.** 10.676 **28.** **a.** 0.34 **b.** $0.41\overline{6}$
29. 3.588 **30.** 56.86 **31.** -12 **32.** $\frac{41}{30}$
33. **a.**

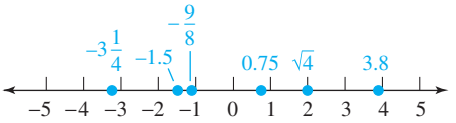
b.



34. \$5.65 **35.** 37 **36.** **a.** -1.08 **b.** 2.5625 **37.** 12, 12
38. **a.** $>$ **b.** $<$ **c.** $=$ **d.** $<$ **39.** 11 **40.** $-\frac{1}{30}$
41. **a.** -0.2 **b.** 1.3 **c.** 15 **d.** -11

Repaso acumulativo de los Capítulos 1–4 (página 410)

1. **a.** ciento cincuenta y cuatro mil, trescientos dos
b. $100{,}000 + 50{,}000 + 4{,}000 + 300 + 2$
2. $(3 + 4) + 5 = 3 + (4 + 5)$ **3.** 16,693 **4.** 102
5. 75,625 ft^2 **6.** 27 R 42 **7.** \$715,600 **8.** 1, 2, 4, 5, 10, 20
9. $2^2 \cdot 5 \cdot 11$ **10.** 600, 20 **11.** 4 **12.** $>$ **13.** -13
14. suma **15.** Incremento de 83 °F **16.** -270 **17.** -1
18. $-2{,}100$ pies **19.** $3(-5) = -15$ **20.** 60
21. $8, -3, 36, -6, 6$ **22.** 35 **23.** $-5{,}000$ **24.** $\frac{6}{13}$
25. fracciones equivalentes **26.** $\frac{5}{7}$ **27.** $\frac{21}{128}$ **28.** $-\frac{3}{16}$
29. $\frac{17}{18}$ **30.** $19\frac{1}{8}$ **31.** $26\frac{7}{24}$ **32.** $-\frac{1}{3}$ **33.** $\frac{7}{64}$ **34.** $11\frac{1}{8}$ pulg.
35. $\frac{3}{4}$ **36.** 0.001 pulg. **37.** $<$
38.



39. 130.198 **40.** 1.01 **41.** -8.136 **42.** 0.056012
43. 5.6 **44.** 0.0000897 **45.** 33.6 hr **46.** 157.5 pulg.^{2}
47. 232.8 **48.** $0.41\overline{6}$ **49.** -2.325 **50.** 8, 8 **51.** 7
52. $\frac{15}{4}$ **53.** -6 **54.** 39

Espacio para el Estudio 5.1 (página 423)

1. razón **3.** unitaria **5.** 3 **7.** 10 **9.** $\frac{11 \text{ minutos}}{60 \text{ minutos}} = \frac{11}{60}$
11. $\frac{13}{9}$, 13 to 9, 13 : 9 **13.** $\frac{5}{8}$ **15.** $\frac{11}{16}$ **17.** $\frac{5}{3}$ **19.** $\frac{7}{4}$ **21.** $\frac{2}{3}$
23. $\frac{1}{2}$ **25.** $\frac{1}{3}$ **27.** $\frac{3}{4}$ **29.** $\frac{1}{3}$ **31.** $\frac{13}{3}$ **33.** $\frac{19}{39}$ **35.** $\frac{2}{7}$
37. $\frac{1}{2}$ **39.** $\frac{6}{1}$ **41.** $\frac{1}{5}$ **43.** $\frac{3}{7}$ **45.** $\frac{3}{4}$ **47.** $\frac{7}{12}$ **49.** $\frac{32 \text{ pies}}{3 \text{ seg}}$
51. $\frac{15 \text{ días}}{4 \text{ gal}}$ **53.** $\frac{21 \text{ logrados}}{35 \text{ intentos}}$ **55.** $\frac{3 \text{ pulsaciones}}{2 \text{ mediciones}}$
57. 12 revoluciones por min **59.** \$5,000 por año
61. 1.5 errores por hr **63.** 320.6 personas por mi cuadrada
65. \$4 por min **67.** \$68 por persona **69.** 1.2 centavos por onza **71.** \$0.07 por pies **73.** **a.** $\frac{2}{3}$ **b.** $\frac{3}{2}$ **75.** $\frac{1}{55}$ **77.** $\frac{3}{1}$
79. **a.** \$1,800 **b.** $\frac{4}{9}$ **c.** $\frac{1}{3}$ **d.** $\frac{1}{18}$ **81.** $\frac{1}{1}$ **83.** $\frac{1}{20}$
85. $\frac{5 \text{ compresiones}}{2 \text{ respiraciones}}$ **87.** $\frac{329 \text{ quejas}}{100{,}000 \text{ pasajeros}}$ **89.** **a.** 108,000
b. 24 navegantes por comprador **91.** 7¢ por oz **93.** 1.25¢ por min **95.** \$4.45 por lb **97.** 440 gal por min
99. **a.** 325 mi **b.** 65 mph **101.** la lata de 6 onzas
103. la caja con 50 tabletas boxes **105.** el camión **107.** el segundo automóvil **113.** 43,000 **115.** 8,000

Espacio para el Estudio 5.2 (página 438)

1. proporción **3.** cruzados **5.** variable **7.** despejada
9. verdadera, falsa **11.** 9, 90, 45, 90 **13.** los niños, maestros asistentes **15.** $3 \cdot x, 18, 3, 3, 6, 6$ **17.** $\frac{20}{30} = \frac{2}{3}$
19. $\frac{400 \text{ cobijas}}{100 \text{ camas}} = \frac{4 \text{ cobijas}}{1 \text{ camas}}$ **21.** falsa **23.** verdadera
25. verdadera **27.** falsa **29.** falsa **31.** verdadera
33. verdadera **35.** falsa **37.** sí **39.** no **41.** 6
43. 4 **45.** 0.3 **47.** 2.2 **49.** $3\frac{1}{2}$ **51.** $\frac{7}{8}$ **53.** 3,500 **55.** $\frac{1}{2}$
57. 36 **59.** 1 **61.** 2 **63.** $8\frac{1}{5}$ **65.** 180 **67.** 18 **69.** 3.1

71. $\frac{1}{6}$ **73.** $218.75 **75.** $77.32 **77.** sí **79.** 24
81. 975 **83.** 80 pies **85.** 65.25 pies = 65 pies 3 pulg.
87. 2.625 pulg. = $2\frac{5}{8}$ pulg. **89.** $4\frac{2}{7}$, lo cual es alrededor de $4\frac{1}{4}$ **91.** 19 seg **93.** 31.25 pulg. = $31\frac{1}{4}$ pulg. **95.** $309
101. 49.188 **103.** 31.428 **105.** 4.1 **107.** −49.09

Espacio para el Estudio Sección 5.3 (página 452)

1. longitud **3.** unidades **5.** capacidad **7. a.** 1 **b.** 3 **c.** 36 **d.** 5,280 **9. a.** 8 **b.** 2 **c.** 1 **d.** 1 **11.** 1 **13. a.** oz lq **b.** lb **15. a.** $\frac{1 \text{ ton}}{2{,}000 \text{ lb}}$ **b.** $\frac{2 \text{ pt}}{1 \text{ qt}}$ **17. a.** iv **b.** i **c.** ii **d.** iii **19. a.** iii **b.** iv **c.** i **d.** ii **21. a.** pound **b.** onza **c.** oz lq **23.** 36, pulg., 72 **25.** 2,000, 16, oz, 32,000 **27. a.** 8 **b.** $\frac{5}{8}$ pulg., $1\frac{1}{4}$ pulg., $2\frac{7}{8}$ pulg. **29. a.** 16 **b.** $\frac{9}{16}$ pulg., $1\frac{3}{4}$ pulg., $2\frac{3}{16}$ pulg. **31.** $2\frac{9}{16}$pulg. **33.** $10\frac{7}{8}$ pulg. **35.** 12 pies **37.** 105 pies **39.** 42 pulg. **41.** 63 pulg.
43. $\frac{21}{352}$ mi ≈ 0.06 mi **45.** $\frac{7}{8}$ mi = 0.875 mi
47. $2\frac{3}{4}$ lb = 2.75 lb **49.** $4\frac{1}{2}$ lb = 4.5 lb **51.** 800 oz
53. 1,392 oz **55.** 128 oz lq **57.** 336 oz lq
59. $2\frac{3}{4}$ hr **61.** $5\frac{1}{2}$ hr **63.** 6 pt **65.** 5 días **67.** $4\frac{2}{3}$ pies
69. 48 pulg. **71.** 2 gal **73.** 5 lb **75.** 4 hr **77.** 288 pulg.
79. $2\frac{1}{2}$ yd = 2.5 yd **81.** 15 pies **83.** 24,800 lb **85.** $2\frac{1}{3}$ yd
87. 3 mi **89.** 2,640 pies **91.** $3\frac{1}{2}$ tons = 3.5 tons **93.** 2 pt
95. 150 yd **97.** 2,880 in. **99.** 0.28 mi **101.** 61,600 yd
103. 128 oz **105.** $4\frac{19}{20}$ tons = 4.95 tons **107.** 68 latas de un cuarto de galón **109.** $71\frac{7}{8}$ gal = 71.875 gal **111.** 320 oz
113. $6\frac{1}{8}$ días = 6.125 días **117. a.** 3,700 **b.** 3,670 **c.** 3,673.26 **d.** 3,673.3

Espacio para el Estudio Sección 5.4 (página 466)

1. métrico **3. a.** decenas **b.** centenas **c.** millares **5.** unidades, tabla **7.** peso **9. a.** 1,000 **b.** 100 **c.** 1,000 **11. a.** 1,000 **b.** 10 **13. a.** $\frac{1 \text{ km}}{1{,}000 \text{ m}}$ **b.** $\frac{100 \text{ cg}}{1 \text{ g}}$ **c.** $\frac{1{,}000 \text{ mililitros}}{1 \text{ litro}}$ **15. a.** iii **b.** i **c.** ii **17. a.** ii **b.** iii **c.** i **19.** 1, 100, 0.2 **21.** 1,000, 1, mg, 200,000 **23.** 1 cm, 3 cm, 5 cm **25. a.** 10, 1 milímetros **b.** 27 mm, 41 mm, 55 mm **27.** 156 mm **29.** 280 mm **31.** 3.8 m **33.** 1.2 m **35.** 8,700 mm **37.** 2,890 mm **39.** 0.000045 km **41.** 0.000003 km **43.** 1,930 g **45.** 4,531 g **47.** 6 g **49.** 3.5 g **51.** 3,000 mL **53.** 26,300 mL **55.** 3.1 cm **57.** 0.5 L **59.** 2,000 g **61.** 0.74 mm **63.** 1,000,000 g **65.** 0.65823 kL **67.** 0.472 dm **69.** 10 **71.** 0.5 g **73.** 5.689 kg **75.** 4.532 m **77.** 0.0325 L **79.** 675,000 **81.** 0.0000077 **83.** 1.34 hm **85.** 6,578 dam **87.** 0.5 km, 1 km, 1.5 km, 5 km, 10 km **89.** 3.43 hm **91.** 12 cm, 8 cm **93.** 0.00005 L **95.** 3 g **97.** 3,000 mL **99.** 4 **101.** 3 mL **107.** $0.\overline{8}$ **109.** $0.0\overline{7}$

Piense detenidamente (página 473)

1. 216 mm × 279 mm **2.** 9 kilogramos **3.** 22.2 mililitros

Espacio para el Estudio Sección 5.5 (página 476)

1. Fahrenheit, Celsius **3. a.** metro **b.** metro **c.** pulgada **d.** milla **5. a.** litro **b.** litro **c.** galón **7. a.** $\frac{0.03 \text{ m}}{1 \text{ pie}}$ **b.** $\frac{0.45 \text{ kg}}{1 \text{ lb}}$ **c.** $\frac{3.79 \text{ L}}{1 \text{ gal}}$ **9.** 0.30 m, m **11.** 0.035, 1,000, oz
13. 10 pulg. **15.** 34 pulg. **17.** 2,520 m **19.** 7,534.5 m
21. 9,072 g **23.** 34,020 g **25.** 14.3 lb **27.** 660 lb
29. 0.7 qt **31.** 1.3 qt **33.** 48.9 °C **35.** 1.7 °C **37.** 167 °F
39. 50 °F **41.** 11,340 g **43.** 122 °F **45.** 712.5 mL
47. 17.6 oz **49.** 147.6 pulg. **51.** 0.1 L **53.** 39,283 pies
55. 1.0 kg **57.** 14 °F **59.** 0.6 oz **61.** 243.4 oz lq
63. 91.4 cm **65.** 0.5 qt **67.** 10 °C **69.** 127 m **71.** −20.6 °C
73. 5 mi **75.** alrededor de 70 mph **77.** 1.9 km **79.** 1.9 cm
81. 411 lb, 770 lb **83. a.** 226.8 g **b.** 0.24 L **85.** no
87. alrededor de 62 °C **89.** 28 °C **91.** −5°C y 0 °C
93. los tres cuartos de galón **99.** $\frac{29}{15}$ **101.** $\frac{4}{5}$ **103.** 8.05
105. 15.6

Chapter 5 Review (página 479)

1. $\frac{7}{25}$ **2.** $\frac{15}{16}$ **3.** $\frac{2}{3}$ **4.** $\frac{3}{2}$ **5.** $\frac{1}{3}$ **6.** $\frac{7}{8}$ **7.** $\frac{4}{5}$ **8.** $\frac{3}{1}$
9. $\frac{7}{8}$ **10.** $\frac{5}{4}$ **11.** $\frac{1}{12}$ **12.** $\frac{1}{4}$ **13.** $\frac{16 \text{ cm}}{3 \text{ yr}}$ **14.** $\frac{\$3}{5 \text{ min}}$
15. 30 boletos por min **16.** 15 pulgadas por giro
17. 32.5 pies por carrete **18.** 3.2 calorías por pieza
19. $2.29 por par **20.** $0.25 mil millones por mes
21. $\frac{37}{32}$ **22.** $7.75 **23.** 1,125 personas por min **24.** la lata de 8 oz **25. a.** $\frac{20}{30} = \frac{2}{3}$ **b.** $\frac{6 \text{ autobuses}}{100 \text{ automóviles}} = \frac{36 \text{ autobuses}}{600 \text{ automóviles}}$
26. 2, 54, 6, 54 **27.** falsa **28.** verdadera **29.** verdadera
30. verdadera **31.** falsa **32.** falsa **33.** sí **34.** no
35. 4.5 **36.** 16 **37.** 7.2 **38.** 0.12 **39.** $1\frac{1}{2}$ **40.** $3\frac{1}{2}$
41. $\frac{1}{3}$ **42.** 1,000 **43.** 192.5 mi **44.** 300 **45.** 12 pies
46. 30 pulg. **47. a.** 16 **b.** $\frac{7}{16}$ pulg., $1\frac{1}{2}$ pulg., $1\frac{3}{4}$ pulg., $2\frac{5}{8}$ pulg. **48.** $1\frac{1}{2}$ pulg. **49.** $\frac{1 \text{ mi}}{5{,}280 \text{ pies}} = 1, \frac{5{,}280 \text{ pies}}{1 \text{ mi}} = 1$,
50. a. min **b.** seg **51.** 15 pies **52.** 216 pulg.
53. $5\frac{1}{2}$ pies = 5.5 pies **54.** $1\frac{3}{4}$ mi = 1.75 mi **55.** 54 pulg.
56. 1,760 yd **57.** 2 lb **58.** 275.2 oz **59.** 96,000 oz
60. $2\frac{1}{4}$ tons = 2.25 tons **61.** 80 oz lq **62.** $\frac{1}{2}$ gal = 0.5 gal
63. 68 c **64.** 5.5 qt **65.** 40 pt **66.** 56 c **67.** 1,200 seg
68. 15 min **69.** $8\frac{1}{3}$ días **70.** 360 min **71.** 108 hr
72. 86,400 seg **73.** $\frac{21}{176}$ mi ≈ 0.12 mi **74.** $20\frac{1}{4}$ tons = 20.25 tons

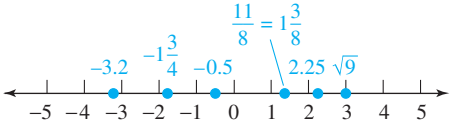
75. $484\frac{2}{3}$ yd **76.** 100 **77. a.** 10, 1 milímetro
b. 19 mm, 3 cm, 45 mm, 62 mm **78.** 4 cm
79. a. $\frac{1\text{ km}}{1{,}000\text{ m}} = 1, \frac{1{,}000\text{ m}}{1\text{ km}} = 1$ **b.** $\frac{1\text{ g}}{100\text{ cg}} = 1, \frac{100\text{ cg}}{1\text{ g}} = 1$
80. 5 posiciones a la izquierda **81.** 4.75 m **82.** 8,000 mm
83. 165,700 m **84.** 678.9 dm **85.** 0.05 kg **86.** 8 g
87. 5.425 kg **88.** 5,425,000 mg **89.** 1.5 L **90.** 3.25 kL
91. 40 cL **92.** 1,000 dL **93.** 1.35 kg **94.** 0.24 L **95.** 50
96. 1,000 mL **97.** 164 pies **98.** Torre Sears **99.** 3,107 km
100. 198 cm **101.** 850.5 g **102.** 33 lb **103.** 22,680 g
104. alrededor de 909 kg **105.** alrededor de 2.0 lb
106. LaCroix **107.** alrededor de 159.2 L **108.** 221°F
109. 25°C **110.** 30°C

Examen del Capítulo 5 (página 494)

1. a. razón **b.** tasa **c.** proporción **d.** cruzados **e.** décimas, centésimas, milésimas **f.** métrico **g.** Fahrenheit, Celsius **2.** $\frac{9}{13}$, 9:13, 9 a 13 **3.** $\frac{3}{4}$ **4.** $\frac{1}{6}$ **5.** $\frac{2}{5}$ **6.** $\frac{6}{7}$
7. $\frac{3\text{ pies}}{2\text{ segundos}}$ **8.** la lata de 2 libras **9.** 22.5 kwh por día
10. $\frac{15\text{ anuncios}}{50\text{ millas}} = \frac{15\text{ anuncios}}{50\text{ millas}}$ **11. a.** no **b.** sí
12. sí **13.** 15 **14.** 63.24 **15.** $2\frac{1}{2}$ **16.** 0.2 **17.** \$3.43
18. 2 c **19. a.** 16 **b.** $\frac{5}{16}$ pulg., $1\frac{3}{8}$ pulg., $2\frac{3}{4}$ pulg.
20. introducir, eliminar **21.** 15 pies **22.** $8\frac{1}{3}$ yd **23.** 172 oz
24. 3,200 lb **25.** 128 oz lq **26.** 115,200 min **27. a.** el de la izquierda **b.** la más larga **c.** el lado derecho
28. 12 mm, 5 cm, 65 mm **29.** 0.5 km **30.** 500 cm
31. 0.08 kg **32.** 70,000 mL **33.** 7.5 g **34.** la carrera de 100 yd **35.** Jim **36.** 0.9 qt **37.** 42 cm **38.** 182 °F
39. Una escala es una razón (o tasa) que compara el tamaño de un dibujo y el tamaño de un objeto real. Por ejemplo, 1 pulgada a 6 pies (1 pulg.:6 pies). **40.** Es más sencillo convertir de una unidad a otra en el sistema métrico debido a que está basado en el número 10.

Repaso acumulativo de los Capítulos 1–5 (página 496)

1. a. cinco millones, setecientos sesenta y cuatro mil, quinientos dos
b. 5,000,000 + 700,000 + 60,000 + 4,000 + 500 + 2
2. a. 186 a 184 **b.** Detroit **c.** 370 puntos **3.** 69,658
4. 367,416 **5.** 20 R3 **6.** \$560 **7.** 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30
8. $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ **9.** 140, 4 **10.** 81 **11.** < **12.** −4
13. 15 tiros **14.** −9, 9 **15. a.** −8 **b.** indefinida **c.** −8 **d.** 0 **e.** 8 **f.** 0 **16.** 30 **17.** −5,000 **18.** $-\frac{4}{5}$ **19.** $\frac{54}{60}$
20. 59,100,000 mi cd **21.** $A = \frac{1}{2}bh$ **22.** −1 **23.** $\frac{9}{20}$
24. $\frac{19}{15}$ **25.** $\frac{31}{32}$ in. **26.** $6\frac{9}{10}$ **27.** $\frac{3}{4}$ hp **28.** $-\frac{26}{15} = -1\frac{11}{15}$
29. > **30.**



31. −17.64 **32.** −23.38 **33.** 250 **34.** 458.15 lb
35. 0.025 **36.** 12.7 **37.** $0.08\overline{3}$ **38.** \$9.95 **39.** 23
40. $\frac{1}{5}$ **41.** el saco de 94 libras **42.** falsa **43.** 202 mg
44. 15 **45. a.** 960 hr **b.** 4,320 min **c.** 480 seg
46. 2.5 lb **47.** 2,400 mm **48.** 0.32 kg **49. a.** 1 gal
b. una varilla para medir de 1 metro **50.** 36 pulg.

Espacio para el Estudio Sección 6.1 (página 509)

1. Porcentaje **3.** 100, simplifique **5.** derecha **7.** Porcentaje
9. 84%, 16% **11.** 107% **13.** 99% **15. a.** 15% **b.** 85%
17. $\frac{17}{100}$ **19.** $\frac{91}{100}$ **21.** $\frac{1}{25}$ **23.** $\frac{3}{5}$ **25.** $\frac{19}{1{,}000}$ **27.** $\frac{547}{1{,}000}$
29. $\frac{1}{8}$ **31.** $\frac{17}{250}$ **33.** $\frac{1}{75}$ **35.** $\frac{17}{120}$ **37.** $\frac{13}{10}$ **39.** $\frac{11}{5}$
41. $\frac{7}{2{,}000}$ **43.** $\frac{1}{400}$ **45.** 0.16 **47.** 0.81 **49.** 0.3412
51. 0.50033 **53.** 0.0699 **55.** 0.013 **57.** 0.0725 **59.** 0.185
61. 4.6 **63.** 3.16 **65.** 0.005 **67.** 0.0003 **69.** 36.2%
71. 98% **73.** 171% **75.** 400% **77.** 40% **79.** 16%
81. 62.5% **83.** 43.75% **85.** 225% **87.** 105%
89. $16\frac{2}{3}\% \approx 16.7\%$ **91.** $166\frac{2}{3}\% \approx 166.7\%$
93. $\frac{157}{5{,}000}$, 3.14% **95.** $\frac{51}{125}$, 0.408 **97.** $\frac{21}{400}$, 0.0525
99. $2.33, 233\frac{1}{3}\% \approx 233.3\%$ **101.** 91% **103. a.** 12%
b. 24% **c.** 4% (Alaska, Hawái) **105. a.** 0.0775 **b.** 0.05
c. 0.1425 **107.** torso: 27.5% **109. a.** $\frac{5}{64}$ **b.** 0.078125
c. 7.8125% **111.** $33\frac{1}{3}\%, \frac{1}{3}, 0.\overline{3}$ **113. a.** $\frac{13}{15}$
b. $86\frac{2}{3}\% \approx 86.7\%$ **115. a.** $\frac{1}{4}\%$ **b.** $\frac{1}{400}$ **c.** 0.0025
117. 0.27% **123. a.** 34 cm **b.** 68.25 cm^2

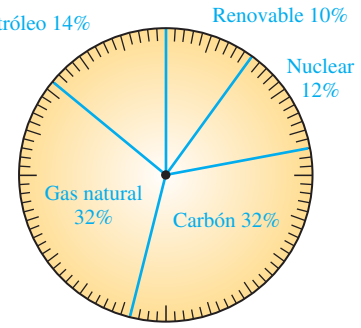
Piense detenidamente (página 529)

36% se matricularon en el colegio a tiempo completo, 43% de los estudiantes trabajan menos de 20 horas por semana, 10% nunca

Espacio para el Estudio Sección 6.2 (página 529)

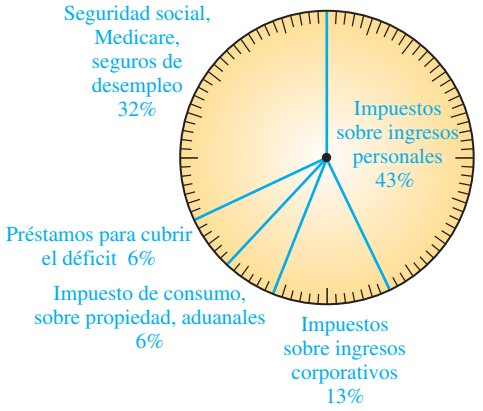
1. enunciado, ecuación **3.** resuelto **5.** parte, todo
7. cruzados **9.** Cantidad, base, porcentaje, todo
11. 100% **13. a.** 0.12 **b.** 0.056 **c.** 1.25 **d.** 0.0025
15. a. $x = 7\% \cdot 16, \frac{x}{16} = \frac{7}{100}$ **b.** $125 = x \cdot 800, \frac{125}{800} = \frac{x}{100}$
c. $1 = 94\% \cdot x, \frac{1}{x} = \frac{94}{100}$ **17. a.** $5.4\% \cdot 99 = x, \frac{x}{99} = \frac{5.4}{100}$
b. $75.1\% \cdot x = 15, \frac{15}{x} = \frac{75.1}{100}$ **c.** $x \cdot 33.8 = 3.8, \frac{3.8}{33.8} = \frac{x}{100}$
19. 68 **21.** 132 **23.** 17.696 **25.** 24.36 **27.** 25%
29. 85% **31.** 62.5% **33.** 43.75% **35.** 110% **37.** 350%
39. 30 **41.** 150 **43.** 57.6 **45.** 72.6 **47.** 1.25% **49.** 65
51. 99 **53.** 90 **55.** 80% **57.** 0.096 **59.** 44 **61.** 2,500%
63. 107.1 **65.** 60 **67.** 31.25% **69.** 43.5
71. 12K bytes = 12,000 bytes **73. a.** \$20.75 **b.** \$4.15
75. 2.7 pulg. **77.** sí **79.** 5% **81.** 120 **83.** 13,500 km
85. \$1,026 mil millones **87.** 24 oz **89.** 30, 12 **91.** 40,000%

93.



95. 32%, 43%, 13%, 6%, 6%;

Fuentes del ingreso gubernamental del 2007



103. 18.17 **105.** 5.001 **107.** 0.008

Piense detenidamente (página 543)

1. 1970–1975, un incremento de alrededor del 75%
2. 2000–2005, una disminución de alrededor del 15%

Espacio para el Estudio Sección 6.3 (página 546)

1. comisión **3. a.** incremento **b.** original **5.** precio de compra **7.** ventas **9. a.** \$64.07 **b.** \$135.00 **11.** reste, original **13.** \$3.71 **15.** \$4.20 **17.** \$70.83 **19.** \$64.03 **21.** 5.2% **23.** 15.3% **25.** \$11.40 **27.** \$168 **29.** 2% **31.** 4% **33.** 10% **35.** 15% **37.** 20% **39.** 10% **41.** \$29.70, \$60.30 **43.** \$8.70, \$49.30 **45.** 19% **47.** 14% **49.** \$53.55 **51.** \$47.34, \$2.84, \$50.18 **53.** 8% **55.** 0.25% **57.** \$150 **59.** 8%, 3.75%, 1.2%, 6.2% **61.** 5% **63.** 31% **65.** 152% **67.** 36% **69.** 12.5% **71. a.** 25% **b.** 36% **73.** \$2,955 **75.** 1.5% **77.** 90% **79.** \$12,000 **81. a.** \$7.99 **b.** \$31.96 **83.** 6% **85.** \$349.97, 13% **87.** 23%, \$11.88 **89.** \$76.50 **91.** \$187.49 **97.** -50 **99.** 3 **101.** 13

Espacio para el Estudio Sección 6.4 (página 557)

1. estimación **3.** dos **5.** 2 **7.** 4 **9.** 10, 5 **11.** 2.751, 3 **13.** 0.1267, 0.1 **15.** 405.9 lb, 400 lb **17.** 69.14 min, 70 min **19.** 70 **21.** 14 **23.** 2,100,000 **25.** 200,000 **27.** 4 **29.** 12 **31.** 820 **33.** 20 **35.** \$9 **37.** \$4.50 **39.** \$18 **41.** \$1.50 **43.** 8 **45.** 72 **47.** 12 **49.** 5.4 **51.** 180 **53.** 230 **55.** 6 **57.** 18 **59.** 7 **61.** 70 **63.** 12,000 **65.** 1.8 **67.** 0.49 **69.** 12 **71.** 164 estudiantes **73.** \$60 **75.** \$6 **77.** \$7.50 **79.** \$30,000 **81.** 320 lb **83.** 210 conductores **85.** 220 personas **87.** 18,000 personas **89.** 3,100 voluntarios

95. a. $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ **b.** $\frac{1}{3}$ **c.** $\frac{5}{12}$ **d.** $\frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$

Espacio para el Estudio Sección 6.5 (página 566)

1. interés **3.** tasa **5.** total **7. a.** \$125,000 **b.** 5% **c.** 30 años **9. a.** 0.07 **b.** 0.098 **c.** 0.0625 **11.** \$1,800 **13. a.** interés compuesto **b.** \$1,000 **c.** 4 **d.** \$50 **e.** 1 año **15.** $I = Prt$ **17.** \$100 **19.** \$252 **21.** \$525 **23.** \$1,590 **25.** \$16.50 **27.** \$30.80 **29.** \$13,159.23 **31.** \$40,493.15 **33.** \$2,060.68 **35.** \$5,619.27 **37.** \$10,011.96 **39.** \$77,775.64 **41.** \$5,300 **43.** \$198 **45.** \$5,580 **47.** \$46.88 **49.** \$4,262.14

51. \$10,000, $7\frac{1}{4}\% = 0.0725$, 2 años, \$1,450

53. \$192, \$1,392, \$58 **55.** \$19.449 million **57.** \$755.83 **59.** \$1,271.22 **61.** \$570.65 **63.** \$30,915.66 **65.** \$159,569.75 **71.** $\frac{1}{2}$ **73.** $\frac{29}{35}$ **75.** $8\frac{1}{3}$ **77.** -36

Repaso del Capítulo 6 (página 570)

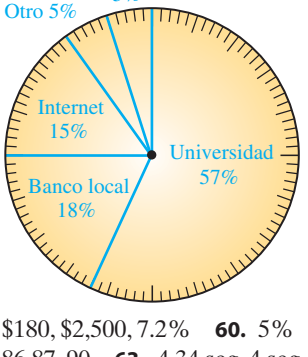
1. 39%, 0.39, $\frac{39}{100}$ **2.** 111%, 1.11, $\frac{111}{100}$ **3.** 61% **4. a.** 54% **b.** 46% **5.** $\frac{3}{20}$ **6.** $\frac{6}{5}$ **7.** $\frac{37}{400}$ **8.** $\frac{1}{500}$ **9.** 0.27 **10.** 0.08 **11.** 6.55 **12.** 0.018 **13.** 0.0075 **14.** 0.0023 **15.** 83% **16.** 162.5% **17.** 5.1% **18.** 600% **19.** 50% **20.** 80%

21. 87.5% **22.** 6.25% **23.** $33\frac{1}{3}\% \approx 33.3\%$ **24.** $83\frac{1}{3}\% \approx 83.3\%$

25. $91\frac{2}{3}\% \approx 91.7\%$ **26.** $166\frac{2}{3}\% \approx 166.7\%$ **27. a.** 0.972 **b.** $\frac{243}{250}$ **28.** 63% **29. a.** 0.0025 **b.** $\frac{1}{400}$ **30.** $6\frac{2}{3}\% \approx 6.7\%$

31. a. cantidad: 15, base: 45, porcentaje: $33\frac{1}{3}\%$ **b.** Cantidad, base, porcentaje **32. a.** 0.13 **b.** 0.071 **c.** 1.95 **d.** 0.0025 **e.** $\frac{1}{3}$ **f.** $\frac{2}{3}$ **g.** $\frac{1}{6}$ **33. a.** $x = 32\% \cdot 96$ **b.** $64 = x \cdot 135$ **c.** $9 = 47.2\% \cdot x$ **34. a.** $\frac{x}{96} = \frac{32}{100}$ **b.** $\frac{64}{135} = \frac{x}{100}$ **c.** $\frac{9}{x} = \frac{47.2}{100}$ **35.** 200 **36.** 125 **37.** 1.75% **38.** 2,100 **39.** 121 **40.** 30 **41.** 600 **42.** 5,300% **43.** 0.6 gal de metano **44.** 68 **45.** 87% **46.** \$5.43

47.



48. 139,531,200 mi^2 **49.** \$3.30, \$63.29 **50.** 4% **51.** \$40.20 **52.** 4.25% **53.** \$100,000 **54.** original **55.** 18% **56.** 9.6% **57. a.** precio de compra **b.** impuesto sobre la venta **c.** tasa de comisión **58. a.** precio de venta **b.** precio original **c.** descuento **59.** \$180, \$2,500, 7.2% **60.** 5% **61.** 3.4203, 3 **62.** 86.87, 90 **63.** 4.34 seg, 4 seg **64.** 1,090 L, 1,000 L **65.** 12 **66.** 120 **67.** 140,000 **68.** 150 **69.** 3 **70.** 10 **71.** 350 **72.** 1,000 **73.** 60 **74.** 2 **75.** \$36 **76.** \$7.50 **77.** alrededor de 12 oz líquidas **78.** alrededor de 120 personas **79.** 200

80. $30,000 **81.** $6,000, 8%, 2 años, $960 **82.** $27,240
83. $75.63 **84.** $10,308.22 **85. a.** $116.25 **b.** 1,616.25
c. $134.69 **86.** $2,142.45 **87.** $6,076.45 **88.** $43,265.78

Examen del Capítulo 6 (página 588)

1. a. Por ciento **b.** es, de qué, qué **c.** cantidad, base **d.** incremento **e.** simple, compuesto **2. a.** 61%, $\frac{61}{100}$, 0.61 **b.** 39% **3.** 199%, $\frac{199}{100}$, 1.99 **4. a.** 0.67 **b.** 0.123 **c.** 0.0975 **5.** 0.0006 **b.** 2.1 **c.** 0.55375 **6. a.** 25% **b.** 62.5% **c.** 112% **7. a.** 19% **b.** 347% **c.** 0.5% **8. a.** 66.7% **b.** 200% **c.** 90% **9. a.** $\frac{11}{20}$ **b.** $\frac{1}{10{,}000}$ **c.** $\frac{5}{4}$ **10. a.** $\frac{1}{15}$ **b.** $\frac{3}{8}$ **c.** $\frac{2}{25}$ **11. a.** $3\frac{1}{3}\% = 3.3\%$ **b.** $177\frac{7}{9}\% = 177.8\%$ **12.** 6.5% **13.** 250% **14.** 93.7% **15.** 90 **16.** 21 **17.** 134.4 **18.** 7.8 **19. a.** 1.02 pulg. **b.** 32.98 pulg. **20.** $26.24 **21.** 3% **22.** 23% **23.** $35.92 **24.** 11% **25.** $41,440 **26.** $9, $66, 12% **27.** $6.60, $13.40 **28. a.** dos, izquierda **b.** uno, izquierda **29. a.** 80 **b.** 3,000,000 **c.** 40 **30.** 100 **31.** $4.50 **32.** 16,000 mujeres **33.** $150 **34.** $28,175 **35.** $39.45 **36.** $5,079.60

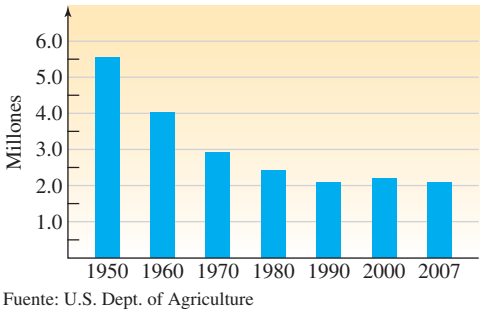
Repaso acumulativo de los Capítulos 1–6 (página 591)

1. a. seis millones, cincuenta y cuatro mil, trescientos cuarenta y seis **b.** 6,000,000 + 50,000 + 4,000 + 300 + 40 + 6 **2.** 239 **3.** 42,156 **4.** 23,100 **5.** 15 R6 **6.** 80 porciones **7.** 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40 **8.** $2 \cdot 3 \cdot 7^2$ **9.** 120, 6 **10.** 15 **11.** $>$ **12.** 0 **13.** −$135 **14.** −36, 36 **15. a.** indefinida **b.** 0 **c.** 0 **d.** 14 **16.** −30 **17.** −1,900 **18.** $\frac{9}{10}$ **19.** $\frac{36}{45}$ **20.** −60 **21.** 650 pulg.^{2} **22.** $-\frac{3}{4}$ **23.** $\frac{24}{35}$ **24.** $\frac{7}{6}$ **25.** $\frac{1}{12}$ lb **26.** −30 **27.** $35\frac{3}{4}$ pulg. **28.** $-\frac{5}{6}$ **29. a.** 452.03 **b.** 452.030 **30.** −5.5 **31.** $731.40 **32.** 0.27 **33.** $0.7\overline{3}$ **34.** −29 **35.** $\frac{5}{6}$ **36.** 4 **37.** 40 días **38.** 2.4 m **39.** 14.3 lb **40.** 29%, $\frac{29}{100}$, 0.473, $\frac{473}{1{,}000}$, 87.5%, 0.875 **41.** 125 **42.** 0.0018% **43.** 78% **44.** $428, $321, $107, 25% **45. a.** $12 **b.** $90.18 **46.** $1,450

Espacio para el Estudio Sección 7.1 (página 602)

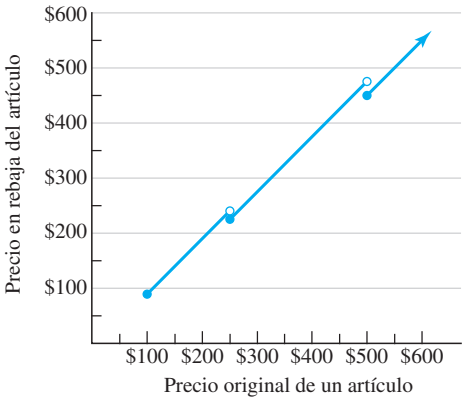
1. a) **3.** c) **5.** d) **7.** eje **9.** intersección **11.** imágenes **13.** barras, borde, iguales **15.** alrededor de 500 autobuses **17.** $10.70 **19.** $4.55 ($21.85 − $17.30) **21.** pescado, gato, perro **23.** no **25.** sí **27.** alrededor de 10,000,000 de toneladas métricas **29.** 1990, 2000, 2007 **31.** 4,000,000 de toneladas métricas **33.** ancianos **35.** $50 **37.** el chino **39.** no **41.** 62% **43.** 1,219,000,000 **45.** 493 **47.** 2002 a 2003; 2004 a 2005; 2005 a 2006; 2007 a 2008 **49.** 2001 y 2003 **51.** 2005 a 2006; una disminución de 14 estaciones **53.** 1 **55.** B **57.** 1 **59.** El corredor 1 estaba corriendo; el corredor 2 estaba detenido. **61. a.** 27 **b.** 22 **63.** $16,168.25 **65. a.** $9,593.75 **b.** $6,847.50 **c.** $2,746.25 **67.** 2000; alrededor del 3.2% **69.** aumentó; alrededor del 1% **71.** aumentó **73.** D **75.** manejo imprudente y no ceder el paso **77.** manejo imprudente **79.** alrededor de $440 **81.** no **83.** de minería **85.** los mineros **87.** alrededor de $42 **89.** alrededor de $30 **91.** 11% **93.** 21%

95.



Fuente: U.S. Dept. of Agriculture

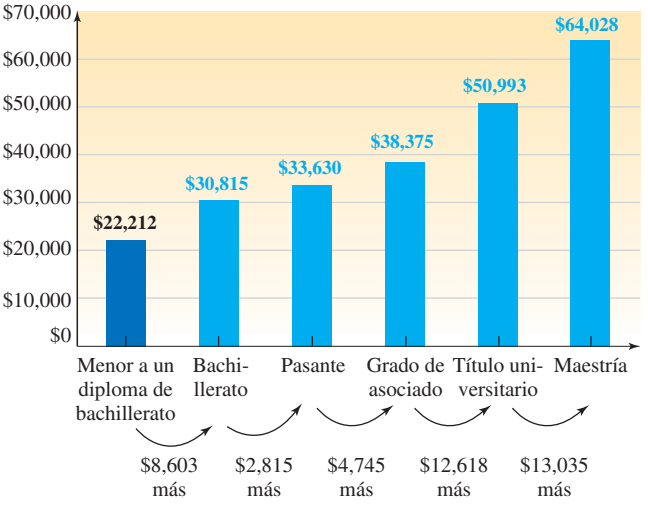
97.



101. 11, 13, 17, 19, 23, 29 **103.** 0, 4

Piense detenidamente (página 616)

Ingresos anuales medianos de los trabajadores a tiempo completo (25 años o mayores) por educación



Fuente: Bureau of Labor Statistics, Current Population Survey (2008)

Espacio para el Estudio Sección 7.2 (page 617)

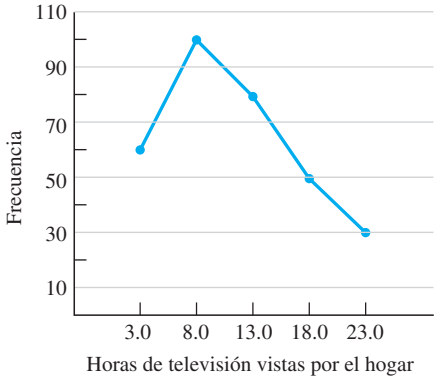
1. media **3.** moda **5.** el número de valores **7. a.** un número par **b.** 6 y 8 **c.** 6, 8, 14, 7 **9.** 8 **11.** 35 **13.** 19 **15.** 5.8 **17.** 9 **19.** 5 **21.** 17.2 **23.** $\frac{5}{8}$ **25.** 9 **27.** 44 **29.** 2.05 **31.** 1 **33.** 3 **35.** −6 **37.** 22.7 **39.** bimodal: $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$

41. **a.** 82.5 **b.** 83 **43.** **a.** 2,670 mi **b.** 89 mi **45.** **a.** $11,875 **b.** 125 **c.** $95 **47.** **a.** 65¢ **b.** 60¢ **c.** 50¢ **49.** 61° **51.** PC de2.23 **53.** PC de2.5 **55.** la mediana y la moda son de 85 **57.** el mismo promedio (56); las calificaciones de la hermana son más consistentes **59.** 22.525 oz, 25 oz **61.** 6.8, 6.9 **63.** 5 lb, 4 lb **69.** 65% **71.** 42 **73.** 62.5% **75.** 43.5

Repaso del Capítulo 7 (page 621)

1. **a.** −18° **b.** −71° **2.** **a.** 30 mph **b.** 15 mph **3.** 20 **4.** alrededor de 59 **5.** Alemania e India: alrededor de 17 **6.** alrededor de 35 **7.** alrededor del 29% **8.** hombres, alrededor del 15% más **9.** mujeres **10.** No, no saldría con un compañero de trabajo (31% a 29%) **11.** alrededor de 4,100 animales **12.** el Zoológico de Columbia; alrededor de 7,250 animales **13.** alrededor de 3,000 animales **14.** alrededor de 12,500 animales **15.** oxígeno **16.** 4% **17.** 13.5 lb **18.** 166 lb **19.** alrededor de 3,000 millones de huevos **20.** alrededor de 3,050 millones de huevos **21.** 2007; alrededor de 2,950 millones de huevos **22.** alrededor de 5,750 millones de huevos **23.** entre el 2006 y el 2007 **24.** entre el 2007 y el 2008 **25.** alrededor de 290 millones de huevos más **26.** alrededor de 500 millones de huevos más **27.** 60 **28.** 180 **29.** 160

30.



31. sí **32.** mediana **33.** 1.2 oz **34.** 1.138 oz **35.** 7.3 micrones, 7.2 micrones, 6.9 micrones **36.** 32 páginas por día **37.** $20 **38.** PC de2.62

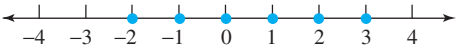
Examen del Capítulo 7 (página 630)

1. **a.** eje **b.** media **c.** mediana **d.** moda **e.** central **2.** **a.** 563 calorías **b.** 129 calorías **c.** alrededor de 8 mph **3.** **a.** sofá de dos plazas; 130 pies **b.** 50 pies más **c.** 340 pies **4.** **a.** 75% **b.** 14.1% **c.** cáncer de pulmón **d.** cáncer de próstata; 32.7% **5.** **a.** alrededor de 38 g **b.** alrededor de 15 g **6.** **a.** 17% **b.** 529,550 **7.** **a.** alrededor de 27,000 oficiales de policía **b.** 1989; about 26,000 oficiales de policía **c.** 2000; alrededor de 41,000 oficiales de policía **d.** alrededor de 5,000 oficiales de policía **8.** **a.** el ciclista 1 **b.** el ciclista 1 está detenido, pero está adelante en la carrera. El ciclista 2 está comenzando a acercarse. **c.** tiempo C **d.** el ciclista 2 nunca lideró. **e.** ciclista 1 **9.** **a.** 22 empleados **b.** 30 empleados **c.** 57 empleados **10.** **a.** 7.5 hr **b.** 7.5 hr **c.** 5 hr **11.** 3 estrellas **12.** PC de 3.36 **13.** media: 4.41 millones; mediana: 4.25 millones; moda: 4.25 millones **14.** De todas las casas para una familia existentes vendidas en mayo del 2009, la mitad de ellas se vendió por menos de $172,900 y la mitad se vendió por más de $172,900.

Repaso acumulativo de los Capítulos 1–7 (página 633)

1. millones, novecientos cuarenta mil, quinientos cincuenta y nueve; 50,000,000 + 2,000,000 + 900,000 + 40,000 + 500 + 50 + 9 **2.** 50,000 **3.** 54,604 **4.** 4,209 **5.** 23,115 **6.** 87 **7.** 683 + 459 = 1,142 **8.** 10,912 pulg.^{2} **9.** 2011 **10.** **a.** 1, 2, 3, 6, 9, 18 **b.** $2 \cdot 3^2$ **11.** 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 **12.** **a.** 24 **b.** 4 **13.** 35 **14.** 9

15.



16. **a.** 6 **b.** 5 **c.** falso **17.** **a.** −20 **b.** 30 **c.** −125 **d.** 5 **18.** 1,100 °F **19.** −5 **20.** 429 **21.** −4 **22.** −200 **23.** **a.** $\frac{5}{9}$ **b.** $\frac{3}{2}$ **24.** **a.** 0 **b.** indefinida **25.** $\frac{8}{35}$ **26.** $\frac{4}{9}$ **27.** $-\frac{1}{6}$ **28.** $\frac{19}{20}$ **29.** 160 min **30.** $-\frac{21}{20} = -1\frac{1}{20}$ **31.** $6\frac{3}{4}$ pulg. **32.** $10\frac{5}{8}$ **33.** $-\frac{3}{8}$ **34.** 428.91 **35.** $1,815.19 **36.** **a.** 345 **b.** 0.000345 **37.** 145.5 **38.** −0.744 **39.** 745 **40.** 0.01825 **41.** $0.\overline{72}$ **42.** 75 **43.** $\frac{2}{3}$ **44.** $59.95 **45.** $\frac{1}{7}$ **46.** 128 oz lq **47.** 6.4 m **48.** 19.8°C **49.** $\frac{3}{100}$, 0.03, 2.25, 225%, $\frac{41}{1,000}$, 4.1% **50.** 17% **51.** 24.36 **52.** 57.6 **53.** $7.92 **54.** 16% **55.** $12 **56.** $3,312 **57.** $13,159.23 **58.** **a.** 7% **b.** 5,040 **59.** **a.** 2008; 36 **b.** 2007 a 2008; un aumento de 16 muertes **c.** 2008 a 2009; una disminución de 8 muertes **60.** media: 3.02; mediana: 3.00; moda: 2.75

Espacio para el Estudio Sección 8.1 (página 644)

1. Variables **3.** expresiones **5.** términos **7.** coeficiente **9.** $(12 - h)$ pulg. **11.** **a.** $(x + 20)$ onzas **b.** $(100 - p)$ lb **13.** 5, 25, 45 **15.** $4x$ **17.** $2w$ **19.** **a.** $x + y = y + x$ **b.** $(r + s) + t = r + (s + t)$ **21.** $0 \cdot s = 0$ y $s \cdot 0 = 0$ **23.** **a.** 4 **b.** 3, 11, −1, 9 **25.** 6, −75, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, 1 **27.** término **29.** factor **31.** $l + 15$ **33.** $50x$ **35.** $\frac{w}{l}$ **37.** $P + \frac{2}{3}p$ **39.** $k^2 - 2{,}005$ **41.** $2a - 1$ **43.** $\frac{1{,}000}{n}$ **45.** $2p + 90$ **47.** $3(35 + h + 300)$ **49.** $p - 680$ **51.** $4d - 15$ **53.** $2(200 + t)$ **55.** $|a - 2|$ **57.** $0.1d$ or $\frac{1}{10}d$ **59.** tres cuartos de r **61.** 50 menos que t **63.** el producto de x, y y z **65.** el doble de m, incrementado en 5 **67.** $(x + 2)$ pulg. **69.** $(36 - x)$ pulg. **71.** 2 **73.** 13 **75.** 20 **77.** −12 **79.** −5 **81.** $-\frac{1}{5}$ **83.** 17 **85.** 36 **87.** 255 **89.** 8 **91.** **a.** Sea x = el peso de la Element (en libras); $2x - 340$ = peso de la Hummer (en libras) **b.** 6,400 lb **93.** **a.** sea x = la antigüedad de Apple; $x + 80$ = antigüedad de IBM; $x - 9$ = antigüedad de Dell **b.** IBM: 112 años; Dell: 23 años **99.** 60 **101.** $\frac{8}{27}$

Espacio para el Estudio Sección 8.2 (página 655)

1. simplificar **3.** distributiva **5.** similares **7.** **a.** 4, 9, 36 **b.** propiedad asociativa de la multiplicación **9.** **a.** + **b.** − **c.** − **d.** + **11.** **a.** $10x$ **b.** no puede simplificarse **c.** $-42x$ **d.** can't be simplified **e.** $18x$ **f.** $3x + 5$ **13.** **a.** $6(h - 4)$ **b.** $-(z + 16)$ **15.** $12t$ **17.** $63m$ **19.** $-35q$ **21.** $300t$ **23.** $11.2x$ **25.** $60c$ **27.** $-96m$ **29.** g **31.** $5x$ **33.** $6y$

35. $5x + 15$ **37.** $-12x - 27$ **39.** $9x + 10$ **41.** $0.4x - 1.6$ **43.** $36c - 42$ **45.** $-78c + 18$ **47.** $30t + 90$ **49.** $4a - 1$ **51.** $24t + 16$ **53.** $2w - 4$ **55.** $56y + 32$ **57.** $50a - 75b + 25$ **59.** $-x + 7$ **61.** $5.6y - 7$ **63.** $3x, -2x$ **65.** $-3m^3, -m^3$ **67.** $10x$ **69.** 0 **71.** $20b^2$ **73.** r **75.** $28y$ **77.** $-s^3$ **79.** $-3.6c$ **81.** $0.4r$ **83.** $\frac{4}{5}t$ **85.** $-\frac{5}{8}x$ **87.** $-6y - 10$ **89.** $-2x + 5$ **91.** no se simplifica **93.** $4x^2 - 3x + 9$ **95.** $7z - 15$ **97.** $s^2 - 12$ **99.** $-41r + 130$ **101.** $8x - 9$ **103.** $12c + 34$ **105.** $-10r$ **107.** $-20r$ **109.** $3a$ **111.** $9r - 16$ **113.** $-6x$ **115.** $c - 13$ **117.** $a^3 - 8$ **119.** $12x$ **121.** $(4x + 8)$ pies **125.** 2

Espacio para el Estudio Sección 8.3 (página 666)

1. ecuación **3.** resolver **5.** equivalentes **7. a.** $x + 6$ **b.** ninguna **c.** no **d.** sí **9. a.** c, c **b.** c, c **11. a.** x **b.** y **c.** t **d.** h **13.** $5, 5, 50, 50, \stackrel{?}{=}, 45, 50$ **15. a.** es posiblemente igual a **b.** sí **17.** no **19.** no **21.** no **23.** no **25.** sí **27.** no **29.** no **31.** sí **33.** sí **35.** sí **37.** 71 **39.** 18 **41.** -0.9 **43.** 3 **45.** $\frac{8}{9}$ **47.** 3 **49.** $-\frac{1}{25}$ **51.** -2.3 **53.** 45 **55.** 0 **57.** 21 **59.** -2.64 **61.** 20 **63.** 15 **65.** -6 **67.** 4 **69.** 4 **71.** 7 **73.** 1 **75.** -6 **77.** 20 **79.** 0.5 **81.** -18 **83.** $-\frac{4}{21}$ **85.** 13 **87.** 2.5 **89.** $-\frac{8}{3}$ **91.** $\frac{13}{20}$ **93.** 4 **95.** -5 **97.** -200 **99.** 95 **101.** 65° **103.** \$6,000,000 **109.** 0 **111.** $45 - x$

Espacio para el Estudio Sección 8.4 (página 673)

1. resolver **3.** simplifique **5.** 4, 9 **7.** resta, multiplicación **9. a.** $-2x - 8 = -24$ **b.** $-20 = 3x - 16$ **11. a.** no **b.** sí **13.** $7, 7, 2, 2, 14, \stackrel{?}{=}, 28, 21, 14$ **15.** 6 **17.** 5 **19.** -7 **21.** 0.25 **23.** $-\frac{5}{2}$ **25.** -3 **27.** $\frac{10}{3}$ **29.** 6 **31.** 18 **33.** 16 **35.** 2.9 **37.** -4 **39.** $\frac{11}{5}$ **41.** -41 **43.** -6 **45.** 0.04 **47.** -6 **49.** -11 **51.** 7 **53.** -11 **55.** 1 **57.** $\frac{9}{2}$ **59.** -4 **61.** 3 **63.** $\frac{1}{4}$ **65.** $\frac{5}{6}$ **67.** 45 **69.** -49 **71.** 1 **73.** -12 **75.** -6 **77.** -5 **79.** 3.5 **83.** propiedad conmutativa de la multiplicación **85.** propiedad asociativa de la suma

Espacio para el Estudio Sección 8.5 (página 683)

1. Analizar, ecuación, Resolver, conclusión, Comprobar **3.** división **5.** suma **7.** pedir prestado, suma **9.** grupos de discusión de igual tamaño, división **11.** $s + 6$ **13.** $g - 100$ **15.** 1,700, 425, jarra, antigüedad, suma, $1{,}700, x$, $1{,}700, 425, 425, 1{,}275, 1{,}275, 1{,}275, 1{,}700$ **17.** 88, 10, primera clase, clase económica, primera clase, $10, 10x, 10x, 88, 11x$, $11, 11, 8, 8, 80, 10, 80, 88$ **19.** Ella necesitará pedir prestado \$248,000. **21.** Alicia podía leer 133 palabras por minuto antes de tomar el curso. **23.** Le tomarán 17 meses alcanzar su objetivo. **25.** El año pasado se otorgaron 7 becas. Este año se otorgaron 13 becas. **27.** Ha realizado 6 pagos. **29.** 50 cent ganó \$150 millones en el 2008. **31.** La longitud de la habitación es de 10 pies. **33.** La báscula registraría 55 libras. **35.** El primer acto tiene 5 escenas. **37.** El valor del paquete de beneficios es de \$7,000. **39.** Su marcador para su primer juego fue de 1,568 puntos. **41.** Hubo 6 minutos de comerciales y 24 minutos del programa. **43.** Pasan 150 minutos en la cátedra y 100 minutos en el laboratorio cada semana. **45.** El refugio recibió 32 llamadas cada día después de haber aparecido en las noticias. **47.** Hace tres días, esperó por 35 minutos. **49.** El costo estimado inicial era de \$54 millones. **51.** La renta mensual para el departamento era de \$975. **53.** Debe completar 4 sesiones más para obtener su certificado. **61.** 600, 20 **63.** 140, 14 **65.** 3,528; 1 **67.** 2,178; 22

Espacio para el Estudio Sección 8.6 (página 694)

1. exponenciales **3.** $3x, 3x, 3x, 3x, (-5y)^3$ **5. a.** suma **b.** multiplica **c.** multiplica **7. a.** $2x^2$ **b.** x^4 **9. a.** no se simplifica **b.** x^5 **11.** x^6, 18 **13.** base 4, exponente 3 **15.** base x, exponente 5 **17.** base $-3x$, exponente 2 **19.** base y, exponente 6 **21.** base m, exponente 12 **23.** base $y + 9$, exponente 4 **25.** m^5 **27.** $(4t)^4$ **29.** $4t^5$ **31.** a^2b^3 **33.** 5^7 **35.** a^6 **37.** b^6 **39.** c^{13} **41.** a^5b^6 **43.** c^2d^5 **45.** x^3y^{11} **47.** m^{200} **49.** 3^8 **51.** $(-4.3)^{24}$ **53.** m^{500} **55.** y^{15} **57.** x^{25} **59.** p^{25} **61.** t^{18} **63.** u^{14} **65.** $36a^2$ **67.** $625y^4$ **69.** $27a^{12}b^{21}$ **71.** $-8r^6s^9$ **73.** $72c^{17}$ **75.** $6{,}400d^{41}$ **77.** $49a^{18}$ **79.** t^{10} **81.** y^9 **83.** $-216a^9b^6$ **85.** n^{33} **87.** 6^{60} **89.** $288b^{27}$ **91.** c^{14} **93.** $432s^{16}t^{13}$ **95.** x^{15} **97.** $25x^2$ ft^2 **101.** $\frac{3}{4}$ **103.** 5 **105.** 7 **107.** 12

Repaso del Capítulo 8 (página 696)

1. a. $6b$ **b.** xyz **c.** $2t$ **2. a.** $c + d = d + c$ **b.** $(r \cdot s) \cdot t = r \cdot (s \cdot t)$ **3. a.** factor **b.** término **4. a.** 3 **b.** 1 **5. a.** $16, -1, 25$ **b.** $\frac{1}{2}, 1$ **6.** quinientos menos que m (las respuestas pueden variar) **7. a.** $h + 25$ **b.** $100 - 2s$ **c.** $\frac{1}{2}t - 6$ **d.** $|2 - a^2|$ **8. a.** $(n + 4)$ pulg. **b.** $(b - 4)$ pulg. **9. a.** $(x + 1)$ pulg. **b.** $\frac{p}{8}$ libras

10. a. Sea x = el peso del balón de volibol (en onzas), $2x + 2$ = peso del balón de basquetbol de la NBA (en onzas) **b.** 22 oz **11.** 72 **12.** 64 **13.** 40 **14.** -36 **15.** $28w$ **16.** $24x$ **17.** $2.08f$ **18.** r **19.** $5x + 15$ **20.** $-2x - 3 + y$ **21.** $3c - 6$ **22.** $12.6c + 29.4$ **23.** $7a, 9a$ **24.** $2x^2, 3x^2; 2x, -x$ **25.** $9p$ **26.** $-7m$ **27.** $4n$ **28.** $-p - 18$ **29.** $0.1k^2$ **30.** $8a^3 - 1$ **31.** no se simplifica **32.** no se simplifica **33.** w **34.** $4h - 15$ **35. a.** x **b.** $-x$ **c.** $4x + 1$ **d.** $4x - 1$ **36.** $(4x + 4)$ pies **37.** sí **38.** no **39.** no **40.** no **41.** sí **42.** sí **43.** ecuación **44.** verdadero **45.** 21 **46.** 32 **47.** -20.6 **48.** 107 **49.** 24 **50.** 2 **51.** -9 **52.** -7.8 **53.** 0 **54.** $-\frac{16}{5}$ **55.** 2 **56.** -30.6 **57.** 30 **58.** -28 **59.** 3 **60.** -1.2 **61.** 4 **62.** 1 **63.** 20 **64.** 0.06 **65.** Necesita pedir prestado \$97,750. **66.** Originalmente tenía 725 pacientes. **67.** El costo original se estimaba en \$27 millones. **68.** Hay 3,600 clientes servidos por 45 trabajadores sociales. **69.** La hamburguesa tardaría 6 horas en pasar de 71 °F a 29 °F. **70.** Cuesta \$32 rentar el tráiler.

71. Corre 9 millas y camina 6 millas. **72.** La asistencia en el primer día fue de 2,200 personas. La asistencia en el segundo día fue de 4,400 personas. **73.** El ancho del lote de estacionamiento es de 25 pies y la longitud es de 100 pies. **74.** El modulo lunar era de 57 pies de alto. **75. a.** base n, exponente 12 **b.** base $2x$, exponente 6 **c.** base r, exponente 4 **d.** base $y - 7$, exponente 3 **76. a.** m^5 **b.** $-3x^4$ **c.** a^2b^4 **d.** $(pq)^3$ **77. a.** x^4 **b.** $2x^2$ **c.** x^3 **d.** no se simplifica **78. a.** conserve la base 3, no multiplique las bases. **b.** multiplique los exponentes, no los sume. **79.** 7^{12} **80.** m^2n^3 **81.** y^{21} **82.** $81x^4$ **83.** 6^{36} **84.** $-b^{12}$ **85.** $256s^{10}$ **86.** $4.41x^4y^2$ **87.** $(-9)^{15}$ **88.** a^{23} **89.** $8x^{15}$ **90.** $m^{10}n^{18}$ **91.** $72a^{17}$ **92.** x^{200} **93.** $256m^{13}$ **94.** $108t^{22}$

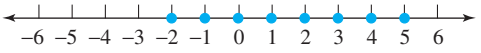
Examen del Capítulo 8 (página 706)

1. a. Variables **b.** distributiva **c.** semejantes **d.** combinado **e.** coeficiente **f.** sustituye **g.** expresiones **h.** ecuación **i.** resolver **j.** comprobar **2. a.** $(b + c) + d = b + (c + d)$ **b.** $1 \cdot t = t$ y $t \cdot 1 = t$ **3.** $s - 10$ = la longitud de la trucha (en pulgadas) **4. a.** $r - 2$ **b.** $3xy$ **c.** $\frac{c}{3}$ **d.** $2w + 7$ **5.** tres cuartos de t **6. a.** $h - 5$ = la longitud de la base superior (en pies) **b.** $2h - 3$ = la longitud de la base inferior (en pies) **7. a.** factor **b.** término **8. a.** 4 términos **b.** $1, 8, -1, -6$ **9.** -3 **10.** 36 **11. a.** $36s$ **b.** $-120t$ **c.** $12x$ **d.** $-72m$ **12. a.** $25x + 5$ **b.** $-42 + 6x$ **c.** $-6y - 4$ **d.** $0.6a + 0.9b - 2.1$ **e.** $m - 4$ **f.** $18r + 9$ **13.** $12m^2$ y $2m^2$ **14. a.** $12y$ **b.** $40a$ **c.** $21b^2$ **d.** $11z + 13$ **15.** $3y - 3$ **16.** No es una solución. **17.** 4 **18.** 3.1 **19.** 11 **20.** -81 **21.** $\frac{1}{2}$ **22.** 24 **23.** 2 **24.** $\frac{1}{5}$ **25.** -6.2 **26.** 1 **27.** 16 **28.** -15 **29.** La intensidad del sonido del motor del jet es de 110 decibeles. **30.** En este momento, la universidad tiene 2,080 cajones de estacionamiento. **31.** La sección de cuerdas está conformada por 54 músicos. **32.** El desarrollador donó 44 acres de tierra a la ciudad. **33.** El número más pequeño es el 23 y el número más grande es el 40. **34.** El ancho del marco es de 24 pulgadas y la longitud es de 48 pulgadas. **35. a.** base: 6, exponente: 5 **b.** base: b, exponente: 4 **36. a.** $2x^2$ **b.** x^4 **c.** no se simplifica **d.** x^3 **37. a.** h^6 **b.** m^{20} **c.** b^8 **d.** x^{18} **e.** a^6b^{10} **f.** $144a^{18}b^2$ **g.** $216x^{15}$ **h.** t^{15} **38.** Conserve la base común, 5, y sume los exponentes. No multiplique las bases comunes para obtener 25.

Repaso acumulativo de los Capítulos 1–8 (página 708)

1. a. 7,535,700 **b.** 7,540,000 **2.** Mil millones, setecientos veintiséis millones, trescientos cincuenta y siete mil, sesenta y ocho; 1,000,000,000 + 700,000,000 + 20,000,000 + 6,000,000 + 300,000 + 50,000 + 7,000 + 60 + 8 **3.** 9,314 **4.** 3,322 **5.** 245,870 **6.** 875 **7. a.** 260 pies **b.** 4,000 pies^2 **8.** \$170 **9. a.** 1, 2, 4, 5, 10, 20 **b.** $2^2 \cdot 5$ **10. a.** 42 **b.** 7 **11.** 56 **12.** 2

13.

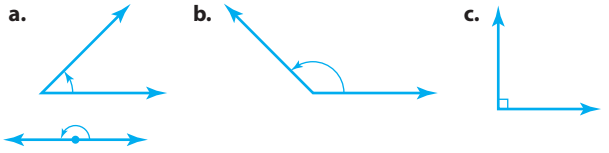


14. a. 11 **b.** 11 **c.** falso **15. a.** -5 **b.** 38 **c.** -240 **d.** 8 **16.** 125 °F **17.** -5 **18.** -200 **19.** $\frac{3}{8}$ **20.** $\frac{45}{54}$ **21.** $\frac{1}{7}$ **22.** $\frac{2}{5}$ **23.** $\frac{17}{18}$ **24.** 12 **25.** $42\frac{19}{22}$ **26.** $\frac{13}{3} = 4\frac{1}{3}$ **27. a.** Tendrá que leer $\frac{5}{6}$ del libro. **b.** Le queda $\frac{1}{6}$ del libro por leer. **28. a.** 1 centésima **b.** 7 **c.** 3 **d.** 7 milésimas **e.** 304.82 **29.** 658.04007 **30.** 182.894 **31.** $-2{,}262$ **32.** 3.16 **33.** 453.1 **34.** 13.60 **35.** $270 \div 90 = 27 \div 9 = 3$ **36.** 67.5 mm **37. a.** 0.76 **b.** $0.0\overline{15}$ **38.** -7 **39.** $\frac{9}{7}$ **40.** \$93.75 **41.** 18.9 **42.** $1\frac{1}{3}$ hr **43.** 7.5 g **44.** alrededor de 16 lb **45.** $\frac{1}{4}, 25\%, 0.\overline{3}, \frac{21}{500}, 0.042$ **46.** 52% **47.** 65 **48.** \$37.20, \$210.80 **49.** 820 **50.** \$556 **51. a.** el grupo de 18-49 años **b.** 328 personas **52.** media: 6, mediana: 5, moda: 10 **53.** -52 **54. a.** $x - 4$ **b.** $2w + 50$ **55. a.** $-15x$ **b.** $28x^2$ **56. a.** $-6x + 8$ **b.** $15x - 10y + 20$ **57. a.** $5x$ **b.** $12a^2$ **c.** $-x - y$ **d.** $29x - 36$ **58.** No es una solución. **59.** -5 **60.** -16 **61.** 4 **62.** 18 **63.** Debe observar 21 turnos más. **64.** La longitud es de 84 pies y el ancho es de 21 pies. **65. a.** base: 8, exponente: 9 **b.** base: a, exponente: 3 **66. a.** p^9 **b.** t^{15} **c.** x^5y^7 **d.** $81a^8$ **e.** $108p^{12}$ **f.** $(-2.6)^{16}$

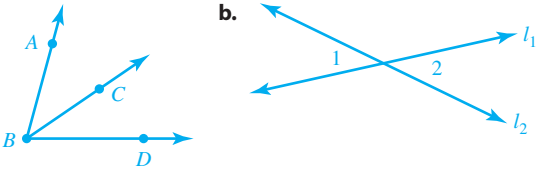
Espacio para el Estudio Sección 9.1 (página 720)

1. punto, recta, plano **3.** punto medio **5.** ángulo **7.** transportador **9.** recto **11.** 180° **13.** adyacentes **15.** congruentes **17.** 90° **19. a.** ona **b.** recta **21. a.** $\overrightarrow{SR}, \overrightarrow{ST}$ **b.** S **c.** $\angle RST, \angle TSR, \angle S, \angle 1$

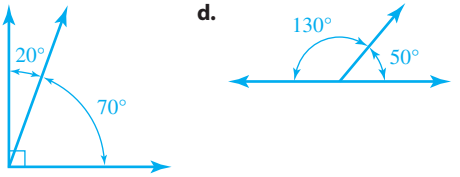
23. a. **b.** **c.** **d.**



25. a. **b.**



c. **d.**



27. congruente **29. a.** falso **b.** falso **c.** falso **d.** verdadero **31.** verdadero **33.** falso **35.** recta **37.** rayo **39.** ángulo **41.** grado **43.** congruente **45. a.** T **b.** **c.**

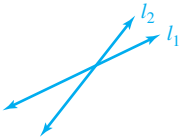
47. **a.** 2 **b.** 3 **c.** 1 **d.** 6 **49.** 50° **51.** 25° **53.** 75° **55.** 130° **57.** recto **59.** agudo **61.** llano **63.** obtuso **65.** 10° **67.** 27.5° **69.** 70° **71.** 65° **73.** 30°, 60°, 120° **75.** 25°, 115°, 65° **77.** 60° **79.** 75° **81.** **a.** verdadero **b.** falso, un segmento tiene dos puntos extremos **c.** falso, una recta no tiene un punto extremo **d.** falso, el punto G es el vértice del ángulo **e.** verdadero **f.** verdadero **83.** 40° **85.** 135° **87.** **a.** 50° **b.** 130° **c.** 230° **d.** 260° **89.** **a.** 66° **b.** 156° **91.** 141° **93.** 1° **95.** **a.** alrededor de 80° **b.** alrededor de 30° **c.** alrededor de 65° **97.** **a.** 27° **b.** 30° **103.** $\frac{23}{12}$ o $1\frac{11}{12}$ **105.** $\frac{1}{10}$

Espacio para el Estudio Sección 9.2 (página 731)

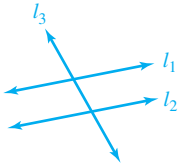
1. coplanares, no coplanares **3.** perpendiculares **5.** alternos

7. **a.**

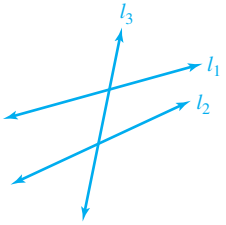
b.



9. **a.**



b.

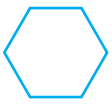


11. correspondientes **13.** internos **15.** Son perpendiculares. **17.** recto **19.** perpendicular. **21.** **a.** $\angle 1$ y $\angle 5$, $\angle 4$ y $\angle 8$, $\angle 2$ y $\angle 6$, $\angle 3$ y $\angle 7$ **b.** $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$, y $\angle 6$ **c.** $\angle 3$ y $\angle 5$, $\angle 4$ y $\angle 6$ **23.** $m(\angle 1) = 130°, m(\angle 2) = 50°, m(\angle 3) = 50°, m(\angle 5) = 130°, m(\angle 6) = 50°, m(\angle 7) = 50°, m(\angle 8) = 130°$ **25.** $\angle 1 \cong \angle X, \angle 2 \cong \angle N$ **27.** 12°, 40°, 40° **29.** 10°, 50°, 130° **31.** **a.** 50°, 135°, 45°, 85° **b.** 180° **c.** 180° **33.** ángulos verticales: $\angle 1 \cong \angle 2$; ángulos alternos internos: $\angle B \cong \angle D, \angle E \cong \angle A$ **35.** 40°, 40°, 140° **37.** 12°, 70°, 70° **39.** La cuerda del lastre debe colgar perpendicular a la parte superior de las piedras. **41.** 50° **43.** Las tiras de papel tapiz deben colgarse en la pared paralelas entre sí y deben ser perpendiculares al suelo. **45.** 75°, 105°, 75° **53.** 72 **55.** 45% **57.** sí **59.** $\frac{1}{3}$

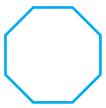
Espacio para el Estudio Sección 9.3 (página 741)

1. polígono **3.** vértice **5.** equilátero, isósceles, escaleno **7.** hipotenusa, catetos **9.** suma

11. **a.**



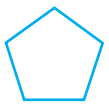
b.



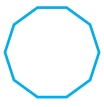
c.

d.

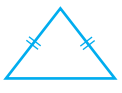
e.



f.

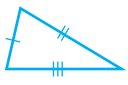


13. **a.**



b.

c.



d.

e.

f.

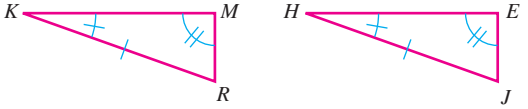
15. **a.** 90° **b.** rectángulo **c.** $\overline{AB}, \overline{BC}$ **d.** $\overline{AC}$ **e.** $\overline{AC}$ **f.** $\overline{AC}$ **17.** **a.** isósceles **b.** conversa **19.** **a.** $\overline{EF} \cong \overline{GF}$ **b.** isósceles **21.** triángulo **23.** $\overline{AB} \cong \overline{CB}$ **25.** **a.** 4, cuadrilátero, 4 **b.** 6, hexágono, 6 **27.** **a.** 7, heptágono, 7 **b.** 9, nonágono, 9 **29.** **a.** escaleno **b.** isósceles **31.** **a.** equilátero **b.** escaleno **33.** sí **35.** no **37.** 55° **39.** 45° **41.** 50°; 50°, 60°, 70° **43.** 20°; 20°, 80°, 80° **45.** 68° **47.** 9° **49.** 39° **51.** 44.75° **53.** 28° **55.** 73° **57.** 90° **59.** 45° **61.** 90.7° **63.** 61.5° **65.** 12° **67.** 52.5° **69.** 39°, 39°, 102° o 70.5°, 70.5°, 39° **71.** 73° **73.** 75° **75.** **a.** octágono **b.** triángulo **c.** pentágono **77.** A medida que se eleva el gato, los dos lados del gato permanecen de la misma longitud. **79.** equilátero **85.** 22 **87.** 40% **89.** 0.10625

Espacio para el Estudio Sección 9.4 (página 751)

1. hipotenusa, catetos **3.** Pitágoras **5.** a^2, b^2, c^2 **7.** rectángulo **9.** **a.** $\overline{BC}$ **b.** $\overline{AB}$ **c.** $\overline{AC}$ **11.** 64, 100, 100 **13.** 10 pies **15.** 13 m **17.** 73 mi **19.** 137 cm **21.** 24 cm **23.** 80 m **25.** 20 m **27.** 19 m **29.** $\sqrt{11}$ cm $\approx$ 3.32 cm **31.** $\sqrt{208}$ m $\approx$ 14.42 m **33.** $\sqrt{90}$ in. $\approx$ 9.49 pulg. **35.** $\sqrt{20}$ pulg. $\approx$ 4.47 pulg. **37.** no **39.** sí **41.** 12 pies **43.** 25 pulg. **45.** $\sqrt{16{,}200}$ pies $\approx$ 127.28 pies **47.** sí, $\sqrt{1{,}288}$ pies $\approx$ 35.89 pies **53.** no **55.** no **57.** no **59.** no

Espacio para el Estudio Sección 9.5 (página 761)

1. congruentes **3.** congruentes **5.** semejantes **7.** **a.** No, son de diferente tamaño. **b.** Si, tienen la misma forma. **9.** PRQ **11.** MNO **13.** $\angle A \cong \angle B, \angle Y \cong \angle T, \angle Z \cong \angle R, \overline{YZ} \cong \overline{TR}, \overline{AZ} \cong \overline{BR}, \overline{AY} \cong \overline{BT}$ **15.** congruentes **17.** ángulo, ángulo **19.** 100 **21.** 5.4 **23.** proporcionales **25.** congruentes **27.** es congruente a **29.**



31. $\overline{DF}, \overline{AB}, \overline{EF}, \angle D, \angle B, \angle C$ **33.** **a.** $\angle B \cong \angle M, \angle C \cong \angle N, \angle D \cong \angle O, \overline{BC} \cong \overline{MN}, \overline{CD} \cong \overline{NO}, \overline{BD} \cong \overline{MO}$ **b.** 72° **c.** 10 pies **d.** 9 pies **35.** sí, LLL **37.** no necesariamente **39.** **a.** $\angle L \cong \angle H, \angle M \cong \angle J, \angle R \cong \angle E$ **b.** MR, LR, LM **c.** HJ, JE, LR **41.** sí **43.** no necesariamente **45.** sí **47.** no necesariamente **49.** sí **51.** no necesariamente **53.** 8, 35 **55.** 60, 38 **57.** verdadero **59.** falso, los ángulos deben estar entre lados congruentes **61.** sí, LLL **63.** sí, LAL **65.** sí ALA **67.** no necesariamente **69.** 80°, 2 yd **71.** 19°, 14 m **73.** 6 mm **75.** 50° **77.** $\frac{25}{6} = 4\frac{1}{6}$ **79.** 16 **81.** 17.5 cm **83.** 59.2 pies **85.** 36 pies **87.** 34.8 pies **89.** 1,056 pies **93.** 189 **95.** 21

Espacio para el Estudio Sección 9.6 (página 773)

1. cuadrilátero **3.** rectángulo **5.** rombo **7.** trapezoide, bases, isósceles **9.** **a.** cuatro; A, B, C, D **b.** cuatro; $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ **c.** dos; $\overline{AC}, \overline{BD}$ **d.** sí, no, no, sí **11.** **a.** $\overline{VU}$ **b.** $\parallel$ **13.** **a.** rectos **b.** paralelos **c.** longitud

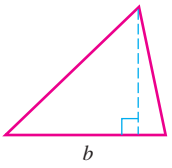
d. longitud **e.** punto medio **15.** rectángulo **17. a.** no **b.** sí **c.** no **d.** sí **e.** no **f.** sí **19. a.** isósceles **b.** $\angle J, \angle M$ **c.** $\angle K, \angle L$ **d.** $\angle M, \angle L, \overline{ML}$ **21.** Los cuatro lados del cuadrilátero son de la misma longitud. **23.** la suma de las medidas de los ángulos de un polígono; el número de lados del polígono **25. a.** cuadrado **b.** rombo **c.** trapezoide **d.** rectángulo **27. a.** 90° **b.** 9 **c.** 18 **d.** 18 **29. a.** 42° **b.** 95° **31. a.** 9 **b.** 70° **c.** 110° **d.** 110° **33.** 2,160° **35.** 3,240° **37.** 1,080° **39.** 1,800° **41.** 5 **43.** 7 **45.** 13 **47.** 14 **49. a.** 30° **b.** 30° **c.** 60° **d.** 8 cm **e.** 4 cm **51.** 40°; $m(\angle A) = 90°$, $m(\angle B) = 150°$, $m(\angle C) = 40°$, $m(\angle D) = 80°$ **53. a.** trapezoide **b.** cuadrado **c.** rectángulo **d.** trapezoide **e.** paralelogramo **55.** 540° **61.** doscientos cincuenta y cuatro mil, trescientos nueve **63.** ochenta y dos millones, cuatrocientos quince

Piense detenidamente (página 782)

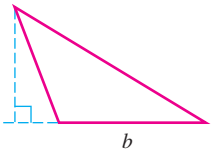
alrededor de 108 pies^2

Espacio para el Estudio Sección 9.7 (página 786)

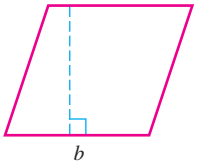
1. perímetro **3.** área **5.** área
7. 8 pies · 16 pies = 128 pies^2 **9. a.** $p = 4s, p = 2l + 2w$
11. a.



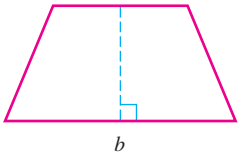
b.



c.



d.



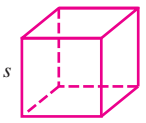
13. un rectángulo y un triángulo **15. a.** pulgada cuadrada **b.** 1 m^2 **17.** 32 pulg. **19.** 23 mi **21.** 62 pulg. **23.** 94 pulg. **25.** 15 pies **27.** 5 m **29.** 16 cm^2 **31.** 6.25 m^2 **33.** 144 pulg.^{2} **35.** 1,000,000 mm^2 **37.** 27,878,400 pies^2 **39.** 1,000,000 m^2 **41.** 135 pies^2 **43.** 11,160 pies^2 **45.** 25 pulg.^{2} **47.** 27 cm^2 **49.** 7.5 pulg.^{2} **51.** 10.5 mi^2 **53.** 40 pies^2 **55.** 91 cm^2 **57.** 4 m **59.** 12 cm **61.** 36 m **63.** 11 mi **65.** 102 pulg.^{2} **67.** 360 pies^2 **69.** 75 m^2 **71.** 75 yd^2 **73.** \$1,200 **75.** \$4,875 **77.** longitud de 15 pulg. y ancho de 5 pulg.; longitud de 16 pulg. y ancho de 4 pulg. (las respuestas pueden variar) **79.** lados de 5 m de longitud **81.** base de 5 yd y altura de 3 yd (las respuestas pueden variar) **83.** longitud de 5 pies y ancho de 4 pies; longitud de 20 pies y ancho de 3 pies (las respuestas pueden variar) **85.** 60 cm^2 **87.** 36 m
89. $28\frac{1}{3}$ pies **91.** 36 m **93.** $x = 3.7$ pies, $y = 10.1$ pies; 50.8 pies **95.** 80 + 1 = 81 árboles **97.** de vinilo **99.** \$361.20 **101.** \$192 **103.** 111,825 mi^2 **105.** 51 chapas
111. $6t$ **113.** $-2w + 4$ **115.** $-\frac{5}{8}x$ **117.** $9r - 16$

Espacio para el Estudio Sección 9.8 (página 798)

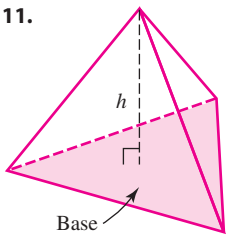
1. radio **3.** diámetro **5.** circunferencia **7.** doble
9. $\overline{OA}, \overline{OC}, \overline{OB}$ **11.** $\overline{DA}, \overline{DC}, \overline{AC}$ **13.** $\overset{\frown}{ABC}, \overset{\frown}{ADC}$
15. a. Multiplicando el radio por 2. **b.** Dividiendo el diámetro entre 2. **17.** π **19.** elevar al cuadrado el 6
21. arco AB **23. a.** multiplicación: $2 \cdot \pi \cdot r$ **b.** elevar a una potencia y multiplicación: $\pi \cdot r^2$
25. 8π pies ≈ 25.1 pies **27.** 12π m ≈ 37.7 m **29.** 50.85 cm **31.** 31.42 pulg. **33.** 9π pulg.^{2} ≈ 28.3 pulg.^{2} **35.** 81π pulg.^{2} ≈ 254.5 pulg.^{2} **37.** 128.5 cm^2 **39.** 57.1 cm^2 **41.** 27.4 pulg.^{2} **43.** 66.7 pulg.^{2} **45.** 50π yd ≈ 157.08 yd **47.** 6π pulg. ≈ 18.8 pulg. **49.** 20.25π mm^2 ≈ 63.6 mm^2 **51. a.** 1 pulg. **b.** 2 pulg. **c.** 2π pulg. ≈ 6.28 pulg. **d.** π pulg.^{2} ≈ 3.14 pulg.^{2} **53.** π mi^2 ≈ 3.14 mi^2 **55.** 32.66π pies ≈ 102.60 pies **57.** 13 times **59.** 4π pies^2 ≈ 12.57 pies^2; 0.25π pies^2 ≈ 0.79 pies^2; 6.25% **65.** 90% **67.** 82.7% **69.** 5.375¢ por oz **71.** cinco

Espacio para el Estudio Sección 9.9 (página 806)

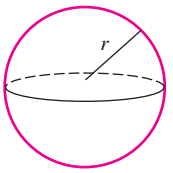
1. volumen **3.** cono **5.** cilindro **7.** pirámide
9.



11.



13.



15. pulgadas cúbicas, mi^3, m^3 **17. a.** perímetro **b.** volumen **c.** área **d.** volumen **e.** área **f.** circunferencia **19. a.** 50π **b.** $\frac{500}{3}\pi$ **21. a.** pulgada cúbica **b.** 1 cm^3 **23.** un ángulo recto **25.** 27 **27.** 1,000,000,000 **29.** 56 pies^3 **31.** 125 pulg.^{3} **33.** 120 cm^3 **35.** 1,296 pulg.^{3} **37.** 700 yd^3 **39.** 32 pies^3 **41.** 69.72 pies^3 **43.** 6 yd^3 **45.** 192π pies^3 ≈ 603.19 pies^3 **47.** $3{,}150\pi$ cm^3 ≈ 9,896.02 cm^3 **49.** 39π m^3 ≈ 122.52 m^3 **51.** 189π yd^3 ≈ 593.76 yd^3 **53.** 288π pulg.^{3} ≈ 904.8 pulg.^{3} **55.** $\frac{32}{3}\pi$ cm^3 ≈ 33.5 cm^3 **57.** 486π pulg.^{3} ≈ 1,526.81 pulg.^{3} **59.** 423π m^3 ≈ 1,357.17 m^3 **61.** 60 cm^3 **63.** 100π cm^3 ≈ 314.16 cm^3 **65.** 400 m^3 **67.** 48 m^3 **69.** 576 cm^3 **71.** 180π cm^3 ≈ 565.49 cm^3 **73.** $\frac{1}{8}$ pulg.^{3} = 0.125 pulg.^{3} **75.** 2.125 **77.** 63π pies^3 ≈ 197.92 pies^3 **79.** $\frac{32{,}000}{3}\pi$ pies^3 ≈ 33,510.32 pies^3 **81.** 8:1 **83. a.** $2{,}250\pi$ pulg.^{3} ≈ 7,068.58 pulg.^{3} **b.** 30.6 gal **89.** −42 **91.** −4 **93.** $\frac{1}{5}$ o 1:5 **95.** 2,400 mm

Repaso del Capítulo 9 (página 811)

1. puntos C y D, recta CD, plano GHI **2. a.** 6 unidades **b.** E **c.** sí **3.** $\angle ABC, \angle CBA, \angle B, \angle 1$ **4. a.** agudo **b.** B **c.** $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ **d.** 48° **5.** $\angle 1$ y $\angle 2$ son agudos, $\angle ABD$ y $\angle CBD$ son ángulos rectos, $\angle CBE$ es obtuso, y $\angle ABC$ es un ángulo llano **6.** sí **7.** sí **8. a.** ángulo obtuso **b.** ángulo recto **c.** ángulo llano **d.** ángulo agudo **9.** 15° **10.** 150° **11. a.** $m(\angle 1) = 65°$ **b.** $m(\angle 2) = 115°$ **12. a.** 39° **b.** 90° **c.** 51° **d.** 51° **e.** sí **13. a.** 20° **b.** 125° **c.** 55° **14.** 19° **15.** 37°

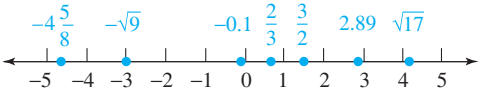
16. No, sólo dos ángulos pueden ser suplementarios. **17. a.** paralelas **b.** transversal **c.** perpendicular **18.** $\angle 4$ y $\angle 6$, $\angle 3$ y $\angle 5$ **19.** $\angle 1$ y $\angle 5$, $\angle 4$ y $\angle 8$, $\angle 2$ y $\angle 6$, $\angle 3$ y $\angle 7$ **20.** $\angle 1$ y $\angle 3$, $\angle 2$ y $\angle 4$, $\angle 5$ y $\angle 7$, y $\angle 6$ y $\angle 8$ **21.** $m(\angle 1) = m(\angle 3) = m(\angle 5) = m(\angle 7) = 70°$; $m(\angle 2) = m(\angle 4) = m(\angle 6) = 110°$ **22.** $m(\angle 1) = 60°$, $m(\angle 2) = 120°$, $m(\angle 3) = 130°$, $m(\angle 4) = 50°$ **23. a.** 40° **b.** 50°, 50° **24. a.** 20° **b.** 110°, 70° **25. a.** 11° **b.** 31°, 31° **26. a.** 23° **b.** 82°, 82° **27. a.** 8, octágono, 8 **b.** 5, pentágono, 5 **c.** 3, triángulo, 3 **d.** 6, hexágono, 6 **e.** 4, cuadrilátero, 4 **f.** 10, decágono, 10 **28. a.** isósceles, **b.** escaleno **c.** equilátero **d.** isósceles **29. a.** agudo **b.** recto **c.** obtuso **d.** agudo **30. a.** 90° **b.** rectángulo **c.** $\overline{XY}$, $\overline{XZ}$ **d.** $\overline{YZ}$ **e.** $\overline{YZ}$ **f.** $\overline{YZ}$ **31.** 90° **32.** 50° **33.** 71° **34.** 18°; 36°, 28°, 116° **35.** 50° **36.** 56° **37.** 67° **38.** 83° **39.** 13 cm **40.** 17 ft **41.** 36 pulg. **42.** 20 pies **43.** $\sqrt{231}$ m $\approx$ 15.20 m **44.** $\sqrt{1{,}300}$ pulg. $\approx$ 36.06 pulg. **45.** 73 pulg. **46.** $\sqrt{1{,}023}$ pulg. $\approx$ 32 pulg. **47.** no es un triángulo rectángulo **48.** no es un triángulo rectángulo **49. a.** $\angle D$ **b.** $\angle E$ **c.** $\angle F$ **d.** $\overline{DF}$ **e.** $\overline{DE}$ **f.** $\overline{EF}$ **50. a.** 32° **b.** 61° **c.** 6 pulg. **d.** 9 pulg. **51.** congruentes, LLL **52.** congruentes, LAL **53.** no necesariamente congruentes **54.** congruentes, ALA **55.** sí **56.** sí **57.** 4, 28 **58.** 65 pies **59. a.** trapezoide **b.** cuadrado **c.** paralelogramo **d.** rectángulo **e.** rombo **f.** rectángulo **60. a.** 15 cm **b.** 40° **c.** 100° **d.** 7.5 cm **e.** 14 cm **61. a.** verdadero **b.** verdadero **c.** verdadero **d.** falso **62. a.** 65° **b.** 115° **c.** 4 yd **63.** 1,080° **64.** 20 lados **65.** 72 pulg. **66.** 86 pulg. **67.** 30 m **68.** 36 m **69.** 59 pies **70. a.** 9 pies^2 **b.** 144 pulg.^{2} **71.** 9.61 cm^2 **72.** 7,500 pies^2 **73.** 450 pies^2 **74.** 200 pulg.^{2} **75.** 120 cm^2 **76.** 232 pies^2 **77.** 152 pies^2 **78.** 120 m^2 **79.** 8 pies **80.** 18 mm **81.** \$3,281 **82.** \$4,608 **83. a.** $\overline{CD}$, $\overline{AB}$ **b.** $\overline{AB}$ **c.** $\overline{OA}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$, $\overline{OB}$ **d.** O **84.** 21π pies $\approx$ 65.97 pies **85.** 45.1 cm **86.** 81π pulg. $\approx$ 254.47 pulg.^{2} **87.** 130.3 cm^2 **88.** 6,073.0 pulg.^{2} **89.** 125 cm^3 **90.** 480 m^3 **91.** 1,728 mm^3 **92.** $\frac{500}{3}\pi$ pulg.^{3} $\approx$ 523.60 pulg.^{3} **93.** 250π pulg.^{3} $\approx$ 785.40 pulg.^{3} **94.** 2,000 yd^3 **95.** 2,940 m^3 **96.** $\frac{1{,}024}{3}\pi$ pulg.^{3} $\approx$ 1,072.33 pulg.^{3} **97.** 1,518 pies^3 **98.** 3.125π pulg.^{3} $\approx$ 9.8 pulg.^{3} **99.** 1,728 pulg.^{3} **100.** 54 pies^3

Examen del Capítulo 9 (página 834)

1. a. 135°, obtuso **b.** 90°, recto **c.** 40°, agudo **d.** 180°, llano **2. a.** medida **b.** longitud **c.** recta **d.** complementarios **3.** D **4. a.** falso **b.** verdadero **c.** verdadero **d.** verdadero **e.** falso **5.** 20°; 60°, 60° **6.** 133° **7. a.** transversal **b.** $\angle 6$ **c.** $\angle 7$ **8.** $m(\angle 1) = 155°$, $m(\angle 3) = 155°$, $m(\angle 4) = 25°$, $m(\angle 5) = 25°$, $m(\angle 6) = 155°$, $m(\angle 7) = 25°$, $m(\angle 8) = 155°$ **9.** 50°; 110°, 70° **10. a.** 8, octágono, 8 **b.** 5, pentágono, 5 **c.** 6, hexágono, 6 **d.** 4, cuadrilátero, 4 **11. a.** isósceles **b.** escaleno **c.** equilátero **d.** isósceles **12.** 70° **13.** 84° **14. a.** 12 **b.** 13 **c.** 90° **d.** 5 **15. a.** 10 **b.** 65° **c.** 115° **d.** 115° **16.** 1,440° **17.** 118 pulg. **18.** 15.2 m **19.** 360 cm^2 **20.** \$864 **21.** 144 pulg.^{2} **22.** 120 pulg.^{2} **23. a.** $\overline{RS}$, $\overline{XY}$ **b.** $\overline{XY}$ **c.** $\overline{OX}$, $\overline{OR}$, $\overline{OS}$, $\overline{OY}$ **24.** π **25.** 21π pies $\approx$ 66.0 pies **26.** $(40 + 12\pi)$ pies $\approx$ 77.7 pies **27.** 225π m^2 $\approx$ 706.9 m^2 **28.** $\angle R$, $\angle S$, $\angle T$; $\overline{RT}$, $\overline{RS}$, $\overline{ST}$ **29. a.** congruentes, LLL **b.** congruentes, ALA **c.** no necesariamente congruentes **d.** congruentes, LAL **30. a.** 8 pulg. **b.** 50° **31. a.** sí **b.** sí **32. a.** 6 m **b.** 12 m **33.** 21 pies **34. a.** 26 cm **b.** $\sqrt{28}$ pulg. $\approx$ 5.3 pulg. **35.** $\sqrt{986}$ pulg. $\approx$ 31.4 pulg. **36.** 1,728 pulg.^{3} **37.** 216 m^3 **38.** 5,400 pies^3 **39.** $1{,}296\pi$ pulg.^{3} $\approx$ 4,071.50 pulg.^{3} **40.** 600 pulg.^{3} **41.** 1,890 pies^3 **42.** 63π yd^3 $\approx$ 197.92 yd^3 **43.** 400 mi^3 **44.** $\frac{256}{3}\pi$ pulg.^{3} $\approx$ 268.08 pulg.^{3} **45.** $11{,}250\pi$ pies^3 $\approx$ 35,343 pies^3

Repaso acumulativo de los Capítulos 1–9 (página 838)

1. \$8,995 **2.** 2,110,000 **3.** 32,034 **4.** 11,022 **5. a.** 602 pies **b.** 19,788 pies^2 **6.** 33 R 10 **7.** 48 gal **8. a.** $2^2 \cdot 5 \cdot 11$ **b.** 1, 2, 3, 4, 6, 12 **9. a.** 48 **b.** 8 **10.** 11 **11. a.** $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ **b.** 3 **12. a.** -12 **b.** 20 **c.** -64 **d.** 4 **e.** -16 **f.** 16 **13.** $-\$140$ **14.** -2 **15. a.** $\frac{5}{4}$ **b.** $\frac{18}{48}$ **c.** $\frac{8}{9}$ **d.** $\frac{15}{2}$ **16.** 9 oz **17.** $-\frac{3}{70}$ **18.** $\frac{1}{6}$ **19.** $\frac{3}{20}$ **20.** $-\frac{11}{20}$ **21.** $142\frac{7}{15}$ **22.** $\frac{38}{29} = 1\frac{9}{29}$ **23.** $\frac{3}{32}$ oz líquidas **24.** $13\frac{3}{4}$ tazas **25.** $\frac{8}{9}$ **26. a.** 3.1416 **b.** $>$ **c.** seis millones, quinientos diez mil, trescientos cuarenta y cinco y setecientos noventa y ocho milésimas **d.** $7{,}000 + 400 + 90 + 8 + \frac{6}{10} + \frac{4}{100} + \frac{6}{1{,}000} + \frac{1}{10{,}000}$ **27.** 145.188 **28.** 3,803.61 **29.** -25.6 **30.** 17.05 **31.** 0.053 **32.** 22.3125 **33.** \$2,712.50 **34. a.** 899,708 **b.** 0.899708 **35.** $18{,}000 \div 9 = 2{,}000$ **36.** -9.32 **37.** $0.1\overline{3}$ **38. a.** -2 **b.** $\frac{7}{9}$ **39.**



40. a. $\frac{3}{7}$ **b.** $\frac{1}{4}$ **41.** el pizarrón más pequeño **42.** $6\frac{1}{2} = 6.5$ **43.** 125,000 **44.** 75 pies **45. a.** 14 pies **b.** 13.25 lb $= 13\frac{1}{4}$ lb **c.** 120 cuartos **d.** 750 min **46. a.** 1,538 g **b.** 0.5 L **c.** 0.000003 km **47.** 240 km **48. a.** alrededor de 4 m/gal **b.** 11,370,000 L **49.** alrededor de 4.5 kg **50.** 167 °F **51.** $0.57, \frac{57}{100}, 0.1\%, \frac{1}{1{,}000}, 33\frac{1}{3}\%, 0.\overline{3}$ **52. a.** 93% **b.** 7% **53.** 67.5 **54.** 120 **55.** 85% **56.** \$205, \$615 **57.** \$1,159.38 **58.** 500% **59.** \$21 **60.** \$1,567.50 **61. a.** 380,000 vehículos **b.** 295,000 vehículos **c.** 90,000 vehículos **62. a.** 18% **b.** 2,920,000 **63. a.** alimentos: alrededor de \$17.5 mil millones **b.** alrededor de \$2.2 mil millones

c. alrededor de \$8.5 mil millones **64.** media: 0.86 oz, mediana: 0.855 oz, moda: 0.85 oz **65.** 5 **66. a.** $2x - 16$ **b.** $75s + 6$ **67. a.** $48a$ **b.** $42b$ **68. a.** $27t - 90$ **b.** $32x - 40y + 8$ **69. a.** $3x$ **b.** $6c^2$ **c.** $-8m + 6n$ **d.** $-12x + 8$ **70.** no es una solución. **71.** -24 **72.** 5 **73.** 89 **74.** -11 **75.** Debe realizar siete visitas de 6 horas al salón de clases. **76. a.** base: 4, exponente: 8 **b.** base: s, exponente: 4 **77. a.** s^{10} **b.** a^{35} **c.** r^5t^9 **d.** $8b^9c^{18}$ **e.** y^{22} **f.** $(-5.5)^{36}$ **78. a.** agudo **b.** recto **c.** obtuso **d.** 180° **79. a.** 75° **b.** 15° **80. a.** 50° **b.** 50° **c.** 130° **d.** 50° **81. a.** 75° **b.** 30° **c.** 105° **d.** 105° **82.** 46°, 134° **83.** 73° **84.** 26 m **85.** sí **86.** 42 ft **87.** 540° **88.** 48 m, 144 m^2 **89.** 126 $pies^2$ **90.** 91 $pulg.^2$ **91.** 144 $pulg.^2$ **92.** circunferencia: 14π cm $\approx$ 43.98 cm, área: 49π $cm^2 \approx 153.94$ cm^2 **93.** 98.31 yd^2 **94.** 6,480 $pulg.^3$ **95.** 972π $pulg.^3 \approx 3{,}053.63$ $pulg^3$ **96.** 48π $m^3 \approx 150.80$ m^3 **97.** 20π $pies^3 \approx 62.83$ $pies^3$ **98.** 1,728 $pulg.^3$

Apéndice I (página A-1)

Cincuenta ejercicios de la suma

1. 5 **3.** 7 **5.** 14 **7.** 12 **9.** 11 **11.** 9 **13.** 10 **15.** 7 **17.** 17 **19.** 7 **21.** 10 **23.** 18 **25.** 8 **27.** 13 **29.** 3 **31.** 8 **33.** 6 **35.** 8 **37.** 6 **39.** 10 **41.** 1 **43.** 8 **45.** 11 **47.** 15 **49.** 12

Cincuenta ejercicios de la resta

1. 3 **3.** 2 **5.** 4 **7.** 4 **9.** 9 **11.** 9 **13.** 6 **15.** 6 **17.** 2 **19.** 8 **21.** 9 **23.** 7 **25.** 8 **27.** 2 **29.** 9 **31.** 5 **33.** 6 **35.** 2 **37.** 5 **39.** 8 **41.** 1 **43.** 4 **45.** 7 **47.** 4 **49.** 7

Cincuenta ejercicios de la multiplicación

1. 16 **3.** 18 **5.** 35 **7.** 10 **9.** 56 **11.** 9 **13.** 30 **15.** 15 **17.** 8 **19.** 0 **21.** 48 **23.** 0 **25.** 32 **27.** 9 **29.** 54 **31.** 0 **33.** 24 **35.** 12 **37.** 40 **39.** 28 **41.** 45 **43.** 21 **45.** 36 **47.** 25 **49.** 72

Cincuenta ejercicios de la división

1. 5 **3.** 2 **5.** 5 **7.** 5 **9.** 1 **11.** 9 **13.** 4 **15.** 0 **17.** 2 **19.** 1 **21.** 7 **23.** 9 **25.** 5 **27.** 3 **29.** 0 **31.** 3 **33.** 8 **35.** 7 **37.** 4 **39.** 7 **41.** 6 **43.** 4 **45.** 2 **47.** 1 **49.** 2

Espacio para el Estudio Sección II.1 (página A-7)

1. monomio **3.** binomio **5.** binomio **7.** monomio **9.** monomio **11.** trinomio **13.** 3 **15.** 2 **17.** 1 **19.** 7 **21.** 2, 2, 4, 4, 16 **23.** 13 **25.** 6 **27.** 31 **29.** 4 **31.** 1 **33.** 0 pies **35.** 64 pies **37.** 63 pies **39.** 198 pies **43.** 2 **45.** $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ **47.** 16 **49.** 6

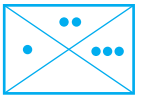
Espacio para el Estudio Sección II.2 (página A-12)

1. similares **3.** coeficientes, variables **5.** sí, $7y$ **7.** no **9.** sí, $13x^3$ **11.** sí, $15x^2$ **13.** $2x^2, 7x, 5x^2$ **15.** $9y$ **17.** $12t^2$ **19.** $14s^2$ **21.** $\frac{9}{8}a$ **23.** $\frac{5}{3}c$ **25.** $7x + 4$ **27.** $7x^2 - 7$ **29.** $12x^3 - 149x$ **31.** $8x^2 + 2x - 21$ **33.** $8y^2 + 4y - 2$ **35.** $6x^2 + x - 5$ **37.** $6.1a^2 + 10a - 19$ **39.** $2n^2 + 5$ **41.** $5x^2 + x + 11$ **43.** $-7x^2 - 5x - 1$ **45.** $2x^2 + x + 12.9$ **47.** $16u^3$ **49.** $7x^5$ **51.** $-19x^2 - 5$ **53.** $7x^2 - 2x - 5$ **55.** $1.6a + 8$ **57.** $7b + 4$ **59.** $p^2 - 2p$ **61.** $1.7y^2 + 3.1y - 9$ **63.** $5x^2 + 6x - 8$ **65.** $-12x^2 - 13x + 36$ **67.** $-x^3 + x + 14$ **69.** $12x$ **71.** $(4x + 8)$ pies **77.** 0.8 oz **79.** 54 pies

Espacio para el Estudio Sección II.3 (página A-19)

1. monomios **3.** primeros, exteriores, interiores, último **5. a.** cada, cada **b.** cualquiera, tercero **7. a.** $6x^2 + x - 12$ **b.** $5x^4 + 8ax^2 + 3a^2$ **9.** $8, n^3, 72n^5$ **11.** $2x, 5, 5, 4x, 15x, 11x$ **13.** $12x^5$ **15.** $-6b^3$ **17.** $-6x^5$ **19.** $-\frac{1}{2}y^7$ **21.** $3x + 12$ **23.** $-4t - 28$ **25.** $3x^2 - 6x$ **27.** $-6x^4 + 2x^3$ **29.** $6x^3 + 8x^2 - 14x$ **31.** $-2p^3 + 3p^2 - 2p$ **33.** $3q^4 - 6q^3 + 21q^2$ **35.** $a^2 + 9a + 20$ **37.** $3x^2 + 10x - 8$ **39.** $6a^2 + 2a - 20$ **41.** $4x^2 + 12x + 9$ **43.** $4x^2 - 12x + 9$ **45.** $25t^2 - 10t + 1$ **47.** $81b^2 - 36b + 4$ **49.** $6x^3 - x^2 + 1$ **51.** $x^3 - 1$ **53.** $x^3 - x^2 - 5x + 2$ **55.** $r^4 - 5r^3 + 2r^2 - 7r - 15$ **57.** $4x^2 + 11x + 6$ **59.** $12x^2 + 14x - 10$ **61.** $x^3 + 1$ **63.** $12x^3 + 17x^2 - 6x - 8$ **65.** $(x^2 - 4)$ $pies^2$ **67.** $(6x^2 + x - 1)$ cm^2 **69.** $(35x^2 + 43x + 12)$ $pulg.^2$ **75.** cuatro y noventa y un milésimas **77.** 0.109375 **79.** 134.657 **81.** 10

Espacio para el Estudio Apéndice III (página A-27)

1. inductivo **3.** circular **5.** alternado **7.** alternado **9.** 10 A.M. **11.** 17 **13.** 27 **15.** 3 **17.** -17 **19.** R **21.** e **23.** **25.** **27.**  **29.**

31. D **33.** María **35.** 6 gerentes de oficina **37.** 9 niños **39.** I **41.** W **43.** **45.** K **47.** 6 **49.** 3 **51.** -11 **53.** 9 **55.** jaula 3 **57.** B, D, A, C **59.** 18,935 encuestados **61.** 0

ÍNDICE ANALÍTICO

AAA Teorema de semejanza, 759, 822
Acarreo, en la suma, 16, 115
Adición
  comprobación de resultados, 18
  escritura de símbolos empleados para, 146
  expresión algebraica de la, 641
  palabras y expresiones claves que indican, 21, 116
  propiedad asociativa de
    definición, 149
    para números naturales, 18, 19, 115
    representación en fórmula, 638, 693
    usos para, 195
  propiedad conmutativa de la, 18, 115
    definición, 149
    representación en fórmula, 638, 696
    usos para, 195
  propiedad identidad de la, 639
  repetida, 40, 46, 119
Agrupaciones de igual tamaño
  resolución dividiendo fracciones, 237, 301
  resolución por división, 179, 199
Ángulo
  Vea *también* tipos específicos
  adyacente, 716, 812
  agudo, 715, 812
  alterno interno
    definición, 727, 815
    propiedad del, 728
  basal, 738, 818
  clasificación, 715, 812
  complementario, 718, 813
  complemento del
    definición, 719
    obtención utilizando álgebra, 813
  correspondiente
    definición, 726, 815
    obtención de las medidas desconocidas de, 816
    propiedad de, 728
  de un trapezoide, 769
  definición, 714, 812
  del vértice, 738, 818
  interior
    definición, 815
    ejemplos de, 727
    obtención de mediciones desconocidas con el álgebra, 815
    propiedad del, 728
  llano, 715, 812
  obtuso, 715, 812
  recto, 715, 812
  suplementario, 718, 813
  suplemento del
    definición, 719
    obtención utilizando álgebra, 813
  vertical
    definición, 716, 813
    propiedad de congruencia de un, 717, 813
Aproximación, 7
Árbol de factores, 83, 123
Arco de circunferencia, 793, 829
Área
  definición, 780, 826
  unidades del, 827
Aritmética, teorema fundamental de la, 83
Arreglo rectangular, 47, 119

Barra
  de fracciones, 54
  diagonal, tasas unitarias y, 421, 481
  superior y decimales repetitivos, 374
Base
  10, 2
  de un trapezoide, 769, 825
  de un triángulo isósceles, 738, 818
  en enunciados porcentuales
    definición, 515, 574
    identificación, 515
  en exponentes, 85, 124
  en fórmulas de volumen, 803, 831
Bimodal, 615, 629

Calculadora
  aproximación del volumen con, 832
  cálculo de las revoluciones de un neumático con, 794
  cálculo de los costos para el pintado de una plataforma de aterrizaje para helicópteros con, 797
  decimales y
    división con, 363
    multiplicación con, 346
    resta con, 334
    suma con, 332
  división con, 64
  interés compuesto con, 565
  introducción de números negativos en, 151
  multiplicación con, 48
  números negativos
    división con, 180
    elevación a una potencia, 171
    multiplicación con, 167
    resta con, 161
  obtención de medias con, 610
  obtención de perímetros de figuras que son combinaciones de polígonos con, 779
  obtención de porcentajes con, 517
  obtención del ancho de la pantalla de una TV con, 750
  obtención del volumen de un silo con, 805
  orden de las operaciones y paréntesis y, 108
  raíces cuadradas y
    aproximación con, 390
    obtención con, 388
  resolución de proporciones con, 435
  resta con, 35
  suma con, 23
  tecla del punto fijo de, 378
  tecla exponencial de la, 86
  teorema de Pitágoras y, 749, 820
Cambio, obtención en una cantidad, 160, 196
Cantidad
  de cambio, graficación, 600, 624
  en enunciados porcentuales
    definición, 515, 574
    identificación, 515
  graficación del cambio, 600, 624
  total, interés y, 560, 584
Capacidad
  equivalencias americanas/métricas, 473, 493
  factor de conversión de unidades para, 449
  unidades americanas de, 449
Cateto
  de un triángulo, 738, 818
  de un triángulo rectángulo, 747
  de un trapezoide, 769, 825
Celsius
  escala, 474
  fórmula de conversión para, 474
  medición, 492
Centímetro cúbico, 465, 489, 490
Cero
  propiedad de adición del, 150, 195, 639
  propiedad de multiplicación del, 168, 639
Cilindro, obtención del volumen de un, 802, 831
Círculo
  arco de circunferencia de un, 793, 829
  área de un, 796, 830
  centro de un, 792, 829
  circunferencia de un, 794, 829
  cuerda de un, 793, 829
  definición, 792, 829
  radio de un, 792, 829
Circunferencia
  definición, 793, 829
  fórmulas para la obtención de, 793, 829
Clave
  para gráficas, 622
  para gráficas de barras, 596
  para pictografías, 597
Cociente
  cálculo, 62, 121
  decimal
    estimado, 363, 402
    redondeo, 362, 402
    definición, 54
Coeficiente, 640, 697
  implícito, 640

Comisión
cantidad de, 538, 579
fórmula para, 638, 579
tasa de, 579
Común denominador, 242
Congruencia
ángulos alternos internos y, 728, 815
ángulos correspondientes y, 815
ángulos verticales y, 717, 813
ángulos y, 715, 812
paralelogramos y, 769, 824
segmentos de recta y, 713, 812
trapezoides isósceles y, 770, 825
triángulos y, 754, 822
Cono, hallazgo del volumen de un, 802, 831
Constantes, 638, 696
Corchetes, 105
Costo total, fórmula para el, 536, 578
Crédito (educativo), 628
Cuadrado
definición, 22, 386, 767, 824
obtención del área de un, 781, 826
obtención del perímetro de un, 777, 826
perfecto
definición, 387, 406
raíz cuadrada de un, 386
Cuadrado perfecto
definición, 387, 406
raíz cuadrada de, 386
Cuadrilátero, 767, 824
Cubo, obtención del volumen de un, 802, 831
Cuerda, 792, 829

Decimal
como números irracionales, 376
como números racionales, 376
comparación
con otro decimal, 321, 396
con una fracción, 378, 405
conversión de palabras a forma estándar, 320, 395
definición, 316
división
con signo, 364, 403
entre otro decimal, 360, 361, 402
entre potencias de 10, 364, 402, 403
entre un número natural, 358, 401
en sumas, 331
equivalencia a una fracción, 372, 404
escritura
como un porcentaje, 506, 572
en palabras, 319, 395
forma estándar de, 317
forma expandida de, 318, 395
graficación de una recta numérica, 322, 396
gráficas y, 324
lectura, 319, 395
multiplicación
con signo, 349, 400
estimado de productos, 351, 400
forma vertical para, 345
por potencias de 10 mayores a 1, 347, 399
por potencias de 10 menores a 1, 348, 399
procesos para, 344, 399
negativo, 317, 321
notación estándar de, 317
notación expandida de, 318, 395
parte de número natural, 316, 395
parte fraccionaria, 316, 395
raíces cuadradas y no determinantes, 390
raíz cuadrada de, 388
rectas numéricas y, 378
redondeo, 322, 396
repetitivos
definición, 373, 404
redondeo, 376, 404
resta
acarreo negativo y, 333, 398
con signo, 335, 398
diferencias estimadas en, 336, 398
forma vertical para, 332, 397
procesos para, 333
reagrupación para, 333, 398
suma
acarreo y, 331, 398
con signo, 335, 398
estimado de sumas, 336, 398
forma vertical para, 330, 397
proceso para, 331
sumandos y, 331
tablas y, 324
terminación, 373, 404
Decimales repetitivos
barras superiores y, 374, 404
como una fracción, 507, 572
definición, 373, 404
redondeo, 376
Denominador
común, 242
definición, 208, 296, 308
del 0, 210, 297
del 1, 210, 297
mínimo común. *Vea* Mínimo común denominador (mcd)
orden de las operaciones y, 102, 126, 183, 200
Descuento
definición, 544
fórmulas para, 544, 580, 581
Desigualdad
estricta, 136
símbolos utilizados para, 136, 193
Diámetro, 793, 829
Diferencia
decimales y, 332
definición, 29
Dígito(s), 2, 113
a examinar
en un decimal, 322, 396
en un número natural, 7, 114
a redondear
en un decimal, 322, 396
en un número natural, 7, 114
Dinero, redondeo, 324, 396
Dividendo, 54
Divisibilidad
definición, 61
pruebas para, 61
División
con cero, 56, 121
de números naturales que terminan con cero, 62, 121
frases algebraicas de la, 641
larga
forma de, 358
procesos para, 56, 120
palabras y frases clave que indican, 64, 121
propiedad de igualdad de la, 664, 700
propiedades de
fórmulas que representan, 639
enunciado de, 55, 121
símbolos utilizados para, 54, 120
Divisor, 54

Ecuación
comparada con una expresión, 658
definición, 428, 658, 700
del porcentaje
definición, 513
fórmula para, 515, 574
fracciones contra decimales en, 519, 574
obtención de cantidades con, 515, 574, 576
obtención de la base con, 518, 574
obtención de porcentajes con, 515, 574
estrategias para la resolución de, 673, 701
lados de, 658
resolución
con propiedades de igualdad múltiples, 668
definición, 567, 700
simplificación de expresiones en, 671, 701
satisfacción, 658
solución de, 658, 700
Ecuaciones equivalentes, 659, 700
Eje, 595
en escalera, 84, 123
horizontal, 595, 622
vertical, 595, 622
Entero
definición, 133, 192
división
con signo, 176, 199
entre cero, 178, 199
graficación en una línea de números, 133
multiplicación
con signos diferentes, 165, 197
con signos iguales, 166, 197
no cero, 167
para resolver sumas repetidas, 171, 198
negativo
definición, 133, 137
en una recta numérica, 193
multiplicación, 169, 198
potencias de, 170, 198
opuestos, 137, 193
positivo, 133
resta, 156
suma
con diferente signo, 147, 194
con mismo signo, 145, 194
valor absoluto de, 136

Enunciado
de multiplicación relacionado, 54, 120
de suma relacionado, 33, 117
del porcentaje, 513, 574
matemático, explicación de, 739, 750
Equivalente decimal, 372
Esfera, hallazgo del volumen de una, 802, 831
Estimación
con porcentajes, 552, 582
de cocientes, 62, 121
redondeo por la izquierda
adición y, 20, 116
multiplicación y, 46, 119
resta y, 33, 117
simplificación de cálculos utilizando, 187, 200
Euclides, 712
Exponente
definición, 85, 124
del uno, 693
número natural
definición, 688, 705
reglas para, 693, 705
regla de las potencias para
definición, 691
fórmula que representa, 693, 705
regla del producto para
definición, 690
fórmula que representa, 693, 705
Expresión
comparada con una ecuación, 658
definición, 35, 639, 697
evaluación, 643, 697
definición, 35, 118
en forma horizontal, 35, 118
que contiene fracciones y decimales, 380, 405
que contiene raíces cuadradas, 388, 407
que involucra una resta, 159, 196
que involucra una suma, 159, 196
que involucre múltiples sumas, 149, 195
regla del orden de las operaciones para, 102, 126
palabras y frases clave de, 641, 697
simplificación
definición, 648
para resolver ecuaciones, 671, 701
propiedad distributiva y, 699
propiedades de multiplicación y, 648, 698
Expresión exponencial
con bases negativas, 169, 198
definición, 85, 689
evaluación, 85, 124
con base decimal, 349, 400
con base fraccional, 224, 299
Expresión radical
definición, 386
evaluación, 387, 406
Expresiones equivalentes, 648
Extremo, en una proporción, 430, 482

Factor, 40, 80, 123
de conversión de unidades
definición, 445, 485
para el peso, 447, 471
para el tiempo, 450
para la capacidad, 449, 492
para la longitud, 445, 491
para la masa, 491
para longitudes, 470
utilizando múltiplos, 446, 472, 486, 491
de conversión de unidades métricas
para la capacidad, 464, 489
para la longitud, 458, 488
para la masa, 462, 489
Factorización de primos, 83, 123
Fahrenheit
escala, 474
fórmula de conversión para, 474
medición, 492
Forma
del 1, 210, 297
estándar
de decimales, 317
de números naturales, 2, 113
números grandes y decimales, 348, 400
expandida
de los decimales, 318
de los números naturales, 4, 113
horizontal
para problemas de multiplicación, 40
para problemas de resta, 29
para problemas de suma, 16
irregular, obtención del área de una, 784, 797, 827, 830
vertical
para problemas de multiplicación, 40, 118
para problemas de resta, 29, 117
para problemas de suma, 16, 115
Fórmula
decimales y, 350, 365, 400
fracciones complejas y, 287, 308
raíces cuadradas y, 390, 407
Fracción
como decimal repetitivo, 507, 572
como número racional, 211
comparación, 249, 303
con decimal, 378, 405
compleja
definición, 288, 309
simplificación, 288, 309
con diferente denominador
resta, 245
suma, 245
con el mismo denominador
resta, 242
suma, 242
con signo
multiplicación, 222, 299
resta, 243
construcción
definición, 211
proceso para, 212, 297
de en problemas utilizando, 225, 299
definición, 208, 296
división
con diferente signo, 236, 301
con mismo signo, 237, 301
regla para, 235, 300
en notación decimal
decimales repetitivos y, 508, 572
definición, 316
equivalencia a decimal, 372, 404
equivalente, 211, 297
escritura
como un decimal, 372, 374, 404
como un porcentaje, 506, 572
forma más simple de, 213, 297
graficación en una recta numérica, 260, 304
identificación del mayor de dos, 249, 303
impropia
conversión a partir de un número mixto, 259
definición, 209, 297
escritura como un número mixto, 260
indeterminada, 210
mayor a 1 como un porcentaje, 507
multiplicación
con signo, 222, 299
proceso para, 211, 222, 298
simplificación de respuestas, 223
tres o más, 224
negativa, 209
propia, 209, 297
propiedad fundamental de, 212
raíz cuadrada de, 388
recta numérica y, 378
resta
con diferente denominador, 245, 302
con el mismo denominador, 242, 302
con signo, 243
simplificación
de formas especiales de, 210
pasos de, 216, 297
proceso para, 214
suma
con el mismo denominador, 242, 302
con diferente denominador, 245, 302
términos más bajos de, 213, 297
usos para, 208
Fracciones equivalentes
definición, 211, 297
Función valor absoluto
en expresiones, 186, 200
símbolo utilizado para la, 136

Ganancia neta, 188
Geometría
definición, 712, 811
uso de conceptos algebraicos para resolver problemas de, 716

Grado, como medida de un ángulo, 714
Grados (temperatura)
  Celsius
    escala, 474
    fórmula de conversión para, 474
    medición, 492
  Fahrenheit
    escala 474
    fórmula de conversión para, 474
    medición, 492
Gráfica
  circular
    ejemplo de, 594
    en fórmulas del volumen, 832
    lectura, 527, 576, 598, 623
  de barras
    decimales y, 324
    dobles, 596, 622
    ejemplo de, 594
    lectura, 595, 622
    triples, 596, 622
  de rectas, lectura de, 599, 623
  de un número, 5
Gramo, 489

Hemisferio, 809
Hipotenusa
  definición, 738, 818
  de un triángulo rectángulo, 738, 747, 818
Histograma, 601, 624
Hora crédito, 612

Identidad aditiva, 150
Igualdad
  propiedad de adición en la, 659, 700
  propiedad de división en la, 664, 700
  propiedad de multiplicación en la, 662, 700
  propiedad de sustracción en la, 700
Impuesto sobre la venta
  fórmula para el, 536, 578
  tasa del, 536, 578
Ingreso neto, 135
Interés
  compuesto
    definición, 562, 585
    fórmula para, 565, 586
    lapsos de tiempo para el cómputo, 563, 585
  definición, 559, 584
  sencillo
    definición, 560, 584
    fórmula para, 560, 584
Intervalo de clase, 601, 625
Inverso aditivo, 150, 195

Lado
  de un ángulo, 714, 812
  de un polígono, 736
Línea paralela, propiedades de, 728
Litro, 464
Llaves, 2
Longitud
  equivalencias americanas/métricas, 470, 491
  equivalencias métricas/americanas, 470, 491
  factor de conversión de unidades para
    el sistema americano, 445
    el sistema métrico, 458, 488
  prefijos para las unidades métricas de, 456
  unidades americanas de, 444

Marca de graduación
  polígonos y, 737, 817
  triángulos y, 739
Marcación de conteo, 651
Masa
  definición, 461, 489
  equivalencias americanas/métricas, 471, 491
  equivalencias métricas/americanas, 471, 491
  prefijos para las unidades métricas de, 461
Máximo común divisor (mcd), 96
  Vea también Máximo factor común (mfc)
Máximo factor común (mfc)
  definición, 95, 125
  obtención utilizando factorización de primos, 96, 125
mcd. *Vea* Máximo común divisor (mcd)
mcd. *Vea* Mínimo común denominador (mcd)
mcm. *Vea* Mínimo común múltiplo (mcm)
Media
  definición, 107, 126, 627
  en una proporción, 430, 482
  o promedio aritmético
    definición, 107, 126, 367
    fórmula para, 609, 627
    obtención, 107, 126
  obtención, 107, 126, 609, 627
  ponderada
    definición, 611
    obtención, 612, 628
Mediana
  definición, 613
  obtención, 613, 628
Medición de la tendencia central, 609, 627
Metro, 456, 488
mfc. *Vea* Máximo factor común (mfc)
Mínimo común denominador (mcd)
  definición, 244, 302
  obtención, 248
Mínimo común múltiplo (mcm)
  de dos números naturales, 247
  definición
    de denominadores, 302
    de dos números naturales, 90, 91, 124
  obtención
    de denominadores, 302
    de fracciones, 247
    de números grandes, 92
    para listar múltiplos, 91, 125
    utilizando factorización de primos, 93, 125
Minuendo
  decimales y, 333
  definición, 29
Moda, 615, 628
Multiplicación
  de fracciones, 211
  de números de dígitos múltiples, 42
  de números naturales que terminan en cero, 41, 119
  frases algebraicas de la, 641
  indicaciones para
    en expresiones, 106
    palabras y frases clave, 48
  palabras y frases clave que indican, 119
  propiedad asociativa de la
    fórmula que representa, 639
    para enteros, 168
    para números naturales, 45, 119
  propiedad conmutativa de la
    fórmula que representa, 639
    para enteros, 168
    para números naturales, 44, 119
  reglas para los enteros, 167, 197
  símbolos utilizados para, 40, 118, 638, 696

Notación
  decimal, 316
  estándar. *Vea* Forma estándar
  expandida. *Vea* Forma expandida
  exponencial, 85
Numerador
  definición, 208, 296, 308
  del 0, 210, 297
  orden de las operaciones y, 102, 126, 183, 200
Número
  compuesto, 82, 123
  con signo
    definición, 132
    inversión del signo de, 158
  forma de factorización de primos de, 83
  graficación, 5
  mixto. *Vea* Número mixto
  múltiplos de, 89, 124
  natural. *Vea* Número natural
  negativo, 132, 133, 192
  obtención del 1 por ciento de un, 552, 582
  obtención del 10 por ciento de un, 552, 582
  obtención del 15 por ciento de un, 555, 583
  obtención del 2 por ciento de un, 552
  obtención del 25 por ciento de un, 554, 583
  obtención del 5 por ciento de un, 554, 583
  obtención del 50 por ciento de un, 554, 583
  obtención del porcentaje de en múltiplos de 10, 553, 582
  obtención del porcentaje de en múltiplos de 100, 556, 583
  opuesto
    lectura del símbolo utilizado para, 138, 193
    propiedad de adición de, 150, 195
    suma de pares de, 151
  perfecto, 89
  positivo, 132, 133, 192
  primo, 82, 123
  racional
    como subconjunto de los números reales, 376
    decimales y, 376
    fracción como, 211
  real
    fracciones y, 376
    opuesto de una propiedad de la suma, 652

Número mixto
adición
acarreo y, 275, 307
como fracciones impropias, 271, 306
en forma vertical, 307
en vertical desde, 273
partes de, 272
simplificación de respuestas fraccionales de, 275
como una región sombreada, 257, 304
conversión a partir de una fracción impropia, 260, 304
definición, 257, 304
división, 261, 305
escritura como fracción impropia, 259, 304
escritura en forma decimal, 374, 404
fracción impropia y, 304
graficación en una recta numérica, 260, 304
multiplicación, 261, 305
sustracción
acarreo negativo y, 276, 307
como fracciones impropias, 306
en forma vertical, 275, 307
Número natural
definición, 2, 113
división, 54, 120
en notación decimal, 316
escritura
en forma estándar, 2, 113
en forma expandida, 4, 113
en palabras, 3, 113
factorización, 80, 123
forma estándar de un, 2, 113
gráfica de barras y, 9, 114
gráficas de rectas y, 9, 114
impar, 81, 123
lectura, 3, 113
multiplicación, 40, 118
palabras, frases y conceptos matemáticos clave para, 69
par, 81, 123
redondeo
definición, 6
proceso para el, 7, 114
resta, 29, 117
símbolos de desigualdad y, 5, 113
suma, 15, 115
tablas y, 8, 114
usos para, 208
Números proporcionales, 431, 483

Operación inversa, 33, 55
Origen de una recta numérica, 5

Paralelogramo
características de, como un rectángulo, 769, 824
definición, 767, 824
obtención del área de un, 781, 826
Paréntesis como agrupación de símbolos, 115
Pérdida neta, 188
Perímetro
definición, 22, 777, 826
obtención, 116
unidades del, 827
Periodo en números naturales, 2, 113
Peso
definición, 462
equivalencias americanas/métricas, 471, 491
equivalencias métricas/americanas, 471, 491
factor de conversión de unidades para el, 447
unidades americanas del, 447
Pictografía, lectura, 597, 622
Pirámide, hallazgo del volumen de una, 802, 831
Pitágoras, 747
Plano, 712
Polígono
Vea también tipos específicos
área de
fórmulas para la obtención del, 781, 826
obtención, 780, 826
obtención para formas irregulares, 784, 827
obtención utilizando el álgebra, 827
obtención utilizando la resta, 785, 828
clasificación, 736, 817
de frecuencia, 602, 625
definición, 736, 817
diagonal del, 768, 824
obtención del número de lados del, 771, 825
perímetro del
definición, 777, 826
fórmulas para el obtención del, 826
regular, 736, 817
suma de los ángulos del, 772, 825
Porcentaje
aplicaciones del, 535
aproximación con, 553, 583
como fracción equivalente de números naturales, 502, 503, 571
de disminución
definición, 542, 580
método para la resolución, 542, 580
obtención, 539
de incremento
definición, 542, 580
método para la resolución, 542, 580
obtención 539
definición, 500, 570
en enunciados de porcentaje, 515
escritura
como un decimal, 504, 572
como una fracción, 501, 571
gráfica circular y, 527, 576
gráficas circulares y, 527, 576
mayor al 100%, 504, 571
menor al 1%, 506, 571
número mixto como decimal, 505, 572
obtención de múltiplos del 10, 553, 582
obtención de múltiplos del 100, 556, 583
obtención del 1, 552, 582
obtención del 2, 552
obtención del 5, 554, 583
obtención del 10, 553, 582
obtención del 15, 555, 583
obtención del 25, 554, 583
obtención del 50, 554, 583
Potencia
del 2, 85
del 10, 347
de un producto
definición, 692
fórmula que representa la, 693, 705
de una potencia, 691
Precio
al por menor, 337
de venta, fórmula para el, 544, 581
unitario, 422, 481
Prefijo métrico, 456, 488
Principal, 559
Prisma, obtención del volumen de un, 802, 831
Problema de porcentajes
rescritura de los hechos de, 526, 576
tipos de, 513
Producto
definición, 40
cruz
definición, 430, 482
propiedad del, 430
parcial, 44
regla de las potencias para el, 692, 705
Promedio
de calificaciones (PC)
obtención, 612, 628
definición, 609
obtención, 609
Propiedad asociativa
de la adición
para enteros, 149, 195
para números naturales, 18, 19, 115
representación en fórmula, 638, 696
de la multiplicación
para enteros, 168
para números naturales, 45, 119
representación en fórmula, 639
Propiedad conmutativa
de la adición
para enteros, 149, 195
para números naturales, 18, 115
representación en fórmula, 638, 696
de la multiplicación
para enteros, 168
para números naturales, 44, 119
representación en fórmula, 639
Propiedad de la adición
de igualdad, 659, 700
de opuestos, 150, 195
del cero, 19, 150, 195, 639
Propiedad de la multiplicación
de igualdad, 662, 700
del 0
fórmula que representa, 639
para enteros, 168
para números naturales, 45, 119
del 1
fórmula que representa, 639
para enteros, 168
para fracciones, 211
para números naturales, 45, 119
Propiedad distributiva
definición, 649
resta y, 650

simplificación de expresiones con, 699
Propiedad fundamental de las fracciones, 212
Propiedades de medios-extremos, 430
Proporción
forma decimal y, 438
definición, 428, 482, 758
falsa, 429, 482
resolución, 433, 483
verdadera, 429, 482
Proporción porcentual
definición, 520
escritura, 520, 575
fórmula para, 521, 575
obtención de cantidades con, 522, 575, 577
obtención de la base con, 525, 575
obtención de porcentajes con, 523, 575
Punto, 712
decimal, 316
extremo, 713
medio, 713, 812

Radicando, 386
cuadrado perfecto, 387, 406
Radio, 792, 829
Raíz cuadrada
aproximada, 390, 407
de decimales, 388, 406
de fracciones, 388, 406
de un cuadrado perfecto, 386
definición, 386, 406
negativa, 387, 406
Rayo, 713, 812
Razón
cantidad a base, 520
comparación de dos cantidades, 418, 480
conversión de unidades para, 418
de números naturales, 417
definición, 414, 479
escritura
como una fracción, 414, 479
en la forma más simple, 415, 480
en términos mínimos, 480
igual, 415
parte a todo, 520
porcentual, 520
simplificación, 417, 480
usos para, 414, 479
Recíproco
definición, 233, 300
obtención, de una fracción, 233, 300
Recta
coplanar, 725, 815
definición, 712
numérica
decimales y fracciones en, 378, 405
enteros en, 133
números naturales en, 5, 113
números negativos en, 133, 192
oblicua, 725
paralela, 725, 726, 815
perpendicular, 726, 815
Rectángulo
ancho, 22
área de un, 48, 119
definición, 22, 767, 768, 824
dimensiones, 22
longitud, 22
obtención del área de un, 781, 826
obtención del perímetro de un, 776, 826
propiedades de, 768, 824
Redondeo
a la alta, 6
a la baja, 6
por la izquierda
multiplicación y, 46, 119
porcentajes y cantidad de, 552
resta y, 33, 117
suma y, 20, 116
Regla
del opuesto, opuesto de, 137, 193
del orden de las operaciones
decimales y, 350, 365, 403
fracciones y, 284, 308
operaciones múltiples y, 183, 200
para evaluar expresiones, 102, 126
raíces cuadradas y, 389
explicación de, 443, 485
métrica, 457, 488
Residuo, 59
Resolución de problemas
estrategia para la, 68, 122, 675, 702
obtención de dos incógnitas, 680, 703
Resta
acarreo negativo y, 30, 117
comprobación por adición, 33, 333
frases algebraicas de la, 641
lectura del símbolo utilizado para la, 138, 193
palabras y frases clave que indican, 34, 118
propiedad de igualdad de la, 661, 700
reagrupación para la, 30
regla para los enteros, 157, 196
repetida, 54
Rombo, 767, 824

Sector, en gráficas circulares, 598, 623
Segmento de recta
congruencia de, 713, 812
definición, 713, 812
Semicírculo, 793, 829
Signo
negativo, 132
positivo, 132
Símbolo
de agrupación
definición, 104, 184
palabras y frases clave que indican, 105
par más externo, 106
par más interno, 106
de desigualdad
definición, 6, 113
usos para, 5
de la adición, 16
de la resta, 29
del radical, 386, 406
negativo, 138, 193
Sistema de medición americano, 443, 485
Sistema de medición inglés, 443, 485
Sistema de numeración decimal, 316, 395
Sólido rectangular, obtención del volumen de un, 802, 831
Subconjunto, 133
Subíndice, 717
Suma
cálculo con redondeo por la izquierda, 20, 116
de decimales y, 331
definición, 16
opuesto de la, 652
Sustraendo
decimales y, 333
definición, 29

Tabla
ejemplo de una, 594
lectura, 595, 621
Tasa
de descuento, 544
de interés, 559
definición, 419, 481
escritura
como tasa unitaria, 421, 481
como una fracción, 420, 481
unitaria, 420, 481
Teorema, 747
de Pitágoras
definición, 747, 820
explicación del, 750, 821
raíces cuadradas y, 748, 820
Terminación del decimal, 373, 404
Término
comparado con factor, 641, 697
constante, 640, 697
definición, 640, 697
diferente y semejante, 652
en una proporción, 430, 482
semejantes y diferente, 652
Términos
diferentes, 652
semejantes
combinación, 653, 654, 699
definición, 652, 699
Tiempo
factor de conversión de unidades para el, 450
interés y, 559, 561, 585
unidades americanas de, 450
Total, en la suma, 16
Transportador, 715, 812
Transversal
definición, 726, 815
dos en algunas figuras geométricas, 729
Trapezoide
definición, 767, 769, 824, 825
isósceles, 770, 825
obtención del área de un, 781, 826
Triángulo
Vea también tipos específicos
altitud de un, 781
ángulos de un, 739, 818
definición, 757, 822
obtención de las longitudes con, 760
obtención de mediciones desconocidas con el álgebra, 739, 818
obtención del área de un, 227, 299, 781, 826
obtención del perímetro de un, 826
propiedad de, 758, 826
puntos correspondientes de un, 822
reglas para, 758

semejante
teorema de semejanza AAA para, 759, 822
uso de triángulos semejantes, 760
Triángulo agudo, 738, 818
Triángulo congruente
definición, 754, 822
partes correspondientes de un, 754, 822
Propiedad ALA de un, 756, 822
propiedades de
LAL, 755, 822
LLA, 756
LLL, 755, 822
propiedades de congruencia de un, 755, 822
Triángulo equiángulo, 737
Triángulo equilátero, 737
Triángulo escaleno, 737
Triángulo isósceles
definición, 737
explicación del teorema para el, 739
partes del, 738, 818
propiedades de, 818
teorema para, 737
Triángulo obtuso, 738, 818
Triángulo rectángulo, 738, 747, 818

Unidad (educativa), 628
Unidad cúbica, 801, 831
Unidades americanas
de capacidad, 449, 486
de longitud, 444, 485
de peso, 447, 485
de tiempo, 450, 486
Unidades métricas
de capacidad
definición, 464, 489
prefijos para, 464
de longitud
prefijos para, 456
tabla de conversiones para, 459, 460
de masa
definición, 462, 489
prefijos para, 461
de tiempo, 450, 486
Unidades métricas de medición, 456
Uno
como denominador, 210, 297
forma del, 210, 297
propiedad de multiplicación del
fórmula que representa, 639
para enteros, 168
para fracciones, 211

Valor
absoluto, 136, 137, 193
intervalo de, 160, 196
modal, 615
posicional
en números naturales, 2, 113
gráfica, 316, 371
gráfica para, 2, 113
identificación, 316
Variable
definición, 49, 119, 287, 432, 638, 696
despejada, 433, 660
despeje, 516
en una ecuación, 658
Vértice
de un ángulo, 714, 812
de un polígono, 736, 817
Volumen, 801, 831

Unidades de medición

Unidades estadounidenses de longitud

12 pulgadas (pulg.) = 1 pies (pies)
3 pies = 1 yarda (yd)
36 pulg. = 1 yd
5,280 pies = 1 milla (mi)

Unidades métricas de longitud

1 kilómetro (km) = 1,000 metros (m)
1 hectómetro (hm) = 100 m
1 decámetro (dam) = 10 m
1 decímetro (dm) = $\frac{1}{10}$ m
1 centímetro (cm) = $\frac{1}{100}$ m
1 milímetro (mm) = $\frac{1}{1{,}000}$ m

Unidades equivalentes

1 pulg. = 2.54 cm
1 pie ≈ 0.30 m
1 yd ≈ 0.91 m
1 mi ≈ 1.61 km

1 cm ≈ 0.39 pulg.
1 m ≈ 3.28 pies
1 m ≈ 1.09 yd
1 km ≈ 0.62 mi

Unidades estadounidenses de peso

16 onzas (oz) = 1 libra (lb)
2,000 lb = 1 tonelada (ton)

Unidades métricas de masa

1 kilogramo (kg) = 1,000 gramos (g)
1 hectogramo (hg) = 100 g
1 decagramo (dag) = 10 g
1 decigramo (dg) = $\frac{1}{10}$ g
1 centigramo (cg) = $\frac{1}{100}$ g
1 miligramo (mg) = $\frac{1}{1{,}000}$ g

Pesos y masas equivalentes

1 oz ≈ 28.35 g
1 lb ≈ 0.45 kg

1 g ≈ 0.035 oz
1 kg ≈ 2.20 lb

Unidades estadounidenses de capacidad

1 taza (c) = 8 onzas líquidas (oz lq)
1 cuarto de galón (qt) = 2 pintas (pt)
1 pt = 2 tazas (c)
1 galón (gal) = 4 quartos (qt)

Unidades métricas de capacidad

1 kilolitro (kL) = 1,000 litros (L)
1 hectolitro (hL) = 100 L
1 decalitro (daL) = 10 L
1 decilitro (dL) = $\frac{1}{10}$ L
1 centilitro (cL) = $\frac{1}{100}$ L
1 mililitro (mL) = $\frac{1}{1{,}000}$ L

Capacidades equivalentes

1 oz lq ≈ 29.57 mL
1 pt ≈ 0.47 L
1 qt ≈ 0.95 L
1 gal ≈ 3.79 L

1 L ≈ 33.81 oz lq
1 L ≈ 2.11 pt
1 L ≈ 1.06 qt
1 L ≈ 0.264 gal

Fórmulas geométricas

Teorema de Pitágoras: Si la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es c y las longitudes de sus catetos son a y b, entonces $a^2 + b^2 = c^2$.

Fórmulas para el área

cuadrado	$A = s^2$
rectángulo	$A = lw$
paralelogramo	$A = bh$
triángulo	$A = \frac{1}{2}bh$
trapezoide	$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$

Circunferencia de un círculo: $C = \pi D$ o $C = 2\pi r$

$\pi = 3.14159\ldots$

Fórmulas para el volumen

cubo	$V = s^3$
sólido rectangular	$V = lwh$
prisma	$V = Bh$
esfera	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
cilindro	$V = \pi r^2 h$
cono	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
pirámide	$V = \frac{1}{3}Bh$

B representa el área de la base.

Ofreciendo un enfoque singularmente moderno y equilibrado ***MATEMÁTICAS Básicas, 4a. Ed.,*** de Tussy / Gustafson / Koenig, integra lo mejor de los ejercicios y prácticas tradicionales con los mejores elementos del movimiento de reforma. Para muchos estudiantes de matemáticas en desarrollo, estas son como un idioma extranjero. Tienen dificultades para traducir las palabras, sus significados, y cómo se aplican a la resolución de problemas. Haciendo hincapié en el "lenguaje de las matemáticas", el texto está totalmente integrado al proceso de aprendizaje y diseñado para ampliar las capacidades de razonamiento de los estudiantes, enseñándoles a leer, escribir y pensar matemáticamente. Combina métodos de enseñanza que incluyen vocabulario, práctica y pedagogía bien definida con énfasis en el razonamiento, el modelado, la comunicación y las habilidades tecnológicas.

Características:

Los estudiantes adquieren una comprensión más profunda de los conceptos de las matemáticas si saben por qué se toma un enfoque particular. Esta verdad instruccional fue la motivación para añadir una explicación "estrategia y por qué" a la solución de cada ejemplo práctico, proporcionando una respuesta concisa a la pregunta más importante, "¿Por qué?"

- Los problemas de práctica han sido fuertemente revisados para abordar todos los temas dentro de cada sección y para mantener una clara progresión de nivel. La sección de práctica se ha dividido en dos categorías, **Práctica guiada** e **Inténtelo**. La práctica guiada toma cada problema de práctica y lo mete directamente al ejemplo apropiado en la sección.
- El contexto de apertura de los capítulos incluye el nuevo **Carreras del campus**, características que destacan las vocaciones que requieren una variedad de habilidades matemáticas. Las perspectivas de empleo, los requisitos educativos, y los datos sobre ingresos anuales dan a los estudiantes información práctica para tomar decisiones de carrera. Los problemas que se presentan en las aperturas están atados a los ejercicios en los conjuntos de estudio.
- *MATEMÁTICAS Básicas, 4a. Ed.*, comienza con un módulo de **Taller de habilidades de estudio**. Este módulo contiene una página de discusión de las técnicas de estudio de los temas seguida de una sección llamada **Ahora intente esto** que ofrece a los estudiantes las habilidades, tareas, acciones concretas y proyectos que tendrán un impacto en sus hábitos de estudio durante el curso. Además, las **Listas de comprobación de las habilidades de estudio**, que aparecen antes de la revisión y resumen del capítulo, advierten a los estudiantes de los errores comunes, dándoles tiempo para considerar estos riesgos antes de tomar su examen. Por otra parte, los repasos acumulativos son ahora una referencia cruzada a la sección de la que viene el problema, proporcionando una referencia fácil para los estudiantes.
- La liga de **Recursos del instructor** es un excelente recurso para los instructores experimentados y los nuevos en el curso. Estas interesantes guías didácticas cubren cada parte del texto principal, con sugerencias, ejemplos, actividades, hojas de trabajo, gastos generales, evaluaciones y soluciones. El kit también integra la filosofía de los autores, lo que ayuda a añadir el éxito de enseñar con este enfoque único.

CENGAGE Learning™

Visite nuestro sitio en http://latinoamerica.cengage.com

ISBN-13: 978-607481920-5
ISBN-10: 607481920-3

9 786074 819205